Глава 4

Неопределен интеграл

Функцията $F(x)$ наричаме **примитивна на функцията** $f(x)$, дефинирана в интервала Δ, ако за всяка точка x от Δ $F(x)$ е диференцуема и $F'(x) = f(x)$. Множеството от всички примитивни функции на дадена функция $f(x)$ наричаме **неопределен интеграл** от $f(x)$ и означаваме с $\int f(x)dx$.

Ако $F(x)$ е някаква примитивна за $f(x)$ в интервала Δ, то $\int f(x)dx = F(x) + C$, където C е произволна константа. Графиките на всички примитивни на дадена функция $f(x)$ в равнината с декартова координатна система xOy са семейство криви, зависещо от параметъра C, които се получават една от друга чрез пренасяне, успоредно на оста Oy.

Основните свойства на неопределения интеграл са:

$d\left[\int f(x)dx\right] = f(x)dx;$

$\int dF(x) = F(x) + C;$

$\int af(x)dx = a\int f(x)dx, \quad a = \text{const};$

$\int \left[f(x) \pm g(x)\right]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx.$

Таблица на основните интеграли:

$$\int x^{\alpha}dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad \alpha \neq -1;$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C, \quad x \neq 0;$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad 0 < a \neq 1; \quad \int e^x dx = e^x + C;$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C;$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C;$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C, \quad x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots;$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{cotg} x + C, \quad x \neq n\pi, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots;$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} \arcsin x + C \\ -\arccos x + C \end{cases}, \quad -1 < x < 1;$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \begin{cases} \operatorname{arctg} x + C \\ -\operatorname{arccotg} x + C; \end{cases}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm 1}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm 1}\right| + C$$ (при знак минус равенството е в сила за всеки интервал, за който $|x| > 1$).

Основните интеграли, а също и всеки резултат от пресметнат интеграл може да се проверят посредством диференциране.

По-голямата част от тази глава е посветена на формалното интегриране, т. е. не се интересуваме от интервалите, в които се получава примитивната. По-прецизно разгледани примери има в § 9.

§ 1. Непосредствено интегриране

Интегрирането се извършва, като се прилагат основните свойства на неопределения интеграл и таблицата на основните интеграли.

Пресметнете интегралите:

1.1. $\int (x^3 - 2x^2 + 3)\,dx.$

Решение. $\int (x^3 - 2x^2 + 3)\,dx = \int x^3 dx - 2\int x^2 dx + 3\int dx$

$= \dfrac{x^4}{4} - 2\dfrac{x^3}{3} + 3x + C.$

1.2. $\int (x^2 + 3)^2 dx.$

Решение. $\int (x^2 + 3)^2 dx = \int (x^4 + 6x^2 + 9)\,dx$

$= \int x^4dx + 6\int x^2dx + 9\int dx = \frac{x^5}{5} + 6\,\frac{x^3}{3} + 9x + C$

$= \frac{x^5}{5} + 2x^3 + 9x + C.$

1.3. $\int \frac{(2x+1)(x^2-1)}{2x}\,dx.$

Решение. $\int \frac{(2x+1)(x^2-1)}{2x}\,dx = \int \frac{2x^3-2x+x^2-1}{2x}\,dx$

$= \int \left(x^2 - 1 + \frac{x}{2} - \frac{1}{2x}\right) dx$

$= \int x^2dx - \int dx + \frac{1}{2}\int xdx - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x}$

$= \frac{x^3}{3} - x + \frac{x^2}{4} - \frac{1}{2}\ln|x| + C.$

1.4. $I = \int \left(\sqrt{x\sqrt[3]{x}} + \frac{2}{\sqrt[3]{x}} - 3\sqrt[5]{x}\right) dx.$

Решение. $I = \int \left(x^{\frac{2}{3}} + 2x^{-\frac{1}{3}} - 3x^{\frac{1}{5}}\right) dx$

$= \int x^{\frac{2}{3}}\,dx + 2\int x^{-\frac{1}{3}}\,dx - 3\int x^{\frac{1}{5}}\,dx = \frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}} + 3x^{\frac{2}{3}} - \frac{5}{2}x^{\frac{6}{5}} + C.$

1.5. $\int \mathrm{tg}^2 x\,dx.$

Решение. $\int \mathrm{tg}^2 x\,dx = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right) dx = \mathrm{tg}x - x + C.$

1.6. $\int 2^x3^{2x}dx.$

Решение. $\int 2^x3^{2x}dx = \int 18^x dx = \frac{18^x}{\ln 18} + C.$

1.7. За функцията $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \sin x$, $x \in (0, +\infty)$, намерете примитивна $F(x)$, графиката на която минава през точката $M(1, 1)$.

Решение. $F(x) = \int \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} + \sin x\right) dx = \frac{1}{2}\int x^{-\frac{1}{2}}dx + \int \sin x dx$

$= \sqrt{x} - \cos x + C$. Тъй като графиката на примитивната $F(x)$ трябва да минава през точката $M(1, 1)$, то $\sqrt{1} - \cos 1 + C = 1$, т.е. $C = \cos 1$. Следователно $F(x) = \sqrt{x} - \cos x + \cos 1$.

1.8. $\int \sqrt{1-\sin 2x}\;dx.$

Решение. Преобразуваме подинтегралната функция: $\sqrt{1-\sin 2x}$ $= \sqrt{(\cos x - \sin x)^2} = |\cos x - \sin x| = (\cos x - \sin x)\,\mathrm{sgn}(\cos x - \sin x)$. Тогава, ако $x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4} + \pi\right]$, получаваме $\mathrm{sgn}(\cos x - \sin x) = 1$ и $\int \sqrt{1-\sin 2x}\;dx = \int(\cos x - \sin x)dx = \sin x + \cos x + C.$

Ако $x \in \left[\frac{\pi}{4} - \pi, \frac{\pi}{4}\right]$, то $\mathrm{sgn}(\cos x - \sin x) = -1$ и $\int \sqrt{1-\sin 2x}\;dx = -\int(\cos x - \sin x)dx = -(\sin x + \cos x) + C.$

По аналогичен начин се постъпва и за интервала $\left[\frac{\pi}{4} + (n-1)\pi, \frac{\pi}{4} + n\pi\right]$ за всяко естествено число n.

1.9. $\int (a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n)\,dx.$

1.10. $\int \left(\sqrt{x} + \frac{1}{2x}\right)^3 dx.$ **1.11.** $\int x(x+1)(x-2)\,dx.$

1.12. $\int \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}\;dx.$ **1.13.** $\int \frac{x^2-3x+4}{\sqrt{x}}\,dx.$

1.14. $\int \left(2^x + \sqrt{\frac{1}{x}}\right) dx.$

1.15. $\int \frac{dx}{x^2(1-x^2)}.$

1.16. $\int \sin^2 \frac{x}{2}\, dx.$

1.17. $\int \operatorname{cotg}^2 x\, dx.$

1.18. $\int (1 + \sqrt{x})^4\, dx.$

1.19. $\int \frac{x^4}{x^2-1}\, dx.$

1.20. $\int \frac{3x^4+3x^2+1}{x^2+1}\, dx.$

1.21. $\int \frac{\cos 2x}{\sin^2 x \cos^2 x}\, dx.$

1.22. $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x}.$

1.23. $\int \sqrt{1+\cos 2x}\, dx.$

1.24. $\int \left(10^{-x} - \frac{2}{\sqrt{1-2x^2}}\right) dx.$

§ 2. Интегриране чрез внасяне под знака на диференциала

Интегрирането чрез внасяне под знака на диференциала се основава на следното твърдение:

Ако $\int f(u)du = F(u) + C$, то $\int f(\varphi(x)d\varphi(x) = F(\varphi(x))+C$, където по дефиниция $\int f(x)dg(x) = \int f(x)g'(x)dx.$

Пресметнете интегралите:

2.1. $\int (2x-3)^5\, dx.$

Решение. $\int (2x-3)^5\, dx = \frac{1}{2}\int (2x-3)^5 d(2x-3)$

$= \frac{1}{12}(2x-3)^6 + C.$

2.2. $\int \frac{dx}{x-a}.$

Решение. $\int \frac{dx}{x-a} = \int \frac{d(x-a)}{x-a} = \ln|x-a| + C.$

2.3. $\int \frac{dx}{(x-a)^k}, \quad k \neq 1.$

Решение. $\int \frac{dx}{(x-a)^k} = \int (x-a)^{-k} d(x-a)$

$= \frac{(x-a)^{-k+1}}{-k+1} + C.$

2.4. $\int \sin ax\, dx,\ a \neq 0.$

Решение. $\int \sin ax\, dx = \frac{1}{a}\int \sin ax\, dax = -\frac{1}{a}\cos ax + C.$

2.5. $\int e^{ax} dx,\ a \neq 0.$

Решение. $\int e^{ax} dx = \frac{1}{a}\int e^{ax} dax = \frac{1}{a}e^{ax} + C.$

2.6. $\int \frac{\sqrt{x^2-3} - 3\sqrt{x^2+3}}{\sqrt{x^4-9}}\, dx.$

Решение.

$$\int \frac{\sqrt{x^2-3} - 3\sqrt{x^2+3}}{\sqrt{x^4-9}}\, dx = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+3}} - 3\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-3}}$$

$$= \int \frac{d\frac{x}{\sqrt{3}}}{\sqrt{\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1}} - 3\int \frac{d\frac{x}{\sqrt{3}}}{\sqrt{\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2 - 1}}$$

$$= \ln\left|\frac{x}{\sqrt{3}} + \sqrt{\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1}\right| - 3\ln\left|\frac{x}{\sqrt{3}} + \sqrt{\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2 - 1}\right| + C$$

$$= \ln|x + \sqrt{x^2+3}| - 3\ln|x + \sqrt{x^2-3}| + C_1,\ |x| > 3.$$

2.7. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$, $a > 0$.

Решение. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \int \frac{d\frac{x}{a}}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C.$

2.8. $\int \frac{dx}{a^2+x^2}$, $a \neq 0$.

Решение. $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\int \frac{d\frac{x}{a}}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C.$

2.9. $\int \operatorname{tg}x\,dx$.

Решение. $\int \operatorname{tg}x\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}dx = -\int \frac{d\cos x}{\cos x}$

$= -\ln|\cos x| + C.$

2.10. $\int \frac{dx}{3+\cos^2 x}$.

Решение.

$$\int \frac{dx}{3+\cos^2 x} = \int \frac{dx}{3\sin^2 x+4\cos^2 x} = \int \frac{1}{3\operatorname{tg}^2 x+4}\,\frac{dx}{\cos^2 x}$$

$$= \int \frac{d\operatorname{tg}x}{4+3\operatorname{tg}^2 x} = \frac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{tg}x\right) + C.$$

2.11. $\int \frac{dx}{1+\sin x}$.

Решение. $\int \frac{dx}{1+\sin x} = -\int \frac{d\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{1+\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}$

$$= -\int \frac{d\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)} = -\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right) + C,$$

$x \neq -\frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k = 0,\ \pm1,\ \pm2, \ldots$

2.12. $\int \frac{ax+b}{cx+d}\,dx$, $c \neq 0$.

Решение. $\int \frac{ax+b}{cx+d}\,dx = \int\left(\frac{a}{c} + \frac{bc-ad}{c}\,\frac{1}{cx+d}\right)dx$

$= \frac{a}{c}x + \frac{bc-dd}{c^2}\ln|cx+d| + C_1.$

2.13. $\int \frac{dx}{x^2-a^2}$, $a \neq 0$.

Решение. $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\int \frac{(x+a)-(x-a)}{x^2-a^2}\,dx$

$= \frac{1}{2a}\int\left(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a}\right)dx$

$= \frac{1}{2a}\left[\ln|x-a| - \ln|x+a|\right] + C = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C.$

2.14. $\int \frac{dx}{(x+a)(x+b)}$, $a \neq b$.

Решение. $\int \frac{dx}{(x+a)(x+b)} = \frac{1}{a-b} \int \frac{(x+a)-(x+b)}{(x+a)(x+b)}\, dx$

$$= \frac{1}{a-b} \int \left[\frac{1}{x+b} - \frac{1}{x+a} \right] dx = \frac{1}{a-b} \ln \left| \frac{x+b}{x+a} \right| + C.$$

2.15. $\int \cos^2 ax\, dx$, $a \neq 0$.

Решение. $\int \cos^2 ax\, dx = \int \frac{1+\cos 2ax}{2}\, dx$

$$= \frac{1}{2} x + \frac{1}{4a} \sin 2ax + C.$$

2.16. $\int \sin ax \cos bx\, dx$, $a \pm b \neq 0$.

