Е. Любенова П. Недевски К. Николов
Л. Николова В. Попов

Ръководство по математически анализ

Втора част

София • 1994

Ръководството е втора част на издаденото през 1991 г. *Ръководство по математически анализ* от същите автори. То съдържа задачи от диференциално и интегрално смятане на функции на няколко променливи, интеграли, зависещи от параметър, криволинейни и повърхнинни интеграли, функционални редове и др. Голяма част от задачите са решени, а за останалите са посочени упътвания и отговори.

Изданието е предназначено главно за студентите от Факултета по математика и информатика при Софийския университет „Св. Климент Охридски", но може да се използва и от студентите от математическите специалности на други висши учебни заведения, както и за самостоятелна работа.

ISBN 954-07-0040-X

Съдържание

Предговор

Втората част на *Ръководството по математически анализ* съдържа задачи от граници, непрекъснатост, частни производни, екстремуми и др. на функции на много променливи, двойни, тройни и многократни интеграли, интеграли, зависещи от параметър, криволинейни и повърхнинни интеграли, функционални редове и др. Съдържанието ѝ е съобразено с програмите на студентите от втори курс на всички специалности във Факултета по математика и информатика при Софийския университет „Св. Климент Охридски".

Част от задачите са съставяни в продължение на много години от всички членове на Катедрата по диференциално и интегрално смятане. Същевременно ръководството е отражение на традициите, създадени в Сектора по реален и функционален анализ под ръководството на проф. Ярослав Тагамлицки, а по-късно под ръководството на проф. Станимир Троянски, като първият опит за систематизиране на учебния материал, разглеждан в упражненията по диференциално и интегрално смятане, бяха циклостилните записки от 1970 — 1972 г.

При излагането на съдържанието във всяка глава е даден без доказателства необходимият теоретичен материал. Допълнителни сведения могат да се намерят в учебниците *Диференциално и интегрално смятане*, II част, от проф. Я. Тагамлицки и *Математически анализ*, II част, от В. Илин, В. Садовничи и Бл. Сендов. По-голямата част от задачите са решени, а за останалите са дадени упътвания и отговори.

Изложението е подробно и сборникът е полезно помагало за всички студенти, които изучават математически анализ или желаят да задълбочат знанията си в тази област. Ръководството може да се използва и за самостоятелна работа.

Задачите са подредени с двойна номерация — на първо място е поставен номерът на параграфа към съответната глава, а на второ — номерът на задачата в този параграф.

Изложеният материал е подбран от целия авторски колектив, а отделните глави са написани, както следва: първа, втора и осма глава — от Л. Николова, трета и седма — от Е. Любенова, четвърта — от В. Попов, пета — от К. Николов и шеста — от П. Неделски.

Авторите изказват благодарност на рецензентите и на редактора, които допринесоха много за подобряването и окончателното оформяне на ръкописа.

Авторите

Глава 1

Редици и редове, чиито членове са функции

§ 1. Сходимост и равномерна сходимост

Нека е дадена редицата

$$f_1(x),\ f_2(x),\ \dots,\ f_n(x),\ \dots,$$

чиито членове са функции на една и съща променлива x, дефинирани в множеството E (такава редица наричаме още *функционална редица*). За всяка фиксирана точка x от E редицата $\{f_n(x)\}$ представлява една числова редица, която може да бъде сходяща или разходяща. Да разгледаме множеството M от тези x, за които $\{f_n(x)\}$ има крайна граница. Тази граница е определена напълно за всяка конкретна стойност на x, следователно тя също ще бъде функция на x, дефинирана в M:

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x).$$

Функцията $f(x)$ наричаме *гранична функция* за редицата $\{f_n(x)\}$, а множеството M — *област на сходимост*. С други думи, казваме, че $f(x)$ е гранична функция на редицата $\{f_n(x)\}$ в множеството M, ако за всяко $x \in M$ и за всяко положително число ε съществува някакво число $N = N(\varepsilon, x)$, такова че при $n > N$ да бъде изпълнено $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

Дефиниция 1. Казваме, че редицата $\{f_n(x)\}$ е *равномерно сходяща* в множеството M, ако за всяко $\varepsilon > 0$ може да се намери число $N = N(\varepsilon)$ (зависещо евентуално от ε, но не и от x), такова че при $n > N$ неравенството

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

да бъде изпълнено за всички $x \in M$ (едновременно).

В този случай пишем

$$f_n \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} f(x), \quad x \in M.$$

Нека да разгледаме ред, членовете на който са функции на една и съща променлива:

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_n(x) + \cdots$$

Такъв ред наричаме *функционален ред.*

Дефиниция 2. Казваме, че функционалният ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ е *сходящ* в множеството M и има сума $S(x)$ в това множество, ако редицата от парциалните му суми $S_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_n(x)$ е сходяща, като

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x) = S(x).$$

Дефиниция 3. Казваме, че функционалният ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ е *равномерно сходящ* в множеството M, ако редицата от парциалните му суми е равномерно сходяща в M.

Теорема 1. За да бъде функционалният ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ равномерно сходящ в множеството M, е необходимо и достатъчно за всяко $\varepsilon > 0$ да съществува число $N = N(\varepsilon)$, такова че неравенството

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x)\right| < \varepsilon$$

да бъде изпълнено за всяко $n \geqq N$, за всички естествени числа p и всички $x \in M$ (критерий на Коши).

Теорема 2. Нека в множеството M членовете на функционалния ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ удовлетворяват неравенствата

$$|u_n(x)| \leqq c_n \quad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Ако числовият ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ е сходящ, то редът $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ е равномерно сходящ в множеството M (критерий на Вайерщрас).

Теорема 3. Нека редът $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ е равномерно сходящ в множеството M, а функциите $v_n(x)$ (за всяко фиксирано $x \in M$) образуват монотонна редица и са равномерно ограничени в множеството M, т. е. съществува константа k, такава че $|v_n(x)| \leqq k$ за всяко $x \in M$ и всяко n. Тогава редът

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) v_n(x)$$

е равномерно сходящ в M (критерий на Абел).

Теорема 4. Нека парциалните суми на реда $\sum u_n(x)$ са равномерно ограничени в множеството M, т. е. съществува константа C, така че

$$\left|\sum_{k=1}^{n} u_k(x)\right| \leqq C$$

за всяко $x \in M$ и всяко n, и нека функциите $v_n(x)$ образуват монотонна редица при всяко фиксирано x от M, като редицата $\{v_n(x)\}$ клони към нула равномерно в множеството M. Тогава редът $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x) v_n(x)$ е равномерно сходящ в M (критерий на Дирихле).

1.1. Намерете областта на сходимост на следните редици от функции и пресметнете границите им:

а) $f_n(x) = (\sin x)^n$; б) $f_n(x) = \dfrac{nx}{1 + n^2x^2}$;

в) $f_n(x) = n\left(\sqrt{x^2 + \dfrac{1}{n}} - |x|\right)$; г) $f_n(x) = n^2 \sin x \cos^{2n} x$;

д) $f_n(x) = n^2 \sin \dfrac{1}{n^2 x}$; е) $f_n(x) = (x-1)\operatorname{arctg} x^n$, $x \in (0, \infty)$;

ж) $f_n(x) = \dfrac{2nx}{1 + n^2x^2}$.

Решение. а) Тъй като $|\sin x| < 1$ за $x \neq k\pi + \dfrac{\pi}{2}$, то $f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ при $x \neq k\pi + \dfrac{\pi}{2}$. При $x = 2k\pi + \dfrac{\pi}{2}$ получаваме $f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$. Областта на сходимост е $\mathbb{R} \setminus \{(2k+1)\pi + \dfrac{\pi}{2}\}$, тъй като в точките $(2k+1)\pi + \dfrac{\pi}{2}$ се получава редицата $\{(-1)^n\}$. Граничната функция приема стойност 1 в точките $x = 2k\pi + \dfrac{\pi}{2}$ и 0 в останалите точки от областта на сходимост, т. е. при $x \neq k\pi + \dfrac{\pi}{2}$;

б) Тук областта на сходимост е $\mathbb{R}$, а граничната функция е тъждествено равна на нула. Наистина при фиксирани $x \neq 0$ и $\varepsilon > 0$ е достатъчно да се вземе $N = \dfrac{1}{|x|\varepsilon}$, за да бъде изпълнено $|f_n(x)| < \dfrac{1}{n|x|} < \varepsilon$ при $n > N$. При $x = 0$ имаме $f_n(0) = 0$;

в) При всяко $x \neq 0$:

$$f_n(x) = n\frac{x^2 + \frac{1}{n} - x^2}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} + |x|} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{2|x|}.$$

Ако $x = 0$, то $f_n(x) = n\sqrt{\frac{1}{n}} = \sqrt{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$. Следователно областта на сходимост е $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, а граничната функция е $f(x) = \frac{1}{2|x|}$;

г) Ако $x = k\pi$, то $f_n(x) = 0$ и следователно граничната функция $f(x)$ приема стойност 0 в точките $x = k\pi$. За $x \neq k\pi$ имаме $|\cos x| < 1$ и тогава за достатъчно големи n ще бъдат верни неравенствата

$$|f_n(x)| \leqq n^2 \cos^{2n} x \leqq |\cos x|^n,$$

тъй като $n^2 \leqq \left[(\cos x)^{-1}\right]^n$, което показва, че $f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Окончателно областта на сходимост е $\mathbb{R}$, а граничната функция е тъждествено равна на нула.

Ще припомним, че редът $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ се нарича *абсолютно сходящ*, ако е сходящ редът $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |u_n(x)|$.

В зад. 4.18 — 4.20, I ч., гл.6, намерихме областите на сходимост и на абсолютна сходимост на следните редове:

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^n, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \ln^x n}.$$

1.2. Намерете областите на сходимост и абсолютна сходимост на следните редове:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \binom{x}{n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^3(x+4)^3\dots(x+2n)^3 x^n}{[(2n+1)!!]^2 n!}$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1+x^{2n}}$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(2x+2)(3x+4)\dots[(n+1)x+2n]}{n^n}$;

д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{\sqrt[3]{n}}$; е) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(1+x)(2+x)\dots(n+x)}{n!n^2}$.

Решение. а) При $x = k$ $(k = 0, 1, 2, \dots)$ редът

$$\sum_{n=1}^{\infty} \binom{x}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x(x-1)\dots(x-n+1)}{n!}$$

е сходящ, тъй като представлява крайна сума. Сега нека $x \neq k$. Тогава от известно място нататък $x - n + 1 < 0$ и редът $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \binom{x}{n}$ може да се разглежда като ред с алтернативно сменящи се знаци. Образуваме частното

$$\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| = \left|\frac{x-n}{n+1}\right| = \frac{n-x}{n+1} \quad (\text{за } n > x).$$

Тъй като $\frac{n-x}{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$, то в случая $\frac{n-x}{n+1} \geqq 1$, т. е. $x \leqq -1$. Критерият на Даламбер (I ч., гл. 8.) е приложим и ни дава разходимост на реда. Нека сега $x > -1$. Ще използваме критерия на Раабе — Дюамел, цитиран също в I ч., гл. 8:

$$n\left(\frac{|u_n(x)|}{|u_{n+1}(x)|} - 1\right) = \frac{n+nx}{n-x} \xrightarrow[n\to\infty]{} x+1.$$

При $x + 1 > 1$, т. е. при $x > 0$, редът е абсолютно сходящ. При $0 < x + 1 \leqq 1$, т. е. при $-1 < x \leqq 0$, редът е условно сходящ съгласно критерия на Лайбниц, тъй като по лемата (зад. 4.8, I ч., гл.6) следва, че $|u_n(x)|$ монотонно намалява и клони към нула. Окончателно областта на сходимост на този ред е $x > -1$, тъй като при $x > 0$ той е абсолютно сходящ;

б) Нека $x \neq -2n, n = 1, 2, \dots$ Търсим границата при $n \to \infty$ на частното

$$\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| = \frac{|x+2n+2|^3|x|}{(2n+3)^2(n+1)}.$$

Тя е равна на $2|x|$ и съгласно критерия на Даламбер при $|x| < \frac{1}{2}$ редът е абсолютно сходящ, а при $|x| > \frac{1}{2}$ — разходящ. При $|x| = \frac{1}{2}$ прилагаме критерия на Раабе — Дюамел. Тук

$$\left|\frac{u_{n+1}\left(\frac{1}{2}\right)}{u_n\left(\frac{1}{2}\right)}\right| = \frac{(4n+5)^3}{16(2n+3)^2(n+1)}.$$

Тогава

$$n\left(\frac{\left|u_n\left(\frac{1}{2}\right)\right|}{\left|u_{n+1}\left(\frac{1}{2}\right)\right|} - 1\right) = n\frac{16n^2+36n+19}{(4n+5)^3} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{4}$$

и следователно при $x = \frac{1}{2}$ редът е разходящ. За $x = -\frac{1}{2}$ той е с алтернативно сменящи се знаци, като

$$n\left(\frac{\left|u_n\left(-\frac{1}{2}\right)\right|}{\left|u_{n+1}\left(-\frac{1}{2}\right)\right|} - 1\right) = n\frac{16.7n^2 + 12.19n + 13.9}{(4n+3)^3} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{7}{4} > 1,$$

т. е. абсолютно сходящ. Получихме, че областта на сходимост на този ред се състои от интервала $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ и точките от вида $x = -2n$, $n \in \mathbb{N}$, в които общият член от някакво място нататък приема стойност нула. Областта на сходимост на реда съвпада с неговата област на абсолютна сходимост;

г) При $(n+1)x + 2n = 0$, т. е. $x = -2 + \frac{2}{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$, редът очевидно е сходящ. Нека $x \neq -2 + \frac{2}{n+1}$. Тогава

$$\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \cdot \frac{|nx + 2n + 2x + 2|}{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{|x+2|}{e}.$$

Следователно при $|x+2| < e$ редът е абсолютно сходящ, а при $|x+2| > e$ — разходящ съгласно критерия на Даламбер. Да разгледаме случая $|x+2| = e$. Нека $x + 2 = e$, т. е. $x = e - 2$. Тогава

$$\left|\frac{u_{n+1}(e-2)}{u_n(e-2)}\right| = \frac{e}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \cdot \frac{n+2-\frac{2}{e}}{n+1} \geqq 1,$$

защото редицата $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ е монотонно растяща и клони към e отдолу. Съгласно критерия на Даламбер редът е разходящ. Нека $x = e-2$. Тъй като $(n+1)x + 2n = -[e(n+1)+2]$, то получаваме алтернативния ред

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(2e+2)\ldots[e(n+1)+2]}{n^n}.$$

Той е разходящ съгласно критерия на Даламбер, защото

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \frac{n+2+\frac{2}{e}}{n+1} \cdot \frac{e}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \geqq 1.$$

Следователно областта на сходимост на този ред е интервалът $|x+2| < e$, обединен с множеството $\{x = -2 + \frac{2}{n+1}, n \in \mathbb{N}\}$, и областта на сходимост съвпада с областта на абсолютна сходимост на реда.

1.3. Проверете дали редицата $\{f_n(x)\}$ е равномерно сходяща в съответния интервал:

а) $f_n(x) = x^n$ в $[0, a]$, $a < 1$; б) $f_n(x) = e^{-(x-n)^2}$ в $[-1, 1]$;

в) $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$ в $[0, 1]$; г) $f_n(x) = \frac{x}{1+n^2x^2}$ в $[0, 1]$;

д) $f_n(x) = \frac{1}{1+nx}$ в $[0, 1]$; е) $f_n(x) = 2n^2x^2e^{-n^2x^2}$ в $[0, 1]$.

Р е ш е н и е. а) Граничната функция $f(x)$ е тъждествено равна на нула, тъй като $0 \leqq x < 1$. Нека ε е произволно положително число. От $a^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ следва, че може да се намери такова число $N = N(\varepsilon)$, че при $n > N$ да бъде изпълнено $a^n < \varepsilon$. Тогава при $n > N$ имаме $|x^n - 0| \leqq a^n < \varepsilon$ за всички $x \in [0, a]$ едновременно, т. е. редицата $\{f_n(x)\}$ е равномерно сходяща в $[0, a]$;

б) Очевидно граничната функция е тъждествено равна на нула в целия интервал $[-1, 1]$. Ако $-1 \leqq x \leqq 1$, то $n - 1 \leqq n - x \leqq n + 1$ и $\left|e^{-(x-n)^2} - 0\right| = e^{-(n-x)^2} \leqq e^{-(n-1)^2}$, което може да бъде направено по-малко от произволно, предварително зададено $\varepsilon > 0$ при достатъчно големи N (при това независимо от x). Следователно редицата $\{f_n(x)\}$ е равномерно сходяща в $[-1, 1]$;

в) Задаваме $\varepsilon > 0$. Тъй като $\frac{nx}{1+n^2x^2} < \frac{1}{nx}$, а $\frac{1}{nx} < \varepsilon$ при $n > \frac{1}{\varepsilon x}$, то граничната функция е тъждествено равна на нула. Но $f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2}$ и при $\varepsilon < \frac{1}{2}$ неравенството $|f_n(x) - 0| < \varepsilon$ не може да бъде изпълнено едновременно за всички $x \in [0, 1]$, колкото и голямо n да вземем, т. е. не съществува число $N(\varepsilon)$, така че неравенството да бъде изпълнено за всички $n > N(\varepsilon)$ и всички $x \in [0,1]$.

1.4. Нека $f(x)$ е граничната функция на редицата $\{f_n(x)\}$ в множеството M. За да бъде сходимостта равномерна в множеството M, необходимо и достатъчно е

$$\lim_{n\to\infty}\big(\sup_{x\in M}|f_n(x)-f(x)|\big)=0.$$

Доказателство. *Необходимост.* Нека $f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x)$, $x \in M$. От дефиницията на равномерна сходимост следва, че за дадено $\varepsilon > 0$ може да се намери $N(\varepsilon)$ такова, че при всяко $n > N(\varepsilon)$ да бъде изпълнено неравенството $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ за всички $x \in M$. Оттук следва, че $\sup_{x\in M}|f_n(x)-f(x)| \leqq \varepsilon$, което дава

$$\lim_{n\to\infty}\big(\sup_{x\in M}|f_n(x)-f(x)|\big)=0.$$

Достатъчност. Нека $\lim_{n\to\infty}\big(\sup_{x\in M}|f_n(x)-f(x)|\big)=0$. По дадено $\varepsilon > 0$ намираме $N(\varepsilon)$ такова, че $\sup_{x\in M}|f_n(x)-f(x)| < \varepsilon$ при $n > N(\varepsilon)$. Това означава, че при $n > N(\varepsilon)$ неравенството $|f_n(x)-f(x)| < \varepsilon$ е изпълнено за всички $x \in M$, т. е. $f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x)$, $x \in M$.

1.5. Проверете дали редицата $\{f_n(x)\}$ е равномерно сходяща в съответния интервал:

а) $f_n(x) = (n+1)x^n(1-x)$ във всеки от интервалите $[0,1]$ и $[0,a]$, $0 < a < 1$;

б) $f_n(x) = x^n(1-x)$, $x \in [0,1]$;

в) $f_n(x) = \dfrac{\ln nx}{nx^2}$, $x \in [1,+\infty)$;

г) $f_n(x) = \sin\dfrac{x}{n^\alpha}$, $\alpha > 0$, $x \in (-\infty,+\infty)$;

д) $f_n(x) = \dfrac{(\operatorname{arctg} nx)}{\sqrt{n+x}}$, $x \in [0,+\infty)$;

е) $f_n(x) = \operatorname{arctg} nx$, $x \in (0,+\infty)$;

ж) $f_n(x) = x\operatorname{arctg} nx$, $x \in (0,+\infty)$.

Решение. а) Граничната функция е $f(x) \equiv 0$ за $x \in \mathbb{R}$. Да разгледаме интервала $[0,1]$. Ще използваме зад. 1.4. Търсим $\sup_{x\in[0,1]}|x^n(1-x)|$. Нека $y_n(x) = x^n(1-x)$. Тогава $y_n'(x) = nx^{n-1} - (n+1)x^n$. Максималната стойност на y_n се достига в точката $\dfrac{n}{(n+1)}$ и е равна на $\dfrac{1}{(n+1)}\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n$. Тогава

$$\sup_{x\in[0,1]}|f_n(x)-0| = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{e} \neq 0.$$

Следователно в интервала $[0,1]$ сходимостта не е равномерна. Нека сега разгледаме интервала $[0,a]$. Тъй като $y_n'(x) = (n+1)x^{n-1} \times \left(\dfrac{n}{n+1} - x\right)$, а $\dfrac{n}{n+1} > a > x$ при достатъчно големи n, то $y_n'(x) > 0$ за $x \in [0,a]$ (при такива n). Тогава максималната стойност на y_n е $y_n(a) = a^n(1-a)$ и

$$\sup_{x\in[0,a]}|f_n(x)-0| \leqq (n+1)a^n(1-a) \leqq (n+1)a^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Следователно сходимостта е равномерна в интервала $[0,a]$;

б) От решението на подусловие а) следва, че

$$\sup_{x\in[0,1]} x^n(1-x) = \frac{1}{n+1}\cdot\frac{1}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

т. е. $f_n(x)$ клони към $f(x) \equiv 0$ равномерно;

в) И тук граничната функция е тъждествено равна на нула. Нека $y_n(x) = \dfrac{\ln nx}{n^2}$, тогава $y_n'(x) = \dfrac{x(1-2\ln nx)}{x^4}$. При $n \geqq 2$ имаме $1 - 2\ln nx < 0$ за $x > 1$ и следователно $y_n(x)$ е намаляваща функция за $x \in [1,+\infty)$. Тогава

$$\sup_{x\in[1,+\infty)}\frac{\ln nx}{n^2} = \frac{1}{n}y_n(1) = \frac{\ln n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Следователно сходимостта на $f_n(x)$ към $f(x)$ е равномерна в $[1,+\infty)$.

Ще отбележим, че зад. 1.3 също може да се реши с помощта на зад. 1.4. В частност, ако разгледаме редицата $\{f_n(x)\} = \{x^n\}$ в затворения интервал $[0,1]$, ще получим, че сходимостта на $\{f_n(x)\}$ към граничната функция

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{за } 0 \leqq x < 1 \\ 1 & \text{за } x = 1 \end{cases}$$

не е равномерна. Наистина

$$\sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| = 1 \quad \text{и} \quad \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| \neq 0.$$

1.6. Изследвайте за равномерна сходимост следните редове:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^{n-1}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{x^2+n}$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n \sin\dfrac{1}{3^n x}$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin\frac{x^2}{n}}{x^2\sqrt{n+1}}$.

Р е ш е н и е. а) Този ред е сходящ в интервала $(-1,1)$ (геометрична прогресия). За да бъде равномерно сходящ, неговият остатък

$$r_n(x) = \frac{1}{1-x} - \frac{1-x^n}{1-x} = \frac{x^n}{1-x}$$

трябва да клони равномерно към нула. Нека $x \in [0,1)$. Тогава $r_n(x) \xrightarrow[x\to 1]{} \infty$ и $\sup\limits_{x\in[0,1)} r_n(x) > 1$ за всяко n, т. е. $\sup\limits_{x\in[0,1)} r_n(x) \underset{n\to\infty}{\not\longrightarrow} 0$. Следователно редът не е равномерно сходящ в интервала $[0,1)$. Тъй като $|r_n(x)| \xrightarrow[x\to -1]{} \dfrac{1}{2}$, то $\sup\limits_{x\in(-1,0]} |r_n(x)| \underset{n\to\infty}{\not\longrightarrow} 0$ и $r_n(x) \underset{n\to\infty}{\not\rightrightarrows} 0$ и в $(-1,0]$. Следователно сходимостта на реда не е равномерна и в $(-1,0]$;

б) Този ред удовлетворява условията на критерия на Лайбниц. Областта на неговата сходимост е $(-\infty,+\infty)$. Както е известно, за такива редове модулът на остатъка се мажорира от първия член на този остатък, т. е.

$$|r_n(x)| \leqq \frac{1}{x^2+n+1} \leqq \frac{1}{n+1}.$$

Тъй като тази оценка е валидна за всички $x \in (-\infty,+\infty)$, то $r_n(x)$ клони към нула равномерно, т. е. редът е равномерно сходящ в $(-\infty,+\infty)$.

1.7. Докажете, че редовете са равномерно сходящи в съответните интервали:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin x^n + 1}{n^{\frac{3}{2}} + x^{\frac{3}{2}}}$ в $[0,\infty)$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} e^{-\sqrt{2n(x^2+1)}}$ в $(-\infty,+\infty)$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{arc\,tg}\dfrac{x}{x^2+n^3}$ в $(-\infty,+\infty)$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^3\sin^2 nx}{2+n^3x^6}$ в $[0,+\infty)$;

д) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \ln\left(1 + \dfrac{\sin nx}{n\ln^3 n}\right)$ в $(-\infty,+\infty)$;

е) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \sin\dfrac{n^3 x}{n^2+1}$ в $(-\infty,+\infty)$, ако редът $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ е абсолютно сходящ;

ж) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\operatorname{arc\,tg} 2n^2x}{\sqrt[3]{n^7+n+x}}$ в $[0,+\infty)$.

Р е ш е н и е. а) Тъй като $|u_n(x)| \leqq \dfrac{2}{n^{3/2}}$, то редът е равномерно сходящ съгласно критерия на Вайерщрас;

б) Тук $|u_n(x)| \leqq e^{-\sqrt{2n}}$ за $x \in (-\infty,+\infty)$. Редът с общ член $e^{-\sqrt{2n}}$ е сходящ, тъй като при достатъчно големи n имаме неравенството $e^{-\sqrt{2n}} < \dfrac{1}{n^2}$. Функционалният ред е равномерно сходящ в $(-\infty,+\infty)$ съгласно критерия на Вайерщрас;

в) От неравенството $|\operatorname{arc\,tg} x| \leqq |x|$ получаваме най-напред $|u_n(x)| \leqq \dfrac{|x|}{x^2+n^3}$. Нека $f(x) = \dfrac{x}{x^2+n^3}$ за $x > 0$. Тогава

$$f'(x) = \frac{n^3 - x^2}{(x^2+n^3)^2} \quad \text{и} \quad f_{max} = f(\sqrt{n^3}) = \frac{1}{2n^{\frac{3}{2}}}.$$

Тъй като редът $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ се мажорира в $(-\infty,+\infty)$ от сходящия ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{2n^{\frac{3}{2}}}$, следователно той самият е равномерно сходящ в $(-\infty,+\infty)$;

2

д) Ясно е, че

$$|u_n(x)| \leqq \frac{|\sin nx|}{n \ln^3 n} \leqq \frac{1}{n \ln^3 n}.$$

Както видяхме в зад. 3.11, I ч., гл. 6, редът с общ член $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^p n}$ е сходящ при $p > 1$. Оттук следва, че редът е равномерно сходящ в $(-\infty, +\infty)$.

1.8. Докажете, че ако редът $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ е абсолютно сходящ, то редовете

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$$

са равномерно сходящи във всеки интервал.

Р е ш е н и е. В сила са неравенствата $|a_n \sin nx| \leqq |a_n|$ и $|a_n \cos nx| \leqq |a_n|$ и затова е достатъчно да се приложи критерият на Вайерщрас.

1.9. Докажете, че редът

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^2}{(1+x^2)^n}$$

е равномерно сходящ в $(-\infty, +\infty)$, а редът

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n}$$

не е равномерно сходящ в $(-\infty, +\infty)$.

Р е ш е н и е. При $x \neq 0$ първият ред удовлетворява условията от критерия на Лайбниц и следователно

$$|S_n(x) - S(x)| = |r_n(x)| \leqq \frac{x^2}{(1+x^2)^{n+1}}$$

$$= \frac{x^2}{1 + (n+1)x^2 + \dots + x^{2n+2}} \leqq \frac{x^2}{(n+1)x^2} = \frac{1}{n+1}.$$

Тъй като $r_n(x)$ клони равномерно към нула в $(-\infty, +\infty)$ при $n \to \infty$, то редът е равномерно сходящ. За втория ред имаме

$$r_n(0) = 0 \quad \text{и} \quad r_n(x) = \frac{1}{(1+x^2)^n}, \quad x \neq 0.$$

Ясно е, че $\sup\limits_{x \in (-\infty, +\infty)} r_n(x) = 1$, а това според зад. 1.4 означава, че редът не е равномерно сходящ в $(-\infty, +\infty)$.

Да си припомним, че редът

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{x^2 + n}$$

е равномерно сходящ в $(-\infty, +\infty)$ (зад. 1.6 б)). Редът от абсолютните стойности на членовете му обаче се оказва разходящ. Това е така, тъй като

$$\frac{\frac{1}{n^2+x^2}}{\frac{1}{n}} \xrightarrow[n \to \infty]{} 1,$$

а хармоничният ред е разходящ (тук използваме принципа за сравняване на редове с неотрицателни членове).

От друга страна, ако с критерия на Вайерщрас е доказана равномерната сходимост на реда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$, от това ще следват два факта: а) редът $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ е абсолютно сходящ; б) редът $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n(x)|$ е равномерно сходящ.

Горните два примера показват, че има случаи, когато $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ е равномерно сходящ, без от това да следва, че $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n(x)|$ е сходящ и при това равномерно. Подобни случаи явно не могат да бъдат обхванати от критерия на Вайерщрас. Нещо повече, възможно е $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n(x)|$ да бъде равномерно сходящ в някакво множество, но $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ да не се мажорира от сходящ числов ред. Например редът

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\lg(n+1)} x^n - \frac{1}{\lg(n+2)} x^{n+1} \right)$$

в интервала $[0,1]$ е ред с неотрицателни членове и от неравенството

$$|S(x) - S_n(x)| \leqq \frac{1}{\lg(n+2)}$$

следва, че той е абсолютно и равномерно сходящ. От друга страна,

$$\max_{x\in[0,1]}\left[\frac{1}{\lg(n+1)}x^n-\frac{1}{\lg(n+2)}x^{n+1}\right]$$

$$=\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\frac{\lg^n(n+2)}{\lg^n(n+1)}\cdot\frac{1}{(n+1)\lg(n+1)}>\frac{1}{e}\cdot\frac{1}{(n+1)\lg(n+1)}.$$

Следователно, ако горният ред може да бъде мажориран със сходящ числов ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n$, то и редът $\frac{1}{e}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\lg(n+1)}$ също може да се мажорира от $\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n$. Но $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\lg(n+1)}$ е разходящ, което може да се види например с интегралния критерий.

Всички тези примери показват, че критерият на Вайерщрас е едно достатъчно, но не необходимо условие за сходимост на редове, чиито членове са функции. Всеки равномерно сходящ в някакво множество M ред, обаче, може да бъде преобразуван чрез групиране в ред, към който е приложим критерият на Вайерщрас. Наистина да вземем един сходящ числов ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n$, $c_n>0$. В зависимост от c_1 намираме номер m_1, такъв че при $n>m_1$ за всички $x\in M$ да бъде изпълнено неравенството

$$|u_{m_1+1}(x)+u_{m_1+2}(x)+\cdots+u_n(x)|<c_1.$$

Аналогично за c_2 намираме номер $m_2>m_1$, така че при $n>m_2$ за всички $x\in M$ да бъде изпълнено неравенството

$$|u_{m_2+1}(x)+u_{m_2+2}(x)+\cdots+u_n(x)|<c_2$$

и т. н. Като групираме членовете на реда по следния начин:

$$[u_1(x)+u_2(x)+\cdots+u_{m_1}(x)]+[u_{m_1+1}(x)+u_{m_1+2}(x)+\cdots+u_{m_2}(x)]$$
$$+[u_{m_2+1}(x)+u_{m_2+2}(x)+\cdots+u_{m_3}(x)]+\cdots,$$

получаваме ред, чиито членове (започвайки от втория) за $x\in M$ не надвишават по стойност членовете на сходящия числов ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n$. Следователно критерият на Вайерщрас може да се приложи към новополучения ред.

1.10. Докажете, че всеки от редовете е равномерно сходящ в съответния интервал:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^n(1-x)\sin x\sin nx$ в $[0,1]$;

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n}{\sqrt{n+x^2}}$ в $(-\infty,+\infty)$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx\sin x}{\sqrt{n+x}}$ в $[0,\infty)$;

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$ в $[\varepsilon,2\pi-\varepsilon]$, $\varepsilon>0$.

(Докажете, че този ред не е равномерно сходящ в интервала $[0,2\pi]$).

Решение. а) Ще приложим критерия на Дирихле. Парциалните суми

$$\sum_{n=1}^{k}\sin x\sin nx=2\cos\frac{x}{2}\sin\frac{k+1}{2}x\sin\frac{kx}{2}$$

очевидно са равномерно ограничени с числото 2. От зад. 1.5 б) знаем, че функциите $v_n(x)=x^n(1-x)$ клонят към нула равномерно по $x\in[0,1]$. Очевидно $v_n(x)\geqq v_{n+1}(x)$ за всяко $x\in[0,1]$. С помощта на критерия на Дирихле получаваме, че редът е равномерно сходящ в $[0,1]$;

б) Както е известно, парциалните суми на реда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\cos n$ са равномерно ограничени. Нека $v_n(x)=\frac{1}{\sqrt{n+x^2}}$. Тогава $v_n(x)\geqq v_{n+1}(x)$. За да приложим критерия на Дирихле, остава да проверим, че $v_n(x)\underset{n\to\infty}{\rightrightarrows}0$, $x\in(-\infty,+\infty)$. Това е така, тъй като $v_n(x)\leqq\frac{1}{\sqrt{n}}$ за всяко $x\in(-\infty,+\infty)$. Следователно редът е равномерно сходящ в $(-\infty,+\infty)$.

1.11. С помощта на критерия на Абел докажете равномерната сходимост на редовете:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n(1+x^n)}$ в $(0,1]$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^x}$ в $[x_0,\infty)$ при $x_0>\lambda$,

където λ е абсцисата на сходимост на този ред на Дирихле (т. е. λ е такава точка, че при $x>\lambda$ редът е сходящ, а при $x<\lambda$ — разходящ; зад. 4.21, I ч., гл. 6).

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\sqrt{n}}{\sqrt{n+x}\ln\ln(2\sqrt{n}+1)}$ в $[0,\infty)$.

Решение. а) Редът $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ е сходящ съгласно критерия на Лайбниц, а функциите

$$v_n(x) = \frac{x^n}{1+x^n}$$

са равномерно ограничени с числото 1 и при всяко фиксирано $x \in (0,1]$ образуват монотонна редица. Следователно напият ред е сходящ съгласно критерия на Абел;

б) Нека редицата $\{a_n\}$ е такава, че редът на Дирихле $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^x}$ не е разходящ навсякъде, т. е. съществува гранична точка на сходимост или още абсциса на сходимост $\lambda < \infty$. С други думи, за всяко $x_0 > \lambda$ редът е сходящ. Можем да кажем, че $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^{x_0}}$ е равномерно сходящ в интервала $[x_0, \infty)$, а функциите $v_n(x) = \frac{1}{n^{x-x_0}}$ при всяко фиксирано x ($x \geqq x_0$) монотонно намаляват и са ограничени по модул с 1. По теоремата на Абел редът $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^x}$ е равномерно сходящ в $[x_0, \infty)$.

1.12. Да се изследва за равномерна сходимост редът

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}x^n}{1+x+\cdots+x^{2n-1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(1-x)x^n}{1-x^{2n}}, \text{ ако } x \in (0,1).$$

Решение. Тук не можем да приложим критерия на Абел. Редът $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}$ не е сходящ, но неговите парциални суми са равномерно ограничени по $x \in (0,1)$ с числото 2. Нека

$$v_n(x) = \frac{x^n}{1+x+\cdots+x^{2n-1}}.$$

Тогава

$$v_n(x) < \frac{x^n}{1+x+\cdots+x^{n-1}} < \frac{x^n}{nx^n} = \frac{1}{n},$$

т. е. $v_n(x)$ клони към нула равномерно в интервала $(0,1)$. Тъй като $v_n(x) \geqq v_{n+1}(x)$ при всяко x, то съгласно критерия на Дирихле редът е сходящ равномерно в $(0,1)$.

§ 2. Редици и редове от непрекъснати функции. Диференциране и интегриране на функционални редици и редове

Теорема 1. Ако редицата от непрекъснати функции $\{f_n(x)\}$ е равномерно сходяща в $[a,b]$ и клони към $f(x)$, то $f(x)$ е непрекъсната в $[a,b]$.

Теорема 1′. Ако всички членове на реда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ са непрекъснати функции в интервала $[a,b]$ и редът е равномерно сходящ, то сумата му $S(x)$ е непрекъсната функция.

Теорема 2. Нека редицата от непрекъснати функции $\{f_n(x)\}$ е равномерно сходяща в $[a,b]$ и клони към $f(x)$. Тогава тази редица може да бъде почленно интегрирана, т. е. границата

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx$$

съществува и е равна на $\int\limits_a^b f(x)\,dx$.

Теорема 2′. Ако членовете на реда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ са непрекъснати функции, а той е равномерно сходящ в $[a,b]$ и има сума $S(x)$, то той може да бъде почленно интегриран, т. е. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \int\limits_a^b u_n(x)\,dx$ е сходящ и неговата сума е равна на $\int\limits_a^b S(x)\,dx$.

Теорема 3. Ако редицата $\{f_n(x)\}$ от диференцуеми в $[a,b]$ функции е сходяща поне в една точка $x_0 \in [a,b]$, а редицата $\{f_n'(x)\}$ е равномерно сходяща в $[a,b]$, то редицата $\{f_n(x)\}$ е равномерно сходяща в $[a,b]$, клони към някаква гранична функция $f(x)$ и $f'(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n'(x)$ за $x \in [a,b]$.

Теорема 3′. Нека $u_n(x)$ са непрекъснато диференцуеми функции в $[a,b]$ и редът $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$ е равномерно сходящ в $[a,b]$. Ако редът $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ е сходящ поне в една точка $x_0 \in [a,b]$, то той е равномерно сходящ в $[a,b]$, неговата сума $S(x)$ е непрекъснато диференцуема и производната ѝ е равна на $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$, т. е. редът може да бъде диференциран почленно.

Ще отбележим, че съгласно теорема 3 не необходимо $u_n(x)$ да са непрекъснато диференцуеми, а само да съществуват $u_n'(x)$, като в крайните точки на $[a,b]$ съществуват едностранни производни.

2.1. Докажете, че

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{x^2+\sqrt{n}}$$

е непрекъсната функция в $(-\infty,+\infty)$.

Р е ш е н и е. Тъй като $u_n(x)=\dfrac{(-1)^{n-1}}{x^2+\sqrt{n}}$ са непрекъснати функции при всяко n, достатъчно е да докажем, че редът е равномерно сходящ в $(-\infty,+\infty)$. Това е така, защото условията в критерия на Лайбниц за този ред са удовлетворени и следователно модулът на неговия остатък се мажорира: $\dfrac{1}{x^2+\sqrt{n}}\leqq\dfrac{1}{\sqrt{n}}$, т. е. клони към нула равномерно по отношение на $x\in(-\infty,+\infty)$.

2.2. Дайте пример, че изискването $\{f_n(x)\}$ да клони равномерно към $f(x)$ е съществено.

Р е ш е н и е. Например да разгледаме редицата с общ член x^n. Всяка от функциите $f_n(x)=x^n$ е непрекъсната в интервала $[0,1]$, но тяхната гранична функция

$$f(x)=\begin{cases}0 & \text{за } x<1\\ 1 & \text{за } x=1\end{cases}$$

е прекъсната.

2.3. Дайте пример, че изискването за равномерна сходимост в теорема 1, въпреки че е съществено, не е необходимо.

Р е ш е н и е. Да разгледаме редицата с общ член $f_n(x)=(n+1)\times x^n(1-x)$ в интервала $[0,1]$. Това е редица от непрекъснати функции, която според зад. 1.5 а) не е равномерно сходяща в интервала $[0,1]$. Въпреки това нейната гранична функция $f(x)\equiv 0$ е непрекъсната в този интервал.

2.4. Докажете, че редът $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(x^n-x^{2n})$ не е равномерно сходящ в интервала $[0,1]$.

Р е ш е н и е. Ако сходимостта е равномерна, то от непрекъснатостта на функциите x^n-x^{2n} би следвала непрекъснатостта на сумата

$$S(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{1-x^2}, & x\in[0,1)\\ 0, & x=1.\end{cases}$$

Както се вижда обаче, $\lim\limits_{x\to 1}S(x)=\infty$.

2.5. Докажете, че сумата на реда на Дирихле $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n}{n^x}$ е непрекъсната функция при $x>\lambda$, където λ е абсцисата на сходимост на реда на Дирихле.

Р е ш е н и е. Нека $x>\lambda$, а $x_0\in(\lambda,x)$. От зад. 1.11 б) знаем, че редът на Дирихле е равномерно сходящ в $[x_0,\infty)$, а тъй като $\dfrac{a_n}{n^x}$ са непрекъснати функции в $[x_0,\infty)$, то и сумата им $f(x)$ е непрекъсната в $[x_0,\infty)$, в частност и в точката x.

2.6. Намерете $\int\limits_0^{2\pi}S(x)\,dx$, където $S(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a^n\cos nx$, $a\in(0,1)$.

Р е ш е н и е. Редът $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a^n\cos nx$ може да бъде интегриран почленно в интервала $[0,2\pi]$. Наистина той е равномерно сходящ съгласно критерия на Вайерщрас, тъй като се мажорира от сходящата геометрична прогресия $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a^n$. Получаваме

$$\int_0^{2\pi}S(x)\,dx=\int_0^{2\pi}dx+a\int_0^{2\pi}\cos x\,dx+a^2\int_0^{2\pi}\cos 2x\,dx+\dots+a^n\int_0^{2\pi}\cos nx\,dx+\dots=2\pi.$$

2.7. Покажете, че редицата с общ член $f_n(x)=n^2\sin x\cos^{2n}x$ не може да бъде почленно интегрирана в $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

Р е ш е н и е. Имаме

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}f_n(x)\,dx=-n^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2n}x\,d\cos x=\frac{n^2}{2n+1}\xrightarrow[n\to\infty]{}\infty.$$

Но от зад. 1.1 г) знаем, че граничната функция е $f(x)\equiv 0$, т. е.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\lim_{n\to\infty}f_n(x)\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}0\,dx=0.$$

Невъзможността редицата $\{f_n(x)\}$ да бъде интегрирана почленно показва, че $\{f_n(x)\}$ не клони равномерно към $f(x)\equiv 0$ в интервала $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

2.8. Дайте пример, че изискването в теорема 2 редицата $\{f_n(x)\}$ да клони към $f(x)$ равномерно, макар и съществено, не е необходимо.

Р е ш е н и е. Както се вижда от зад. 1.3 в), редицата с общ член $f_n(x) = \dfrac{nx}{1+n^2x^2}$ клони към граничната функция $f(x) \equiv 0$ неравномерно в интервала $[0, 1]$. Но въпреки това

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n} \int_0^1 \frac{d(1+n^2x^2)}{1+n^2x^2}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(1+n^2)}{2n} = 0 = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx.$$

2.9. Докажете, че редът

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n^2 \sin nx}{3^n+1}$$

може да бъде диференциран почленно в интервала $(-\infty, +\infty)$.

Р е ш е н и е. Този ред е сходящ за всяко x, защото се мажорира от реда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{2}{3}\right)^n n^2$, който е сходящ съгласно критерия на Даламбер. Редът от производните $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2^n n^3 \cos nx}{3^n+1}$ е равномерно сходящ съгласно критерия на Вайерщрас, тъй като се мажорира от сходящия ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{2}{3}\right)^n n^3$ (и тук можем да си послужим с критерия на Даламбер, защото $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{n^3}{(n+1)^3} \xrightarrow[n\to\infty]{} \dfrac{2}{3} < 1$). Според теорема 3 редът може да бъде диференциран почленно в интервала $(-\infty, +\infty)$.

2.10. Докажете, че функцията

$$\theta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi n^2 x}$$

е диференцуема при $x > 0$.

Р е ш е н и е. Функцията е добре дефинирана, тъй като редът е сходящ при всяко $x > 0$, което следва например от принципа за сравняване: $e^{-\pi n^2 x} < \dfrac{1}{n^2}$ за достатъчно големи n (при фиксирано x). Нека $x \in [a, b]$, $a > 0$. Редът $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-\pi n x^2}$ се мажорира от сходящия ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-\pi n a^2}$ (сходимостта на последния се доказва с принципа за сравняване с реда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$). Следователно съгласно критерия на Вайерщрас редът от производните $-\pi \sum\limits_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-\pi n^2 x}$ е равномерно сходящ. Това показва, че почленното диференциране е допустимо, т. е. $\theta(x)$ е диференцуема функция. Може да се докаже, че тя е безброй пъти диференцуема.

2.11. Покажете, че $f_n(x) = \left\{\dfrac{\sin nx}{\sqrt{n}}\right\}$ клони към $f(x) \equiv 0$ равномерно в $(-\infty, +\infty)$, но $f_n'(0) \underset{n\to\infty}{\not\longrightarrow} f'(0)$.

Р е ш е н и е. Неравенството

$$|f_n(x) - f(x)| = \frac{|\sin nx|}{\sqrt{n}} \leqq \frac{1}{\sqrt{n}}$$

показва, че по дадено ε може да се намери $N = N(\varepsilon)$, така че при $n > N$ неравенството $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ да бъде изпълнено едновременно за всички x от $(-\infty, +\infty)$, т. е. $f_n(x) \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} f(x)$, $x \in R$. Но $f_n'(x) = \sqrt{n}\cos nx$ и $f_n'(0) = \sqrt{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$, докато $f'(0) = 0$.

2.12. Докажете непрекъснатостта на сумата на функционалния ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos nx}{\sqrt{n}}$ в интервала $\left[\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}\right]$.

2.13. Докажете, че функцията $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} ne^{-nx}$ е непрекъсната при $x > 0$ и изчислете $\int\limits_{\ln 2}^{\ln 5} f(x)\,dx$.

2.14. Докажете, че функцията

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-(x-n)^2}$$

може да бъде диференцирана произволен брой пъти в интервала $(-1, 1)$.

§ 3. Степенни редове. Област на сходимост

Функционален ред от вида $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ или по-общо $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x-a)^n$, където a и a_n са константи, $n = 0, 1, 2, \dots$, се нарича степенен ред. Изследването на сходимостта на двата реда е аналогично и поради това ще формулираме твърденията за реда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ $(a = 0)$.

Ако степенният ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ е сходящ в точката $x_0 \neq 0$, то той е абсолютно сходящ за всяко x, за което $|x| < |x_0|$.

Ако в точката x_0 редът $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ е разходящ или условно сходящ, то той е разходящ във всяко x, за което $|x| > |x_0|$. За всеки степенен ред, сходящ поне в една точка $x_0 \neq 0$, съществува $R > 0$ (възможно $R = +\infty$), така че този ред е абсолютно сходящ в интервала $(-R, R)$ и разходящ вън от него. Числото R се нарича *радиус на сходимост*, а интервалът $(-R, R)$ — *интервал на сходимост*.

За изчисляване на радиуса на сходимост е валидна формулата (теорема на Коши — Адамар)

$$R = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

(в случая $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = 0$ имаме $R = \infty$).

Ако съществува крайна или безкрайна граница $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$, то $R = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$. Ако съществува крайна или безкрайна граница $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}$, то $R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}}$. В краищата на интервала на сходимост редът може да бъде както сходящ, така и разходящ.

Степенният ред е равномерно сходящ във всеки интервал $[a, b] \subset (-R, R)$. Сумата му е непрекъсната функция в $(-R, R)$. Ако в точката $x = R$ редът е разходящ, то сходимостта в интервала $[0, R)$ не е равномерна. Ако в точката $x = R$ редът е сходящ, макар и условно, то сходимостта е равномерна в интервала $[0, R]$ и сумата му е непрекъсната функция в точката $x = R$, т. е.

$$\lim_{x\to R}\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$$

(теорема на Абел).

Степенният ред $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ може да бъде интегриран почленно в интервала $[0, x]$ (или $[x, 0]$), $|x| < R$, така че

$$\int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \, dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}.$$

Ако в някой от краищата на интервала на сходимост редът е сходящ, то x може да съвпада с този край. Полученият ред има същия интервал на сходимост.

Степенният ред $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ може да бъде диференциран почленно в интервала си на сходимост, така че

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}.$$

Твърдението е в сила и за края на интервала на сходимост, ако редът е сходящ в този край. Полученият ред има същия интервал на сходимост.

Числов ред с комплексни членове се нарича редът $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, където $a_0 = b_0 + ic_0$, $a_1 = b_1 + ic_1, \dots, a_n = b_n + ic_n, \dots$; $i = \sqrt{-1}$; b_n, c_n — реални числа. Формално дефинициите за сходимост и разходимост на редове с комплексни членове са същите както в случая на редове с реални членове.

Редът $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty}(b_n + ic_n)$ е сходящ тогава и само тогава, когато са сходящи редовете $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ и $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$. Редът $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ с комплексни членове се нарича абсолютно сходящ, ако е сходящ редът

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=0}^{\infty} |b_n + ic_n| = \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{b_n^2 + c_n^2}.$$

Ако един ред е абсолютно сходящ, то той е сходящ.

Нека разгледаме реда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, където a_n са комплексни числа, а z е комплексна променлива. За степенния ред с комплексни членове може да се намери такова положително число R, че редът $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ да бъде абсолютно сходящ в кръга $|z| < R$ и разходящ при $|z| > R$. За изчисляването на R са валидни същите формули както в случая на степенни редове с реални членове. Числото R се нарича радиус на сходимост, а областта $|z| < R$ — кръг на сходимост на реда. Във всеки по-малък кръг $|z| \leqq \rho < R$ редът $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ е абсолютно и равномерно сходящ. Ако коефициентите a_n са реални числа, то очевидно радиусът на кръга на сходимост в комплексната равнина съвпада с радиуса на интервала на сходимост върху реалната ос.

Както в реалния случай, така и тук сумата на степенния ред е непрекъсната функция в кръга на сходимост. Теоремата на Абел в този случай се изказва така: Ако редът $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ е сходящ в някаква точка z_0 от окръжността $|z| = R$, то при приближаване на z от кръга $|z| < R$ към z_0 по радиуса имаме

$$\lim_{z \to z_0} \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z_0^n.$$

В следващите задачи се търсят радиусите на сходимост на посочените степенни редове и се изследва поведението им в краищата на интервалите на сходимост.

3.1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{n}$.

Решение. Тъй като $a_n = \dfrac{1}{n}$, то $R = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{a_{n+1}} = 1$. При $x = 1$ редът е разходящият хармоничен ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$, а при $x = -1$ съответният ред е сходящ съгласно критерия на Лайбниц.

3.2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^n x^n$.

Решение. Тук $R = 0$, тъй като $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim\limits_{n\to\infty} n = \infty$.

3.3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^n}{n!} x^n$.