Решение. $\int \sin ax \cos bx\, dx = \int \frac{1}{2} \left[\sin(a+b)x \right.$

$$\left. + \sin(a-b)x \right] dx = -\frac{1}{2(a+b)} \cos(a+b)x - \frac{1}{2(a-b)} \cos(a-b)x + C.$$

2.17. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}$, $x \neq 0$.

Решение. При $x > 0$ имаме

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x+1}} = \int \frac{dx}{x^2 \sqrt{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}} = -\int \frac{d\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}}$$

$$= -\ln\left(\frac{1}{x} + \sqrt{1+\frac{1}{x^2}} \right) + C = \ln \frac{x}{1+\sqrt{x^2+1}} + C.$$

При $x < 0$ имаме

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}} = \int \frac{dx}{x\,|x| \sqrt{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}}$$

$$= \int \frac{dx}{-x^2 \sqrt{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}} = \int \frac{d\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}}$$

$$= \ln \left| \frac{1}{x} + \sqrt{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2} \right| + C = \ln \left| \frac{1}{x} + \frac{1}{|x|} \sqrt{x^2+1} \right| + C$$

$$= \ln \left| \frac{1-\sqrt{x^2+1}}{x} \right| + C.$$

2.18. $\int \frac{dx}{(x^2+1)^{3/2}}$.

Решение. При $x > 0$ получаваме

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^{3/2}} = \int \frac{dx}{x^3\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{3/2}}$$

$$= -\frac{1}{2} \int \left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{-\frac{3}{2}} d\left(1+\frac{1}{x^2}\right) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + C.$$

2.19. $\int \frac{dx}{e^x+e^{-x}}$.

Решение. $\int \frac{dx}{e^x+e^{-x}} = \int \frac{e^x\,dx}{e^{2x}+1}$

$$= \int \frac{de^x}{e^{2x}+1} = \operatorname{arctg} e^x + C.$$

2.20. $\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}$.

Решение. $\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}} = \int \frac{dx}{e^{\frac{x}{2}}\sqrt{(e^{-\frac{x}{2}})^2+1}}$

$$= -2\int \frac{de^{-\frac{x}{2}}}{\sqrt{1+(e^{-\frac{x}{2}})^2}} = -2\ln\left(e^{-\frac{x}{2}} + \sqrt{1+e^{-x}}\right) + C.$$

2.21. $\int \frac{dx}{x\ln x}$.

Решение.

$$\int \frac{dx}{x\ln x} = \int \frac{d\ln x}{\ln x} = \ln|\ln x| + C.$$

2.22. $\int \frac{dx}{\sqrt{x(1+x)}}$.

Решение. $\int \frac{dx}{\sqrt{x(1+x)}} = 2\int \frac{d\sqrt{x}}{\sqrt{1+(\sqrt{x})^2}}$

$$= 2\ln\left(\sqrt{x} + \sqrt{1+x}\right) + C.$$

2.23. $\int \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$.

Решение.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} = 2\int \frac{d\sqrt{x}}{\sqrt{1-(\sqrt{x})^2}} = 2\arcsin\sqrt{x} + C.$$

2.24. $\int \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt[3]{\sin x - \cos x}}\,dx$.

Решение.

$$\int \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt[3]{\sin x - \cos x}}\,dx = \int (\sin x - \cos x)^{-\frac{1}{3}}\,d(\sin x - \cos x)$$

$$= \frac{3}{2}(\sin x - \cos x)^{\frac{2}{3}} + C.$$

2.25. $\int x(1-2x)^{17}\,dx$.

Решение.

$$\int x(1-2x)^{17}\,dx = -\frac{1}{4}\int [1-(1-2x)](1-2x)^{17}\,d(1-2x)$$

$$= -\frac{1}{4}\int (1-2x)^{17}\,d(1-2x) + \frac{1}{4}\int (1-2x)^{18}d(1-2x)$$

$$= -\frac{1}{4.18}(1-2x)^{18} + \frac{1}{4.19}(1-2x)^{19} + C.$$

2.26. $\int \frac{x^2}{(1-x)^3}\, dx.$

Решение.

$$\int \frac{x^2}{(1-x)^3}\, dx = \int \frac{(1-x)^2 - 2(1-x) + 1}{(1-x)^3}\, dx$$

$$= \int \frac{dx}{1-x} - 2\int \frac{dx}{(1-x)^2} + \int \frac{dx}{(1-x)^3}$$

$$= -\ln|1-x| - 2(1-x)^{-1} + \frac{1}{2}(1-x)^{-2} + C.$$

2.27. $\int \frac{dx}{\sqrt{x+2} - \sqrt{x-2}}$.

Решение. Рационализираме знаменателя на подинтегралната функция:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x+2} - \sqrt{x-2}} = \frac{1}{4}\int \left(\sqrt{x+2} + \sqrt{x-2}\right) dx$$

$$= \frac{1}{4}\int (x+2)^{\frac{1}{2}}\, d(x+2) + \frac{1}{4}\int (x-2)^{\frac{1}{2}}\, d(x-2)$$

$$= \frac{1}{6}(x+2)^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{6}(x-2)^{\frac{3}{2}} + C.$$

2.28. $\int \frac{dx}{\sin x}$.

Решение. Ще решим този интеграл по два начина:

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{d\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} = \int \frac{d\frac{x}{2}}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}}$$

$$= \int \frac{d\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}} = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C;$$

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{\sin x\, dx}{\sin^2 x} = \int \frac{d\cos x}{\cos^2 x - 1} = \frac{1}{2}\ln\frac{1-\cos x}{1+\cos x} + C_1.$$

2.29. $\int \frac{dx}{\cos x}$.

Решение. $\int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{d\left(x + \frac{\pi}{2}\right)}{\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)}$

$$= \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + C.$$

2.30. $\int \frac{\sin x \cos x\, dx}{\sqrt{a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x}}$, $\quad a^2 \neq b^2$.

Решение. Тъй като $d(a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x) = 2(a^2 - b^2)\sin x\cos x\, dx$, то

$$\int \frac{\sin x \cos x\, dx}{\sqrt{a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x}} = \frac{1}{a^2-b^2}\int \frac{d(a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x)}{2\sqrt{a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x}}$$

$$= \frac{1}{a^2-b^2}\sqrt{a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x} + C.$$

2.31. $\int \frac{\cos x\, dx}{1+\sin^2 x}$.

Решение. $\int \frac{\cos x\, dx}{1+\sin^2 x} = \int \frac{d\sin x}{1+\sin^2 x} = \operatorname{arctg}\sin x + C.$

2.32. $\displaystyle\int \frac{dx}{a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x}$.

Решение. $\displaystyle\int \frac{dx}{a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x} = \int \frac{dx}{(a^2\mathrm{tg}^2 x + b^2)\cos^2 x}$

$$= \int \frac{d\,\mathrm{tg}x}{a^2\mathrm{tg}^2 x + b^2} = \frac{1}{ab}\int \frac{d\,\frac{a}{b}\,\mathrm{tg}x}{\left(\frac{a}{b}\,\mathrm{tg}x\right)^2 + 1}$$

$$= \frac{1}{ab}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{a}{b}\,\mathrm{tg}x\right) + C.$$

2.33. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin x\cos x}$.

Решение. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin x\cos x} = \int \frac{dx}{\mathrm{tg}x\cos^2 x}$

$$= \int \frac{d\,\mathrm{tg}x}{\mathrm{tg}x} = \ln|\mathrm{tg}x| + C.$$

2.34. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{\mathrm{arctg}x}}{1+x^2}\,dx$.

Решение. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{\mathrm{arctg}x}}{1+x^2}\,dx = \int \sqrt{\mathrm{arctg}x}\;d\,\mathrm{arctg}x$

$$= \frac{2}{3}(\mathrm{arctg}x)^{\frac{3}{2}} + C.$$

2.35. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}\,dx, \quad x > a > 0.$

Решение. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}\,dx = \int \frac{x^2-a^2}{x\sqrt{x^2-a^2}}\,dx$

$$= \int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2-a^2}} - a^2\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-a^2}} = \frac{1}{2}\int \frac{dx^2}{\sqrt{x^2-a^2}}$$

$$- a^2\int \frac{dx}{x^2\sqrt{1-\frac{a^2}{x^2}}} = \sqrt{x^2-a^2} + a\arcsin\frac{a}{x} + C.$$

2.36. $\displaystyle\int \cos ax\,dx, \; a \neq 0.$ **2.37.** $\displaystyle\int e^{-2x}\,dx.$

2.38. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-5x+6}$. **2.39.** $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{(1+x^2)^2}$.

2.40. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{(1+x)^4}$. **2.41.** $\displaystyle\int x^3\sqrt{x^4+1}\,dx.$

2.42. $\displaystyle\int x\sqrt{1-x}\,dx.$ **2.43.** $\displaystyle\int \sin^2 ax\,dx, \; a \neq 0.$

2.44. $\displaystyle\int \cos ax\cos bx\,dx, \; a, \; b \neq 0.$

2.45. $\displaystyle\int \sin ax\sin bx\,dx, \; a, \; b \neq 0.$

2.46. $\displaystyle\int xe^{-x^2}dx.$ **2.47.** $\displaystyle\int \frac{dx}{x\ln^2 x}$.

2.48. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\ln x\ln\ln x}$. **2.49.** $\displaystyle\int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}$.

2.50. $\displaystyle\int \frac{e^{2x}dx}{\sqrt{e^{4x}+1}}$. **2.51.** $\displaystyle\int \sin^4 x\cos x\,dx.$

2.52. $\int \frac{\cos x\,dx}{1+\sin x}$.

2.53. $\int \frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x}\,dx$.

2.54. $\int \operatorname{cotg} x\,dx$.

2.55. $\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$.

2.56. $\int \frac{dx}{\cos^4 x}$.

2.57. $\int \frac{dx}{\sin^4 x}$.

2.58. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}\,\sin\sqrt{x}}$.

2.59. $\int \sqrt[3]{\sin x}\,\cos^3 x\,dx$.

2.60. $\int \frac{\sqrt[5]{\operatorname{tg} x}}{\cos^2 x}\,dx$.

2.61. $\int \frac{\sin 2x\,dx}{\sqrt{25\sin^2 x+9\cos^2 x}}$.

2.62. $\int \frac{\sin x\,dx}{\sqrt{2+2\cos x+\cos^2 x}}$.

2.63. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\,\arccos x}$.

2.64. $\int \sqrt{\frac{\arcsin x}{1-x^2}}\,dx$.

2.65. $\int \frac{\operatorname{arctg}^3 x}{1+x^2}\,dx$.

2.66. $\int \frac{\ln\arccos x\,dx}{\sqrt{1-x^2}\,\arccos x}$.

2.67. $\int \frac{dx}{(1+x^n)^{\frac{n+1}{n}}}$.

2.68. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+x+1}}$.

2.69. $\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$.

2.70. $\int \frac{\sqrt{x^2+a^2}}{x}\,dx$.

2.71. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{(x^2-a^2)(b^2-x^2)}}$, $b > a > 0,\ a < x < b$.

§ 3. Интегриране по части

Интегрирането по части се основава на следното тъждество: $\int f(x)dg(x) = f(x)g(x) - \int g(x)df(x)$, където $f(x)$ и $g(x)$ са произволни функции, притежаващи непрекъснати производни.

Правилото за интегриране по части свежда интегрирането на израза $f(x)dg(x) = f(x)g'(x)dx$ към интегриране на израза $g(x)df(x) = g(x)f'(x)dx$. Чрез многократно прилагане на формулата за интегриране по части се получава **обобщената формула за интегриране по части**:

$$\int f(x)g^{(n+1)}(x)\,dx = f(x)g^{(n)}(x) - f'(x)g^{(n-1)}(x) + f''(x)g^{(n-2)}(x) - \dots + (-1)^n f^{(n)}(x)g(x) + (-1)^{n+1}\int f^{(n+1)}(x)\,g(x)\,dx.$$

Следващите интеграли ще решим, като интегрираме по части.

3.1. $\int x\cos x\,dx$.

Решение.

$$\int x\cos x\,dx = \int x\,d\sin x = x\sin x - \int \sin x\,dx = x\sin x + \cos x + C.$$

3.2. $\int x^3\ln x\,dx$.

Решение.

$$\int x^3\ln x\,dx = \frac{1}{4}\int \ln x\,dx^4 = \frac{1}{4}\left(x^4\ln x - \int x^3dx\right)$$

$$= \frac{1}{4}x^4\ln x - \frac{1}{16}x^4 + C.$$

3.3. $\int \operatorname{arctg} x\,dx$.