Решение. Тъй като

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{n^n}{(n+1)^n} = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{e},$$

то $R = \dfrac{1}{e}$. От зад. 3.5, I ч., гл. 6, знаем, че при $x = \dfrac{1}{e}$ редът е разходящ съгласно критерия на Раабе–Дюамел, защото $n\left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \dfrac{1}{2}$.

Тази граница е положително число и съгласно зад. 4.8, I ч., гл. 6, по критерия на Лайбниц получаваме, че редът е сходящ в точката $x = -\dfrac{1}{e}$, т. е. областта на сходимост на дадения ред е $\left[-\dfrac{1}{e}, \dfrac{1}{e}\right)$.

3.4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \dfrac{x^{2n}}{(2n)!}$.

Решение. С помощта на критерия на Даламбер се вижда, че този ред е сходящ при всяко x. Действително

$$\frac{\dfrac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}}{\dfrac{x^{2n}}{(2n)!}} = \frac{x^2}{(2n+1)(2n+2)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

3.5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(x-1)^n}{n\sqrt[3]{2n+1}}$.

Решение.

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} \sqrt[3]{\frac{2n+3}{2n+1}} = 1$$

и следователно редът е сходящ за $|x-1| < 1$, т. е. за $0 < x < 2$. При $x = 2$ той има вида $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n\sqrt[3]{2n+1}}$ и е сходящ, тъй като общият му член не надминава $\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}n^{\frac{4}{3}}}$. При $x = 0$ получаваме алтернативен ред, който според казаното по-горе е абсолютно сходящ. Следователно областта на сходимост на реда е $[0, 2]$.

3.6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{3^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n^2+n+1}} (x+1)^n$.

Решение. От

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \sqrt{\frac{n^2+3n+3}{n^2+n+1}}\, 3^{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})} = \sqrt{\frac{n^2+3n+3}{n^2+n+1}}\, 3^{\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$$

имаме $R = 1$ и редът е сходящ за $|x+1| < 1$, т. е. за $-2 < x < 0$. Ако $x = 0$ или $x = -2$, редът е сходящ абсолютно, тъй като общият му член по модул не надминава $\frac{3^{-\sqrt{n}}}{n}$, което за достатъчно големи n се мажорира от $\frac{1}{n^2}$.

3.7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^{n^2}}{n^n}$.

Р е ш е н и е. Нека представим реда във вида $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k(x+2)^k$, като приемем, че $a_k = 0$ при $k \neq n^2$. Тук по-удобно е да използваме формулата

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} \sqrt[k]{|a_k|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n^2]{\frac{1}{n^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{n}}} = 1.$$

По теоремата на Коши–Адамар $R = 1$ и редът е сходящ за $|x+2| < 1$, т. е. при $-3 < x < -1$. При $x = -1$ получаваме сходящия ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$ (тъй като имаме $\frac{1}{n^n} \leqq \frac{1}{n^2}$ за $n \geqq 2$). При $x = -3$ той е абсолютно сходящ по същата причина. Окончателно областта на сходимост е $[-3, -1]$.

3.8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{5^n + (-3)^n}{n} x^n$.

Р е ш е н и е. От

$$a_{2k} = \frac{5^{2k} + 3^{2k}}{2k} = 5^{2k} \cdot \frac{1 + \left(\frac{3}{5}\right)^{2k}}{2k}$$

получаваме $\sqrt[2k]{a_{2k}} \xrightarrow[k\to\infty]{} 5$. Действително $\sqrt[2k]{2k} \xrightarrow[k\to\infty]{} 1$, а неравенството $1 \leqq \sqrt[2k]{1 + \left(\frac{3}{5}\right)^{2k}} < \sqrt[2k]{2}$ ни дава, че $\sqrt[2k]{1 + \left(\frac{3}{5}\right)^{2k}} \xrightarrow[k\to\infty]{} 1$.

Следователно $R = \frac{1}{5}$. При $x = \frac{1}{5}$ редът има вида $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1 + \left(-\frac{3}{5}\right)^n}{n}$ и

е разходящ, защото общият му член е не по-малък от $\frac{2}{5n}$. При $x = -\frac{1}{5}$ той приема вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 5^n + 3^n}{n 5^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{3}{5}\right)^n.$$

Първият ред е сходящ съгласно критерия на Лайбниц, а членовете на втория са положителни и не надминават членовете на сходяща геометрична прогресия. Следователно за $x = -\frac{1}{5}$ редът е сходящ. Областта му на сходимост е $\left[-\frac{1}{5}, \frac{1}{5}\right)$.

3.9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right]^p x^n$.

Р е ш е н и е. Тъй като

$$\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \left(\frac{2n+2}{2n+1}\right)^p \xrightarrow[n\to\infty]{} 1,$$

то $R = 1$. Да изследваме сходимостта в крайните точки на интервала $(-1, 1)$. При $x = 1$ получаваме реда от зад. 3.6, I ч., гл. 6, който е сходящ при $p > 2$ и разходящ при $p \leqq 2$. Нека $x = -1$, т. е. имаме

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right]^p (-1)^n.$$

От същата задача се вижда, че

$$n\left(\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} - 1\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{p}{2}$$

и тогава, ако $p > 0$, редът е сходящ съгласно критерия на Лайбниц (вж. зад. 4.8, I ч., гл. 6). Ако $p \leqq 0$, общият член на реда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right]^p (-1)^n$$

не клони към нула и следователно той е разходящ.

Изследвайте за сходимост следните редове с комплексни членове:

3

3.10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n(3i-1)^n}{5^n}$.

Р е ш е н и е. Използваме критерия на Даламбер. Имаме

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)(3i-1)}{5n}\right| = \frac{|3i-1|}{5} = \frac{\sqrt{10}}{5} < 1.$$

Следователно редът е абсолютно сходящ.

3.11. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{2n-1}+\frac{i}{2n+1}\right)$.

Р е ш е н и е. Тъй като редовете с реални членове

$$b_n = \frac{(-1)^n}{2n-1} \quad \text{и} \quad c_n = \frac{(-1)^n}{2n+1}$$

удовлетворяват условията на критерия на Лайбниц, те са сходящи. Следователно комплексният ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(b_n + ic_n)$ е също сходящ. Той обаче не е абсолютно сходящ, защото редът

$$\sum_{n=1}^{\infty}|b_n + ic_n| = \sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\frac{1}{(2n-1)^2}+\frac{1}{(2n+1)^2}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{8n^2+2}}{4n^2-1}$$

е разходящ ($|b_n + ic_n| \sim \frac{1}{\sqrt{2}n}$, а $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ е разходящ ред).

За редовете с реални членове е известно следното:

1. За всеки абсолютно сходящ ред е в сила комутативният закон, т. е. всеки ред, получен чрез разместване на членовете на абсолютно сходящ ред, е сходящ и има същата сума.

2. Ако един ред е сходящ, но не абсолютно, то каквото и число B (крайно или $\pm\infty$) да вземем, можем да разместим членовете така, че да се получи ред със сума именно B.

За абсолютно сходящи редове с комплексни членове е в сила комутативният закон. Нещо повече, може да се покаже, че той е валиден само за абсолютно сходящи редове. Не можем да твърдим обаче, че множеството на всички комплексни числа, които представляват сума на ред, получен при някакво разместване на членовете на неабсолютно сходящ ред, представлява цялата комплексна равнина.

Ще дадем пример за това. Да разгледаме реда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^{n-1}}{n}+\frac{(-1)^n i}{2n}\right].$$

Ако на общия му член съпоставим вектора

$$\left(\frac{(-1)^{n-1}}{n}, \frac{(-1)^n}{2n}\right) = \frac{(-1)^{n-1}}{n}\left(1,-\frac{1}{2}\right),$$

можем да заключим, че частичните суми на който и да е ред, получен чрез разместване на членовете, са колинеарни на вектора $\left(1,-\frac{1}{2}\right)$. Това показва, че сумата на такъв ред не може да бъде число, което съответства на точка, непринадлежаща на правата, минаваща през точките $(0,0)$ и $\left(1,-\frac{1}{2}\right)$.

Намерете радиусите на сходимост на следните редове с комплексни членове:

3.12. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}2^n(\sqrt{n-1}-i)z^n$.

Р е ш е н и е. По формулата $R = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$ намираме

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\sqrt{n-1}-i}{2(\sqrt{n}-i)}\right| = \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{n-1+1}{n+1}} = \frac{1}{2}.$$

3.13. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n^{\frac{n}{2}}}$.

Р е ш е н и е. Пресмятаме радиуса на сходимост по формулата $R = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}$. Тогава

$$R = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^{\frac{n}{2}}} = \lim_{n\to\infty}\sqrt{n} = +\infty.$$

Следователно редът е сходящ в цялата комплексна равнина.

3.14. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n\left(\cos\frac{1}{n}\right)^{2n^3}z^n$.

Р е ш е н и е. Изчисляваме R по формулата

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n\left(\cos\frac{1}{n}\right)^{2n^3}}.$$

Тъй като $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$, то

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \left(\cos\frac{1}{n}\right)^{2n^2} = \lim_{n\to\infty} e^{2n^2 \ln \cos\frac{1}{n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} e^{2n^2 \ln\left[1-\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right]} = \lim_{n\to\infty} e^{2n^2\left[-\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]} = \frac{1}{e}.$$

Следователно $R = e$.

3.15. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n z^{4n}}{n^2}$.

Р е ш е н и е. Тук можем да си послужим директно с критерия на Даламбер. Имаме

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|u_n|}{|u_{n+1}|} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{2|z|^4 n^2} = \frac{1}{2|z|^4}.$$

Следователно редът е абсолютно сходящ за $\frac{1}{2|z|^4} > 1$, т. е. за $|z| < \frac{1}{\sqrt[4]{2}}$, и разходящ при $|z| > \frac{1}{\sqrt[4]{2}}$. Следователно $R = \frac{1}{\sqrt[4]{2}}$.

3.16. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(3+4i)^n z^{3n}}{n^2}$.

Р е ш е н и е. Задачата може да се реши с критерия, приложен в предишната задача, а също и с формулата на Коши–Адамар:

$$\frac{1}{R} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[3n]{|a_{3n}|} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3n]{|3+4i|^n}}{\sqrt[3n]{n^2}}$$

$$= \sqrt[3]{|3+4i|} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(\sqrt[n]{n})^{\frac{2}{3}}} = \sqrt[3]{|3+4i|} = \sqrt[3]{5}.$$

Следователно $R = \frac{1}{\sqrt[3]{5}}$ и редът е абсолютно сходящ при $|z| < \frac{1}{\sqrt[3]{5}}$ и разходящ при $|z| > \frac{1}{\sqrt[3]{5}}$. По границата на кръга на сходимост $|z| = \frac{1}{\sqrt[3]{5}}$ той е също абсолютно сходящ, тъй като редът от абсолютните му стойности е всъщност сходящият ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

3.17. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\sqrt{n}]} z^n}{n}$ (ред на П р и н с х а й м).

Р е ш е н и е. Тук

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n}\right|} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1, \quad R = 1.$$

3.18. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^3+3}{n^3+5}\right)^{n^4} z^n$.

Р е ш е н и е. Имаме

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n^3+3}{n^3+5}\right)^{n^4}} = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{2}{n^3+5}\right)^{n^3+5} \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^3+3}{n^3+5}\right)^{-5}$$

$$= e^{-2}, \quad R = e^2.$$

Намерете радиуса на сходимост и изследвайте поведението на реда в краищата на интервала на сходимост:

3.19. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{4^n n!}{(2n)!(n+1)} x^n$.

3.20. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)^{2n} x^n}{(2n)!}$.

3.21. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{7^n + (-5)^n}{4n+3} x^n$.

3.22. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{2n+1} - \sqrt[3]{2n-1}}{\sqrt{n}} (x+1)^n$.

3.23. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x+3)^{n^2}}{n^n}$.

3.24. $1 + \frac{x}{3} + \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^3}{3^3} + \cdots + \frac{x^{2n-1}}{3^{2n-1}} + \frac{x^{2n}}{2^{2n}} + \cdots$

Намерете радиуса на сходимост на следните редове:

3.25. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)(z-2)^n}{4^{n+2}}$.

3.26. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)}{8^n} z^{5n}$.

3.27. $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{\ln^2 n}(z+1)^n$.

3.28. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3-i)^n z^n}{10^n . n}$.

§ 4. Развиване на функция в степенен ред

Нека $f(x)$ притежава производни от произволен ред в околност на точката a. Степенният ред

$$f(a) + f'(a)(x-a) + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \cdots$$

се нарича ред на Тейлър за функцията $f(x)$ около точката a.

Редът на Тейлър може да има различен от нула (краен или безкраен) радиус на сходимост, като в интервала на сходимост неговата сума може да бъде равна или различна от $f(x)$. Възможно е също така радиусът му на сходимост да бъде равен на нула. В случай че редът на Тейлър е сходящ при някое $x = a+h$ и сумата му е точно $f(x) = f(a+h)$, казваме, че функцията $f(x)$ се развива в тейлъров ред при $x = a+h$ около точката a.

Ако $f(x)$ е безброй много пъти диференцуема в точката $x = 0$, то редът на Тейлър около тази точка има вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

и се нарича ред на Маклорен.

Ще дадем развитията на основните елементарни функции в ред на Маклорен:

(1) $$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad |x| < \infty;$$

(2) $$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad |x| < \infty;$$

(3) $$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}, \quad |x| < \infty;$$

(4) $$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n, \quad -1 < x < 1,$$

при $\alpha > 0$ развитието е в сила за $x \in [-1,1]$;

(5) $$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}, \quad -1 < x \leqq 1.$$

Ще напомним, че за да бъде развита диференцуемата безброй пъти в интервала $(a-R, a+R)$ функция $f(x)$ в ред на Телър в този интервал, е необходимо и достатъчно остатъчният член $R_n(x)$ във формулата на Тейлър за $f(x)$ да клони към нула при $n \to \infty$ в посочения интервал.

Ако в околност на точката a имаме

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x-a)^n,$$

то $a_n = b_n$ съгласно теоремата за единственост.

Теоремата на Абел за степенни редове тук има следното приложение. Нека за функцията $f(x)$ е получено развитието ѝ в степенен ред само в отворения интервал $(-R, R)$, $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, и нека тази функция е непрекъсната например в точката $x = R$, а редът $\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$ е сходящ. Тогава развитието е в сила и за точката $x = R$, което се получава лесно с граничен преход при $x \to R$ в равенството $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

Оттук следва например твърдението, че сумата на биномния ред

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n$$

е $(1+x)^\alpha$, стига този ред да е сходящ. Конкретно получаваме: развитието е валидно за всяко x, ако α е цяло неотрицателно число (крайна сума); ако α е положително, но не цяло число, развитието е в сила за x от интервала $[-1,1]$; ако $\alpha \in (-1, 0)$, то развитието е валидно за $x \in (-1, 1]$; при $\alpha \in (-\infty, -1]$, то е в сила само за $x \in (-1, 1)$.

Преди да преминем към развиване на функции в степенен ред, да разгледаме две задачи — контрапримери.

4.1. Докажете, че функцията

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{(x-a)^2}}, & x \neq a \\ 0, & x = a \end{cases}$$

не може да бъде развита в ред на Тейлър около точката a за $x \neq a$.

Р е ш е н и е. От зад. 11.8, I ч., гл. 3 знаем, че $f'(a) = 0$, $f''(a) = 0, \ldots, f^{(n)}(a) = 0$. Следователно редът на Тейлър

$$0 + 0.(x-a) + 0.(x-a)^2 + \cdots + 0.(x-a)^n + \cdots$$

е сходящ навсякъде и сумата му е равна на нула за $x \in (-\infty, +\infty)$. С други думи редът на Тейлър не възпроизвежда стойността на функцията $f(x)$ освен в точката a. В резултат получаваме следното

Следствие. Две различни функции могат да имат един и същ ред на Тейлър.

Например, ако $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$, то същия ред на Тейлър около точката a има и функцията

$$g(x) = \begin{cases} f(x) + e^{-\frac{1}{(x-a)^2}}, & x \neq a \\ f(x), & x = a. \end{cases}$$

4.2. Докажете, че редът на Маклорен за безброй пъти диференцуемата функция

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2^n x)}{n!}$$

е разходящ.

Р е ш е н и е. Най-напред ще докажем диференцуемостта на функцията $f(x)$. Редът

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \sin\left(2^n x + \frac{\pi}{2}\right)}{n!},$$

съставен от първите производни на дадения ред, е равномерно сходящ в $(-\infty, +\infty)$, тъй като се мажорира от сходящия съгласно критерия на Даламбер ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$. Следователно $f'(x)$ съществува и

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \sin\left(2^n x + \frac{\pi}{2}\right)}{n!}.$$

Аналогично се доказва, че

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{kn} \sin\left(2^n x + k\frac{\pi}{2}\right)}{n!}.$$

При $x = 0$ имаме $f(0) = f''(0) = \ldots = f^{(2k)}(0) = 0$, а

$$f^{(2k+1)}(0) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^k \frac{2^{(2k+1)n}}{n!} = (-1)^k [e^{2^{2k+1}} - 1].$$

Тогава маклореновият ред за функцията $f(x)$ е

$$(e^2 - 1)x - \frac{e^{2^3} - 1}{2!} x^3 + \cdots + (-1)^k \frac{e^{2^{2k+1}} - 1}{k!} x^{2k+1} + \cdots$$

и той е разходящ при всяко $x \neq 0$, което се вижда с критерия на Даламбер.

При разлагането в степенен ред можем да избегнем непосредственото изчисляване на коефициентите на тейлъровия ред по формулата $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$ и доказателството, че остатъчният член $R_n(x)$ клони към нула. Вместо това можем да използваме правилата за операции над степенни редове като събиране, изваждане и умножение на редове с общ интервал на сходимост, а също така почленно диференциране и интегриране в интервала на сходимост (както отбелязахме в началото на § 2), като при това интервалите на сходимост на получения и на изходния ред съвпадат.

4.3. Да се намерят маклореновите развития на функциите:

а) $(1+x)e^x$; б) $\ln \frac{1+x}{1-x}$; в) $\frac{x-3}{(x+1)^2}$.

Р е ш е н и е. а) Умножаваме степенния ред $1 + x + 0.x^2 + \cdots + 0.x^n + \cdots$, който е сходящ върху цялата права и има сума $1+x$, с реда на Маклорен за e^x,

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

Знаем, че при умножаване на два степенни реда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ и $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ във формата на Коши се получава степенен ред от вида

$$a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)x + (a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0)x^2 + \cdots$$

$$+(a_0b_n + a_1b_{n-1} + \dots + a_nb_0)x^n + \cdots$$

В случая получаваме

$$(1+x)e^x = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(1\cdot\frac{1}{n!} + 1\cdot\frac{1}{(n-1)!}\right)x^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{n!}x^n$$

за всяко x.

4.4. Намерете маклореновите развития на функциите:

а) $\sin^2 x$; б) $\ln(1+3x+2x^2)$; в) $\sin 3x.\sin 5x$.

Решение. а) Тук може да се постъпи както в предишната задача, а именно да се умножи маклореновото развитие на $\sin x$ само със себе си. В случая обаче е по-удобно да си послужим с формулата

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x)$$
$$= \frac{1}{2}\left[1 - 1 + \frac{(2x)^2}{2!} - \frac{(2x)^4}{4!} + \dots + (-1)^{n-1}\frac{(2x)^{2n}}{(2n)!} + \cdots\right]$$
$$= x^2 - \frac{2^3}{4!}x^4 + \dots + (-1)^{n-1}\frac{2^{2n-1}.x^{2n}}{(2n)!} + \cdots$$

Това развитие е валидно за всяко x;

б) Преобразуваме функцията във вида $\ln(1+x)+\ln(1+2x)$. От маклореновите развития

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n \quad \text{за} \quad -1 < x \leqq 1$$

и

$$\ln(1+2x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}.2^n}{n}x^n \quad \text{за} \quad -\frac{1}{2} < x \leqq \frac{1}{2}$$

при $-\frac{1}{2} < x \leqq \frac{1}{2}$ получаваме чрез събиране

$$f(x) = \ln(1+2x)(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(1+2^n)}{n}x^n.$$

Получените редове във всички примери дотук действително са редове на Маклорен за тези функции, защото, както беше споменато, ако някоя функция е разложена в степенен ред, то това

е нейният ред на Тейлър (в случая — ред на Маклорен). Това съображение ще използваме и в следващите задачи.

4.5. Развийте в ред на Тейлър функциите:

а) $f(x) = \dfrac{1}{(x^2-2x+3)^2}$ около точката 1;

б) $f(x) = \sin^2\left(\dfrac{x-\cos\alpha}{2\sin\alpha}\right)$ около точката $\cos\alpha$ $(0 < \alpha < \frac{\pi}{4})$;

в) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-6x+18}}$ около точката 3;

г) $f(x) = \left(\dfrac{\sin\alpha - \cos\alpha + x}{\sin\alpha + \cos\alpha - x}\right)^2$ около точката $\cos\alpha$ $(0 < \alpha < \frac{\pi}{4})$;

Решение. а) Полагаме $t = x-1$. Тогава $f(x)$ се преобразува във вида:

$$f(x) = \frac{1}{(x^2-2x+1+2)^2} = \frac{1}{(t^2+2)^2} = \frac{1}{4}\left(1+\frac{t^2}{2}\right)^{-2}.$$

Според (4) за $\alpha = -2$ имаме

$$f(x) = \frac{1}{4}\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty}\binom{-2}{n}\left(\frac{t^2}{2}\right)^n\right].$$

Следователно

$$f(x) = \frac{1}{4}\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(n+1)(x-1)^{2n}}{2^n}\right).$$

Развитието е валидно за $\frac{t^2}{2} < 1$, т. е. $|x-1| < \sqrt{2}$. При $|x-1| = \sqrt{2}$ се получава разходящ ред (общият му член не клони към 0);

б) полагаме $t = \dfrac{x-\cos\alpha}{\sin\alpha}$. Тогава според зад. 4.4 а) имаме

$$f(x) = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}t^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n t^{2n+2}}{2(2n+2)!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(x-\cos\alpha)^{2n+2}}{2(2n+2)!\sin^{2n+2}\alpha};$$

г) Упътване. Положете $t = \dfrac{x-\cos\alpha}{\sin\alpha}$. Тогава функцията може да се представи във вида $\left(1+\dfrac{2t}{1-t}\right)^2$.

4.6. Намерете маклореновото развитие на следните функции:

а) $f(x) = \dfrac{1}{(x+3)(x-1)}$; б) $f(x) = \dfrac{5-2x}{x^2-5x+6}$;

в) $f(x) = \dfrac{1}{1+x+x^2}$; г) $f(x) = \dfrac{x}{(1-x)(1-x^2)}$.

Р е ш е н и е. а) Разлагаме функцията $f(x) = \dfrac{1}{(x+3)(x-1)}$ на сума от елементарни дроби и преобразуваме:

$$f(x) = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+3}\right) = \frac{1}{4}\left(\frac{-\frac{1}{3}}{1+\frac{x}{3}} - \frac{1}{1-x}\right)$$

$$= -\frac{1}{4}\left[\frac{1}{3}\left(1 - \frac{x}{3} + \cdots + \frac{(-1)^n x^n}{3^n} + \cdots\right) + \left(1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots\right)\right]$$

$$= -\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n}{3^{n+1}} + 1\right]x^n.$$

Тъй като първото от развитията е в сила при $\frac{|x|}{3} < 1$, а второто при $|x| < 1$, то нашето развитие е валидно при $|x| < 1$. Ако $|x| = 1$, редът е разходящ, защото общият му член не клони към нула;

в) От формулата на Ойлер знаем, че $-1 = 2\cos\frac{2\pi}{3} = e^{\frac{2\pi i}{3}} + e^{-\frac{2\pi i}{3}}$. За краткост означаваме $e^{\frac{2\pi i}{3}}$ с a, тогава $e^{-\frac{2\pi i}{3}} = \overline{a}$. Имаме

$$f(x) = \frac{1}{1-(a+\overline{a})x + x^2} = \frac{1}{(x-a)(x-\overline{a})} = \frac{1}{a-\overline{a}}\left(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x-\overline{a}}\right)$$

$$= \frac{1}{a-\overline{a}}\left(\frac{a}{1-ax} - \frac{\overline{a}}{1-\overline{a}x}\right) = \frac{1}{a-\overline{a}}\left[a\sum_{n=0}^{\infty}(ax)^n - \overline{a}\sum_{n=0}^{\infty}(\overline{a}x)^n\right]$$

$$= \frac{1}{a-\overline{a}}\sum_{n=0}^{\infty}x^n\left(a^{n+1} - (\overline{a})^{n+1}\right).$$

Това развитие е в сила, ако $|ax| < 1$ и $|\overline{a}x| < 1$. Но тъй като $|a| = |\overline{a}| = 1$, то интервалът на сходимост е $(-1,1)$. Пресмятаме

$$a^{n+1} - (\overline{a})^{n+1} = e^{\frac{2\pi i(n+1)}{3}} - e^{\frac{-2\pi i(n+1)}{3}} = 2i\sin\frac{2\pi(n+1)}{3},$$

като в частност $a - \overline{a} = \sqrt{3}.i$. Тогава

$$f(x) = \frac{2}{\sqrt{3}}\sum_{n=0}^{\infty}x^n \sin\frac{2\pi}{3}(n+1) \quad \text{за} \quad |x| < 1.$$

Задачата може да се реши и по друг начин, например като се представи $f(x)$ във вида

$$f(x) = \frac{1-x}{1-x^3} = (1-x)\sum_{n=0}^{\infty}x^{3n}$$

и по-нататък се продължи както в зад. 4.3 а).