Решение. $\int \operatorname{arctg} x\,dx = x\operatorname{arctg} x - \int x\,d\operatorname{arctg} x$

$$= x\operatorname{arctg} x - \int \frac{x\,dx}{1+x^2} = x\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C.$$

3.4. $\int \arcsin x\,dx$.

Решение. $\int \arcsin x\,dx = x\arcsin x - \int x\,d\arcsin x$

$$= x\arcsin x - \int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = x\arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C.$$

3.5. $\int \frac{\arcsin x}{x^2}\,dx, \quad |x| < 1, \quad x \neq 0.$

Решение. $\int \frac{\arcsin x}{x^2}\,dx = \int \arcsin x\, d\left(-\frac{1}{x}\right)$

$$= -\frac{1}{x}\arcsin x + \int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}} = -\frac{1}{x}\arcsin x$$

$$+ \int \frac{dx}{x|x|\sqrt{\frac{1}{x^2} - 1}} = -\frac{1}{x}\arcsin x - \int \frac{d\left(\frac{1}{|x|}\right)}{\sqrt{\left(\frac{1}{|x|}\right)^2 - 1}}$$

$$= -\frac{1}{x}\arcsin x - \ln\left(\frac{1}{|x|} + \sqrt{\frac{1}{x^2} - 1}\right) + C$$

$$= -\frac{1}{x}\arcsin x + \ln\frac{|x|}{1 + \sqrt{1-x^2}} + C.$$

3.6. а) $\int e^{ax}\cos bx\,dx;$ **б)** $\int e^{ax}\sin bx\,dx, \quad a \neq 0.$

Решение. Като интегрираме по части, получаваме

$$\int e^{ax}\cos bx\,dx = \frac{1}{a}e^{ax}\cos bx + \frac{b}{a}\int e^{ax}\sin bx\,dx,$$

$$\int e^{ax}\sin bx\,dx = \frac{1}{a}e^{ax}\sin bx - \frac{b}{a}\int e^{ax}\cos bx\,dx.$$

От тези две равенства чрез заместване намираме

$$\int e^{ax}\cos bx\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(b\sin bx + a\cos bx) + C,$$

$$\int e^{ax}\sin bx\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\sin bx - b\cos bx) + C_1.$$

3.7. $\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^2}, \quad a \neq 0.$

Решение.

$$\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^2} = \frac{1}{a^2}\int \frac{(a^2+x^2)-x^2}{(a^2+x^2)^2}\,dx$$

$$= \frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{a^2+x^2} - \frac{1}{a^2}\int \frac{x^2\,dx}{(a^2+x^2)^2}$$

$$= \frac{1}{a^3}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + \frac{1}{a^2}\int \frac{x}{2}\,d\frac{1}{a^2+x^2}$$

$$= \frac{1}{a^3}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + \frac{x}{2a^2(a^2+x^2)} - \frac{1}{2a^2}\int \frac{dx}{a^2+x^2}$$

$$= \frac{x}{2a^2(a^2+x^2)} + \frac{1}{2a^3}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C.$$

3.8. $\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx, \quad a > 0, \quad |x| < a.$

Решение. $\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = x\sqrt{a^2-x^2} + \int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$

$$= x\sqrt{a^2-x^2} + \int \frac{(x^2-a^2)+a^2}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx = x\sqrt{a^2-x^2} - \int \sqrt{a^2-x^2}\,dx$$

$$+ a^2 \arcsin \frac{x}{a} + C.$$

Оттук получаваме

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\, dx = \frac{x}{2} \sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + C.$$

3.9. $\int \sqrt{x^2-a^2}\, dx, \quad a > 0,\ |x| > a.$

Решение. $\int \sqrt{x^2-a^2}\, dx = x\sqrt{x^2-a^2} - \int \frac{(x^2-a^2)+a^2}{\sqrt{x^2-a^2}}\, dx$

$$= x \sqrt{x^2-a^2} - \int \sqrt{x^2-a^2}\, dx - a^2 \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}$$

$$= x\sqrt{x^2-a^2} - \int \sqrt{x^2-a^2}\, dx - a^2 \ln\left|\frac{x}{a} + \sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2 - 1}\right| + C_1$$

$$= x \sqrt{x^2-a^2} - \int \sqrt{x^2-a^2}\, dx - a^2 \ln\left|x + \sqrt{x^2-a^2}\right| + C.$$

Оттук получаваме

$$\int \sqrt{x^2-a^2}\, dx = \frac{x}{2} \sqrt{x^2-a^2} - \frac{a^2}{2} \ln\left|x + \sqrt{x^2-a^2}\right| + C.$$

3.10. $\int \sqrt{a^2+x^2}\, dx.$

Решение.

$$\int \sqrt{a^2+x^2}\, dx = x \sqrt{a^2+x^2} - \int \frac{x^2+a^2-a^2}{\sqrt{x^2+a^2}}\, dx$$

$$= x \sqrt{a^2+x^2} - \int \sqrt{a^2+x^2}\, dx + a^2 \int \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}}$$

$$= x \sqrt{a^2+x^2} - \int \sqrt{a^2+x^2}\, dx + a^2 \ln\left|x + \sqrt{a^2+x^2}\right| + C.$$

Следователно

$$\int \sqrt{a^2+x^2}\, dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2+x^2} + \frac{a^2}{2} \ln\left|x + \sqrt{a^2+x^2}\right| + C.$$

3.11. $\int \frac{xe^{\operatorname{arctg} x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}\, dx.$

Решение.

$$\int \frac{xe^{\operatorname{arctg} x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}\, dx = \int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\, de^{\operatorname{arctg} x} = \frac{xe^{\operatorname{arctg} x}}{\sqrt{1+x^2}} - \int \frac{e^{\operatorname{arctg} x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}\, dx$$

$$= \frac{xe^{\operatorname{arctg} x}}{\sqrt{1+x^2}} - \int \frac{de^{\operatorname{arctg} x}}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{xe^{\operatorname{arctg} x}}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{e^{\operatorname{arctg} x}}{\sqrt{1+x^2}} - \int \frac{xe^{\operatorname{arctg} x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}\, dx.$$

Оттук $\int \frac{xe^{\operatorname{arctg} x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}\, dx = \frac{x-1}{2\sqrt{1+x^2}}\, e^{\operatorname{arctg} x} + C.$

3.12. $\int \arccos^2 x\, dx.$

Решение.

$$\int \arccos^2 x\, dx = x \arccos^2 x + 2 \int \frac{x \arccos x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$$

$$= x \arccos^2 x - \int \frac{\arccos x\, d(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= x\arccos^2 x - 2\int \arccos x\, d\sqrt{1-x^2}$$

$$= x\arccos^2 x - 2\sqrt{1-x^2}\arccos x - 2\int dx$$

$$= x\arccos^2 x - 2\sqrt{1-x^2}\arccos x - 2x + C.$$

3.13. $\int \frac{\cos^4 x}{\sin^3 x}\, dx.$

Решение. $\int \frac{\cos^4 x}{\sin^3 x}\, dx = \int \frac{\cos^3 x d\sin x}{\sin^3 x}$

$$= -\frac{1}{2}\int \cos^3 x d\sin^{-2} x = -\frac{1}{2}\,\frac{\cos^3 x}{\sin^2 x} - \frac{3}{2}\int \frac{\cos^2 x}{\sin x}\, dx$$

$$= -\frac{1}{2}\,\frac{\cos^3 x}{\sin^2 x} - \frac{3}{2}\int \frac{1-\sin^2 x}{\sin x}\, dx = -\frac{1}{2}\,\frac{\cos^3 x}{\sin^2 x}$$

$$-\frac{3}{2}\int \frac{dx}{\sin x} + \frac{3}{2}\int \sin x dx.$$

Относно решаването на $\int \frac{dx}{\sin x}$ вж. зад. 2.28.

Ако означим $I_{m,n} = \int \sin^m x \cos^n x dx$, при $m \neq -1$, m и n — цели числа, по същия начин както в този частен случай се доказва рекурентната формула

$$I_{m,n} = \frac{1}{m+1}\sin^{m+1}x\cos^{n-1}x + \frac{n-1}{m+1} I_{m+2,\, n-2}\,.$$

Аналогично при $n \neq -1$ получаваме

$$I_{m,n} = -\frac{1}{n+1}\sin^{m-1}x\cos^{n+1}x + \frac{m-1}{n+1} I_{m-2,\, n+2}\,.$$

3.14. $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^3 x}\, dx\,.$

Решение. $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^3 x}\, dx = -\int \frac{\sin^4 x}{\cos^3 x}\, d\mathrm{ctg} x$

$$= -\int \sin x \,\mathrm{ctg}^{-3} x d\mathrm{ctg} x = \frac{1}{2}\int \sin x d\mathrm{ctg}^{-2} x = \frac{1}{2}\sin x \,\mathrm{tg}^2 x$$

$$-\frac{1}{2}\int \mathrm{tg}^2 x \cos x dx = \frac{1}{2}\sin x\,\mathrm{tg}^2 x - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\cos x} + \frac{1}{2}\int \cos x dx$$

(вж. зад. 2.29).

По този начин, когато n е отрицателно и различно от -1, интегралът $I_{m,n}$ се изразява чрез $I_{m,\, n+2}$, а именно

$$I_{m,n} = \frac{\sin^{m+1}x\cos^{n+1}x}{n+1} + \frac{m+n+2}{n+1} I_{m,n+2}.$$

Аналогично при $m \neq -1$, $m < 0$ се получава

$$I_{m,n} = \frac{\cos^{n+1}x\sin^{m+1}x}{m+1} + \frac{m+n+2}{m+1} I_{m+2,n}.$$

3.15. $\int \frac{dx}{\sin^2 x\cos^3 x}\,.$

Решение.

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^3 x} = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x\cos^3 x}\, dx = \int \frac{dx}{\cos^3 x}$$

$$+\int \frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin^2 x \cos x}\,dx = \int \frac{dx}{\cos^3 x} + \int \frac{dx}{\cos x} + \int \frac{\cos x}{\sin^2 x}\,dx.$$

За първия от получените интеграли вж. предишната задача, а за втория — зад. 2.29.

Изобщо, когато $m < 0$ и $n < 0$, често пъти е удобно да се започне със следното преобразувание: $I_{m,n} = \int \sin^m x \cos^n x(\sin^2 x + \cos^2 x)\,dx$, което дава $I_{m,n} = I_{m+2,n} + I_{m,n+2}$. Предложените в последните три задачи начини при конкретни интеграли невинаги са най-простите. Тук видяхме как формулата за интегриране по части може да бъде полезна при решаване на интеграли от вида $\int \sin^m x \cos^n x\,dx$. Друг начин ще бъде даден в § 8.

3.16. Докажете за интеграла $I_n = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n}$, n — естествено число, $a \neq 0$, рекурентната формула

$$I_{n+1} = \frac{1}{2na^2}\left[\frac{x}{(x^2+a^2)^n} + (2n-1)I_n\right].$$

Решение.

$$I_{n+1} = \frac{1}{a^2}\int \frac{x^2+a^2-x^2}{(x^2+a^2)^{n+1}}\,dx$$

$$= \frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n} - \frac{1}{a^2}\int \frac{x^2\,dx}{(x^2+a^2)^{n+1}}$$

$$= \frac{1}{a^2} I_n - \frac{1}{2a^2}\int \frac{x\,d(x^2+a^2)}{(x^2+a^2)^{n+1}} = \frac{1}{a^2} I_n + \frac{1}{2a^2 n}\int x\,d(x^2+a^2)^{-n}$$

$$= \frac{1}{a^2} I_n + \frac{x}{2a^2 n(x^2+a^2)^n} - \frac{1}{2a^2 n}\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n}$$

$$= \frac{1}{2na^2}\left[\frac{x}{(x^2+a^2)^n} + (2n-1)\,I_n\right].$$

Тъй като $I_1 = \int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C$, то, полагайки в получената формула $n = 1$, получаваме $I_2 = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^2}$

$$= \frac{1}{2a^2}\left[\frac{x}{x^2+a^2} + I_1\right] = \frac{1}{2a^2}\left[\frac{x}{x^2+a^2} + \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}\right] + C$$

(вж. зад. 3.7).