4.7. Развийте в ред на Маклорен функцията $f(x) = \dfrac{1-x+x^2}{1+x+x^2}$.

Р е ш е н и е. От зад. 4.6 в) е ясно, че функцията $f(x)$ може да бъде развита в ред на Маклорен. Коефициентите на реда могат да се получат, като се умножи $1-x+x^2$ с реда, получен при развитието на $\dfrac{1}{1+x+x^2}$. Ще покажем друг начин, при който коефициентите се пресмятат сравнително лесно. Нека $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ в някаква околност на точката 0. Следователно в тази околност имаме $1-x+x^2 = (1+x+x^2)\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ или

$$\begin{aligned} 1-x+x^2 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n &+ \cdots \\ +a_0x + a_1x^2 + \cdots + a_{n-1}x^n &+ \cdots \\ +a_0x^2 + \cdots + a_{n-2}x^n &+ \cdots \end{aligned}$$

Като приравним според теоремата за единственост коефициентите пред равните степени на x, ще получим $a_0 = 1$, $a_0 + a_1 = -1$, $a_0 + a_1 + a_2 = 1$, $a_1 + a_2 + a_3 = 0$, ..., $a_{n-2} + a_{n-1} + a_n = 0$, ...

След последователно пресмятане на коефициентите намираме $a_0 = 1$, $a_1 = -2$, $a_2 = 2$, $a_3 = 0$, $a_4 = -2$, $a_5 = 2$, $a_6 = 0$, $a_7 = -2$ и т. н. Получихме развитието

$$\frac{1-x+x^2}{1+x+x^2} = 1 - 2x + 2x^2 - 2x^4 + 2x^5 - 2x^7 + \cdots$$

Интервалът на сходимост на този ред е $(-1,1)$, което се вижда лесно.

4.8. Разложете в ред на Маклорен функциите:

а) $f(x) = \frac{x^4 - 1}{4} \operatorname{arctg} x - \frac{x^3}{12} + \frac{x}{4}$;

б) $f(x) = \arcsin x$; в) $f(x) = \operatorname{arctg} x$;

г) $f(x) = x \ln(x + \sqrt{1 + x^2}) + x \arcsin x + \sqrt{1 - x^2} - \sqrt{1 + x^2}$.

Р е ш е н и е. а) Забелязваме, че $f'(x) = x^3 \operatorname{arctg} x$. Тъй като

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1 + x^2} = \frac{1}{1 - (-x^2)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$$

при $|x| < 1$, то

$$\operatorname{arctg} x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + C$$

и след полагане $x = 0$ получаваме $C = 0$.

Следователно

$$f'(x) = x^3 \operatorname{arctg} x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+4}}{2n+1}.$$

След почленно интегриране получаваме

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+5}}{(2n+1)(2n+5)} + C_1$$

и като положим $x = 0$, намираме $C_1 = 0$. Развитието

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+5}}{(2n+1)(2n+5)}$$

е в сила поне при $|x| < 1$. В точките $x = \pm 1$ редът е очевидно абсолютно сходящ, тъй като модулът на общия му член е еквивалентен на $\frac{1}{n^2}$. Оттук според теоремата на Абел получаваме, че този ред е непрекъсната функция в $[-1, 1]$, а понеже той съвпада с непрекъснатата функция $f(x)$ в $(-1, 1)$, то той ще съвпада с нея и в точките ± 1. Получихме по такъв начин, че развитието е валидно в $[-1, 1]$.

В следващите задачи ще покажем, как степенните редове могат да се използват за решаване на диференциални уравнения.

4.9. а) Намерете функцията $y(x)$, удовлетворяваща уравнението $y'' + 2xy' + y = 0$ и началните условия $y(0) = 2$, $y'(0) = 0$;

б) Намерете функцията $y(x)$, удовлетворяваща уравнението $y'' + xy' = 0$ и началните условия $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$;

в) Намерете функцията $y(x)$, удовлетворяваща уравнението $y'' + \lambda^2 y = 0$ и началните условия $y(0) = 0$, $y'(0) = \lambda$;

г) Разложете в ред на Маклорен функцията $y = (\arcsin x)^2$.

Р е ш е н и е. а) Ще търсим $y(x)$ във вид на сума на степенния ред $y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$ Използваме свойството на степенните редове да допускат почленно диференциране в интервала на сходимост:

$$y' = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \cdots + n a_n x^{n-1} + \cdots,$$

$$y'' = 2a_2 + 3.2 a_3 x + \cdots + n(n-1) a_n x^{n-2} + \cdots$$

Заместваме в уравнението:

$$0 = y'' + 2xy' + y = (2a_2 + a_0) + (3.2a_3 + 2a_1 + a_1)x$$
$$+ \cdots + [(n+2)(n+1)a_{n+2} + 2na_n + a_n]x^n + \cdots,$$

откъдето получаваме съгласно теоремата за единственост

$2a_2 + a_0 = 0$, $3.2a_3 + 3a_1 = 0$, ..., $(n+2)(n+1)a_{n+2} + (2n+1)a_n = 0$.

По условие $a_0 = 2$ и $a_1 = 0$, следователно $a_3 = a_5 = \ldots = a_{2k+1} = 0$. За останалите коефициенти получаваме формулата

$$a_{2k} = \frac{-[2(2k-2)+1]}{2k(2k-1)} a_{2k-2} = -\frac{(4k-3)}{2k(2k-1)} a_{2k-2}.$$

Тогава

$$a_{2k} = (-1)^k \frac{(4k-3)(4k-7)\ldots 1}{(2k)!} \cdot 2.$$

Степенният ред $\sum_{k=0}^{\infty} a_{2k} x^{2k}$ е сходящ съгласно критерия на Даламбер за всяко x и представлява решение на диференциалното уравнение;

г) Проверяваме, че $y = (\arcsin x)^2$ удовлетворява уравнението $y''(1 - x^2) - xy' = 0$ и началните условия $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$. Търсим решението във вид на степенен ред както в случая а), като предварително е ясно, че такова представяне съществува.

5.3. Намерете развитието в ред на следните интеграли посредством развиване на подинтегралната функция в ред на Маклорен и почленното му интегриране:

а) $\int\limits_0^x \frac{\sin t}{t}\,dt$; б) $\int\limits_0^x \sin^2 t\,dt$; в) $\int\limits_0^x \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}$, $|x|<1$; г) $\int\limits_0^x \sqrt{t}e^t\,dt$.

Р е ш е н и е. а) При $t \neq 0$ получаваме чрез почленно деление

$$\frac{\sin t}{t} = 1 - \frac{t^2}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{t^{2n}}{(2n+1)!} + \cdots$$

При $t=0$ и лявата и дясната страна на равенството са непрекъснати функции, имащи стойност 1. Тъй като степенният ред може да бъде интегриран почленно в своя интервал на сходимост, който в случая е $(-\infty,+\infty)$, получаваме

$$\int\limits_0^x \frac{\sin t}{t}\,dt = x - \frac{x^3}{3.3!} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)(2n+1)!} + \cdots;$$

в) Развиваме подинтегралната функция

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{1+t^4}} = (1+t^4)^{-\frac{1}{2}}$$

в ред на Маклорен

$$1 - \frac{1}{2}t^4 + \cdots + \binom{-\frac{1}{2}}{n} t^{4n} + \cdots$$

Този ред е сходящ при $|t|<1$ и затова при $|x|<1$ след почленно интегриране получаваме

$$\int\limits_0^x \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}} = x - \frac{1}{2}\frac{x^5}{5} + \cdots + \binom{-\frac{1}{2}}{n}\frac{x^{4n+1}}{4n+1} + \cdots$$

5.4. С помощта на степенни редове изчислете с точност до 0,0001 приблизителните стойности на следните интеграли:

а) $\int\limits_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}$; б) $\int\limits_0^1 \cos\sqrt{x}\,dx$; в) $\int\limits_1^{1,5} \frac{1}{x}\operatorname{arctg}\frac{x}{4}\,dx$.

Р е ш е н и е. Съгласно зад. 5.3. в) имаме

$$I = \int\limits_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{1+x^4}$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2.5.2^5} + \frac{1.3}{2.4.9.2^9} - \frac{1.3.5}{2.4.6.13.2^{13}} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}(2n-1)!!}{(2n)!!(4n+1)2^{4n+1}} + \cdots$$

Първите три члена на получения алтернативен ред са: $a_1 = 0,5$, $a_2 \approx -0,00313$, $a_3 \approx 0,00008$. Тъй като редът удовлетворява условията на критерия на Лайбниц, за изчисляването на интеграла е достатъчно да се вземе сумата на първите два члена на реда: $I \approx a_1 + a_2 = 0,4969$. Грешката на приближението по модул не надминава модула на първия отхвърлен член, т. е. тя е по-малка от $a_3 \approx 0,00008$.

5.5. С помощта на степенни редове изчислете с точност до 0,0001:

а) $\sqrt[4]{17}$; б) $\ln 1,1$.

Р е ш е н и е. а) Можем да използваме развитието в ред на Маклорен:

$$\sqrt[4]{17} = 2\left(1+\frac{1}{16}\right)^{\frac{1}{4}} = 2\left(1 + \frac{1}{4.16} - \frac{1.3}{4.8.16^2} + \frac{1.3.7}{4.8.12.16^3} - \cdots\right).$$

За да определим колко члена от алтернативния ред трябва да се вземат, изчисляваме първите няколко члена:

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 0,01562, \quad a_3 = -0,00037, \quad a_4 = 0,00001.$$

Съгласно свойствата на ред, удовлетворяващ условията на критерия на Лайбниц, ако вземем сумата на първите три члена, грешката ще бъде по-малка от $2a_4 < 0,0001$. Следователно

$$\sqrt[4]{17} \approx 2(1 + 0,01562 - 0,00037) \approx 2,0305.$$

5.6. Намерете сумите $f(x)$ на следните степенни редове:

а) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{3n+1}}{3n+1}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)}$;

в) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2)x^n$; г) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (2n+1)x^n$;

д) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(3n+1)x^{3n}}{n!}$; е) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n x^{2n}}{2n+1}$.

Р е ш е н и е. а) Диференцираме реда в неговия интервал на сходимост $(-1,1]$. (Проверете!) Получаваме $f'(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{3n} = \dfrac{1}{1+x^3}$. Тогава $f(x)=\int\limits_0^x \dfrac{dt}{1+t^3}+C$, което според зад. 5.4, I ч., гл. 4, ни дава, че

$$f(x)=\frac{1}{6}\ln\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1}+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C.$$

Като положим $x=0$, получаваме $0=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\cdot\dfrac{\pi}{6}+C$, т. е. $C=\dfrac{\pi}{6\sqrt{3}}$;

в) Сумата на реда може да се получи, като се диференцира два пъти известното ни равенство: $\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n=\dfrac{1}{1-x}$.

Задачата може да се реши и по друг начин. Ако интегрираме почленно дадения ред, ще получим

$$\int\limits_0^x f(t)\,dt=\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)x^{n+1}.$$

Нека $g(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+2)x^{n+1}$, тогава

$$\int\limits_0^x g(t)\,dt=\sum_{n=0}^{\infty}x^{n+2}=\frac{x^2}{1-x}.$$

Тъй като $g(x)=\left(\dfrac{x^2}{1-x}\right)'=\dfrac{1}{(1-x)^2}-1$, то $f(x)=g'(x)=\dfrac{2}{(1-x)^3}$.

Тук очевидно $|x|<1$;

г) С почленно диференциране на равенството $\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n=\dfrac{1}{1-x}$ получаваме при $|x|<1$, че

$$\sum_{n=0}^{\infty}nx^{n-1}=\frac{1}{(1-x)^2}\quad\text{или}\quad\sum_{n=0}^{\infty}2nx^n=\frac{2x}{(1-x)^2}.$$

Оттук

$$\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)x^n=\frac{2x}{(1-x)^2}+\frac{1}{1-x}=\frac{x+1}{(1-x)^2}\quad\text{при}\quad |x|<1.$$

Изобщо за пресмятане на $\sum\limits_{n=0}^{\infty}n^k a_n x^n$, където сумата $g(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ е известна, постъпваме по следния начин: диференцираме $g(x)$ почленно, след което разглеждаме $xg'(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}na_n x^n$, повтаряме тази операция k пъти;

е) Разглеждаме функцията $xf(x)$. След почленно диференциране получаваме

$$[xf(x)]'=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}=\frac{1}{1+x^2},$$

откъдето $xf(x)=\operatorname{arctg}x+C$. След полагане $x=0$, получаваме $C=1$. Следователно

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\operatorname{arctg}x}{x}, & x\neq 0\\ 1, & x=0.\end{cases}$$

5.7. Пресметнете сумите:

а) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{(n+1)(2n+1)}$; б) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{3n+1}$; в) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n(3n+1)}$.

Р е ш е н и е. а) Означаваме общия член на дадения ред с a_n. В този случай е удобно a_n да се разложи на сума от елементарни дроби. След разлагането получаваме

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}+2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$$

$$=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}+2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}=-\ln(1+1)+2\operatorname{arctg}1=-\ln 2+\frac{\pi}{2}.$$

(За последната сума вж. зад. 5.6 е) или зад. 4.8 в))

5.8. Пресметнете интеграла

$$\int_0^{\pi} \frac{\ln(1+a\cos x)}{\cos x}\,dx, \quad |a|<1.$$

(При $x=\dfrac{\pi}{2}$ на подинтегралната функция се приписва стойност a, равна на границата на тази функция при $x\to\dfrac{\pi}{2}$.)

Р е ш е н и е. Разлагаме $\ln(1+a\cos x)$ по степените на $a\cos x$ и след почленно деление на $\cos x$ получаваме

$$\frac{\ln(1+a\cos x)}{\cos x} = a+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{a^{n+1}}{n+1}\cos^n x.$$

Този ред е равномерно сходящ в интервала $[0,\pi]$, което се вижда с критерия на Вайерщрас — общият му член се мажорира от общия член на сходяща геометрична прогресия. Интегрираме почленно реда. Знаем, че (вж. зад. 2.13, I ч., гл. 5)

$$\int_0^{\pi}\cos^{2m-1}x\,dx=0,\quad \int_0^{\pi}\cos^{2m}x\,dx=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2m}x\,dx=\frac{(2m-1)!!}{(2m)!!}\pi.$$

Получаваме

$$\int_0^{\pi}\frac{\ln(1+a\cos x)}{\cos x}\,dx=\pi\left[a+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{a^{2n+1}}{2n+1}\right].$$

Но редът в скобите всъщност е развитието на функцията $\arcsin a$ (вж. зад. 4.8 б)). Окончателно получаваме:

$$\int_0^{\pi}\frac{\ln(1+a\cos x)}{\cos x}\,dx=\pi\arcsin a.$$

Функциите на Бесел:

$$J_0(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(x\sin t)\,dt,$$

$$J_n(x)=\frac{2x^n}{(2n-1)!!\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(x\sin t)\cos^{2n}t\,dt,\quad n=1,2,3,\dots,$$

играят важна роля в математическата физика и в небесната механика. Следващите две задачи се отнасят до развитието на тези две функции в степенен ред.

5.9. Докажете, че:

а) $J_n(x)=\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!(k+n)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n}$, $\quad n=0,\,1,\,2,\,\dots;$

б) $J_0(x)$ удовлетворява диференциалното уравнение на Бесел $xy''+y'+xy=0$.

Р е ш е н и е. а) Ще докажем твърдението за функцията $J_0(x)$. Разлагаме подинтегралния израз по степените на $x\sin t$:

$$\cos(x\sin t)=1+\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k}\sin^{2k}t}{(2k)!}.$$

След почленно интегриране, като вземем предвид, че

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2k}t\,dt=\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\frac{\pi}{2}\quad \text{(зад. 2.14, I ч., гл. 5)},$$

получаваме

$$J_0(x)=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(k!)^2 2^{2k}}.$$

Като се използва резултатът на зад. 2.47, I ч., гл. 5, формулата за $J_n(x)$ се доказва по аналогичен начин;

б) Интервалът на сходимост на реда

$$1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{2k}}{(k!)^2 2^{2k}},$$

представляващ $y=J_0(x)$, е $(-\infty,+\infty)$ и затова за всяко $x\in(-\infty,+\infty)$ функциите y' и y'' могат да се получат с почленно диференциране на този ред. Получаваме последователно:

$$y'=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{2k}{(k!)^2 2^{2k}}x^{2k-1},\quad xy''=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{2k(2k-1)}{(k!)^2 2^{2k}}x^{2k-1}.$$

Като съберем тези равенства с равенството

$$xy = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{(2k)^2}{(k!)^2 2^{2k}}x^{2k-1},$$

виждаме, че коефициентът пред x^{2k-1} е равен на

$$\frac{(-1)^k}{(k!)^2 2^{2k}}[2k(2k-1)+2k-(2k)^2]=0, \text{ т. е. } xy''+y'+xy=0.$$

Ще отбележим, че беселевата функция $J_n(x)$, $n = 1, 2, \ldots$, удовлетворява общото уравнение на Бесел

$$x^2y''+xy'+(x^2-n^2)y=0.$$

По-интересна е друга постановка на задачата: да се намери функция, която може да се развие в ред за всяко $x \in (-\infty, +\infty)$ и която удовлетворява уравнението на Бесел.

5.10. Решете уравнението на Бесел за $n = 0$.

Решение. За да решим задачата, ще напишем развитието на търсената функция във вид на ред с неопределени коефициенти: $y = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Считаме, че той е сходящ навсякъде и го диференцираме почленно два пъти. Заместваме развитията в уравнението и получаваме

$$a_1 + \sum_{n=2}^{\infty}(n^2 a_n + a_{n-2})x^{n-1} = 0.$$

Съгласно теоремата за сравняване на степенни редове

$$a_1 = 0, \qquad n^2 a_n + a_{n-2} = 0, \qquad n = 2, 3, \ldots$$

Оттук веднага следва, че $a_{2k-1} = 0$, $k = 1, 2, 3, \ldots$, а a_{2k} се изразяват чрез a_0 с помощта на рекурентната формула

$$a_{2k} = \frac{(-1)^k a_0}{(k!)^2 2^{2k}},$$

т. е. намерихме, че търсената функция е $a_0 J_0(x)$. Това, че горният ред е сходящ навсякъде, се проверява непосредствено, а от начина, по който получихме функцията следва, че тя удовлетворява уравнението.

Глава 2

Несобствени интеграли

Нека $f(x)$ е функция, дефинирана върху полуправата $[a,\infty)$, и нека при всяко $A > a$ да съществува определеният риманов интеграл $\int_a^A f(x)\,dx$. Ако съществува крайна граница $\lim\limits_{A\to\infty}\int_a^A f(x)\,dx$, то тази граница се нарича *несобствен интеграл от първи род* за функцията $f(x)$ върху полуправата $[a,\infty)$ и се бележи $\int_a^\infty f(x)\,dx$, като в този случай се казва, че $\int_a^\infty f(x)\,dx$ е *сходящ*. В противен случай казваме, че интегралът е *разходящ*. Аналогично се дефинира и $\int_{-\infty}^a f(x)\,dx$.

Критерий на Коши. Необходимо и достатъчно условие несобственият интеграл $\int_a^\infty f(x)\,dx$ да бъде сходящ е за всяко $\varepsilon > 0$ да съществува такова $B > a$, че при всеки избор на числата A_1 и A_2, по-големи от B, да бъде изпълнено

$$\left|\int_{A_1}^{A_2} f(x)\,dx\right| < \varepsilon.$$

Критерий за сравнение. Нека за $x \in [a,\infty)$ имаме $|f(x)| \leqq g(x)$. Тогава от сходимостта на $\int_a^\infty g(x)\,dx$ следва сходимостта на $\int_a^\infty f(x)\,dx$. В частност: ако съществуват $c > 0$ и $\lambda > 1$ такива, че за $x \in [a,\infty)$ имаме $|f(x)| \leqq \frac{c}{x^\lambda}$, то $\int_a^\infty f(x)\,dx$ е сходящ; ако съществуват $c > 0$ и $\lambda \leqq 1$ такива, че за $x \in [a,\infty)$ $f(x) \geqq \frac{c}{x^\lambda}$, то $\int_a^\infty f(x)\,dx$ е разходящ. Граничната форма на същия критерий е следната: ако съществува $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=c$, където $0<c<\infty$, то $\int\limits_a^\infty f(x)\,dx$ е сходящ едновременно с $\int\limits_a^\infty g(x)\,dx$. Граничната форма на частния критерий има вида: ако съществува $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{|f(x)|}{x^\lambda}=c<\infty$, където $\lambda>1$, то $\int\limits_a^\infty f(x)\,dx$ е сходящ; ако $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x^\lambda}=c>0$ с $\lambda\leqq 1$, то $\int\limits_a^\infty |f(x)|\,dx$ е разходящ.

Ще отбележим, че несобственият интеграл $\int\limits_a^\infty f(x)\,dx$ се нарича *абсолютно сходящ*, ако е сходящ $\int\limits_a^\infty |f(x)|\,dx$. Ако $\int\limits_a^\infty f(x)\,dx$ е сходящ, но $\int\limits_a^\infty |f(x)|\,dx$ е разходящ, то $\int\limits_a^\infty f(x)\,dx$ се нарича *условно сходящ*. Разбира се, от абсолютната сходимост на един интеграл следва неговата условна сходимост.

Критерий на Дирихле. Разглеждаме несобствения интеграл $\int\limits_a^\infty f(x)g(x)\,dx$. Нека функцията $f(x)$ е непрекъсната върху полуправата $[a,\infty)$ и има ограничена примитивна, и нека непрекъснато диференцуемата функция $g(x)$ е монотонна и клони към нула при $x\to\infty$. Тогава $\int\limits_a^\infty f(x)g'(x)\,dx$ е сходящ. Ще отбележим, че изискването за непрекъсната диференцуемост на функцията $g(x)$ не е съществено.

Интегриране по части на несобствен интеграл. Нека функциите $u(x)$ и $v(x)$ са непрекъснато диференцуеми и нека съществува крайна граница $L=\lim\limits_{x\to\infty}u(x)v(x)$. Ако е сходящ поне единият от несобствените интеграли $\int\limits_a^\infty u(x)v'(x)\,dx$, $\int\limits_a^\infty u'(x)v(x)\,dx$, то сходящ е и другият и е в сила формулата

$$\int\limits_a^\infty u(x)v'(x)\,dx=L-u(a)v(a)-\int\limits_a^\infty u'(x)v(x)\,dx.$$

Сега ще разгледаме несобствени интеграли от втори род, а именно интеграли от неограничена функция върху краен интервал. Нека $f(x)$ е неограничена в интервала $[a,b]$, но е ограничена във всеки интервал $[a,b-\varepsilon]$, където $b-a\geqq\varepsilon>0$. Тогава точката b се нарича *особена точка*. Нека $f(x)$ е интегруема във всеки интервал $[a,b-\varepsilon]$. Ако съществува границата $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx$, то тя се нарича *несобствен интеграл от втори род*. В този случай се казва,

че интегралът е *сходящ* и се бележи със символа $\int\limits_a^b f(x)\,dx$. Ако тази граница не съществува, се казва, че несобственият интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ е *разходящ*. Това понятие може да се разшири и в случай на повече от една особени точки. Ако $c\in(a,b)$ и функцията $f(x)$ не е ограничена в никоя двустранна околност на тази точка, то по дефиниция

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx=\lim_{\substack{\varepsilon\to+0\\ \mu\to+0}}\left[\int\limits_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx+\int\limits_{c+\mu}^b f(x)\,dx\right]$$

(ако написаните вдясно граници съществуват), като ε и μ клонят към нула независимо едно от друго.

Критерий на Коши. За да бъде сходящ несобственият интеграл от втори род $\int\limits_a^b f(x)\,dx$, е необходимо и достатъчно за всяко $\varepsilon>0$ да може да се намери такова число δ, че при всеки избор на числата ν_1 и ν_2, удовлетворяващи условията $0<\nu_1<\nu_2<\delta$, да бъде изпълнено

$$\left|\int\limits_{b-\nu_1}^{b-\nu_2} f(x)\,dx\right|<\varepsilon.$$

Основните свойства на несобствените интеграли от първи род се пренасят и за несобствени интеграли от втори род. Понякога за първите ще казваме, че имат особена точка $x=+\infty$.

Ще отбележим, че ако $f(x)$ е непрекъсната в $[a,b)$, b — особена точка, то чрез смяна на променливата $x=b-\dfrac{1}{t}$, $t>0$, несобственият интеграл от втори род се свежда към несобствен интеграл от първи род.

Ще формулираме още и критерия за сравнение с $\int\limits_a^b\dfrac{dx}{(b-x)^\lambda}$, тъй като той има определена практическа стойност.

Ако $|f(x)|\leqq\dfrac{c}{(b-x)^\lambda}$, $c>0$, то при $\lambda<1$ интегралът $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ е сходящ; ако $|f(x)|\geqq\dfrac{c}{(b-x)^\lambda}$, $c>0$, $\lambda\geqq 1$ — разходящ. Ако $\lim\limits_{x\to b}\dfrac{f(x)}{\dfrac{1}{(b-x)^\lambda}}=c>0$, то при $\lambda<1$ интегралът е сходящ, а при $\lambda\geqq 1$ — разходящ.

Изобщо бихме могли да разглеждаме $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ върху интервала $[a,b)$, където b може да бъде и $+\infty$, а функцията $f(x)$ е такава, че $\int\limits_a^{b'} f(x)\,dx$ съществува за всяко $b' < b$. Ако съществува при тези условия границата $\lim\limits_{b' \to b-0} \int\limits_a^{b'} f(x)\,dx$ и тя е крайна, то ние я означаваме с $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ и я наричаме *несобствен интеграл* от $f(x)$ върху $[a,b]$; ако $b = +\infty$ — несобствен интеграл от първи род, ако $b < +\infty$ — несобствен интеграл от втори род.