При $n=2$ получаваме

$$I_3 = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^3} = \frac{1}{4a^2}\left[\frac{x}{(x^2+a^2)^2} + 3\,I_2\right]$$

$$= \frac{1}{4a^2}\left[\frac{x}{(x^2+a^2)^2} + \frac{3}{2a^2}\,\frac{x}{x^2+a^2} + \frac{3}{2a^3}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}\right] + C.$$

Докажете рекурентните формули:

3.17. а) $$\int \frac{dx}{(a^2-x^2)^{n+1}} = \frac{1}{2na^2}\,\frac{x}{(a^2-x^2)^n} + \frac{2n-1}{2na^2}\int \frac{dx}{(a^2-x^2)^n},$$ $a > 0$, n — естествено число;

б) $$\int \frac{x^m\,dx}{(a^2-x^2)^n} = \frac{1}{2(n-1)}\,\frac{x^{m-1}}{(a^2-x^2)^{n-1}} - \frac{m-1}{2(n-1)}\int \frac{x^{m-2}\,dx}{(a^2-x^2)^{n-1}},$$ $a > 0$, $m, n = 2, 3, \ldots$

в) $$\int \frac{\sin^n x}{\cos^m x}\,dx = \frac{\sin^{n-1} x}{(m-1)\cos^{m-1} x}$$

$$-\frac{n-1}{m-1}\int\frac{\sin^{n-2}x}{\cos^{m-2}x}\,dx,\quad m\neq 1.$$

г) $$\int (a^2-x^2)^n\,dx=\frac{x(a^2-x^2)^n}{2n+1}$$

$$+\frac{2na^2}{2n+1}\int (a^2-x^2)^{n-1}dx.$$

От последната рекурентна формула, като вземем предвид, че $\int (a^2-x^2)^{-\frac{1}{2}}dx=\arcsin\frac{x}{a}+C$, получаваме

$$\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\frac{x}{2}(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}}+\frac{a^2}{2}\int (a^2-x^2)^{-\frac{1}{2}}dx$$

$$=\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+C.$$

$$\int (a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}dx=\frac{x}{4}(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}+\frac{3}{4}a^2\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx.$$

3.18. $$\int (\ln x)^n\,dx=x(\ln x)^n-n\int(\ln x)^{n-1}\,dx.$$

3.19. $$\int x^{\alpha}(\ln x)^n\,dx=\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}(\ln x)^n$$

$$-\frac{n}{\alpha+1}\int x^{\alpha}(\ln x)^{n-1}dx,\quad \alpha\neq -1.$$

3.20. $$\int x^n e^x\,dx=x^n e^x-n\int x^{n-1}e^x\,dx.$$

3.21. $$\int e^{ax}\sin nx\,dx=\frac{e^{ax}}{a^2+n^2}\sin^{n-1}x(a\sin x-n\cos x)$$

$$+\frac{n(n-1)}{a^2+n^2}\int e^{ax}\sin^{n-2}x\,dx.$$

3.22. $$\int\frac{dx}{\sin^n x}=-\frac{\cos x}{(n-1)\sin^{n-1}x}+\frac{n-2}{n-1}\int\frac{dx}{\sin^{n-2}x},\quad n\geqq 2.$$

От горното рекурентно равенство, като вземем предвид, че $\int\frac{dx}{\sin x}=\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+C$, получаваме

$$\int\frac{dx}{\sin^3 x}=-\frac{\cos x}{2\sin^2 x}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\sin x}$$

$$=-\frac{\cos x}{2\sin^2 x}+\frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+C.$$

3.23. $$\int\operatorname{tg}^n x\,dx=\frac{1}{n-1}\operatorname{tg}^{n-1}x-\int\operatorname{tg}^{n-2}x\,dx.$$

Тъй като $\int\operatorname{tg}x\,dx=-\ln|\cos x|+C$ и $\int\operatorname{tg}^0 x\,dx=x+C$, чрез горната рекурентна формула можем да пресметнем разглеждания интеграл при всяко естествено n.

3.24. $$\int\operatorname{ctg}^n x\,dx=\frac{1}{n-1}\operatorname{cotg}^{n-1}x-\int\operatorname{cotg}^{n-2}x\,dx.$$

3.25. $$\int\frac{x^n dx}{\sqrt{x^2+a}}=\frac{1}{n}x^{n-1}\sqrt{x^2+a}$$

$$-\frac{n-1}{n}a\int\frac{x^{n-2}}{\sqrt{x^2+a}}\,dx.$$

При пресмятане на интеграли от този вид използвайте, че

$$\int\frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+a}}=\sqrt{x^2+a}+C \text{ и } \int\frac{x^0 dx}{\sqrt{x^2+a}}=\ln\left|x+\sqrt{x^2+a}\right|+C.$$

Нека $P(x)$ е полином от n-та степен. Като използвате обобщената формула за интегриране по части, докажете, че:

3.26. $\int P(x)e^{ax}dx = e^{ax}\left[\frac{P(x)}{a} - \frac{P'(x)}{a^2} + \frac{P''(x)}{a^3} - \dots\right] + C,$

$a \neq 0.$

3.27. $\int P(x)\sin bx\, dx = \left[\frac{P'(x)}{b^2} - \frac{P'''(x)}{b^4} + \dots\right]\sin bx$

$- \left[\frac{P(x)}{b} - \frac{P''(x)}{b^3} + \dots\right]\cos bx + C, \; b \neq 0.$

3.28. $\int P(x)\cos bx\, dx = \left[\frac{P(x)}{b} - \frac{P'(x)}{b^3} + \dots\right]\sin bx$

$+ \left[\frac{P'(x)}{b^2} - \frac{P'''(x)}{b^4} + \dots\right]\cos bx + C, \; b \neq 0.$

3.29. $\int x^2 \arccos x\, dx.$ **3.30.** $\int x^2 e^x dx.$

3.31. $\int (3x^2 + 6x + 5)\operatorname{arctg} x\, dx.$

3.32. $\int x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) dx.$

3.33. $\int \frac{\sqrt{x^2+1}\,[\ln(x^2+1) - 2\ln x]}{x^4} dx.$

3.34. $\int \ln\left(\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x}\right) dx.$ **3.35.** $\int x^2\sqrt{a^2+x^2}\, dx.$

3.36. $\int x \sin\sqrt{x}\, dx, \; x \geqq 0.$ **3.37.** $\int \frac{dx}{(1+x^2)^3}.$

3.38. $\int \frac{dx}{(2+x^2)^2}.$ **3.39.** $\int \frac{dx}{(3+2x^2)^2}.$

3.40. $\int \frac{x^4 dx}{(2+x^2)^3}.$ **3.41.** $\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1+x}} dx.$

3.42. $\int \frac{x\cos x}{\sin^3 x} dx.$ **3.43.** $\int 3^x \cos x\, dx.$

3.44. $\int \frac{\ln x\, dx}{(x+1)^2}.$ **3.45.** $\int \operatorname{arctg}\sqrt{2x-1}\, dx.$

3.46. $\int \frac{e^{\operatorname{arctg} x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} dx.$ **3.47.** $\int x \operatorname{arctg}^2 x\, dx.$

3.48. $\int \frac{xe^x}{(x+1)^2} dx.$ **3.49.** $\int \frac{x\ln(x + \sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+x^2}} dx.$

3.50. $\int e^{2x}\sin^2 x\, dx.$ **3.51.** $\int \sin(\ln x)\, dx.$

3.52. $\int \cos(\ln x)\, dx.$

§ 4. Интегриране чрез субституции

Интегрирането чрез субституции се основава на следното твърдение:

Нека функцията $f(x)$ е дефинирана в някой интервал Δ, функцията $\varphi(t)$ е дефинирана и диференцуема в някой интервал Δ' и нека стойностите на $\varphi(t)$ принадлежат на Δ. Означаваме с N множеството от функционалните стойности на $\varphi(t)$ (N е интервал, който се съдържа в Δ). Нека функцията $\varphi(t)$ има диференцуема обратна функция $\psi(x)$ и нека функцията $f(\varphi(t))\,\varphi'(t)$ притежава неопределен интеграл в Δ'. Да положим $g(t) = \int f(\varphi(t))\,\varphi'(t)dt$. Тогава функцията $f(x)$ притежава примитивна функция поне в интервала N и $\int f(x)dx = g(\psi(x)) + C$.

Интегрирането чрез субституция се нарича още интегриране чрез смяна на променливата. За удобство на записването при пресмятане чрез този метод обикновено пишем равенството $x = \varphi(t)$, при което интегралът $\int f(x)dx$ се замества с интеграла $\int f(\varphi(t))d\varphi(t) = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$.

Като използвате подходящи субституции, решете интегралите:

4.1. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{2-x}}$.

Решение. Полагаме $\sqrt{2-x} = t$, тогава $x=2-t^2$ и $dx = -2t\,dt$.

Следователно $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{2-x}} = -2\int \frac{(2-t^2)t\,dt}{t} = -4\int dt + 2\int t^2 dt$

$$= -4t + \frac{2}{3}t^3 + C = -4\sqrt{2-x} + \frac{2}{3}(2-x)^{\frac{3}{2}} + C.$$

4.2. $\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}$.

Решение. Полагаме $1+e^x = t^2$ и тогава $e^x dx = 2t\,dt$. Но

$e^x = t^2-1$, следователно $dx = \frac{2t\,dt}{t^2-1}$. Тогава

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}} = \int \frac{2t\,dt}{(t^2-1)t} = \ln\left|\frac{1-t}{1+t}\right| + C$$

$$= \ln\left|\frac{1-\sqrt{1+e^x}}{1+\sqrt{1+e^x}}\right| + C = x - 2\ln\left(1+\sqrt{1+e^x}\right) + C.$$

4.3. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}\left(1+\sqrt[3]{x}\right)}$.

Решение. Полагаме $x = t^6$. По такъв начин ще се освободим от корените. Имаме $dx = 6t^5 dt$ и

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}\left(1+\sqrt[3]{x}\right)} = \int \frac{6t^5 dt}{t^3(1+t^2)} = 6\int \frac{t^2 dt}{1+t^2}$$

$$= 6\int dt - 6\int \frac{dt}{1+t^2} = 6(t - \operatorname{arctg} t) + C$$

$$= 6\left(\sqrt[6]{x} - \operatorname{arctg}\sqrt[6]{x}\right) + C.$$

4.4. $\int \frac{\operatorname{arctg}\sqrt{x}}{\sqrt{x}\,(1+x)}\,dx$.

Решение. Полагаме $x = \operatorname{tg}^2 t$. Тогава $dx = \frac{2\operatorname{tg} t}{\cos^2 t}\,dt$ и

$$\int \frac{\operatorname{arctg}\sqrt{x}}{\sqrt{x}\,(1+x)}\,dx = 2\int t\,dt = t^2 + C = \operatorname{arctg}^2\sqrt{x} + C.$$

4.5. $\int \frac{dx}{1+e^x}$.

Решение. Полагаме $1+e^x = t$. Тогава $e^x = t-1$, $x = \ln(t-1)$. Като заместим в интеграла, получаваме

$$\int \frac{dx}{1+e^x} = \int \frac{dt}{t(t-1)} = \ln\left|\frac{t-1}{t}\right| + C$$

$$= \ln\frac{e^x}{1+e^x} + C = x - \ln(1+e^x) + C.$$

Този интеграл може да бъде решен и така:

$$\int \frac{dx}{1+e^x} = \int \frac{e^{-x}dx}{e^{-x}+1} = -\int \frac{d(e^{-x}+1)}{e^{-x}+1}$$

$$= -\ln(e^{-x}+1) + C = x - \ln(e^x+1) + C.$$

4.6. $\int \frac{dx}{x^2+px+q}$.

Решение. Този интеграл ще решим, като ще приложим субституцията на Хорнер. Да разгледаме първо случая, когато квадратният тричлен x^2+px+q няма реални нули, т. е. $p^2-4q < 0$.

Полагаме $x = t - \frac{p}{2}$ (субституция на Хорнер). Тогава $dx = dt$,

$x^2+px+q = t^2 + \frac{4q-p^2}{4}$ и $\int \frac{dx}{x^2+px+q} = \int \frac{dt}{t^2 + \frac{4q-p^2}{4}}$

$$= \frac{2}{\sqrt{4q-p^2}} \int \frac{d\frac{2t}{\sqrt{4q-p^2}}}{\left(\frac{2t}{\sqrt{4q-p^2}}\right)^2 + 1} = \frac{2}{\sqrt{4q-p^2}} \operatorname{arctg} \frac{2t}{\sqrt{4q-p^2}} + C$$

$$= \frac{2}{\sqrt{4q-p^2}} \operatorname{arctg} \frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}} + C.$$

Ако квадратният тричлен има реални и различни нули, т. е. $p^2 - 4q > 0$, то полагайки отново $x = t - \frac{p}{2}$, получаваме

$x^2+px+q = t^2 - \frac{p^2-4q}{4}$ и $\int \frac{dx}{x^2+px+q} = \int \frac{dt}{t^2 - \frac{p^2-4q}{4}}$

$$= \frac{2}{\sqrt{p^2-4q}} \int \frac{d\frac{2t}{\sqrt{p^2-4q}}}{\left(\frac{2t}{\sqrt{p^2-4q}}\right)^2 - 1} = \frac{1}{\sqrt{p^2-4q}} \ln\left| \frac{2x+p-\sqrt{p^2-4q}}{2x+p+\sqrt{p^2-4q}} \right| + C.$$

Накрая, ако квадратният тричлен $x^2 + px + q$ има двукратна нула, то $x^2 + px + q = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2$ и $\int \frac{dx}{x^2+px+q}$

$$= \int \frac{d\left(x + \frac{p}{2}\right)}{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2} = -\frac{1}{x + \frac{p}{2}} + C.$$

4.7. $\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^2}$, $a \neq 0$.