С м я н а н а п р о м е н л и в а т а в несобствен интеграл. Нека $f(x)$ е дефинирана и непрекъсната в крайния или безкраен интервал $[a,b)$, където b е единствената особена точка за $f(x)$. Нека $x = g(t)$ е строго монотонно растяща функция, която има непрекъсната производна в интервала $[\alpha,\beta)$, където β може да бъде и $+\infty$. Нека $g(\alpha) = a$, $g(\beta) = b$. В сила е равенството

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)\,dt$$

при условие, че един от тези интеграли е сходящ (сходимостта на другия следва непосредствено). Десният интеграл в равенството ще бъде или несобствен, или собствен (риманов) интеграл.

Ще казваме, че функцията $f(x)$ е и н т е г р у е м а п о К о ш и, ако тя е дефинирана върху правата $(-\infty,+\infty)$, интегруема във всеки краен интервал и ако съществува границата $\lim\limits_{A\to\infty} \int\limits_{-A}^{A} f(x)\,dx$. Това число ще наричаме г л а в н а с т о й н о с т на несобствения интеграл в смисъл на Коши и ще бележим със символа $V.p. \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$.

Разбира се, ако съществува несобственият интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$, то съществува и $V.p. \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$, но обратното не винаги е вярно. Понятието главна стойност се въвежда и за несобствени интеграли от втори род, когато $f(x)$ е дефинирана навсякъде в $[a,b]$, евентуално с изключение на някоя вътрешна точка c, и интегруема във всяка отсечка, която се съдържа в $[a,b]$ и не съдържа точката c. Тогава по дефиниция

$$V.p. \int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to+0}\left[\int\limits_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx + \int\limits_{c+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx\right].$$

Определете сходящи ли са следващите несобствени интеграли:

1.1. $\displaystyle\int\limits_1^2 \frac{dx}{x\ln x}$.

Р е ш е н и е. Особената точка тук е $x = 1$ и затова разглеждаме $\lim\limits_{\varepsilon\to+0} \int\limits_{1+\varepsilon}^{2} \dfrac{dx}{x\ln x}$. Но

$$\int\limits_{1+\varepsilon}^{2} \frac{dx}{x\ln x} = \int\limits_{1+\varepsilon}^{2} \frac{d\ln x}{\ln x} = \ln\ln x\Big|_{1+\varepsilon}^{2} = \ln\ln 2 - \ln\ln(1+\varepsilon).$$

Тъй като при $\varepsilon \to 0$ функцията $\ln\ln(1+\varepsilon)$ е неограничена, то интегралът е разходящ.

1.2. а) $\displaystyle\int\limits_0^5 \frac{dx}{x^2 + \sqrt[3]{x}}$; б) $\displaystyle\int\limits_0^1 \frac{\cos^2\left(\frac{1}{x^2}\right)}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx$.

Р е ш е н и е. а) Особената точка тук е $x = 0$. Тъй като $\dfrac{1}{x^2+\sqrt[3]{x}} \leqq \dfrac{1}{x^{1/3}}$, то според критерия за сравняване с $\int\limits_0^5 \dfrac{dx}{x^\lambda}$ интегралът е сходящ.

1.3. а) $\displaystyle\int\limits_0^\pi \frac{\sin x}{x^2}\,dx$; б) $\displaystyle\int\limits_0^1 \frac{dx}{1-x^3}$; в) $\displaystyle\int\limits_0^1 \frac{\sqrt{x}}{\operatorname{tg}^2 x}\,dx$.

Р е ш е н и е. а) Особената точка е $x = 0$. Имаме

$$\frac{\frac{\sin x}{x^2}}{\frac{1}{x}} = \frac{\sin x}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} 1$$

и затова от разходимостта на $\int\limits_0^\pi \dfrac{dx}{x}$ следва разходимостта на нашия интеграл;

б) Тук особената точка е $x = 1$ и тъй като

$$\frac{f(x)}{\frac{1}{1-x}} = \frac{1-x}{1-x^3} \xrightarrow[x\to 1]{} \frac{1}{3},$$

то интегралът е разходящ едновременно с $\int\limits_0^1 \frac{dx}{1-x}$.

1.4. $\int\limits_0^\alpha \frac{dx}{\sqrt{\cos x - \cos\alpha}}, \quad 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

Р е ш е н и е. Имаме

$$f(x) = \frac{\sqrt{\alpha - x}}{\sqrt{\alpha - x}\cdot\sqrt{2\sin\frac{\alpha - x}{2}\sin\frac{\alpha + x}{2}}} = \frac{\varphi(x)}{\sqrt{\alpha - x}},$$

където $\varphi(x) \xrightarrow[x\to\alpha]{} \frac{1}{\sqrt{\sin\alpha}}$. Тъй като $\int\limits_0^\alpha \frac{dx}{\sqrt{\alpha - x}}$ е сходящ, то същото е вярно и за нашия интеграл.

1.5. Намерете за какви стойности на λ е сходящ интегралът

$$\int\limits_0^\infty \frac{\operatorname{arctg} 5x}{x^\lambda}\, dx.$$

Р е ш е н и е. Представяме интеграла като сбор на интегралите

$$\int\limits_0^a \frac{\operatorname{arctg} 5x}{x}\,\frac{1}{x^{\lambda-1}}\, dx \quad \text{и} \quad \int\limits_a^\infty \frac{\operatorname{arctg} 5x}{x^\lambda}\, dx,$$

където $a > 0$. Тъй като $\frac{\operatorname{arctg} 5x}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} 5$, то първият интеграл е сходящ при $\lambda - 1 < 1$, т. е. $\lambda < 2$. От $\operatorname{arctg} 5x \to \frac{\pi}{2}$ при $x \to \infty$ следва, че $\int\limits_a^\infty \frac{\operatorname{arctg} 5x}{x^\lambda}\, dx$ е сходящ при $\lambda > 1$. Окончателно нашият интеграл е сходящ, когато са сходящи и двата интеграла, т. е. при $\lambda \in (1, 2)$.

1.6. Намерете за какви стойности на μ е сходящ интегралът:

а) $\int\limits_0^1 \frac{\ln x}{(1-x^2)^\mu}\, dx$; б) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (\operatorname{tg} x)^\mu\, dx$.

Р е ш е н и е. а) Подинтегралната функция има особености в точките 0 и 1. Да разгледаме $-\int\limits_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln x}{(1-x^2)^\mu}\, dx$. Когато $x \to 0$, $(1-x^2)^\mu \to 1$ и следователно последният интеграл е сходящ едновременно със сходящия интеграл

$$-\int\limits_0^{\frac{1}{2}} \ln x\, dx = -\frac{1}{2}\ln\frac{1}{2} + \lim_{x\to 0} x\ln x + \int\limits_0^{\frac{1}{2}} x\, d\ln x = -\frac{1}{2}\ln\frac{1}{2}.$$

В точката 1 числителят и знаменателят на подинтегралната функция се анулират. Тъй като

$$-\frac{\ln x}{1-x} \xrightarrow[x\to 1]{} 1, \quad \text{то} \quad \int\limits_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\ln x}{(1-x^2)^\mu}\, dx$$

е сходящ едновременно с $\int\limits_{\frac{1}{2}}^1 \frac{dx}{(1-x)^\mu}$, т. е. при $\mu - 1 < 1$. Окончателно несобственият интеграл от условието е сходящ при $\mu < 2$;

б) У п ъ т в а н е. Ако $\mu > 0$, то особеността е в точката $\frac{\pi}{2}$, а ако $\mu < 0$, то тя е в точката 0.

1.7. В зависимост от p и q изследвайте за сходимост следните интеграли:

а) $\int\limits_0^\infty \frac{dx}{x^p + x^q}$; б) $\int\limits_0^\infty \frac{x^p \operatorname{arctg} x}{2 + x^q}\, dx, \ q \geqq 0$.

Р е ш е н и е. а) Имаме две особени точки — 0 и ∞. Представяме дадения интеграл като сума от два интеграла:

$$\int\limits_0^a \frac{dx}{x^p + x^q} + \int\limits_a^\infty \frac{dx}{x^p + x^q}, \quad a \in (0, \infty).$$

Нека най-напред $p = q$, тогава нашият интеграл е разходящ, тъй като за сходимостта на интеграла от първи род $\frac{1}{2}\int\limits_0^a \frac{dx}{x^p}$ ни трябва $p < 1$, а за сходимостта на $\frac{1}{2}\int\limits_a^\infty \frac{dx}{x^p}$ — $p > 1$. Нека например $p < q$. Тогава за подинтегралната функция $f(x)$ получаваме

$$\frac{f(x)}{\frac{1}{x^p}} \to 1 \quad \text{при} \quad x \to 0 \quad \text{и} \quad \frac{f(x)}{\frac{1}{x^q}} \to 1 \quad \text{при} \quad x \to \infty.$$

Следователно несобственият интеграл е сходящ, ако са изпълнени едновременно двете неравенства $p < 1$, $q > 1$. При $q < p$ от симетрията следва, че интегралът е сходящ, ако са изпълнени едновременно двете неравенства $q < 1$, $p > 1$. С други думи, несобственият интеграл е сходящ, ако по-малкото от числата p и q е по-малко от 1, а по-голямото — по-голямо от 1.

1.8. Пресметнете $I_n = \int\limits_0^\infty e^{-x} x^n \, dx$, когато n е естествено число.

Р е ш е н и е. Като интегрираме по части I_n, получаваме

$$I_n = -e^{-x}.x^n\Big|_0^\infty + n\int\limits_0^\infty e^{-x}x^{n-1}\,dx = nI_{n-1}.$$

Тъй като $I_0 = 1$, то $I_n = n!$.

1.9. Определете за какви стойности на параметрите е сходящ интегралът:

а) $\displaystyle\int\limits_0^\infty e^{-x}x^\beta\,dx$; б) $\displaystyle\int\limits_0^\infty e^{-\alpha x}x^\beta\,dx$.

Р е ш е н и е. а) Тук имаме две особени точки — 0 и ∞. Разглеждаме $\int\limits_0^5 e^{-x}x^\beta\,dx$ и $\int\limits_5^\infty e^{-x}x^\beta\,dx$. От $e^{-x} \xrightarrow[x\to 0]{} 1$ следва, че първият интеграл е сходящ при $-\beta < 1$, т. е. $\beta > -1$. Тъй като съществува число $A > 0$, такова че при $x > A$ е изпълнено $e^{-x}x^\beta < \dfrac{1}{x^2}$, то $\int\limits_A^\infty e^{-x}x^\beta\,dx$ е сходящ при всяко β, а с него и $\int\limits_5^\infty e^{-x}x^\beta\,dx$. Окончателно нашият интеграл е сходящ при $\beta > -1$;

б) $\int\limits_0^1 e^{-\alpha x}x^\beta\,dx$ е сходящ едновременно с $\int\limits_0^1 x^\beta\,dx$, т. е. при $\beta > -1$. Ако $\alpha > 0$, то $\int\limits_1^\infty e^{-\alpha x}x^\beta\,dx$ е сходящ за всяко β. Ако $\alpha < 0$, $e^{-\alpha x}x^\beta \xrightarrow[x\to\infty]{} \infty$ и следователно интегралът е разходящ. Ако $\alpha = 0$, имаме $\int\limits_1^\infty \dfrac{dx}{x^{-\beta}}$ и той е сходящ при $\beta < -1$. Окончателно $\int\limits_0^\infty e^{-\alpha x}x^\beta\,dx$ е сходящ при $\alpha > 0$ и $\beta > -1$.

1.10. Намерете за какви стойности на параметрите следните интеграли са сходящи:

а) $\displaystyle\int\limits_2^\infty \frac{dx}{x^p \ln^q x}$; б) $\displaystyle\int\limits_e^\infty \frac{dx}{x^p(\ln x)^q(\ln\ln x)^r}$;

в) $\displaystyle\int\limits_0^{\frac{1}{2}} x^p|\ln x|^q\,dx$; г) $\displaystyle\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^p\ln^q\frac{1}{x}}$; д) $\displaystyle\int\limits_0^\infty \frac{\ln(1+x)}{x^p}\,dx$.

Р е ш е н и е. а) След смяна на променливата $x = e^t$ стигаме до $\int\limits_{\ln 2}^\infty e^{-t(p-1)}t^{-q}\,dt$. Този интеграл е сходящ при $p-1 > 0$ и всяко q или при $p = 1$ и $q > 1$. В противен случай интегралът е разходящ;

в) Правим смяна $x = e^{-t}$ и достигаме до интеграла

$$\int\limits_{\ln 2}^\infty \frac{e^{-t(1+p)}\,dt}{t^{-q}},$$

който е сходящ при $p > -1$ или при $p = -1$ и $q < -1$;

д) Представяме интеграла като сбор на интегралите

$$\int\limits_0^2 \frac{\ln(1+x)}{x}\cdot\frac{1}{x^{p-1}}\,dx \quad \text{и} \quad \int\limits_2^\infty \frac{\ln(1+x)}{x^p}\,dx.$$

От $\dfrac{\ln(1+x)}{x} \xrightarrow[x\to\infty]{} 1$ следва, че първият интеграл е сходящ при $p-1 < 1$, т. е. $p < 2$. Тъй като $\dfrac{\ln(1+x)}{\ln x} \xrightarrow[x\to\infty]{} 1$, то

$$\int\limits_2^\infty \frac{\ln(1+x)}{\ln x}\cdot\frac{1}{\ln^{-1} x.x^p}\,dx$$

ще бъде сходящ, ако е сходящ $\int\limits_2^\infty \dfrac{dx}{\ln^{-1} x.x^p}$, т. е. ако $p > 1$ (при смяната $x = e^t$ достигаме до интеграла $\int\limits_{\ln 2}^\infty e^{t(1-p)}t\,dt$, разгледан в зад. 1.9. Окончателно $p \in (1, 2)$.

5

1.11. Определете стойностите на параметъра, за които са сходящи интегралите:

а) $\displaystyle\int_0^1 x^\mu \ln x\,dx$; б) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^\mu \ln(\sin x)\,dx$.

Р е ш е н и е. а) След смяната $x = e^{-t}$ стигаме до $\int_0^\infty e^{-(\mu+1)t}.t\,dt$, откъдето съгласно зад. 1.9 получаваме, че интегралът е сходящ при $\mu+1>0$, т. е. при $\mu>-1$. (Особеността тук е само в точката $x=0$);

б) Интегралът (подинтегралната функция) има особеност в точката $x=0$, затова е достатъчно да разгледаме

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} x^\mu \ln(\sin x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x^\mu(\sin x)^\mu}{(\sin x)^\mu \cos x}\ln(\sin x)\,d(\sin x).$$

Тъй като $\left(\dfrac{x}{\sin x}\right)^\mu \dfrac{1}{\cos x} \xrightarrow[x\to 0]{} 1$, то този интеграл е сходящ едновременно с $\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\sin x)^\mu \ln(\sin x)\,d(\sin x)$, т. е. с $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} t^\mu \ln t\,dt$, или според а) при $\mu > -1$.

Последното може да се получи и директно, като се сравни функцията

$$x^\mu \ln(\sin x) = -x^\mu|\ln(\sin x)|$$

с $\dfrac{1}{x^\alpha}$, където $-\mu<\alpha<1$. Тогава по правилото на Лопитал имаме

$$\lim_{x\to 0}\frac{-x^\mu \ln(\sin x)}{\frac{1}{x^\alpha}} = \lim_{x\to 0}\frac{-\ln(\sin x)}{x^{-\mu-\alpha}}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{ctg} x}{(\mu+\alpha)x^{-\mu-\alpha-1}} = \lim_{x\to 0}\frac{x^{\mu+\alpha}}{(\mu+\alpha)\frac{\operatorname{tg} x}{x}} = 0.$$

От сходимостта на интеграла $\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$ следва и сходимостта на нашия интеграл при $\mu > -1$.

Нека сега $\mu \leqq -1$. Ако $0 < x < \frac{1}{2}$, то $|\ln(\sin x)| > \left|\ln(\sin\frac{1}{2})\right|$ и затова $\int_0^{\frac{1}{2}} x^\mu|\ln(\sin x)|\,dx$ е разходящ (тъй като интегралът $\int_0^{\frac{1}{2}} x^\mu\,dx$ е разходящ). Но това означава, че и интегралът от условието е разходящ при $\mu \leqq -1$.

1.12. Докажете, че $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos x)\,dx$ е сходящ.

Р е ш е н и е. Ако направим смяната $x = \frac{\pi}{2} - t$, получаваме интеграла $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin t)\,dt$, който съгласно зад. 1.11 б) е сходящ.

Задачата може да се реши директно, като с едно интегриране по части несобственият интеграл бъде сведен до собствен (интеграл върху краен интервал от непрекъсната функция), а именно

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos x)\,dx = x\ln(\sin x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\frac{\cos x}{\sin x}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{\operatorname{tg} x}\,dx.$$

1.13. Докажете, че е сходящ интегралът $\int_0^\infty (-1)^{[x^2]}\,dx$.

Р е ш е н и е. Ще сведем интеграла до сходящ ред по следния начин:

$$\int_0^\infty (-1)^{[x^2]}dx = \sum_{n=0}^\infty \int_{\sqrt{n}}^{\sqrt{n+1}} (-1)^{[x^2]}dx = \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}.$$

Полученият ред е сходящ съгласно критерия на Лайбниц.

В следващите няколко задачи ще доказваме сходимостта на предложените интеграли с помощта на критерия на Дирихле.

1.14. Докажете, че интегралът $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$ е сходящ, а интегралите $\int_0^\infty \frac{\sin^2 x}{x}\,dx$ и $\int_0^\infty \frac{|\sin x|}{x}\,dx$ са разходящи.

Решение. Тъй като $\frac{\sin x}{x} \xrightarrow[x \to 0]{} 1$, то и трите интеграла фактически нямат особеност в точката нула (имат отстранима особеност), така че вместо $\int\limits_0^\infty h(x)\,dx$ и в трите случая можем да разглеждаме $\int\limits_1^\infty h(x)\,dx$. За $\int\limits_1^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$ прилагаме критерия на Дирихле с $f(x) = \sin x$ (непрекъсната функция с ограничена примитивна) и $g(x) = \frac{1}{x}$ (монотонна функция, клоняща към нула при $x \to \infty$) и получаваме, че интегралът е сходящ. Ще отбележим, че сходимостта на този интеграл може да бъде получена и без използването на критерия на Дирихле, като се приложи формулата за интегриране по части, а именно:

$$\int\limits_1^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx = -\frac{\cos x}{x}\Big|_1^\infty - \int\limits_1^\infty \frac{\cos x}{x^2} = \cos 1 - \int\limits_1^\infty \frac{\cos x}{x^2}\,dx.$$

Последният интеграл е сходящ (даже абсолютно сходящ), което следва от неравенството $\left|\frac{\cos x}{x^2}\right| < \frac{1}{x^2}$.

Да разгледаме другите два интеграла. Тъй като $\frac{|\sin x|}{x} \geqq \frac{\sin^2 x}{x}$, то достатъчно е да докажем разходимостта само на

$$\int\limits_1^\infty \frac{\sin^2 x}{x}\,dx = \frac{1}{2}\int\limits_1^\infty \frac{1-\cos 2x}{x}\,dx.$$

Ако последният интеграл е сходящ, то като прибавим към него сходящия (съгласно критерия на Дирихле) интеграл $\frac{1}{2}\int\limits_1^\infty \frac{\cos 2x}{x}\,dx$, ще получим, че интегралът $\frac{1}{2}\int\limits_1^\infty \frac{dx}{x}$ трябва да бъде сходящ, което не е вярно.

1.15. Докажете, че $\int\limits_1^\infty \frac{\sin x}{x^\alpha}\,dx$ е сходящ при $\alpha > 0$, абсолютно сходящ при $\alpha > 1$ и разходящ при $\alpha \leqq 0$.

Упътване. При $\alpha \in (0,1]$ използвайте критерия на Дирихле, а при $\alpha \leqq 0$ — критерия на Коши.

1.16. Докажете, че $\int\limits_0^\infty x^{-\alpha}\sin(x^{1-\beta})\,dx$ е сходящ, когато α се намира между числата β и $2-\beta$.

Решение. Ако $\beta = 1$, то интегралът

$$\int\limits_0^\infty \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ A\to\infty}} \left(\int\limits_\varepsilon^1 \frac{dx}{x^\alpha} + \int\limits_1^A \frac{dx}{x^\alpha}\right)$$

е разходящ, тъй като трябва едновременно $\alpha < 1$ и $\alpha > 1$. Нека $\beta \neq 1$. Чрез смяната $x^{1-\beta} = y$ стигаме до несобствения интеграл

$$\int\limits_0^\infty y^{\frac{\beta-\alpha}{1-\beta}} \sin y\,dy = \int\limits_0^\infty \frac{\sin y}{y^p}\,dy,$$

където $p = \frac{\alpha-\beta}{1-\beta}$. Интегралът $\int\limits_0^a \frac{\sin y}{y}\cdot\frac{1}{y^{p-1}}\,dy$ е сходящ при $p-1<1$, т. е. при $p<2$. Интегралът $\int\limits_a^\infty \frac{\sin y}{y^p}\,dy$ е сходящ съгласно предишната задача при $p > 0$, т. е. окончателно трябва $0 < p < 2$. С други думи, нека $1-\beta > 0$, тогава неравенството $0 < \frac{\alpha-\beta}{1-\beta} < 2$ ни дава $\beta < \alpha < 2-\beta$ при $1-\beta > 0$ и $2-\beta < \alpha < \beta$ при $1-\beta < 0$.

1.17. Нека функцията $g(x)$ е монотонна върху полуправата $[a, \infty)$ и клони към нула при $x \to \infty$. Докажете, че интегралът $\int\limits_a^\infty \sin^2 x g(x)\,dx$ е сходящ или разходящ едновременно с интеграла $\int\limits_a^\infty g(x)\,dx$.

Следващата задача е естествено обобщение на зад. 1.14 и 1.17.

1.18. Нека $f(x)$ е непрекъсната върху $[a,\infty)$ и периодична с период ω функция, а функцията $g(x)$ е монотонна върху същата полуправа и клони към нула при $x \to \infty$. Нека $\int\limits_a^{a+\omega} f(x)\,dx = K$. Докажете, че при $K = 0$ интегралът $\int\limits_a^\infty f(x)g(x)\,dx$ е сходящ, а при $K \neq 0$ той е сходящ или разходящ едновременно с $\int\limits_a^\infty g(x)\,dx$.

Р е ш е н и е. Нека $K = 0$. Ще използваме критерия на Дирихле. За целта е достатъчно да докажем, че $\int_a^A f(x)\,dx$ е ограничен относно A, $A > a$. Тъй като $f(x)$ е периодична функция, то $\int_a^{a+n\omega} f(x)\,dx = 0$ за $n = 1, 2, 3, \dots$ Нека n е такова, че $a + n\omega \leqq A < a + (n+1)\omega$. Тогава

$$\left|\int_a^A f(x)\,dx\right| = \left|\int_{a+n\omega}^A f(x)\,dx\right| \leqq \int_{a+n\omega}^A |f(x)|\,dx \leqq C(A-a-n\omega) \leqq C\omega,$$

където C не зависи от A. Всички условия на критерия на Дирихле са изпълнени, следователно $\int_a^\infty f(x)g(x)\,dx$ е сходящ.

Нека сега $K \neq 0$. За функцията $f_1(x) = f(x) - \dfrac{K}{\omega}$ прилагаме току-що доказаното и получаваме, че интегралът $\int_a^\infty \left[f(x) - \dfrac{K}{\omega}\right] g(x)\,dx$ е сходящ. От това следва, че интегралите $\int_a^\infty f(x)g(x)\,dx$ и $\int_a^\infty g(x)\,dx$ са сходящи (или разходящи) едновременно.

1.19. Да се изследват за сходимост следните два интеграла:

$$\int_0^\infty \frac{e^{\cos x}\sin(\sin x)}{x}\,dx, \qquad \int_0^\infty \frac{e^{\sin x}\sin(\sin x)}{x}\,dx.$$

Р е ш е н и е. И в двата случая имаме отстранима особеност в точката 0, тъй като подинтегралните функции имат крайна граница при $x \to 0$. Да разгледаме $\int_1^\infty \dfrac{e^{\cos x}\sin(\sin x)}{x}\,dx$. Функцията $f(x) = e^{\cos x}\sin(\sin x)$ е периодична с период 2π и нечетна, ето защо $\int_1^{1+2\pi} f(x)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = 0$. Тази функция е и непрекъсната, а функцията $g(x) = \dfrac{1}{x}$ монотонно клони към нула при $x \to \infty$. Тогава според първата част от зад. 1.18 интегралът $\int_1^\infty \dfrac{e^{\cos x}\sin(\sin x)}{x}\,dx$ е

сходящ. За изследване сходимостта на $\int_1^\infty \dfrac{e^{\sin x}\sin(\sin x)}{x}\,dx$ ще си послужим с втората част на зад. 1.18, като вземем пак $g(x) = \dfrac{1}{x}$, но сега $f(x) = e^{\sin x}\sin(\sin x)$. Трябва да се покаже, че $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx \neq 0$. Но

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \int_0^\pi e^{\sin x}\sin(\sin x)\,dx + \int_{-\pi}^0 e^{\sin x}\sin(\sin x)\,dx$$

и, като направим във втория интеграл смяната $x = -t$, получаваме:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \int_0^\pi \left[e^{\sin x} - e^{-\sin x}\right]\sin(\sin x)\,dx,$$

а не е трудно да се види, че последният интеграл е положително число. Получихме, че вторият интеграл от условието е разходящ, тъй като такъв е интегралът $\int_1^\infty \dfrac{dx}{x}$.