Решение. Полагаме $x = a\operatorname{tg}t$. Тогава $dx = \frac{a\,dt}{\cos^2 t}$, $x^2+a^2 = \frac{a^2}{\cos^2 t}$. Следователно $\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^2} = \frac{1}{a^3} \int \cos^2 t\,dt$ $= \frac{1}{2a^3}(t + \sin t \cos t) + C$. За да се върнем към променливата x, имаме $t = \operatorname{arctg}\frac{x}{a}$; изразяваме $\sin t$ и $\cos t$ чрез $\operatorname{tg}t = \frac{x}{a}$. След преобразуване получаваме $\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^2}$ $= \frac{1}{2a^2}\,\frac{x}{x^2+a^2} + \frac{1}{2a^3}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C$ (срв. зад. 3.7).

4.8. $\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx$, $a > 0$, $|x| < a$.

Решение. Разликата от квадратите под корена ни подсказва да извършим тригонометрична смяна $x = a\sin t$, $|t| < \frac{\pi}{2}$. Тогава $\sqrt{a^2-x^2} = a\cos t$, $dx = a\cos t\,dt$ и $\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = a^2 \int \cos^2 t\,dt$

$= a^2\left[\frac{t}{2} + \frac{1}{4}\sin 2t\right] + C$. Тъй като $t = \arcsin\frac{x}{a}$, то

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = a^2\left[\frac{1}{2}\arcsin\frac{x}{a} + \frac{1}{4}\sin\left(2\arcsin\frac{x}{a}\right)\right] + C$$

$$= \frac{a^2}{2}\left[\arcsin\frac{x}{a} + \sin\left(\arcsin\frac{x}{a}\right)\cos\left(\arcsin\frac{x}{a}\right)\right] + C$$

$= \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + C$ (срв. зад. 3.8).

4.9. $\int \sqrt{x^2-a^2}\,dx,\ x > a > 0.$

Решение. Полагаме $x = \dfrac{a}{\sin t},\ 0 < t < \dfrac{\pi}{2}$. Тогава

$$dx = -\frac{a\cos t}{\sin^2 t}\,dt,\ t = \arcsin\frac{a}{x} \text{ и } \int \sqrt{x^2-a^2}\,dx = -a^2 \int \frac{\cos^2 t}{\sin^3 t}\,dt$$

$$= -a^2 \int \frac{\cos t\,d\sin t}{\sin^3 t} = \frac{a^2}{2} \int \cos t\,d\frac{1}{\sin^2 t} = \frac{a^2}{2}\left(\frac{\cos t}{\sin^2 t} + \int \frac{dt}{\sin t} \right)$$

$$= \frac{a^2}{2}\left(\frac{\cos t}{\sin^2 t} + \ln\left|\operatorname{tg}\frac{t}{2}\right| \right) + C.$$

Остава да заместим $t = \arcsin\dfrac{a}{x}$ и да опростим (срв. зад. 3.9).

4.10. $\int \sqrt{x^2+a^2}\,dx,\ a > 0.$

Решение. Сборът от квадратите под корена ни подсказва да положим $x = a\operatorname{tg} t,\ t \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2} \right),\ t = \operatorname{arctg}\dfrac{x}{a}$. Тогава

$$dx = \frac{a\,dt}{\cos^2 t} \text{ и } \int \sqrt{x^2+a^2}\,dx = a^2 \int \frac{dt}{\cos^3 t} = a^2 \int \frac{\sin^2 t\,dt}{\cos^3 t}$$

$$+ a^2 \int \frac{dt}{\cos t} = -a^2 \int \frac{\sin t\,d\cos t}{\cos^3 t} + a^2 \int \frac{dt}{\cos t}$$

$$= \frac{a^2}{2} \int \sin t\,d\cos^{-2} t + a^2 \int \frac{dt}{\cos t} = \frac{a^2}{2}\,\frac{\sin t}{\cos^2 t} + \frac{a^2}{2} \int \frac{dt}{\cos t}$$

$$= \frac{a^2}{2}\operatorname{tg} t\,\frac{1}{\cos t} + \frac{a^2}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{t}{2} + \frac{\pi}{4} \right)\right| + C$$

$$= \frac{x}{2}\,\frac{1}{\cos\left(\operatorname{arctg}\frac{x}{a} \right)} + \frac{a^2}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + \frac{\pi}{4} \right)\right| + C.$$

Изразът може да бъде опростен (срв. зад. 3.10).

4.11. $\int \sqrt{\dfrac{a+x}{a-x}}\,dx,\ a > 0,\ -a \leqq x < a.$

Решение. Полагаме $x = a\cos 2t$. Тогава $dx = -2a\sin 2t\,dt$,

$$\sqrt{\frac{a+x}{a-x}} = \operatorname{cotg} t \text{ и } \int \sqrt{\frac{a+x}{a-x}}\,dx = -4a \int \cos^2 t\,dt$$

$$= -4a\left(\frac{t}{2} + \frac{1}{4}\sin 2t \right) + C = a\arcsin\frac{x}{a} - \sqrt{a^2-x^2} + C.$$

4.12. $\int \sqrt{(x-a)(b-x)}\,dx,\ a < x < b.$

Решение. Полагаме $x-a = (b-a)\sin^2 t$. Тогава

$$\int \sqrt{(x-a)(b-x)}\,dx = 2(b-a)^2 \int \sin^2 t\cos^2 t\,dt$$

$$= \frac{(b-a)^2}{2} \int (1-\cos 4t)\,dt = \frac{(b-a)^2}{4}\left(t - \frac{1}{4}\sin 4t \right) + C$$

$$= \frac{(b-a)^2}{4}\arcsin\sqrt{\frac{x-a}{b-a}} + \frac{2x-(a+b)}{4}\sqrt{(x-a)(b-x)} + C.$$

4.13. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}},\ a < x < b.$

Решение. Полагаме $x-a = (b-a)\sin^2 t$. След преобразувания получаваме

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} = \int \frac{(b-a)2\sin t\cos t\,dt}{\sqrt{(b-a)^2\sin^2 t\cos^2 t}}$$

$$= 2\int dt = 2t + C = 2\arcsin\sqrt{\frac{x-a}{b-x}} + C.$$

4.14. $\int \frac{dx}{x^4+1}$.

Решение. Полагаме $x=\mathrm{tg}\,t$. Тогава $dx = \frac{dt}{\cos^2 t}$, $t = \mathrm{arctg}\,x$.

Имаме

$$\int \frac{dx}{x^4+1} = \int \frac{dt}{(\mathrm{tg}^4 t+1)\cos^2 t} = \int \frac{\cos^2 t}{\sin^4 t+\cos^4 t}\,dt$$

$$= \frac{1}{4}\int \frac{(1+\cos 2t)\,d2t}{1-\frac{1}{2}\sin^2 2t} = \frac{1}{4}\int \frac{d2t}{1-\frac{1}{2}\sin^2 2t}$$

$$+\frac{1}{4}\int \frac{d\sin 2t}{1-\frac{1}{2}\sin^2 2t} = \frac{1}{4}\int \frac{\frac{1}{\cos^2 2t}\,d2t}{\left(\frac{1}{2}\sin^2 2t+\cos^2 2t\right)\frac{1}{\cos^2 2t}}$$

$$+\frac{1}{2\sqrt{2}}\int \frac{d\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin 2t\right)}{1-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin 2t\right)^2}$$

$$+\frac{1}{4}\int \frac{d\,\mathrm{tg}\,2t}{\frac{1}{2}\mathrm{tg}^2 2t+1} + \frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left|\frac{1+\frac{1}{\sqrt{2}}\sin 2t}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}\sin 2t}\right|$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{tg}\,2t\right) + \frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}+\sin 2t}{\sqrt{2}-\sin 2t}\right| + C.$$

След заместване $t = \mathrm{arctg}\,x$ и опростяване получаваме

$$\int\frac{dx}{x^4+1} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\,\mathrm{arctg}\,\frac{x\sqrt{2}}{1-x^2} + \frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\frac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1} + C.$$

4.15. $\int e^{\sqrt{x}}\,dx$.

4.16. $\int \sqrt{4-x^2}\,dx$.

4.17. $\int \frac{\sqrt{x^2+a^2}}{x^2}\,dx$.

4.18. $\int \sqrt{x^2+9}\,dx$.

4.19. $\int \frac{dx}{(9+x^2)^{\frac{3}{2}}}$.

4.20. $\int \frac{dx}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$.

4.21. $\int \frac{x^3\,dx}{(a^2+x^2)^3}$, $a > 0$.

4.22. $\int \frac{dx}{(1+x^2)^2}$.

4.23. $\int \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}\,dx$, $a > 0$.

4.24. $\int \frac{\sqrt{x^2+a^2}}{x}\,dx$.

§ 5. Интегриране на рационални функции

Всяка рационална функция може да се представи като сума от полином и правилна рационална функция (т. е. със степен на числителя, по-малка от степента на знаменателя).

Ако знаменателят $Q(x)$ на правилната рационална функция $\frac{P(x)}{Q(x)}$ има вида

$$Q(x) = (x-a)^k \ldots (x-b)^l (x^2+\alpha x+\beta)^r \ldots (x^2+\gamma x+\delta)^s,$$

където двучлените и квадратните тричлени са различни и освен това последните нямат реални нули, то

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \ldots + \frac{A_k}{(x-a)^k} + \ldots + \frac{B_1}{x-b} + \frac{B_2}{(x-b)^2} + \ldots$$

$$+\frac{B_l}{(x-b)^l}+\frac{M_1x+N_1}{x^2+\alpha x+\beta}+\frac{M_2x+N_2}{(x^2+\alpha x+\beta)^2}+\ldots+\frac{M_rx+N_r}{(x^2+\alpha x+\beta)^r}$$

$$+\ldots+\frac{R_1x+L_1}{x^2+\gamma x+\delta}+\frac{R_2x+L_2}{(x^2+\gamma x+\delta)^2}+\ldots+\frac{R_sx+L_s}{(x^2+\gamma x+\delta)^s}\,.$$

Константите $A_1, A_2, \ldots, A_k, \ldots, B_1, B_2, \ldots, B_l, M_1, N_1, M_2, N_2, \ldots, M_r, N_r, \ldots, R_1, L_1, R_2, L_2, \ldots, R_s, L_s$ са реални числа и могат да се определят от горното равенство чрез освобождаване от знаменателя и сравняване на коефициентите пред еднаквите степени на x.

Дробите в дясната страна на равенството се наричат елементарни дроби.

Така интегрирането на рационални функции се свежда до интегриране на полином и на елементарни дроби от вида $\dfrac{A}{(x-a)^n}$ и $\dfrac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}$ при $p^2-4q<0$.

Интегрирането на полинома не представлява трудност, а елементарните дроби се интегрират така:

$$\int\frac{A\,dx}{x-a}=A\ln|x-a|+C.$$

$$\int\frac{A\,dx}{(x-a)^n}=-\frac{A}{(n-1)\,(x-a)^{n-1}}+C,\quad n\neq 1.$$

$$\int\frac{Mx+N}{x^2+px+q}\,dx=\frac{M}{2}\int\frac{2x+p}{x^2+px+q}\,dx+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int\frac{dx}{x^2+px+q}$$

$$=\frac{M}{2}\ln(x^2+px+q)+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int\frac{dx}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+q-\frac{p^2}{4}}$$

$$=\frac{M}{2}\ln(x^2+px+q)+\frac{N-\frac{Mp}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}\,\mathrm{arctg}\,\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}+C.$$

$$\int\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}\,dx=\frac{M}{2}\int\frac{2x+p}{(x^2+px+q)^n}\,dx+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int\frac{dx}{(x^2+px+q)^n}$$

$$=\frac{M}{2}\,\frac{(x^2+px+q)^{1-n}}{1-n}+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int\frac{dx}{\left[\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+q-\frac{p^2}{4}\right]^n}\,,\quad n>1.$$

Последният интеграл чрез субституция на Хорнер $t=x+\dfrac{p}{2}$ се свежда до интеграл от вида $\displaystyle\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^n}$ (вж. зад. 3.16, където за този интеграл е изведена рекурентна формула).