1.20. Докажете, че ако $\alpha > 1$, то интегралът $\int_0^\infty \sin(x^\alpha)\,dx$ е сходящ. (и н т е г р а л н а Ф р е н е л)

Р е ш е н и е. Достатъчно е да разгледаме $\int_1^\infty \sin(x^\alpha)\,dx$. След като положим $t = x^\alpha$, свеждаме интеграла към $\int_1^\infty \dfrac{\sin t}{t^{1-\frac{1}{\alpha}}}\,dt$. Последният интеграл е сходящ съгласно критерия на Дирихле, тъй като $1 - \dfrac{1}{\alpha} > 0$ и $g(t) = \dfrac{1}{t^{1-\frac{1}{\alpha}}}$ клони към нула монотонно, а $\sin t$ е непрекъсната и има ограничена примитивна. (В случая бихме могли да си послужим със зад. 1.18, но всъщност тя е следствие от критерия на Дирихле.) Твърдението на зад 1.20 може да се обобщи по следния начин:

1.21. Докажете, че ако функцията $f(x)$ расте монотонно и $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = +\infty$, то интегралите $\int_a^\infty \sin(f(x))\,dx$ и $\int_a^\infty \cos(f(x))\,dx$ са сходящи.

У п ъ т в а н е. С помощта на теоремата за крайните нараствания докажете, че $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, направете смяната $t = f(x)$ и към получените интеграли приложете критерия на Дирихле.

1.22. а) Нека $f(t)$ е непрекъсната функция върху полуправата $[0,\infty)$ и интегралът $\int\limits_0^\infty f(t)\,dt$ е сходящ. Докажете, че $\int\limits_0^\infty \frac{t}{1+t^2} f(t)\,dt$ е сходящ;

б) Нека $f(t)$ е непрекъсната функция върху полуправата $[1,+\infty)$ и нека интегралът $\int\limits_1^\infty f(t)\,dt$ е сходящ. Докажете, че интегралът

$$\int\limits_1^\infty f(t)\ln\left(\cos\frac{t-1}{t}\right)dt$$

също е сходящ.

Р е ш е н и е. б) Нека $F(t) = \int\limits_1^t f(x)\,dx$. Тъй като $f(x)$ е непрекъсната, то $dF(t) = f(t)\,dt$. Тогава

$$\int\limits_1^A f(t)\ln\left(\cos\frac{t-1}{t}\right)dt = \int\limits_1^A \ln\left(\cos\frac{t-1}{t}\right)dF(t)$$

$$= F(t)\ln\left(\cos\frac{t-1}{t}\right)\Big|_1^A - \int\limits_1^A F(t)\left(-\operatorname{tg}\frac{t-1}{t}\right)\cdot\frac{1}{t^2}\,dt$$

$$= F(A)\ln\left(\cos\left(1-\frac{1}{A}\right)\right) + \int\limits_1^A \varphi(t)\frac{1}{t^2}\,dt,$$

където $\varphi(t)$ е ограничена функция. Оттук се вижда, че

$$\lim_{A\to\infty}\int\limits_1^A f(t)\ln\left(\cos\frac{t-1}{t}\right)dt$$

съществува, защото съществува $\lim\limits_{A\to\infty} F(A) = \int\limits_1^\infty f(t)\,dt$ и интегралът $\int\limits_1^\infty \frac{\varphi(t)}{t^2}\,dt$ е сходящ.

Тази задача може да бъде решена и с помощта на критерия на Абел.

1.23. Докажете критерия на Абел: Ако функциите $f(x)$ и $g(x)$ са дефинирани върху полуправата $[a,\infty)$, като $f(x)$ е непрекъсната и интегралът $\int\limits_a^\infty f(x)\,dx$ е сходящ, а $g(x)$ е монотонна и ограничена, то $\int\limits_a^\infty f(x)g(x)\,dx$ е сходящ.

Р е ш е н и е. От условието следва, че съществува крайна граница $g(\infty) = \lim\limits_{x\to\infty} g(x)$. Използваме представянето

$$f(x)g(x) = f(x)g(\infty) + f(x)[g(x) - g(\infty)],$$

За функциите $f(x)$ и $g(x) - g(\infty)$ са изпълнени условията от критерия на Дирихле и следователно $\int\limits_a^\infty f(x)[g(x) - g(\infty)]\,dx$ е сходящ. Оттук и от сходимостта на $\int\limits_a^\infty f(x)\,dx$ следва нашето твърдение.

1.24. Сходящ ли е интегралът $\int\limits_1^\infty \frac{\cos x}{\sqrt{x}}\operatorname{arctg} x\,dx$?

Р е ш е н и е. Интегралът $\int\limits_1^\infty f(x)\,dx = \int\limits_1^\infty \frac{\cos x}{\sqrt{x}}\,dx$ е сходящ съгласно критерия на Дирихле, а $g(x) = \operatorname{arctg} x$ е монотонна и ограничена функция. Тогава интегралът от условието е сходящ съгласно критерия на Абел.

В зад. 1.20 видяхме, че интегралът на Френел $\int\limits_0^\infty \sin x^2\,dx$ е сходящ, а подинтегралната функция $\sin x^2$ не клони към нула при $x \to \infty$ — нещо повече, тя няма граница при $x \to \infty$. Същото се отнася и за сходящия интеграл $\int\limits_0^\infty (-1)^{[x^2]}\,dx$ (зад. 1.13), като и тук подинтегралната функция няма граница при $x \to \infty$. Има случаи, когато $\int\limits_a^\infty f(x)\,dx$ се оказва сходящ даже при неограничена подинтегрална функция — например $f(x) = x\sin x^4$. Действително, ако направим смяната $t = x^2$ в интеграла $\int\limits_0^\infty x\sin x^4\,dx$, получаваме сходящия интеграл на Френел.

1.25. Нека функцията $f(x)$ е непрекъснато диференцуема върху полуправата $[a,\infty)$, $|f'(x)| \leqq c$ за $x \in [a,\infty)$ и $\int\limits_a^\infty |f(x)|\,dx$ е сходящ. Докажете, че $f(x) \xrightarrow[x\to\infty]{} 0$.

Упътване. От сходимостта на интеграла $\int\limits_a^\infty f'(x)f(x)\,dx$ следва, че съществува крайна граница $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$. Чрез допускане на противното се доказва, че тази граница може да бъде само 0.

1.26. Нека функцията $f(x)$ е монотонна в $[a,\infty)$, $f(x) \geqq 0$ и $\int\limits_a^\infty f(x)\,dx$ е сходящ. Докажете, че $\lim\limits_{x\to\infty} xf(x) = 0$.

Решение. Не е трудно да се види, че $f(x)$ може да бъде само намаляваща. От сходимостта на $\int\limits_a^\infty f(x)\,dx$ според критерия на Коши следва, че за всяко $\varepsilon > 0$ може да се намери число A $(A > a, 0)$ такова, че ако $x_1 > A$, $x_2 > A$, то

$$\left|\int\limits_{x_1}^{x_2} f(t)\,dt\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Това означава, че ако $\frac{x}{2} > A$, то

$$\int\limits_{\frac{x}{2}}^{x} f(t)\,dt < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Като използваме монотонността на $f(x)$, получаваме при $\frac{x}{2} > A$:

$$\left(x - \frac{x}{2}\right) f(x) \leqq \int\limits_{\frac{x}{2}}^{x} f(t)\,dt < \frac{\varepsilon}{2}.$$

С други думи, ако $x > 2A$, то $xf(x) < \varepsilon$, което доказва твърдението.

1.27. Нека функцията $f(x)$ е непрекъсната върху полуправата $[a,\infty)$, $\int\limits_a^\infty f(x)\,dx$ е сходящ, а функцията $g(x)$ — ограничена в $[a,\infty)$. Сходящ ли е интегралът $\int\limits_a^\infty f(x)g(x)\,dx$?

Решение. Не винаги. Например, ако $a > 0$, $f(x) = \frac{\sin x}{x}$, $g(x) = \operatorname{sign}\left(\frac{\sin x}{x}\right)$, то $\int\limits_1^\infty \frac{|\sin x|}{x}\,dx$ е разходящ.

Тази задача е пример за това, че условието в критерия на Абел за монотонност на функцията $g(x)$ е съществено.

В следващите задачи използвайте формулата на Тейлър, за да определите за какви стойности на параметрите дадените интеграли са сходящи:

1.28. а) $\displaystyle\int\limits_0^1 \frac{(e^x - 1 - x)^\alpha \sin x}{x^\beta}\,dt;$

б) $\displaystyle\int\limits_0^1 \frac{(1-\cos x)^\beta x^{2\alpha+1}(1-x)^3}{\ln^2(1-x)|\ln x|}\,dx;$

в) $\displaystyle\int\limits_0^1 \frac{(e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2})^\alpha \operatorname{tg} x^\beta}{x^\gamma}\,dx.$

Решение. а) Особеност има само в точката нула. Тъй като съгласно формулата на Тейлър за e^x имаме $e^x - 1 - x = \frac{x^2}{2} + o(x^2)$, а $\frac{\sin x}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} 1$, то нашият интеграл е сходящ едновременно с $\int\limits_0^1 \frac{x^{2\alpha+1}}{x^\beta}\,dx$, т. е. при $\beta - 2\alpha - 1 < 1$ или $\beta < 2\alpha + 2$;

б) В този случай имаме две особени точки: $x = 0$ и $x = 1$. Съгласно формулата на Тейлър получаваме $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)$, а $\ln(1-x) = -x + o(x)$ и следователно $\int\limits_0^{\frac{1}{2}} f(x)\,dx$ ($f(x)$ — подинтегралната функция от условието) е сходящ едновременно с интеграла

$$\int\limits_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^{2\beta-2+2\alpha+1}}{|\ln x|}\,dx,$$

който съгласно 1.10 в) е сходящ при $2\beta + 2\alpha - 1 > -1$, т. е. при $\alpha + \beta > 0$. Тъй като $\frac{|\ln x|}{(1-x)} \xrightarrow[x\to 1-0]{} 1$, то интегралът $\int_{\frac{1}{3}}^{1} f(x)\,dx$ е сходящ едновременно с интеграла $\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{(1-x)^2}{\ln^2(1-x)}\,dx$, който съгласно зад. 1.10 в) е сходящ (тук $p=2$, $q=-2$). Окончателно $\int_0^1 f(x)\,dx$ е сходящ при $\alpha + \beta > 0$.

1.29. Намерете за кои стойности на параметъра α са сходящи следните интеграли:

а) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}(x^4+1)^\alpha(1-x)^6}{\ln^6 x}\,dx$;

б) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-2x}\,dx}{\sqrt{(\sin x - x + \frac{x^3}{6})^\alpha}\sqrt[5]{(x-3)^2}}$.

Р е ш е н и е. а) Подинтегралната функция $f(x)$ е ограничена във всеки краен интервал, тъй като $\frac{(1-x)^6}{\ln^6 x} \xrightarrow[x\to 1]{} 1$. При $x \to \infty$ имаме $e^{-\frac{1}{x^2}} \to 1$ и следователно $\int_5^\infty f(x)\,dx$ е сходящ едновременно с интеграла

$$\int_5^\infty \frac{x^6\left(\frac{1}{x}-1\right)^6 x^{4\alpha}\left(1+\frac{1}{x^4}\right)^\alpha dx}{\ln^6 x},$$

който според зад. 1.10 а) е сходящ при $6 + 4\alpha \leqq -1$, т. е. при $\alpha \leqq -\frac{7}{4}$.

1.30. Сходящи ли са интегралите:

а) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{e^{\sin x}-1}\,dx$; б) $\displaystyle\int_0^1 e^{\frac{1}{2x}}(\cos x)^{\frac{1}{x^3}}\,dx$?

Р е ш е н и е. б) Ще решим по-общата задача за $\int_0^1 e^{\frac{\alpha}{x}}(\cos x)^{\frac{1}{x^3}}\,dx$.

Представяме подинтегралната функция във вида

$$f(x) = \exp\left(\frac{\alpha}{x} + \frac{1}{x^3}\ln(\cos x - 1 + 1)\right)$$

$$= \exp\left\{\frac{\alpha}{x} + \frac{1}{x^3}\left[(\cos x - 1) - \frac{(\cos x-1)^2}{2} + o(\cos x - 1)^2\right]\right\}$$

$$= \exp\left\{\frac{\alpha}{x} + \frac{1}{x^3}\left[-\frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^5) - \frac{x^4}{(2!)^2} + o(x^4)\right]\right\}$$

$$= \exp\left\{\frac{\alpha}{x} - \frac{1}{2x} + Cx + o(x)\right\}, \qquad C = \text{const}.$$

Следователно остава да определим кога е сходящ $\int_0^1 e^{\left(\alpha-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{x}} e^x\,dx$.

Като направим смяна $\frac{1}{x} = t$, получаваме, че този интеграл е сходящ при $\alpha \leqq \frac{1}{2}$.

В следващата задача ще използваме т. нар. *метод за отделяне на главната част*, който се състои в следното: Подинтегралната функция $f(x)$ се представя във вида $f(x) = g(x) + R(x)$, където $\int_a^\infty |R(x)|\,dx$ е сходящ. Тогава интегралите $\int_a^\infty f(x)\,dx$ и $\int_a^\infty g(x)\,dx$ са едновременно сходящи (абсолютно сходящи).

1.31. Изследвайте за абсолютна и условна сходимост интегралите:

а) $\displaystyle\int_2^\infty \sqrt{x}\ln\left(1 - \frac{\sin x^2}{x-1}\right)dx$; б) $\displaystyle\int_1^\infty \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{\cos x}{\sqrt[3]{x^2}}\right)dx$;

в) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\sin x}{\sqrt{x} - \sin x}\,dx$.

Решение. а) От формулата на Тейлър получаваме

$$\ln\left(1-\frac{\sin x^2}{x-1}\right)=-\frac{\sin x^2}{x-1}+R(x),$$

където

$$R(x)=-\frac{(\sin x^2)^2}{2(x-1)^2}+o\left(\frac{1}{(x-1)^2}\right).$$

Очевидно $\int\limits_2^\infty |R(x)|\,dx$ е сходящ и затова е достатъчно да изследваме сходимостта на $\int\limits_2^\infty \frac{\sqrt{x}\sin x^2}{(x-1)}\,dx$. Към този интеграл прилагаме критерия на Дирихле с $f(x)=x\sin x^2$ (примитивната $\frac{\cos x^2}{2}$ е ограничена) и $g(x)=\frac{1}{\sqrt{x}(x-1)}$. Следователно интегралът е сходящ.

Да разгледаме

$$\int\limits_2^\infty\left|\frac{\sqrt{x}\sin x^2}{x-1}\right|dx=\int\limits_2^\infty\frac{x|\sin x^2|}{\sqrt{x}(x-1)}.$$

Подинтегралната функция мажорира $\frac{x|\sin x^2|}{x^2}$. Но $\int\limits_2^\infty\frac{x|\sin x^2|}{x^2}\,dx$ е разходящ, защото в противен случай сходящ би бил и интегралът $\int\limits_{\sqrt{2}}^\infty\frac{|\sin t|}{t}\,dt$.

1.32. Пресметнете интегралите:

а) $\int\limits_0^\infty\frac{\ln x}{1+x^2}\,dx$; б) $\int\limits_0^1\frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,dx$.

Решение. а) Интегралът има две особени точки: 0 и ∞. Разделяме го на интегралите

$$I_1=\int\limits_0^1\frac{\ln x}{1+x^2}\,dx \quad \text{и} \quad I_2=\int\limits_1^\infty\frac{\ln x}{1+x^2}\,dx.$$

Първият е сходящ едновременно с интеграла $\int\limits_0^1\ln x\,dx=-\int\limits_0^\infty te^{-t}\,dt$.

Във втория интеграл правим смяната $x=\frac{1}{t}$ и получаваме

$$I_2=\int\limits_1^0\frac{\ln t}{1+t^2}\,dt=-\int\limits_\infty^1\frac{\ln x}{1+x^2}\,dx=-I_1,$$

откъдето се вижда, че той също е сходящ и $I=I_1+I_2=0$.

1.33. Пресметнете интегралите

$$I_1=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sin x)\,dx \quad \text{и} \quad I_2=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\cos x)\,dx.$$

Решение. В зад. 1.12 доказахме, че интегралите са сходящи, и чрез смяната на променливата $x=\frac{\pi}{2}-t$ установихме, че те са равни помежду си. Тогава

$$2I_1=I_1+I_2=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\left(\frac{\sin 2x}{2}\right)dx=-\frac{\pi}{2}\ln 2+\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sin 2x)\,dx.$$

Полагаме $2x=t$ и получаваме

$$2I_1=-\frac{\pi}{2}\ln 2+\frac{1}{2}\left(\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sin t)\,dt+\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\ln(\sin t)\,dt\right)$$

$$=-\frac{\pi}{2}\ln 2+\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sin t)\,dt=-\frac{\pi}{2}\ln 2+I_1,$$

откъдето $I_1=I_2=-\frac{\pi}{2}\ln 2$.

1.34. Пресметнете:

а) $\int\limits_0^\infty\frac{\operatorname{arctg}^2 x}{(1+x^2)^2}\,dx$; б) $\int\limits_0^\infty\frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}\,dx$;

в) $\int\limits_0^\infty \frac{\operatorname{arctg} x}{(1+x^2)^{3/2}}\,dx$;   г) $\int\limits_0^\infty \frac{x\ln x}{(1+x^2)^3}\,dx$.

Решение. а) Чрез смяната $\operatorname{arctg} x = t$ несобственият интеграл преминава в собствен:

$$I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} t^2\cos^2 t\,dt = \frac{t^3}{6}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{4}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} t^2\,d\sin 2t$$

$$= \frac{\pi^3}{48} + \frac{1}{4}\left(t^2\sin 2t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - 2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2t.t\,dt\right) = \frac{\pi^3}{48} + \frac{1}{4}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} t\,d\cos 2t$$

$$= \frac{\pi^3}{48} - \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{8}\left(\frac{\pi^2}{6} - 1\right);$$

б) Като интегрираме по части неопределения интеграл, получаваме

$$\int\frac{x\ln x\,dx}{(1+x^2)^2} = -\frac{1}{2}\int \ln x\,d\frac{1}{1+x^2}$$

$$= -\frac{\ln x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{4}\int\frac{(1+x^2-x^2)\,dx^2}{x^2(1+x^2)} + C$$

$$= -\frac{\ln x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{4}\ln x^2 - \frac{1}{4}\ln(1+x^2) + C.$$

Тогава

$$I = \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ A\to\infty}} \int\limits_\varepsilon^A \frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}\,dx = -\lim_{A\to\infty}\frac{\ln A}{2(1+A^2)}$$

$$+\frac{1}{4}\lim_{A\to\infty}\ln\frac{A^2}{1+A^2} - \lim_{\varepsilon\to 0}\left[-\frac{\ln\varepsilon}{2(1+\varepsilon^2)} + \frac{1}{2}\ln\varepsilon - \frac{1}{4}\ln(1+\varepsilon^2)\right]$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\left(-\frac{\varepsilon^2\ln\varepsilon}{2(1+\varepsilon^2)} + \frac{1}{4}\ln(1+\varepsilon^2)\right) = 0.$$

1.35. Пресметнете интегралите:

а) $\int\limits_{\sqrt{2}}^\infty \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-2}}$;   б) $\int\limits_a^b \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}$;

в) $\int\limits_1^\infty \frac{dx}{x\sqrt{1+x^5+x^{10}}}$.

Решение. а) Интегралът има две особени точки, а именно $\sqrt{2}$ и ∞. Да изследваме сходимостта му в точката $\sqrt{2}$. Подинтегралната функция $f(x)$ може да се представи като $\frac{\varphi(x)}{(x-\sqrt{2})^{\frac{1}{2}}}$, където $\varphi(x) \xrightarrow[x\to\sqrt{2}]{} C$, $C\in(0,\infty)$, и следователно $\int\limits_{\sqrt{2}}^A f(x)\,dx$ е сходящ (тук $A > \sqrt{2}$). Изследваме сходимостта на интеграла в ∞. Тъй като $f(x) = \frac{\psi(x)}{x^2}$, където $\psi(x) \xrightarrow[x\to\infty]{} C_1$, $C_1\in(0,\infty)$, то $\int\limits_A^\infty f(x)\,dx$ е сходящ. Пресмятаме интеграла като правим ойлерова субституция $\sqrt{x^2-2} = t - x$. Тогава $x = \frac{t^2+2}{2t}$, $dx = \frac{t^2-2}{2t^2}$ и

$$\int\frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-2}} = 2\int\frac{dt}{t^2-2t+2}$$

$$= 2\operatorname{arctg}(t-1) + C = 2\operatorname{arctg}(\sqrt{x^2-2}+x-1) + C.$$

За несобствения интеграл получаваме

$$I = \int\limits_{\sqrt{2}}^\infty f(x)\,dx = \lim_{\substack{p\to\infty\\ \varepsilon\to 0}} \int\limits_{\sqrt{2}+\varepsilon}^p f(x)\,dx$$

$$= \lim_{p\to\infty} 2\operatorname{arctg}(\sqrt{p^2-2}+p-1) - \lim_{\varepsilon\to 0} 2\operatorname{arctg}\left(\sqrt{2\sqrt{2}\varepsilon+\varepsilon^2}+\sqrt{2}+\varepsilon-1\right)$$

$$= \pi - 2\operatorname{arctg}(\sqrt{2}-1).$$

В известното равенство

$$\frac{1}{2}\operatorname{arctg} x = \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$$

заместваме $x = 1$ и получаваме $\operatorname{arctg}(\sqrt{2}-1) = \frac{\pi}{8}$. Окончателно $I = \frac{3\pi}{4}$;

б) Упътване. Направете смяната $x = a\cos^2 t + b\sin^2 t$.

6

в) Упътване. Направете смяната $\frac{1}{x^5} = t$.

1.36. Докажете, че:

а) $V.p. \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x} = 0$; б) $V.p. \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{arctg} x\, dx = 0$;

в) $V.p. \int\limits_{0}^{2} \frac{x\,dx}{x^2-1} = \frac{1}{2}\ln 3$;

г) $V.p. \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+1} = \pi$; д) $V.p. \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1+x}{1+x^2}\, dx = \pi$.

Решение. а), б), г) От дефиницията на главна стойност на несобствен интеграл следва, че ако функцията $f(x)$ е нечетна, то $V.p. \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 0$, ако $f(x)$ е четна, то $V.p. \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 2\int\limits_{0}^{\infty} f(x)\,dx$, в случай че несобственият интеграл $\int\limits_{0}^{\infty} f(x)\,dx$ е сходящ. В противен случай $f(x)$ не е интегруема в смисъл на Коши. С това а), б), г) можем да смятаме за доказани. В случай г) например

$$V.p. \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+1} = 2\int\limits_{0}^{\infty} \frac{dx}{x^2+1} = 2\operatorname{arctg} x\Big|_0^{\infty} = 2\cdot\frac{\pi}{2}.$$

Ако следваме директно дефиницията, ще напишем

$$V.p. \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+1} = \lim_{A\to\infty} \int\limits_{-A}^{A} \frac{dx}{x^2+1}$$

$$= \lim_{A\to\infty} \operatorname{arctg} x\Big|_{-A}^{A} = 2\operatorname{arctg}\infty = 2\cdot\frac{\pi}{2} = \pi;$$

в)

$$\int\limits_{0}^{2} \frac{x\,dx}{x^2-1} = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int\limits_{0}^{1-\varepsilon} \frac{x\,dx}{x^2-1} + \int\limits_{1+\varepsilon}^{2} \frac{x\,dx}{x^2-1}\right)$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2}\left(\ln|x^2-1|\Big|_0^{1-\varepsilon} + \ln|x^2-1|\Big|_{1+\varepsilon}^{2}\right)$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2}\left[\ln(2\varepsilon-\varepsilon^2) + \ln 3 - \ln(2\varepsilon+\varepsilon^2)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\ln 3 + \lim_{\varepsilon\to 0}\ln\frac{2\varepsilon-\varepsilon^2}{2\varepsilon+\varepsilon^2} = \frac{1}{2}\ln 3;$$

д) Всяка функция $f(x)$ (интегруема във всеки краен интервал) може да се представи като сума на две функции — четна и нечетна:

$$\varphi(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2} \quad \text{и} \quad \psi(x) = \frac{f(x)-f(-x)}{2}$$

(запазващи същото свойство интегруемост). Ясно е, че

$$V.p. \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\,dx = 2\int\limits_{0}^{\infty} \varphi(x)\,dx,$$

ако последният несобствен интеграл е сходящ. Тогава в нашия случай $\varphi(x) = \frac{1}{1+x^2}$ и

$$V.p. \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x+1}{x^2+1}\,dx = 2\int\limits_{0}^{\infty} \frac{dx}{x^2+1} = \pi.$$

1.37. Пресметнете $V.p. \int\limits_{\frac{1}{2}}^{2} \frac{dx}{\ln x}$.