Решете интегралите:

5.1. $\displaystyle\int\frac{15x^2-4x-81}{(x-3)(x+4)(x-1)}\,dx.$

Решение. Подинтегралната функция е правилна рационална функция и знаменателят ѝ има прости реални нули. Затова разлагането на елементарни дроби има вида

$$(1)\qquad \frac{15x^2-4x-81}{(x-3)(x+4)(x-1)}=\frac{A}{x-3}+\frac{B}{x+4}+\frac{C}{x-1}\,.$$

Като се освободим от знаменателите, получаваме тъждеството

(2) $15x^2-4x-81=A(x+4)(x-1)+B(x-3)(x-1)+C(x-3)(x+4).$

Сравняваме коефициентите пред еднаквите степени на x в лявата и дясната страна и получаваме система, от която намираме коефициентите A, B и C;

$$\begin{array}{c|l} x^2 & 15=A+B+C,\\ x & -4=3A-4B+C,\\ x^0 & -81=-4A+3B-12C. \end{array}$$

Решаваме системата и получаваме $A=3$, $B=5$, $C=7$. Следователно

$$\int \frac{15x^2-4x-81}{(x-3)(x+4)(x-1)}\,dx = 3\int \frac{dx}{x-3} + 5\int \frac{dx}{x+4} + 7\int \frac{dx}{x-1}$$

$$=3\ln|x-3| + 5\ln|x+4| + 7\ln|x-1| + C = \ln|(x-3)^3(x+4)^5(x-1)^7| + C.$$

Равенството (1) е в сила при x, различно от -4, 1 и 3. При тези стойности е валидно и равенството (2). В двете страни на това равенство имаме полиноми и тъй като то е валидно за безбройно много стойности на x, получаваме, че е вярно при всички стойности на x без изключение. Така имаме друг начин за намиране на константите A, B, C. Заместваме в равенството (2) $x=3$ и получаваме $A=3$; заместваме $x=-4$, и получаваме $B=5$, а като заместим $x=1$, получаваме $C=7$.

5.2. $\displaystyle\int \frac{x^6-x^5-2x^3-x^2+x+11}{x^5-2x^4+2x^3-4x^2+x-2}\,dx.$

Решение. Знаменателят на тази рационална функция се разлага на множители: $(x-2)(x^2+1)^2$. След деление на числителя на знаменателя получаваме

$$\frac{x^6-x^5-2x^3-x^2+x+11}{x^5-2x^4+2x^3-4x^2+x-2} = x+1 + \frac{2x^2+2x+13}{(x-2)(x^2+1)^2}.$$

Правилната рационална функция $\dfrac{2x^2+2x+13}{(x-2)(x^2+1)^2}$ се разлага на елементарни дроби така:

$$\frac{2x^2+2x+13}{(x-2)(x^2+1)^2} = \frac{A}{x-2} + \frac{Bx+C}{x^2+1} + \frac{Dx+E}{(x^2+1)^2}.$$

Освобождаваме се от знаменателя и сравняваме коефициентите пред еднаквите степени на x:

$$2x^2+2x+13 = (A+B)x^4 + (-2B+C)x^3 + (2A+B-2C+D)x^2 + (-2B+C-2D+E)x + A-2C-2E.$$

Получаваме системата

$$\left|\begin{array}{l} A+B=0 \\ -2B+C=0 \\ 2A+B-2C+D=2 \\ -2B+C-2D+E=2 \\ A-2C-2E=13, \end{array}\right.$$

откъдето намираме $A=1$, $B=-1$, $C=-2$, $D=-3$, $E=-4$.

Следователно

$$\frac{2x^2+2x+13}{(x-2)(x^2+1)^2} = \frac{1}{x-2} - \frac{x+2}{x^2+1} - \frac{3x+4}{(x^2+1)^2}.$$

Тогава

$$\int \frac{x^6-x^5-2x^3-x^2+x+11}{x^5-2x^4+2x^3-4x^2+x-2}\,dx$$

$$= \int\left[x+1 + \frac{1}{x-2} - \frac{x+2}{x^2+1} - \frac{3x+4}{(x^2+1)^2}\right]dx = \frac{x^2}{2} + x + \ln|x-2|$$

$$-\frac{1}{2}\ln(x^2+1) - 2\operatorname{arctg}x - \frac{3}{2}\int \frac{d(x^2+1)}{(x^2+1)^2} - 4\int \frac{dx}{(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{x^2}{2} + x + \ln|x-2| - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) - 2\operatorname{arctg}x + \frac{3}{2}\,\frac{1}{1+x^2}$$

$$-4\left(\frac{1}{2}\,\frac{x}{x^2+1} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg}x\right) + C$$

$$= \frac{x^2-2x+3}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2}\ln\frac{(x-2)^2}{x^2+1} - 4\operatorname{arctg}x + C.$$

Разлагането на правилната рационална функция на елементарни дроби може да се извърши и по следния начин: Освобождаваме се от знаменателите в равенството

$$\frac{2x^2+2x+13}{(x-2)(x^2+1)^2} = \frac{A}{x-2} + \frac{Bx+C}{x^2+1} + \frac{Dx+E}{(x^2+1)^2}$$

и получаваме

$$2x^2+2x+13 = A(x^2+1)^2 + (Bx+C)(x-2)(x^2+1) + (Dx+E)(x-2).$$

Дадената рационална функция $\dfrac{2x^2+2x+13}{(x-2)(x^2+1)^2}$ е дефинирана за всички x, за които не се анулира знаменателят. При тези стойности на x е валидно и предишното равенство. Двете страни на това равенство са полиноми. Като вземем под внимание, че разглежданото равенство е в сила при безбройно много стойности на x, заключаваме, че то е вярно при всички стойности на x без изключение — както реални, така и комплексни.

Заместваме $x=2$ и получаваме $25=A\,.\,25$. Следователно $A=1$. Заместваме $x=\alpha$, където $\alpha^2+1=0$. Тогава имаме последователно

$$-2 + 2\alpha + 13 = (D\alpha+E)(\alpha-2),$$

$$2\alpha + 11 = D\alpha^2 - 2D\alpha + E\alpha - 2E,$$

$$2\alpha + 11 = -D - 2E + (E-2D)\alpha.$$

Следователно

$$\left|\begin{array}{l} E - 2D = 2, \\ -D - 2E = 11; \end{array}\right. \quad E = -4, \quad D = -3.$$

Тогава

$$2x^2+2x+13 = (x^2+1)^2 + (Bx+C)(x-2)(x^2+1) - (3x+4)(x-2)$$

или

$$5(x^2+1) = (x^2+1)^2 + (Bx+C)(x-2)(x^2+1),$$

$$5 = x^2+1 + (Bx+C)(x-2).$$

Заместваме $x=\alpha$, където $\alpha^2+1 = 0$. Тогава

$$5 = (B\alpha + C)(\alpha-2),$$

$$5 = B\alpha^2 - 2B\alpha + C\alpha - 2C,$$

$$5 = -B - 2C + (C-2B)\alpha,$$

откъдето

$$\left|\begin{array}{l} C - 2B = 0 \\ -B - 2C = 5; \end{array}\right. \quad B = -1, \quad C = -2.$$

5.3. $\displaystyle\int \frac{x^4+4x^3+11x^2+12x+8}{(x^2+2x+3)^2(x+1)}\,dx.$

Решение. Квадратният тричлен в знаменателя има комплексни нули. Затова

$$\frac{x^4+4x^3+11x^2+12x+8}{(x^2+2x+3)^2(x+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+2x+3} + \frac{Dx+E}{(x^2+2x+3)^2}.$$

Освобождаваме се от знаменателя: $x^4+4x^3+11x^2+12x+8 = A(x^2+2x+3)^2 + (Bx+C)(x+1)(x^2+2x+3) + (Dx+E)(x+1)$. Както и в зад. 5.2 заместваме последователно x с нулите на знаменателя. Нека $x=-1$. Тогава $4=A4$, или $A=1$. Нека $x=\alpha$, където $\alpha^2+2\alpha+3=0$. Тогава $\alpha^4+4\alpha^3+11\alpha^2+12\alpha+8 = (D\alpha+E)(\alpha+1)$. От $\alpha^2+2\alpha+3=0$ получаваме $\alpha^2=-2\alpha-3$, тогава $\alpha^3 = -2\alpha^2-3\alpha = 4\alpha+6-3\alpha = \alpha + 6$ и $\alpha^4 = \alpha^2 + 6\alpha = -2\alpha-3+6\alpha = 4\alpha - 3$. Следователно $4\alpha-3+4\alpha+24-22\alpha-33+12\alpha+8 = D\alpha^2+D\alpha+E\alpha+E$, $-2\alpha-4 = E-3D+(E-D)\alpha$.

Тогава

$$\left|\begin{array}{l} E-3D = -4 \\ E-D = -2; \end{array}\right. \quad D=1, \quad E = -1.$$

Заместваме получените стойности за коефициентите A, D и E и преобразуваме:

$$x^4+4x^3+11x^2+12x+8 = (x^2+2x+3)^2 + (Bx+C)(x+1)(x^2+2x+3) + (x-1)(x+1),$$
$$(x^2+2x+3)^2 = (x^2+2x+3)^2 + (Bx+C)(x+1)(x^2+2x+3),$$
$$0 = (Bx+C)(x+1)(x^2+2x+3).$$

Следователно $0=Bx+C$, откъдето $B=0$ и $C=0$. Така

$$\int \frac{x^4+4x^3+11x^2+12x+8}{(x^2+2x+3)^2(x+1)}\,dx = \int \frac{dx}{x+1} + \int \frac{x-1}{(x^2+2x+3)^2}\,dx.$$

Във втория интеграл ще извършим субституцията на Хорнер

$t = x + \frac{p}{2} = x+1$. Тогава

$$\int \frac{x-1}{(x^2+2x+3)^2}\,dx = \int \frac{t-2}{(t^2+2)^2}\,dt$$

$$= \int \frac{t\,dt}{(t^2+2)^2} - 2\int \frac{dt}{(t^2+2)^2} = -\frac{1}{2(t^2+2)} - 2\left(\frac{1}{4}\,\frac{t}{t^2+2}\right.$$

$$\left.+ \frac{1}{4\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{2}}\right) + C = -\frac{t+1}{2(t^2+2)} - \frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{2}} + C.$$

Като заместим $t=x+1$, окончателно получаваме

$$\int \frac{x^4+4x^3+11x^2+12x+8}{(x^2+2x+3)^2\,(x+1)}\,dx = \ln|x+1| - \frac{x+2}{2(x^2+2x+3)}$$

$$-\frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{\sqrt{2}} + C.$$

5.4. $\int \frac{dx}{x^3+1}$.

Решение. Разлагаме знаменателя на множители. Тогава $\frac{1}{x^3+1} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2-x+1}$. След освобождаване от знаменателя и приравняване на коефициентите пред еднаквите степени на x получаваме системата

$$\left|\begin{array}{l} 0 = A+B \\ 0 = -A+B+C \\ 1 = A+C. \end{array}\right.$$

Като я решим, намираме $A = \frac{1}{3}$, $B = -\frac{1}{3}$, $C = \frac{2}{3}$. Следователно

$$\int \frac{dx}{x^3+1} = \frac{1}{3}\ln|x+1| - \frac{1}{3}\int \frac{x-2}{x^2-x+1}\,dx$$

$$= \frac{1}{3}\ln|x+1| - \frac{1}{3}\int \frac{\left(x-\frac{1}{2}\right)dx}{x^2-x+1} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}$$

$$= \frac{1}{3}\ln|x+1| - \frac{1}{6}\ln(x^2-x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C$$

$$= \frac{1}{6}\ln\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1} + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C.$$

5.5. $\int \frac{dx}{x^2(1+x^2)^2}$.

Решение. Разлагането на елементарни дроби може да стане с прости преобразувания:

$$\frac{1}{x^2(1+x^2)^2} = \frac{(1+x^2)-x^2}{x^2(1+x^2)^2} = \frac{1}{x^2(1+x^2)} - \frac{1}{(1+x^2)^2}$$

$$= \frac{(1+x^2)-x^2}{x^2(1+x^2)} - \frac{1}{(1+x^2)^2} = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{(1+x^2)^2}.$$

Тогава

$$\int \frac{dx}{x^2(1+x^2)^2} = \int \frac{dx}{x^2} - \int \frac{dx}{1+x^2} - \int \frac{dx}{(1+x^2)^2}$$

$$= -\frac{1}{x} - \frac{x}{2(1+x^2)} - \frac{3}{2}\operatorname{arctg}x + C.$$

5.6. $\int \frac{dx}{x^4-1}$.

Решение. Преобразуваме:

$$\frac{1}{x^4-1} = \frac{(x^2+1)-(x^2-1)}{2(x^2-1)(x^2+1)} = \frac{1}{2(x^2-1)} - \frac{1}{2(x^2+1)} .$$

Тогава

$$\int \frac{dx}{x^4-1} = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x^2-1} - \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x^2+1}$$

$$= \frac{1}{4} \ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x + C.$$

5.7. $\int \frac{x^4+1}{x^5+x^4-x^3-x^2}\, dx.$

Решение. Разлагаме знаменателя на рационалната функция на множители и след това разлагаме на сума от елементарни дроби:

$$\frac{x^4+1}{x^2(x+1)^2(x-1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-1} + \frac{D}{x+1} + \frac{E}{(x+1)^2} .$$

След освобождаване от знаменателите получаваме

$$x^4+1 = Ax(x-1)(x+1)^2 + B(x-1)(x+1)^2 + Cx^2(x+1)^2 + Dx^2(x^2-1) + Ex^2(x-1),$$

откъдето $A = 1,\ B = -1,\ C = \frac{1}{2},\ D = -\frac{1}{2},\ E = -1.$

Следователно

$$\int \frac{(x^4+1)\,dx}{x^5+x^4-x^3+x^2} = \ln|x| + \frac{1}{x} + \frac{1}{2}\ln|x-1|$$

$$- \frac{1}{2}\ln|x+1| + \frac{1}{x+1} + C.$$

5.8. $\int \frac{dx}{x^4+1}$.

Решение. Разлагаме знаменателя на произведение от квадратни тричлени: $x^4+1=(x^2+1)^2-2x^2 = (x^2+x\sqrt{2}+1)(x^2-x\sqrt{2}+1)$.

Тогава $\frac{1}{x^4+1} = \frac{Ax+B}{x^2+x\sqrt{2}+1} + \frac{Cx+D}{x^2-x\sqrt{2}+1}$.

Освобождаваме от знаменателите:

$$1 = (Ax+B)(x^2 - x\sqrt{2} + 1) + (Cx+D)(x^2+x\sqrt{2} + 1).$$

Като сравним коефициентите пред еднаквите степени на x, получаваме системата

$$\begin{array}{c|l} x^3 & 0 = A+C \\ x^2 & 0 = -\sqrt{2}\,A + B + \sqrt{2}\,C + D \\ x & 0 = A - \sqrt{2}\,B + C + \sqrt{2}\,D \\ x^0 & 1 = B + D, \end{array}$$

откъдето намираме $A = -C = \frac{1}{2\sqrt{2}}$, $B = D = \frac{1}{2}$.

Следователно

$$\int \frac{dx}{x^4+1} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \int \frac{x+\sqrt{2}}{x^2+x\sqrt{2}+1}\, dx$$

$$- \frac{1}{2\sqrt{2}} \int \frac{x-\sqrt{2}}{x^2-x\sqrt{2}+1}\, dx$$

$$= \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \frac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{arctg}(x\sqrt{2}+1)$$

$$+ \frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{arctg}(x\sqrt{2}-1) + C.$$

Този интеграл решихме и чрез смяна на променливата — зад. 4.10.

5.9. $\int \frac{dx}{x^6+1}$.

Решение. Предварително преобразуваме подинтегралната функция:

$$\frac{1}{x^6+1} = \frac{(x^4+1) + (1-x^4)}{2(x^6+1)} = \frac{x^4+1}{2(x^6+1)} + \frac{-x^4+1}{2(x^6+1)}$$

$$= \frac{(x^4-x^2+1) + x^2}{2(x^2+1)(x^4-x^2+1)} + \frac{(-x^2+1)(x^2+1)}{2(x^2+1)(x^4-x^2+1)}$$

$$= \frac{1}{2(x^2+1)} + \frac{x^2}{2(x^6+1)} + \frac{-x^2+1}{2(x^4-x^2+1)} .$$

Първите две събираеми се интегрират лесно. Разлагаме последното събираемо на сума от елементарни дроби:

$$\frac{1-x^2}{2(x^4-x^2+1)} = \frac{Ax+B}{x^2+\sqrt{3}\,x+1} + \frac{Cx+D}{x^2-\sqrt{3}\,x+1} .$$

Освобождаваме се от знаменателите и сравняваме коефициентите пред еднаквите степени на x:

$$-\frac{x^2}{2} + \frac{1}{2} = (Ax+B)(x^2-\sqrt{3}\,x+1) + (Cx+D)(x^2+\sqrt{3}\,x+1),$$

$$\begin{array}{l|l} x^3 & 0 = A + C \\ x^2 & -\frac{1}{2} = -\sqrt{3}\,A + B + \sqrt{3}\,C + D \\ x & 0 = A - \sqrt{3}\,B + C + \sqrt{3}\,D \\ x^0 & \frac{1}{2} = B + D. \end{array}$$

Като решим системата, получаваме $A = \frac{1}{2\sqrt{3}}$, $B = \frac{1}{4}$, $C = -\frac{1}{2\sqrt{3}}$, $D = \frac{1}{4}$. Следователно

$$\frac{1}{x^6+1} = \frac{1}{2(x^2+1)} + \frac{x^2}{2(x^6+1)} + \frac{1}{2\sqrt{3}}\,\frac{x+\frac{\sqrt{3}}{2}}{x^2+\sqrt{3}\,x+1}$$

$$-\frac{1}{2\sqrt{3}}\,\frac{x-\frac{\sqrt{3}}{2}}{x^2-\sqrt{3}\,x+1} .$$

След интегриране получаваме

$$\int \frac{dx}{x^6+1} = \frac{1}{2}\,\mathrm{arctg}\,x + \frac{1}{6}\,\mathrm{arctg}\,x^3 + \frac{1}{4\sqrt{3}}\ln\frac{x^2+\sqrt{3}\,x+1}{x^2-\sqrt{3}\,x+1} + C.$$

5.10. При какви условия за константите a, b, c и d интегралът

$\int \frac{ax^3+bx^2+cx+d}{x(x-1)^2(x-2)^3}\,dx$ е рационална функция на x?

Решение. Да разложим рационалната функция на елементарни дроби:

$$\frac{ax^3+bx^2+cx+d}{x(x-1)^2(x-2)^3} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2} + \frac{D}{x-2} + \frac{E}{(x-2)^2} + \frac{F}{(x-2)^3} .$$

Интегралът ще бъде рационална функция на x, ако $A=B=D=0$. Като положим $A=B=D=0$ и се освободим от знаменателите, а след това сравним коефициентите пред еднаквите степени на x в лявата и дясната страна, получаваме системата

$$\begin{array}{l|l} x^4 & C + E = 0 \\ x^3 & -6C - 4E = a \\ x^2 & 12C + 5E - 2F = b \\ x & -8C - 2E + F = c \\ x^0 & 0 = d. \end{array}$$

Изключваме от тази система неизвестните C, E и F и получаваме $5a - 2b - 4c = 0$, $d = 0$.

Пресмятането на интеграли от рационални функции, чиито знаменатели имат кратни нули, е свързано със значителни изчисления. **Методът на Остроградски — Ермит** свежда пресмятането на интеграл от рационална функция до интеграл от рационална функция с прости нули в знаменателя. Той се състои в следното:

Нека $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ е правилна рационална функция. Тогава е в сила равенството

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx = \frac{P_1(x)}{Q_1(x)} + \int \frac{P_2(x)}{Q_2(x)}\,dx, \tag{1}$$

където $Q_2(x)$ е полином със същите нули, както и полиномът $Q(x)$, но прости. Полиномът $Q_1(x)$ е частното от делението на полинома $Q(x)$ с полинома $Q_2(x)$. Полиномите $P_1(x)$ и $P_2(x)$ са с неопределени коефициенти и степените им са по-ниски съответно от степените на полиномите $Q_1(x)$ и $Q_2(x)$. Коефициентите на полиномите $P_1(x)$ и $P_2(x)$ се намират по метода на неопределените коефициенти от равенството

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \left[\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}\right]' + \frac{P_2(x)}{Q_2(x)},$$

което се получава от (1) след диференциране.

Решете интегралите:

5.11. $\displaystyle\int \frac{x^2-x+2}{x^3(x^2+1)^2}\,dx.$

Решение.

$$\int \frac{x^2-x+2}{x^3(x^2+1)^2}\,dx = \frac{Ax^3+Bx^2+Cx+D}{x^2(x^2+1)} + \int \frac{E_1x^2+F_1x+G_1}{x(x^2+1)}\,dx$$

$$= \frac{Ax^3+Bx^2+Cx+D}{x^2(x^2+1)} + E\int\frac{dx}{x} + \int\frac{Fx+G}{x^2+1}\,dx.$$

Диференцираме и получаваме

$$\frac{x^2-x+2}{x^3(x^2+1)^2} = \left[\frac{Ax^3+Bx^2+Cx+D}{x^2(x^2+1)}\right]' + \frac{E}{x} + \frac{Fx+G}{x^2+1},$$

или

$$\frac{x^2-x+2}{x^3(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{(3Ax^2+2Bx+C)x(x^2+1) - 2(2x^2+1)(Ax^3+Bx^2+Cx+D)}{x^3(x^2+1)^2}$$

$$+ \frac{E}{x} + \frac{Fx+G}{x^2+1}.$$

Освобождаваме се от знаменателите:

$$x^2-x+2 = (E+F)x^6 + (-A+G)x^5 + (-2B+2E+F)x^4$$
$$+ (A-3C+G)x^3 + Ex^2 - Cx - 2D.$$

Сравняваме коефициентите пред еднаквите степени на x:

$$\begin{array}{l|l} x^6 & E+F = 0 \\ x^5 & -A+G = 0 \\ x^4 & -2B+2E+F = 0 \\ x^3 & A - 3C + G = 0 \\ x^2 & E = 1 \\ x & -C = -1 \\ x^0 & -2D = 2. \end{array}$$

След решаване на системата намираме $A = \dfrac{3}{2}$, $B = \dfrac{1}{2}$, $C = 1$, $D = -1$, $E = 1$, $F = -1$, $G = \dfrac{3}{2}$. Следователно

$$\int \frac{x^2-x+2}{x^3(x^2+1)^2}\,dx = \frac{\frac{3}{2}x^3+\frac{1}{2}x^2+x-1}{x^2(x^2+1)} + \int \frac{dx}{x}$$

$$+\int \frac{-x+\frac{3}{2}}{x^2+1}\,dx = \frac{\frac{3}{2}x^3+\frac{1}{2}x^2+x-1}{x^2(x^2+1)} + \ln|x| - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) +$$

$$+\frac{3}{2}\operatorname{arctg} x + C.$$

5.12. $\int \frac{dx}{(x^4-1)^3}$.

Решение.

$$\int \frac{dx}{(x^4-1)^3} = \frac{Ax^7+Bx^6+Cx^5+Dx^4+Ex^3+Fx^2+Gx+H}{(x^4-1)^2}$$

$$+\int \frac{Kx^3+Lx^2+Mx+N}{x^4-1}\,dx.$$

Диференцираме и се освобождаваме от знаменателите:

$$1=(x^4-1)(7Ax^6+6Bx^5+5Cx^4+4Dx^3+3Ex^2+2Fx+G)$$
$$-8x^3(Ax^7+Bx^6+Cx^5+Dx^4+Ex^3+Fx^2+Gx+H)$$
$$+(x^8-2x^4+1)(Kx^3+Lx^2+Mx+N).$$

След сравняване на коефициентите пред еднаквите степени на x в лявата и дясната страна получаваме:

$$\begin{array}{l|l}
x^{11} & 0 = K \\
x^{10} & 0 = -A + L \\
x^{9} & 0 = -2B + M \\
x^{8} & 0 = -3C + N \\
x^{7} & 0 = -4D - 2K \\
x^{6} & 0 = -7A - 11E - 2L,
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l|l}
x^{5} & 0 = -6B - 6F - 2M \\
x^{4} & 0 = -5C - 7G - 2N \\
x^{3} & 0 = -4D - 8H + K \\
x^{2} & 0 = -3E + L \\
x^{1} & 0 = -2F + M \\
x^{0} & 1 = -G + N.
\end{array}$$

Оттук намираме

$$A=B=D=E=F=H=K=L=M=0,\ C=\frac{7}{32},\ G=-\frac{11}{32}.$$

Следователно

$$\int \frac{dx}{(x^4-1)^3} = \frac{7x^5-11x}{32(x^4-1)^2} + \frac{21}{32}\int \frac{dx}{x^4-1}.$$

Като използваме решението на зад. 5.6, получаваме

$$\int \frac{dx}{(x^4-1)^3} = \frac{7x^5-11x}{32(x^4-1)^2} + \frac{21}{128}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| - \frac{21}{64}\operatorname{arctg} x + C.$$

5.13. $\int \frac{x^3(4-3x)\,dx}{(x^4+x-1)^2}$.