Решение. Съгласно дефиницията

$$V.p. \int\limits_{\frac{1}{2}}^{2} \frac{dx}{\ln x} = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1-\varepsilon} \frac{dx}{\ln x} + \int\limits_{1+\varepsilon}^{2} \frac{dx}{\ln x}\right)$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\ln|\ln x|\Big|_{\frac{1}{2}}^{1-\varepsilon} + \ln(\ln x)\Big|_{1+\varepsilon}^{2}\right)$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\ln\left|\frac{\ln(1-\varepsilon)}{\ln(1+\varepsilon)}\right| - \ln\left|\ln\frac{1}{2}\right| + \ln(\ln 2) = \lim_{\varepsilon\to 0}\ln\left|\frac{-\varepsilon}{\varepsilon}\right| = 0.$$

1.38. Пресметнете:

а) $V.p. \int\limits_0^{\pi} x \operatorname{tg} x\, dx$; б) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt{3} - 2\sin x}$.

Р е ш е н и е. а) Съгласно дефиницията

$$V.p. \int\limits_0^{\pi} x \operatorname{tg} x\, dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon} x\operatorname{tg} x\, dx + \int\limits_{\frac{\pi}{2}+\varepsilon}^{\pi} x \operatorname{tg} x\, dx\right).$$

Във втория интеграл правим смяната $x = \pi - t$ и получаваме

$$V.p. \int\limits_0^{\pi} x \operatorname{tg} x\, dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon} x\operatorname{tg} x\, dx - \pi\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon} \operatorname{tg} x\, dx\right)$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\left(-2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon} x\, d\ln(\cos x) + \pi\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}\frac{d\cos x}{\cos x}\right)$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\left(-2x\ln(\cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon} + 2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}\ln\cos x\, dx + \pi\ln(\cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}\right)$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\left[2\varepsilon\ln\cos(\frac{\pi}{2}-\varepsilon)\right] + 2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\cos x\, dx$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} 2\varepsilon\ln\sin\varepsilon - 2\cdot\frac{\pi}{2}\ln 2 = -\pi\ln 2.$$

Тук използвахме, че $\lim\limits_{y\to 0} y\ln y = 0$ и резултата от зад. 1.33.

От решените примери става ясно, че понятието *несобствен интеграл* е едно обобщение на понятието *риманов интеграл*. Друго обобщение е *лебеговият интеграл* — както е известно всяка интегруема по Риман функция е интегруема по Лебег и нейният лебегов интеграл съвпада с римановия ѝ интеграл. Нещо повече, класът на сумируемите (интегруемите по Лебег) функции съдържа всички неотрицателни функции, несобствено интегруеми по Риман. Условието за положителност на функциите обаче е съществено, както ще се види от следващата задача.

1.39. Намерете за кои стойности на реалните параметри α и β функцията $f(x) = x^{\alpha}\sin(x^{\beta})$ в интервала $(0,1]$ е:

а) интегруема несобствено по Риман;
б) сумируема (интегруема по Лебег).

Р е ш е н и е. а) Ако $\beta > 0$, то $\int\limits_0^1 x^{\alpha}\sin(x^{\beta})\, dx$ след смяната $x^{\beta} = y$ преминава в

$$C\int\limits_0^1 \frac{\sin y}{y^{\frac{\beta-\alpha-1}{\beta}}}\, dy = C\int\limits_0^1 \frac{\sin y}{y}\frac{dy}{y^{\frac{-\alpha-1}{\beta}}},$$

който е сходящ едновременно с $\int\limits_0^1 \frac{dy}{y^{\frac{-\alpha-1}{\beta}}}$, т. е. когато $-\alpha - 1 < \beta$ или $\alpha > -|\beta| - 1$.

Нека сега $\beta < 0$. След смяната на променливата получаваме

$$\int\limits_1^{\infty} \frac{\sin y}{y^{\frac{\beta-\alpha-1}{\beta}}}\, dy.$$

Според зад. 1.15 този интеграл е сходящ при $\frac{\beta-\alpha-1}{\beta} > 0$, т. е. при $\beta - \alpha - 1 < 0$ или $\alpha > \beta - 1 = -|\beta| - 1$.

Когато $\beta = 0$, интегралът добива вида $C_1\int\limits_0^1 x^{\alpha}\, dx$ и следователно е сходящ при $\alpha > -1$.

Окончателно $f(x)$ е интегруема несобствено по Риман при $\alpha > -|\beta| - 1$.

б) За да бъде $f(x)$ сумируема (интегруема по Лебег), е необходимо и достатъчно тя да бъде измерима и $|f(x)|$ да бъде сумируема. Тъй като в нашия случай $|f(x)|$ има само една особеност в нулата, нейната сумируемост е еквивалентна на сходимостта на несобствения риманов интеграл $\int\limits_0^1 |f(x)|\, dx$.

Нека $\beta \geqq 0$, тогава $f(x) \geqq 0$ и от а) следва, че $f(x)$ е сумируема при $\alpha > -\beta - 1$.

Нека $\beta < 0$. Тогава въпросът за сумируемост се свежда до абсолютната сходимост на интеграла

$$\int\limits_1^{\infty} \frac{\sin y}{y^{\frac{\beta-\alpha-1}{\beta}}}\, dy.$$

Съгласно зад. 1.15 този интеграл е абсолютно сходящ при $\frac{\beta-\alpha-1}{\beta} > 1$, т. е. при $\beta - \alpha - 1 < \beta$ или $\alpha > -1$. С други думи, функцията е сумируема (интегруема по Лебег) при $\alpha > -1$, а несобствено интегруема при $\alpha > -|\beta| - 1 = \beta - 1$. Следователно, ако $\beta - 1 < \alpha < -1$, то $f(x)$ е несобствено интегруема по Риман, без да е интегруема по Лебег.

Аналогична задача може да се разглежда в интервала $[1, +\infty)$ за същата функция.

Глава 3

Граници и непрекъснатост на функции на много променливи

§ 1. Граници

В този параграф разглеждаме функции, дефинирани в $\mathbb{R}^m$ или в подмножество на $\mathbb{R}^m$ и приемащи реални числени стойности. Ще припомним, че пространството $\mathbb{R}^m$ се състои от наредени m-орки от реални числа — $x(x^1, x^2, \ldots, x^m)$. Като използваме езика на аналитичната геометрия, x наричаме точка, а $x^1, x^2, \ldots, x^m$ — координати на x. Под *разстояние* между точките $x(x^1, x^2, \ldots, x^m)$ и $y(y^1, y^2, \ldots, y^m)$ разбираме неотрицателното число

$$|x-y| = \sqrt{(x^1-y^1)^2 + \cdots + (x^m-y^m)^2}.$$

От неравенството на Минковски следва, че за всеки две точки $x, y \in \mathbb{R}^m$ е в сила неравенството на триъгълника

$$|x+y| \leqq |x| + |y|.$$

Под *ε-околност* на $a \in \mathbb{R}^m$ разбираме множеството от всички точки x, за които $|x-a| < \varepsilon$.

Ако $D \subset \mathbb{R}^m$, казваме, че a е *точка на сгъстяване* за D, ако във всяка ε-околност на a има поне една точка от D, различна от a.

Всички понятия, отнасящи се до редици от точки в $\mathbb{R}$, които не използват наредбата в $\mathbb{R}$, се пренасят без изменение за редици от точки в $\mathbb{R}^m$. Една редица от точки на $\mathbb{R}^m$ е *сходяща* тогава и само тогава, когато са сходящи редиците от съответните координати.

Нека $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^m$ и $a(a^1, a^2, \ldots, a^m)$ е точка на сгъстяване за D.

Дефиниция 1 (Хайне). Казваме, че f има граница при $x \to a$, ако съществува число l, такова че за всяка редица от точки $\{x_n\}$, за която $x_n \to a$, $x_n \in D$ и $x_n \neq a$, съответната редица $f(x_n) \to l$.

Дефиниция 2 (Коши). Казваме, че f има граница при $x \to a$, ако съществува число l, така че за всяко $\varepsilon > 0$ съществува число $\delta > 0$, такова че за всяко $x \in D$, за което

$$|x-a| < \delta \tag{1}$$

и $x \neq a$, е изпълнено $|f(x) - l| < \varepsilon$.

Неравенството (1) може да се замени с неравенствата

(2) $$|x^1 - a^1| < \delta, \quad |x^2 - a^2| < \delta, \quad \ldots, \quad |x^m - a^m| < \delta.$$

1.1. Докажете, че ако за всяка редица $\{x_n\}$, за която $x_n \to a$, $x_n \in D$ и $x_n \neq a$, съответната редица $\{f(x_n)\}$ е сходяща, то f има граница при $x \to a$ според дефиницията на Хайне.

1.2. Докажете, че дефинициите на Хайне и Коши са еквивалентни и числото l се определя еднозначно.

За границата на f при $x \to a$ използваме символа $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ или още

$$\lim_{(x^1,x^2,\ldots,x^m)\to(a^1,a^2,\ldots,a^m)} f(x^1, x^2, \ldots, x^m).$$

Ако a е точка на сгъстяване за $M \subset D$, можем да се интересуваме дали f има граница в точката a относно M. В този случай се употребява символа $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\in M}} f(x)$.

1.3. Нека P е полином на m променливи, т. е.

$$P(x) = \sum_{i_1+i_2+\cdots+i_m \leqq k} a_{i_1 i_2 \ldots i_m} (x^1)^{i_1} \ldots (x^m)^{i_m}.$$

Намерете $\lim\limits_{x\to a} P(x)$, $a \in \mathbb{R}^m$.

1.4. Нека R е рационална функция на m променливи, т. е. $R(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, където P и Q са полиноми. Нека $a \in \mathbb{R}^m$ и $Q(a) \neq 0$. Намерете $\lim\limits_{x\to a} R(x)$.

1.5. Пресметнете $\lim\limits_{(x,y)\to(0,c)} \dfrac{\sin xy}{x}$.

Решение. Тъй като $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\sin t}{t} = 1$, а $\lim\limits_{(xy)\to(0,c)} xy = 0$, то

$$\lim_{(x,y)\to(0,c)} \frac{\sin xy}{x} = \lim_{(x,y)\to(0,c)} \frac{\sin xy}{xy} \cdot y = c.$$

В предложените дотук задачи използвахме теоремите за намиране на граница на сума, произведение и частно на функции, аналогични на тези за функция на една променлива. Опитът, който имаме при пресмятане на

граници на функции на една променлива, ще ни бъде от полза и в случаите, когато разглеждаме функции на повече променливи.

1.6. Пресметнете:

а) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}$; б) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{1-\cos xy}{x^2y^2}$;

в) $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \left(1+x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{1}{x^2+y^2+z^2}}$;

г) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\ln(1+xy)}{xy}$; д) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} x^2\ln(x^2+y^2)$;

е) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} \dfrac{e^{xy-1}-1}{x^2y^2-1}$; ж) $\lim\limits_{(x,y)\to(\frac{1}{2},\frac{1}{2})} \dfrac{\ln(x+y)-x-y+1}{(x+y-1)^2}$.

Решение. а) Имаме

$$\frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1} = \frac{(x^2+y^2)(\sqrt{x^2+y^2+1}+1)}{x^2+y^2} \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 2.$$

Ако съществуват $\lim\limits_{y\to b} f(x,y) = \varphi(x)$ за $x \neq a$, но принадлежащо на околност на a, и $\lim\limits_{x\to a} \varphi(x) = l$, ще казваме, че съществува повторната граница $\lim\limits_{x\to a}\left(\lim\limits_{y\to b} f(x,y)\right) = l$.

1.7. Пресметнете повторните граници:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{x-y}{x+y}\right)$, $\lim\limits_{y\to 0}\left(\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-y}{x+y}\right)$;

б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{xy}{x^2+y^2}\right)$, $\lim\limits_{y\to 0}\left(\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xy}{x^2+y^2}\right)$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\lim\limits_{y\to 0}(x+y\sin\dfrac{1}{x})\right)$, $\lim\limits_{y\to 0}\left(\lim\limits_{x\to 0}(x+y\sin\dfrac{1}{x})\right)$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{x+y^2}{x^2+y}\right)$, $\lim\limits_{y\to 0}\left(\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+y^2}{x^2+y}\right)$;

д) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{x\sin\frac{1}{x}+y}{x+y}\right)$, $\lim\limits_{y\to 0}\left(\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sin\frac{1}{x}+y}{x+y}\right)$.

Решение. а) Имаме $\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{x-y}{x+y} = 1$, следователно $\lim\limits_{x\to 0}\left(\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{x-y}{x+y}\right) = 1$. Аналогично $\lim\limits_{y\to 0}\left(\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-y}{x+y}\right) = -1$.

1.8. а) Покажете, че може да бъде изпълнено равенството

$$\lim_{x\to a}\left(\lim_{y\to b} f(x,y)\right) = \lim_{y\to b}\left(\lim_{x\to a} f(x,y)\right),$$

но $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$ да не съществува;

б) Ако $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = l$ и $\lim\limits_{y\to b} f(x,y)$ съществува при $x \neq a$, то и границата $\lim\limits_{x\to a}\left(\lim\limits_{y\to b} f(x,y)\right)$ съществува и е равна на l.

Решение. а) Да разгледаме $f(x,y)=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$ в точката $(0,0)$. Както видяхме в зад. 1.7 б), повторните граници са равни. За да покажем, че $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ не съществува, да разгледаме редиците от точки $\left(\dfrac{1}{n},\dfrac{1}{n}\right)$ и $\left(\dfrac{1}{n},\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$, $n = 1, 2, \ldots$ Имаме

$$f\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{2}, \quad f\left(\frac{1}{n},\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \frac{\sqrt{n}}{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

От дефиницията на Хайне следва, че $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ не съществува.

1.9. Докажете, че ако $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = l$, то и

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(a,b)\\(x,y)\in M}} f(x,y) = l,$$

където M е подмножество на дефиниционната област на f.

1.10. Пресметнете

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in L}} f(x,y),$$

където L е права през началото, а f е съответно:

а) $f(x,y) = \dfrac{x-y}{x+y}$; б) $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$;

в) $f(x,y) = x + y\sin\dfrac{1}{x}$; г) $f(x,y) = \dfrac{x+y^2}{x^2+y}$.

Решение. а) Да разгледаме правата $L: x = t\cos\varphi$, $y = t\sin\varphi$, с ъглов коефициент $\operatorname{tg}\varphi$. Тогава

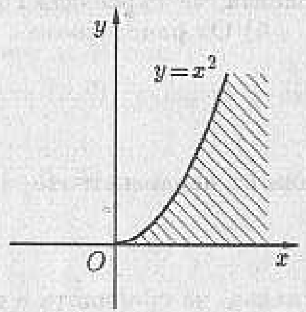
$$f(t\cos\varphi, t\sin\varphi) = \frac{\cos\varphi - \sin\varphi}{\cos\varphi + \sin\varphi} \quad \text{и} \quad \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in L}} f(x,y) = \frac{\cos\varphi-\sin\varphi}{\cos\varphi+\sin\varphi}.$$

1.11. За функциите от зад. 1.10 пресметнете $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$, ако съществуват.

1.12. Дайте пример за функция, която има една и съща граница в точката $(0,0)$ по всяка права, минаваща през нея, но няма граница в тази точка.

Решение. Нека $f(x,y) = 1$ за $x > 0$, $0 < y < x^2$, и $f(x,y) = 0$ за останалите стойности на (x,y). (На фиг. 1 е защрихована тази част от равнината, в която $f(x,y) = 1$.) Тогава

$$f(0,y) = 0 \quad \text{и} \quad \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in O_y}} f(x,y) = 0.$$



Фиг. 1

Да разгледаме правата $L_k: y = kx$. Ако $k \leqq 0$, то $yx \leqq 0$ и $f(x,kx) = 0$. Следователно

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in L_k}} f(x,y) = 0.$$

Нека сега $k > 0$. При $0 < x \leqq k$ имаме $kx - x^2 = x(k-x) \geqq 0$ и от дефинирането на f следва, че

$$f(x,kx) = 0 \quad \text{и} \quad \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in L_k}} f(x,y) = 0.$$

За да покажем, че $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ не съществува, да изберем редицата $\{x_n\}$ така, че $x_n > 0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$. Нека

$$y_n = \begin{cases} \dfrac{x_n^2}{2}, & n \text{ — четно} \\ 2x_n^2, & n \text{ — нечетно.} \end{cases}$$

Редицата от точки $(x_n, y_n) \to (0,0)$, но $f(x_{2l}, y_{2l}) = 1$, а $f(x_{2l+1}, y_{2l+1}) = 0$, т. е. редицата $\{f(x_n, y_n)\}$ не е сходяща.

Проверете, че функцията $\dfrac{xy^2}{x^2+y^4}$ също е решение на задачата.

1.13. Намерете границите:

а) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x+y)\sin\frac{1}{x}\cdot\sin\frac{1}{y}$; б) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2+y^2}$;

в) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sqrt{x^2y^2+1}-1}{x^2+y^2}$; г) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sqrt{x^2y^2+1}-1}{(x^2+y^2)\sqrt[3]{\sin xy}}$.

Решение. а) От неравенството

$$\left|(x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}\right| \leqq |x|+|y|$$

следва, че търсената граница е нула;

б) От равенството

$$\frac{x^2y^2}{x^2+y^2} = \frac{1}{\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}}$$

или от неравенството

$$\frac{x^2y^2}{x^2+y^2} \leqq \frac{1}{2}|xy|$$

следва, че границата е нула.

1.14. Пресметнете следните граници:

а) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^3+y^3)}{x^2+y^2}$; б) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}}{x^4+y^4}$;

в) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} (1+x^2y^2)^{-\frac{1}{x^2+y^2}}$; г) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)x^2y^2}$.

Решение. г) Като използваме формулата на Тейлър $\cos\alpha = 1-\dfrac{\alpha^2}{2}+o(\alpha^2)$, получаваме

$$\frac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)x^2y^2} = \frac{(x^2+y^2)+o((x^2+y^2)^2)}{2(x^2+y^2)x^2y^2}$$

$$= \frac{x^2+y^2}{2x^2y^2}\left(1+\frac{o((x^2+y^2)^2)}{(x^2+y^2)^2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}\right).(1+o(1)) \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} \infty.$$

1.15. Нека f е дефинирана в околност на $(0,0)$. Нека $f(tx,ty) = f(x,y)$ за $t\neq 0$ (f е хомогенна от нулева степен):

а) Докажете, че каквато и точка (x_0,y_0) да вземем от дефиниционната област на f, то съществува редица $(x_n,y_n)\to(0,0)$, такава че $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n,y_n) = f(x_0,y_0)$;

б) Ако $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ съществува, то $f=\mathrm{const}$.

Казваме, че $g(s,t) \xrightarrow[s\to s_0]{} l$ равномерно относно t, ако за всяко $\varepsilon>0$ съществува такова $\delta>0$, че за всяко s, за което $|s-s_0|<\delta$, е изпълнено $|g(s,t)-l|<\varepsilon$ за всяко допустимо t.

1.16. Докажете, че $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = l$ тогава и само тогава, когато $f(t\cos\varphi, t\sin\varphi) \xrightarrow[t\to 0]{} l$ равномерно относно φ.

Упътване. Използвайте дефиницията на Коши.

1.17. Изследвайте за граница в точката $(0,0)$ следните функции:

а) $\dfrac{xy}{x^2+y^2}$; б) $\dfrac{x^2+y^2}{x^4+y^4}$; в) $\dfrac{x^4-x^2y^2+y^4}{x^4+y^4}$;

г) $\dfrac{1}{x^2+y^2}$; д) $\dfrac{x^3y^3}{x^2+y^2}$; е) $\dfrac{x+y}{x^2+y^2}$; ж) $\dfrac{xy^2}{x^2+y^4}$;

з) $\dfrac{xy^2}{x^2+y^6}$; и) $\dfrac{x^3}{y^2}e^{-\frac{x^2}{y}}$; к) $(x^2+y^2)^{x^2y^2}$.

1.18. Дайте съответни дефиниции за понятията

$$\lim_{\substack{x\to a\\ y\to\infty}} f(x,y),\quad \lim_{\substack{x\to\infty\\ y\to b}} f(x,y),\quad \lim_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}} f(x,y).$$

Какво ще означава $f(x,y) \xrightarrow[(x,y)\to(a,b)]{} \infty$?

1.19. Пресметнете:

а) $\displaystyle\lim_{\substack{x\to\infty\\ y\to 0}} \frac{1}{x^2+y^2}$; б) $\displaystyle\lim_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}} \frac{x\sin x}{x^4+y^4}$; в) $\displaystyle\lim_{\substack{x\to\infty\\ y\to-\infty}} xy$;

г) $\displaystyle\lim_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}} x^2e^{-(x^2-y)}$; д) $\displaystyle\lim_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}} \frac{x+y}{x^2-xy+y^2}$; е) $\displaystyle\lim_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}} \frac{x^2+y^2}{x^4+y^4}$;

ж) $\displaystyle\lim_{\substack{x\to\infty\\ y\to a}} \left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{x^2}{x+y}}$; з) $\displaystyle\lim_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}} (x^2+y^2)e^{-(x+y)}$.

§ 2. Непрекъснатост

Дефиниция 1 (Коши). Казваме, че функцията $f : D \to \mathbb{R}$ е непрекъсната в точката $a \in D$, ако за всяко $\varepsilon > 0$ съществува $\delta > 0$, такова че при $|x-a| < \delta$, $x \in D$, е изпълнено

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Дефиниция 2 (Хайне). Казваме, че функцията $f : D \to \mathbb{R}$ е непрекъсната в точката $a \in D$, ако за всяка редица $\{x_n\}$, за която $x_n \to a$, $x_n \in D$, редицата $\{f(x_n)\}$ е сходяща и има граница $f(a)$.

2.1. Докажете, че дефинициите на Хайне и Коши за непрекъснатост на функция са еквивалентни.

2.2. Нека a е точка от дефиниционната област D на f и освен това е точка на сгъстяване за D. Докажете, че необходимо и достатъчно условие за непрекъснатост на f в точката a е да бъде изпълнено равенството $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$. Ако $a \in D$, но не е точка на сгъстяване за D (такава точка се нарича *изолирана точка* на D), то f е непрекъсната в a.

2.3. а) Нека P е полином на m променливи. Докажете, че P е непрекъсната във всяка точка;

б) Нека $R = \dfrac{P}{Q}$ е рационална функция и $Q(a) \neq 0$. Докажете, че R е непрекъсната в точката a.

2.4. Нека f е дефинирана в околност на точката a, непрекъсната в самата точка и $f(a) > 0$. Докажете, че съществува $\delta > 0$, такова че ако $|x-a| < \delta$, то $f(x) > 0$.

Р е ш е н и е. Да приложим за $\varepsilon = \dfrac{f(a)}{2}$ дефиницията на Коши. Съществува $\delta > 0$, такова че при $|x-a| < \delta$ имаме $|f(x) - f(a)| < \dfrac{f(a)}{2}$, от което следва $f(x) > \dfrac{f(a)}{2} > 0$.

2.5. Докажете, че:

а) сума или произведение на непрекъснати функции е непрекъсната функция;

б) нека $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, $\varphi_i : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, m$, и $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m$ са непрекъснати в точка $a \in \mathbb{R}^k$, f е непрекъсната в точката $(\varphi_1(a), \varphi_2(a), \ldots, \varphi_m(a))$. Тогава

$$\Phi(x) = f(\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_m(x)) : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$$

е непрекъсната в точката a.

2.6. Изследвайте за непрекъснатост следните функции:

а) $f(x, y) = \dfrac{x+y}{x^2+y^2}, \quad x^2+y^2 \neq 0,\ f(0,0) = 0;$

б) $f(x, y) = (x+y)\sin\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{y}, \quad xy \neq 0,\ f(0,y) = f(x,0) = 0;$

в) $f(x, y) = \dfrac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad x \geqq 0,\ x^2+y^2 \neq 0;$

г) $f(x, y) = \dfrac{1}{\cos x}\ln\dfrac{1+y\cos x}{1-y\cos x}, \quad 0<x<\dfrac{\pi}{2},\ |y|<1,\ f\left(\dfrac{\pi}{2}, y\right) = 2y;$

д) $$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{\ln(1+y\cos x)}{\cos x}, & 0 \leqq x \leqq \pi,\ x \neq \dfrac{\pi}{2},\ |y| < 1, \\ y, & x = \dfrac{\pi}{2},\ |y| < 1; \end{cases}$$

е) $$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{y\cos^2 x - \ln(1+y\cos^2 x)}{\cos^4 x}, & 0 \leqq x < \dfrac{\pi}{2},\ |y| < 1, \\ \dfrac{y^2}{2}, & x = \dfrac{\pi}{2},\ |y| < 1. \end{cases}$$

Р е ш е н и е. г) Дефиниционната област на f е правоъгълник без две от страните му. От зад. 2.5 следва непрекъснатостта на f във всички точки освен тези, за които $x = \dfrac{\pi}{2}$. Сходимостта в тях ще изследваме, като използваме формулата на Тейлър $\ln(1+z) = z + o(z)$. Получаваме

$$f(x, y) = \frac{\ln(1+y\cos x) - \ln(1-y\cos x)}{\cos x} = \frac{2y\cos x + o(y\cos x)}{\cos x}$$

$$= 2y + y\frac{o(y\cos x)}{y\cos x} \xrightarrow[(x,y)\to(\frac{\pi}{2}, y_0)]{} 2y_0.$$

Следователно f е непрекъсната в цялата си дефиниционна област.

2.7. Нека

$$f(x, y) = \frac{y\sin x - \operatorname{arctg}(y\sin x)}{\sin^3 x}, \quad 0 < x \leqq \frac{\pi}{2}.$$

Определете $f(0, y)$ така, че f да бъде непрекъсната в точката $(0, y_0)$.

Нека f е дефинирана в околност на точката (x_0, y_0). Да разгледаме $\varphi(x) = f(x, y_0)$. Ако φ е непрекъсната в точката x_0, казваме, че f е непрекъсната по x в точката (x_0, y_0). Аналогично, ако $\psi(y) = f(x_0, y)$ е непрекъсната в y_0, казваме, че f е непрекъсната по y в точката (x_0, y_0). Например функцията $f(x, y) = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$, където $x^2 + y^2 \neq 0$ и $f(0, 0) = 0$, е непрекъсната както по x, така и по y в точката $(0, 0)$, но не е непрекъсната в нея.

По-общо можем да дефинираме непрекъснатост на f в точка $a \in M \subset D$ относно множеството M, като в дефинициите на Хайне и Коши на мястото на множеството D поставим M. Ако f е непрекъсната в a, то тя е непрекъсната в a относно всяко множество $M \subset D$.

2.8. Дайте пример за функция, която е непрекъсната в точката (x_0, y_0) относно всяка права през (x_0, y_0), но не е непрекъсната в тази точка.

Упътване. Вж. зад. 1.12.

2.9. Дайте пример за функция, която е непрекъсната в точката $(0, 0)$ относно всяка парабола през $(0, 0)$, но не е непрекъсната в тази точка.

Упътване. Използвайте идеята от зад. 1.12, но вместо параболата $y = x^2$ вземете $y = x^4$.

2.10. Нека f е непрекъсната по x във всяка точка от D и непрекъсната по y равномерно относно x. Това означава, че за всяко y_0, за което съществува x_0, такова че $(x_0, y_0) \in D$, и за всяко $\varepsilon > 0$ съществува $\delta > 0$, така че при $|y - y_0| < \delta$ е изпълнено $|f(x, y) - f(x, y_0)| < \varepsilon$ за всяко x, за което (x, y), $(x, y_0) \in D$. Докажете, че f е непрекъсната във всяка точка от D.

Упътване. Използвайте неравенството

$$|f(x, y) - f(x_0, y_0)| \leqq |f(x, y) - f(x, y_0)| + |f(x, y_0) - f(x_0, y_0)|.$$

2.11. Нека f е непрекъсната поотделно както по x, така и по y и при фиксирано x е монотонна функция на y. Докажете, че f е непрекъсната.

Упътване. Да предположим, че $f(x, y)$ е монотонно растяща по y при всяко фиксирано x и да допуснем, че f не е непрекъсната в точката (x_0, y_0). Тогава съществуват $\varepsilon_0 > 0$ и точки (x_δ, y_δ), за които $|x_\delta - x_0| < \delta$, $|y_\delta - y_0| < \delta$ и $|f(x_\delta, y_\delta) - f(x_0, y_0)| \geqq \varepsilon_0$. Да

предположим, че $y_\delta \geqq y_0$. От неравенството

$$\varepsilon_0 \leqq |f(x_\delta, y_\delta) - f(x_\delta, y_0)| + |f(x_\delta, y_0) - f(x_0, y_0)|,$$

като използваме непрекъснатостта по x, получаваме

$$\frac{\varepsilon_0}{2} < |f(x_\delta, y_\delta) - f(x_\delta, y_0)|$$

при достатъчно малки δ. От монотонността следва, че

$$\frac{\varepsilon_0}{2} + f(x_\delta, y_0) < f(x_\delta, y_\delta).$$

За $y > y_0$ и достатъчно малки δ имаме $y_0 \leqq y_\delta < y$ и

$$\frac{\varepsilon_0}{2} + f(x_\delta, y_0) < f(x_\delta, y_\delta) \leqq f(x_\delta, y),$$

откъдето при $\delta \to 0$ получаваме

$$\frac{\varepsilon_0}{2} + f(x_0, y_0) \leqq f(x_0, y),$$

което при $y \to y_0$ ни води до желаното противоречие.

2.12. Нека f е ограничена в D. Числото

$$\underset{D}{\omega} f = \sup_{x \in D} f(x) - \inf_{x \in D} f(x)$$

се нарича осцилация на f в D. Докажете, че

а) $\underset{D}{\omega} f = \sup\limits_{x, y \in D} |f(x) - f(y)|$; б) $\underset{D_1}{\omega} f \leqq \underset{D}{\omega} f$, където $D_1 \subset D$.

2.13. Нека f е дефинирана в D, $a \in M \subset D$, $V(a, \delta) = \{x : |x - a| < \delta\}$ и редиците от положителни числа $\{\delta_n\}$, $\{\mu_n\}$ клонят към нула. Докажете, че $\lim\limits_{n \to \infty} \underset{M \cap V(a, \delta_n)}{\omega} f$ съществува и е равна на $\lim\limits_{n \to \infty} \underset{M \cap V(a, \mu_n)}{\omega} f$. (Общата стойност на тези две граници се означава с $\omega[f, a, M]$ и се нарича *осцилация* на f в точката a относно M.)

2.14. Докажете, че f е непрекъсната в точка a относно множеството M тогава и само тогава, когато $\omega[f, a, M] = 0$.

7

§ 3. Глобални свойства на непрекъснатите функции. Непрекъснати изображения

Дефиниция 1. Множеството $F \subset \mathbb{R}^m$ се нарича *затворено*, ако съдържа границата на всяка сходяща редица от точки на F.

Дефиниция 2. Множеството B се нарича *ограничено*, ако съществува положително число r, така че $|x| \leqq r$ за всяко $x \in B$.

Дефиниция 3. Множеството K се нарича *компактно*, ако е затворено и ако от всяка редица от точки на K може да се избере сходяща подредица.

Дефиниция 4. Множеството $U \subset \mathbb{R}^m$ се нарича отворено, ако допълнението му $\mathbb{R}^m \setminus U$ е затворено.

3.1. Да разгледаме следното свойство за множеството $U \subset \mathbb{R}^m$: за всяко $x \in U$ съществува $\varepsilon_x > 0$, такова че всяко $y \in \mathbb{R}^m$, за което $|x-y| < \varepsilon_x$, принадлежи на U.

Докажете, че U е отворено тогава и само тогава, когато притежава това свойство.

Р е ш е н и е. Да допуснем първо, че U е отворено, но не удовлетворява споменатото свойство. Това означава, че съществува точка $x_0 \in U$, за която не може да се намери съответно ε, т. е. за всяко $\varepsilon > 0$ съществува поне едно y_ε, за което $|y_\varepsilon - x_0| < \varepsilon$, но $y_\varepsilon \notin U$. Да дадем на ε стойностите $1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$ Получаваме редица от точки $\{y_n\}$, за които $|y_n - x_0| < \frac{1}{n}$ и $y_n \notin U$. Редицата $y_n \to x_0$, елементите ѝ принадлежат на затвореното множество $\mathbb{R}^m \setminus U$ и по дефиницията на затворено множество трябва $x_0 \in \mathbb{R}^m \setminus U$, което противоречи на избора на $x_0 \in U$.

Нека сега U удовлетворява свойството. Ще покажем, че U е отворено. За тази цел е достатъчно да установим, че границата на всяка сходяща редица от точки на $\mathbb{R}^m \setminus U$ принадлежи също на $\mathbb{R}^m \setminus U$. Нека $\{y_n\}$ е такава редица и $y_n \to y_0$. Да предположим, че $y_0 \notin \mathbb{R}^m \setminus U$, т. е. $y_0 \in U$. Тогава съществува $\varepsilon_0 > 0$, такова че $\{y : |y - y_0| < \varepsilon_0\} \subset U$. Но тогава $|y_n - y_0| \geqq \varepsilon_0$ и $\{y_n\}$ не може да клони към y_0. Полученото противоречие показва, че $x_0 \in \mathbb{R}^m \setminus U$.

Това свойство на отворените множества може да служи за дефиниция.

3.2. Докажете, че:

а) сечение на произволен брой затворени множества е затворено;

б) обединение на краен брой затворени множества е затворено;

в) обединение на произволен брой затворени множества може и да не бъде затворено.

3.3. Докажете, че:

а) обединение на произволен брой отворени множества е отворено;

б) сечение на краен брой отворени множества е отворено;

в) сечение на произволен брой отворени множества може и да не бъде отворено.

3.4. Нека $D \subset \mathbb{R}^m$. С $\overline{D}$ ще означаваме множеството, което се получава, като към D присъединим всичките му точки на сгъстяване. Докажете, че $\overline{D}$ е затворено множество. (Множеството $\overline{D}$ се нарича *затворена обвивка* на D.)

3.5. Докажете, че множеството $K \subset \mathbb{R}^m$ е компактно тогава и само тогава, когато е ограничено и затворено.

3.6. Докажете, че:

а) отвореното кълбо $V(x_0, \varepsilon) = \{x : |x - x_0| < \varepsilon\}$ е отворено множество;

б) кълбото $K(x_0, \varepsilon) = \{x : |x - x_0| \leqq \varepsilon\}$ е компактно;

в) затвореният куб $P(x_0, \varepsilon) = \{x : |x_0^i - x^i| \leqq \varepsilon,\ i = 1, \ldots, m\}$ е компактно множество.

3.7. Л е м а н а К а н т о р. Нека K_n са непразни компактни множества, за които $K_{n+1} \subset K_n$. Докажете, че съществува $x_0 \in K_n$ за всяко $n \in \mathbb{N}$.

Р е ш е н и е. Да изберем редица от точки $\{x_n\}$, $x_n \in K_n$. Тъй като $K_n \subset K_1$, то $\{x_n\} \subset K_1$ и съгласно компактността на K_1 може да се избере сходяща подредица $\{x_{n_k}\}$. Нека x_0 е границата ѝ. Нека $n \in \mathbb{N}$ и $n_{k_0} > n$. Тогава $x_{n_k} \in K_n$ за $k \geqq k_0$ и следователно $x_0 \in K_n$.

Казваме, че $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ е *покритие* за множеството K, ако $K \subset \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$. Ако U_α са отворени множества, покритието се нарича отворено.

3.8. Л е м а н а Б о р е л — Л е б е г. Докажете, че множеството K е компактно тогава и само тогава, когато от всяко отворено покритие на K може да се избере крайно подпокритие.

У п ъ т в а н е. *Необходимост.* Нека K е компактно множество и $\{U_\alpha\}$ е отворено покритие на K. Да предположим, че не може да се избере крайно подпокритие. Да изберем куб P_1, който съдържа K, и да го разделим на 2^m кубове ($K \subset \mathbb{R}^m$) със страни, равни на половината от страната на първоначалния куб. Множеството K се разпада на 2^m (краен брой) компактни части, всяка от които изцяло лежи в един от новите кубове. Нека K_1 е тази част, която не се покрива от краен брой елементи на $\{U_\alpha\}$. Като продължим този процес, получаваме редицата $K \supset K_1 \supset K_2 \supset \dots$ от компактни множества. От зад. 3.7 следва, че съществува точка $x_0 \in K$, $x_0 \in K_i$, $i = 1, 2, \dots$ Нека $x_0 \in U_{\alpha_0}$. Остава да се покаже, че $K_n \subset U_{\alpha_0}$ за достатъчно голямо n, което противоречи на избора на K_n.

Достатъчност. Нека от всяко отворено покритие на K може да се избере крайно подпокритие. Първо ще покажем, че K е ограничено. Очевидно $K \subset \bigcup\limits_{x \in K} V(x, \varepsilon)$. Съгласно допускането съществува крайно подпокритие, т. е. $K \subset \bigcup\limits_{i=1}^{k} V(x_i, \varepsilon)$, от което следва, че K е ограничено. Нека сега $x_n \to x_0$ и $x_n \in K$. Да предположим, че $x_0 \notin K$ и нека x е произволен елемент на K. Тогава $|x - x_0| \neq 0$, тъй като $x_0 \notin K$. Да разгледаме покритието на K: $\left\{ V\left(x, \dfrac{|x-x_0|}{3}\right) \right\}_{x \in K}$, и да изберем крайно подпокритие $\left\{ V\left(a_i, \dfrac{|a_i-x_0|}{3}\right) \right\}_{i=1}^{l}$. Но тогава

$$|x_n - x_0| \geq \min_{i=1,\dots,l} \frac{|a_i - x_0|}{3},$$

което противоречи на допускането, че $x_n \to x_0$.

3.9. *Докажете, че ако K_1 и K_2 са компактни подмножества съответно на $\mathbb{R}^l$ и $\mathbb{R}^m$, то $K_1 \times K_2$ е компактно подмножество на $\mathbb{R}^{l+m}$.*

3.10. Нека $f : D \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ е непрекъсната функция в D. Докажете, че множеството $\{x : f(x) = s\}$, $s \in \mathbb{R}$, е затворено.

Известна е теоремата на Вайерщрас: Ако f е непрекъсната функция в компактното множество K, то тя е ограничена и достига най-голямата и най-малката си стойност.

3.11. Нека $f : K \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$. Под графика на f разбираме подмножеството на $\mathbb{R}^{m+1}$, което се състои от точките $(x, f(x))$. Докажете, че ако K е компактно, f е непрекъсната в K тогава и само тогава, когато графиката ѝ е компактна.

3.12. Нека $F \subset \mathbb{R}^m$, $F \neq \varnothing$, $x \in \mathbb{R}^m$ и

$$d_F(x) = \inf_{y \in F} |x - y|.$$

Докажете, че:

а) $d_F(x) = 0$ тогава и само тогава, когато $x \in \overline{F}$;

б) ако F е затворено, то съществува $x_0 \in F$, така че $d_F(x) = |x - x_0|$ (x_0 зависи от x).

3.13. Нека F и G са затворени подмножества на $\mathbb{R}^m$, $F \cap G = \varnothing$. Покажете, че съществува непрекъсната функция $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, такава че $f(x) = 0$ за $x \in F$, $f(x) = 1$ за $x \in G$ и $0 \leqq f(x) \leqq 1$.

Упътване. Разгледайте

$$f(x) = \frac{d_F(x)}{d_F(x) + d_G(x)}.$$

3.14. Нека $D \subset \mathbb{R}^m$ има свойството: за всеки две точки $x(x^1, x^2, \dots, x^m)$ и $y(y^1, y^2, \dots, y^m)$ от D съществуват непрекъснати функции $\varphi_i : [0,1] \to \mathbb{R}$, такива че $\varphi_i(0) = x^i$, $\varphi_i(1) = y^i$, $i = 1, 2, \dots, m$ и $(\varphi_1(t), \dots, \varphi_m(t)) \in D$ за $t \in (0,1)$. (Множество, притежаващо това свойство, се нарича *свързано*.) Нека $f : D \to \mathbb{R}$ е непрекъсната функция и числото λ удовлетворява неравенствата $f(x) < \lambda < f(y)$, където $x, y \in D$. Докажете, че съществува $z \in D$, за което $f(z) = \lambda$.

Упътване. Използвайте свързаността на D и зад. 2.5 б).

3.15. Нека $S^1 = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\}$ и $f : S^1 \to \mathbb{R}$ е непрекъсната функция. Докажете, че съществува точка $(x_0, y_0) \in S^1$, за която $f(x_0, y_0) = f(-x_0, -y_0)$.

Казваме, че функцията $f : M \to \mathbb{R}$ е *равномерно непрекъсната* в M, ако за всяко $\varepsilon > 0$ съществува $\delta > 0$, такова че за всеки две точки $x, y \in M$, за които $|x - y| < \delta$, е изпълнено $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

Ако f е равномерно непрекъсната в M, тя е непрекъсната във всяка точка от M относно M. Ако множеството е компактно, вярно е и обратното: Ако f е непрекъсната във всяка точка на компактното множество M, то тя е равномерно непрекъсната в M.

3.16. Докажете, че функцията $F(x^1, x^2, \dots, x^m) = a_1 x^1 + \dots + a_m x^m + a_0$ е равномерно непрекъсната в $\mathbb{R}^m$.

Р е ш е н и е. Ако $a_1 = a_2 = \ldots = a_m = 0$, то $F = \text{const}$, която очевидно е равномерно непрекъсната функция. Нека $|a_1| + |a_2| + \cdots + |a_m| \neq 0$. Да изберем $\varepsilon > 0$ и нека $\delta = \dfrac{\varepsilon}{|a_1| + |a_2| + \cdots + |a_m|}$. Да разгледаме точките $x(x^1, x^2, \ldots, x^m)$ и $y(y^1, y^2, \ldots, y^m)$, за които $|x - y| < \delta$. Тъй като $|x - y| \geqq |x^i - y^i|$, $i = 1, \ldots, m$, то $|x^i - y^i| < \delta$ и $\left|F(x^1, \ldots, x^m) - F(y^1, \ldots, y^m)\right| \leqq |a_1||x^1 - y^1| + \cdots + |a_m||x^m - y^m| < \varepsilon$.

3.17. Нека $F(x^1, x^2, \ldots, x^m) = \sqrt{(x^1)^2 + \cdots + (x^m)^2} = |x|$. Докажете, че F е равномерно непрекъсната в $\mathbb{R}^m$.

Р е ш е н и е. От неравенството на триъгълника както и в едномерния случай получаваме неравенството

$$||x| - |y|| \leqq |x - y|.$$

Да изберем $\varepsilon > 0$ и нека $\delta = \varepsilon$. Тогава, ако $|x - y| < \delta$, то

$$|F(x) - F(y)| = ||x| - |y|| \leqq |x - y| < \varepsilon.$$

3.18. Докажете, че функцията $d_F(x) = \inf\limits_{z \in F} |x - z|$ е равномерно непрекъсната.

У п ъ т в а н е. От неравенството $|x - z| \leqq |x - y| + |y - z|$ получете последователно:

$d_F(x) \leqq |x-y|+|y-z|$, $\quad d_F(x)-|x-y| \leqq d_F(y)$, $\quad d_F(x)-d_F(y) \leqq |x-y|$,

от което извлечете, че

$$|d_F(x) - d_F(y)| \leqq |x - y|.$$

3.19. Докажете, че сума от равномерно непрекъснати функции е равномерно непрекъсната функция.

3.20. Вярно ли е твърдението, че произведение на равномерно непрекъснати функции е равномерно непрекъсната функция?

3.21. Нека $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ и $\varphi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ са равномерно непрекъснати функции. Докажете, че $F(x) = f(\varphi(x)) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ също е равномерно непрекъсната.

Р е ш е н и е. Нека на $\varepsilon > 0$ съпоставим $\nu > 0$ такова, че при $s,\ t \in \mathbb{R}$, $|s - t| < \nu$ е изпълнено $|f(t) - f(s)| < \varepsilon$. На $\nu > 0$ съпоставяме $\delta > 0$ такова, че за $x, y \in \mathbb{R}^m$, $|x - y| < \delta$, е изпълнено $|\varphi(x) - \varphi(y)| < \nu$. Но тогава $|f(\varphi(x)) - f(\varphi(y))| < \varepsilon$, което трябваше да докажем.

3.22. Докажете, че следните функции са равномерно непрекъснати в целите си дефиниционни области:

а) $\sin(2x + 3y + 6)$; $\qquad$ б) $\sqrt{x^2 + y^2} \sin \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$;

в) $f(\sqrt{x^2 + y^2})$, където f е функцията на Ван дер Варден $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{\{10^n x\}}{10^n}$, а $\{x\}$ — разстоянието на x до най-близкото цяло число.

3.23. Изследвайте за равномерна непрекъснатост следните функции:

а) $f(x, y) = \sin \dfrac{\pi}{1 - x^2 - y^2}$, $\qquad x^2 + y^2 < 1$;

б) $f(x, y) = \operatorname{arctg} \dfrac{x}{y}$, $\qquad y \neq 0$.

Р е ш е н и е. а) Да положим $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$. Тогава $f = \sin \dfrac{\pi}{1 - r^2}$. Нека да образуваме редиците от положителни числа $\{r_n\}$ и $\{\rho_n\}$ така, че $1 - r_n^2 = \dfrac{1}{2n}$, а $1 - \rho_n^2 = \dfrac{2}{4n + 1}$. Ако изберем произволно числата φ_n, получаваме две редици от точки

$$x_n = (r_n \cos\varphi_n, r_n \sin\varphi_n), \qquad y_n = (\rho_n \cos\varphi_n, \rho_n \sin\varphi_n),$$

за които

$$|x_n - y_n| = |\rho_n - r_n| \xrightarrow[n \to \infty]{} 0 \quad \text{и} \quad |f(x_n) - f(y_n)| = 1.$$

Следователно за $\varepsilon = 1$ не може да се намери такова $\delta > 0$, че за всеки две точки x, y, за които $|x - y| < \delta$, да бъде изпълнено $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Следователно f не е равномерно непрекъсната.

3.24. Докажете, че ако $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ не е равномерно непрекъсната функция, то и $f(x + y + z) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ също не е равномерно непрекъсната функция.

3.25. Докажете, че следните функции не са равномерно непрекъснати:

а) $\cos(x^2 + y^2 + z^2 + t^2)$;

б) $f(x^2 + y^2 + z^2 + u^2 + v^2)$, където f е функцията от зад. 3.22 в).

3.26. Докажете, че ако f е равномерно непрекъсната функция в множеството M, то тя може да бъде додефинирана в затворената му обвивка $\overline{M}$ така, че да остане равномерно непрекъсната в $\overline{M}$.

Р е ш е н и е. Нека $x_0 \in \overline{M}$. Ще покажем, че $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ съществува. Нека $x_n \to x_0$, $x_n \in M$, $x_n \neq x_0$ (тези разсъждения правим при предположението, че $x_0 \notin M$). Да изберем $\varepsilon > 0$. Поради равномерната непрекъснатост на f съществува $\delta > 0$, такова че при $|x-y| < \delta$ е изпълнено $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Съществува също число N, такова че при $n, m > N$ имаме $|x_m - x_n| < \delta$, и следователно $|f(x_n) - f(x_m)| < \varepsilon$. Това означава, че $\{f(x_n)\}$ е фундаментална редица, следователно е сходяща. Съгласно зад. 1.1 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ съществува. Нека $g(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$. Ако $x_0 \in M$, нека $g(x_0) = f(x_0)$. Ще покажем, че g е равномерно непрекъсната в $\overline{M}$. Да изберем $\varepsilon > 0$ и нека $\delta > 0$ е такова, че при $|x-y| < \delta$, $x, y \in M$, имаме $|f(x) - f(y)| < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Ще покажем, че ако $|x - y| < \dfrac{\delta}{2}$, $x, y \in \overline{M}$, то $|g(x) - g(y)| < \varepsilon$. Наистина нека $x, y \in \overline{M}$ и $|x-y| < \dfrac{\delta}{2}$. Да изберем $x', y' \in M$ така, че $|x - x'| < \dfrac{\delta}{4}$, $|y - y'| < \dfrac{\delta}{4}$ и $|g(x) - f(x')| < \dfrac{\varepsilon}{4}$, $|g(y) - f(y')| < \dfrac{\varepsilon}{4}$. Тогава

$$|g(x)-g(y)| \leqq |g(x)-f(x')|+|f(x')-f(y')|+|f(y')-g(y)| < \frac{\varepsilon}{4}+\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon.$$

В последното неравенство използвахме, че $|f(x') - f(y')| < \dfrac{\varepsilon}{2}$, тъй като

$$|x' - y'| \leqq |x' - x| + |x - y| + |y - y'| < \frac{\delta}{4} + \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{4} = \delta.$$

Нека f е изображението $f : D \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^l$. Всяко такова изображение определя l функции $f_i : D \to \mathbb{R}$, които се наричат *координатни функции* и за които $f(x) = (f_1(x), f_2(x), \ldots, f_l(x))$.

Дефинициите за непрекъснатост и равномерна непрекъснатост на функции се пренасят без изменение и за изображения.

3.27. Докажете, че $f : D \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^l$ е непрекъснато изображение в x_0 тогава и само тогава, когато всички координатни функции са непрекъснати в точката x_0.

3.28. Нека е дадено изображението $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^l$. *Прообраз* $f^{-1}U$ на $U \subset \mathbb{R}^l$ наричаме множеството $\{x \in \mathbb{R}^m : f(x) \in U\}$. Докажете, че f е непрекъснато изображение тогава и само тогава, когато прообраз на отворено множество е отворено множество.

3.29. Нека $f : D \to \mathbb{R}^l$ е непрекъснато изображение и D е свързано множество. Докажете, че образът $f(D)$ е също свързано множество.

3.30. Нека $f : K \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^l$ е непрекъснато изображение, а K е компактно множество. Докажете, че:

а) множеството $f(K)$ също е компактно;

б) изображението f е равномерно непрекъснато.

3.31. Докажете, че $f : D \to \mathbb{R}^l$ е равномерно непрекъснато изображение в D тогава и само тогава, когато $\lim\limits_{\delta \to 0} \omega(\delta, f, D) = 0$. (Да припомним, че $\omega(\delta, f, D) = \sup\limits_{\substack{|x-y| \leqq \delta \\ x, y \in D}} |f(x) - f(y)|$.)

3.32. Нека е дадено множеството $S^m = \{x \in \mathbb{R}^{m+1} : |x| = 1\}$. Постройте непрекъснато изображение $f : S^m \setminus (0, 0, \ldots, 0, 1) \to \mathbb{R}^m$, което да бъде взаимно еднозначно (т. е. на различни точки от S^m да съответстват различни точки от $\mathbb{R}^m$ и всяка точка от $\mathbb{R}^m$ да бъде образ на някоя точка от S^m).

3.33. Нека $f : F \to F$, където F е затворено подмножество на $\mathbb{R}^m$, и нека съществува $0 < k < 1$ такова, че $|f(x) - f(y)| < k|x - y|$. Докажете, че съществува единствена точка $x_0 \in F$, за която $f(x_0) = x_0$.

У п ъ т в а н е. Доказателството се провежда аналогично на едномерния случай (вж. I ч.).