Решение. Разлагаме по метода на Остроградски — Ермит:

$$\int \frac{x^3(4-3x)}{(x^4+x-1)^2}\,dx = \frac{Ax^3+Bx^2+Cx+D}{x^4+x-1} + \int \frac{Ex^3+Fx^2+Gx+H}{x^4+x-1}\,dx$$

и диференцираме полученото равенство:

$$\frac{x^3(4-3x)}{(x^4+x-1)^2} = \left(\frac{Ax^3+Bx^2+Cx+D}{x^4+x-1}\right)' + \frac{Ex^3+Fx^2+Gx+H}{x^4+x-1}.$$

Освобождаваме се от знаменателите и сравняваме коефициентите пред еднаквите степени на x в двете страни. Като решим получената система, намираме $A = B = E = F = G = H = 0$, $C=1$, $D = -1$. Следователно

$$\int \frac{x^3(4-3x)}{(x^4+x-1)^2}\,dx = \frac{x-1}{x^4+x-1} + C.$$

5.14. $\int \frac{5x+3}{(2x^2-4x+10)^2}\,dx$. **5.15.** $\int \frac{x^4\,dx}{(x-1)^2(x+1)^2}$.

5.16. $\displaystyle\int \frac{x^2\,dx}{(x^2+1)(x^2+4)}$.

5.17. $\displaystyle\int \frac{3x^2-5x+2}{x^3-2x^2+3x-6}\,dx$.

5.18. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3-1}$.

5.19. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+2)(x-1)^2}$.

5.20. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^6-1}$.

5.21. $\displaystyle\int \frac{x^5\,dx}{(x^2+1)^3}$.

5.22. $\displaystyle\int \frac{(x^3+1)\,dx}{x(x^2+x+1)^2}$.

5.23. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+x+1)^2}$.

С помощта на метода на Остроградски — Ермит решете интегралите:

5.24. $\displaystyle\int \frac{2x^4-4x^3+24x^2-40x+20}{(x-1)(x^2-2x+2)^3}\,dx$.

5.25. $\displaystyle\int \frac{-4x^3-4x^2+2x}{(x-1)^2(x^2+x+1)^2}\,dx$.

5.26. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^4-1)^2}$.

5.27. При какви условия за константите a, b и c интегралът

$\displaystyle\int \frac{ax^2+bx+c}{x^3(x-1)^2}\,dx$ е рационална функция на x?

5.28. При какви условия за константите a, b, c, α, β и γ интегралът

$\displaystyle\int \frac{\alpha x^2+2\beta x+\gamma}{(ax^2+2bx+c)^2}\,dx$ е рационална функция на x?

§ 6. Интегриране на рационални функции на x и на радикали от една и съща дробно-линейна функция на x

Нека $R(x_1, x_2, \dots, x_{n+1})$ е рационална функция на $n+1$ променливи. Разглеждаме интеграли от вида

$$\int R\left[x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p_1}{q_1}}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p_2}{q_2}}, \dots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p_n}{q_n}}\right] dx,$$

където числата $p_1, p_2, \dots, p_n$ са цели, числата $q_1, q_2, \dots, q_n$ — цели положителни, a, b, c, d — константи, за които $ad-bc\neq 0$. С помощта на субституцията $\frac{ax+b}{cx+d}=t^k$, където k е най-малкото общо кратно на знаменателите $q_1, q_2, \dots, q_n$, разглежданият интеграл се свежда до интеграл от рационална функция на t.

В частност интеграли от вида $\displaystyle\int R\left(x^{\frac{p_1}{q_1}}, x^{\frac{p_2}{q_2}}, \dots, x^{\frac{p_n}{q_n}}\right) dx$ се свеждат до интеграли от рационални функции с помощта на субституцията $x=t^k$.

С подходящи субституции решете интегралите:

6.1. $\displaystyle\int \frac{1+\sqrt[4]{x}}{x+\sqrt{x}}\,dx$.

Решение. Полагаме $x=t^4$. Тогава $dx = 4t^3\,dt$ и

$$\int \frac{1+\sqrt[4]{x}}{x+\sqrt{x}} = 4\int \frac{(1+t)t^3}{t^4+t^2}\,dt = 4\int \frac{t^2+t}{t^2+1}\,dt$$

$$= 4\left(\int dt + \int \frac{t\,dt}{t^2+1} - \int \frac{dt}{t^2+1}\right)$$

$$= 4t + 2\ln(t^2+1) - 4\operatorname{arctg} t + C.$$

В получения резултат заместваме $t=\sqrt[4]{x}$.

6.2. $\displaystyle\int \frac{2}{(2-x)^2}\sqrt[3]{\frac{2-x}{2+x}}\,dx$.

Решение. Полагаме $\frac{2-x}{2+x} = t^3$. Тогава $x = \frac{2-2t^3}{1+t^3}$, $dx = \frac{-12t^2}{(1+t^3)^2}\,dt$. Като заместим в дадения интеграл, получаваме

$$\int \frac{2}{(2-x)^2}\sqrt[3]{\frac{2-x}{2+x}}\,dx = -\frac{3}{2}\int \frac{dt}{t^3} = \frac{3}{4t^2} + C.$$

В резултата заместваме $t = \sqrt[3]{\frac{2-x}{2+x}}$.

6.3. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)(x+1)^2}}$.

Решение. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)(x+1)^2}} = \int \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}\,\frac{dx}{x+1}$. Полагаме $\frac{x+1}{x-1} = t^3$ и тогава $x = \frac{t^3+1}{t^3-1}$, $dx = -\frac{6t^2\,dt}{(t^3-1)^2}$. Следователно

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)(x+1)^2}} = -3\int \frac{dt}{t^3-1} \text{ и т. н.}$$

6.4. $\int \frac{x + \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[6]{x}}{x(1+\sqrt[3]{x})}\,dx$. **6.5.** $\int \frac{\sqrt{2x-3}\,dx}{\sqrt[3]{2x-3}+1}$.

6.6. $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{(x-1)^3(x+2)^5}}$. **6.7.** $\int \frac{x\,dx}{\sqrt[4]{x^3(a-x)}}$.

6.8. $\int \frac{dx}{\sqrt[n]{(x-a)^{n+1}(x-b)^{n-1}}}$, n — естествено число.

6.9. $\int \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}\,dx$.

6.10. Докажете, че $\int R\left(x, \sqrt[n]{(x-a)^p(x-b)^q}\right)dx$, където R е рационална функция и p, q, n са цели числа, е елементарна функция, ако $\frac{p+q}{n}$ е цяло число.

§ 7. Субституции на Ойлер

Интеграли от вида $\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$, $a \neq 0$, $b^2-4ac \neq 0$, където R е рационална функция, могат да бъдат приведени към интеграли от рационални функции с помощта на субституциите на Ойлер:

1) $\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm\sqrt{a}\,x \pm t$, ако $a > 0$.

2) $\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm xt \pm \sqrt{c}$, ако $c > 0$.

3) $\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm(x-x_1)t$ или $\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm(x-x_2)t$,

където x_1 и x_2 са различните реални нули на квадратния тричлен ax^2+bx+c. Понякога е възможно конкретен интеграл от разглеждания вид да бъде пресметнат с помощта на повече от една от посочените субституции. Обемът на изчисленията зависи от приложената субституция.

Решете интегралите:

7.1. $\int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2+x+1}}$.

Решение. В този интеграл $a=1>0$. Можем да приложим първата субституция на Ойлер. Полагаме $\sqrt{x^2+x+1} = -x+t$. След повдигане в квадрат имаме $x = \frac{t^2-1}{1+2t}$, $dx = \frac{2(t^2+t+1)\,dt}{(1+2t)^2}$.

Тогава $\int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2+x+1}} = 2\int \frac{(t^2+t+1)\,dt}{t(1+2t)^2}$. Разлагаме подинтегралната функция на сума от елементарни дроби:

$$\frac{t^2+t+1}{t(1+2t)^2} = \frac{A}{t} + \frac{B}{1+2t} + \frac{C}{(1+2t)^2}, \ldots$$

$$t^2+t+1 = A(1+2t)^2 + Bt(1+2t) + Ct.$$

Полагаме последователно $t = 0$, $t = -\frac{1}{2}$, $t = 1$, и получаваме $A = 1$, $C = -\frac{3}{2}$, $B = -\frac{3}{2}$.

Следователно

$$\int \frac{dx}{x + \sqrt{x^2+x+1}} = 2 \int \frac{dt}{t} - 3 \int \frac{dt}{1+2t} - 3 \int \frac{dt}{(1+2t)^2}$$

$$= 2\ln|t| - \frac{3}{2} \ln|1+2t| + \frac{3}{2} \frac{1}{1+2t} + C.$$

Остава да заместим $t = \sqrt{x^2+x+1} + x$.

Разглежданият интеграл може да бъде решен и с помощта на втората субституция на Ойлер.

7.2. $\displaystyle\int \frac{dx}{x + \sqrt{x^2-x+1}}$.

Решение. В този интеграл $c = 1 > 0$. Може да приложим втората субституция на Ойлер: $\sqrt{x^2-x+1} = tx - 1$. Тогава

$x = \frac{2t-1}{t^2-1}$ и $dx = -2\frac{t^2-t+1}{(t^2-1)^2}\,dt$. Следователно

$$\int \frac{dx}{x + \sqrt{x^2-x+1}} = \int \frac{-2t^2+2t-2}{t(t-1)(t+1)^2}\,dt.$$

Разлагаме подинтегралната функция на сума от елементарни дроби:

$$\frac{-2t^2+2t-2}{t(t-1)(t+1)^2} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t-1} + \frac{C}{t+1} + \frac{D}{(t+1)^2}.$$

По метода на неопределените коефициенти получаваме $A = 2$, $B = -\frac{1}{2}$, $C = -\frac{3}{2}$, $D = -3$. Тогава

$$\int \frac{dx}{x + \sqrt{x^2-x+1}} = 2\int \frac{dt}{t} - \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t-1} - \frac{3}{2}\int \frac{dt}{t+1}$$

$$-3\int \frac{dt}{(t+1)^2} = 2\ln|t| - \frac{1}{2}\ln|t-1| - \frac{3}{2}\ln|t+1| + \frac{3}{t+1} + C,$$

където $t = \frac{1}{x}\left(\sqrt{x^2-x+1} + 1\right)$.

Даденият интеграл може да се реши и с първата субституция на Ойлер. Да положим $\sqrt{x^2-x+1} = -x+t$. Тогава $x = \frac{t^2-1}{2t-1}$,

$$dx = \frac{2(t^2-t+1)}{(2t-1)^2}\,dt \text{ и } \int \frac{dx}{x + \sqrt{x^2-x+1}} = 2\int \frac{t^2-t+1}{t(2t-1)^2}\,dt.$$

Интегралът е по-прост от получения с втората субституция.

7.3. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{(1-x^3)\sqrt{1-x^2}}$, $|x| < 1$.

Решение. За решаване на този интеграл можем да приложим третата субституция на Ойлер: $\sqrt{1-x^2} = (1-x)t$. Тогава

$$x = \frac{t^2-1}{t^2+1}, \quad dx = \frac{4t\,dt}{(1+t^2)^2}.$$

Следователно

$$\int \frac{x\,dx}{(1-x^3)\sqrt{1-x^2}} = \int \frac{t^4-1}{3t^4+1}\,dt$$

$$= \int \left(\frac{1}{3} - \frac{4}{3} \frac{1}{3t^4+1} \right) dt = \frac{t}{3} - \frac{4}{3} \int \frac{dt}{3t^4+1}.$$

Полагаме $\sqrt[4]{3}\ t = u$ и получаваме

$$\int \frac{dt}{3t^4+1} = \frac{1}{\sqrt[4]{3}} \int \frac{du}{u^4+1} \text{ и т. н.}$$

7.4. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+x+1}}$. **7.5.** $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-5x+4}}$.

7.6. $\int \frac{dx}{(x+4)\sqrt{x^2+3x-4}}$. **7.7.** $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x^2+2x+2}}$.

7.8. $\int \frac{dx}{(x^2+a^2)\sqrt{a^2-x^2}}$, $a > 0$. **7.9.** $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{(7x-10-x^2)^3}}$.

7.10. $\int \frac{x+\sqrt{1+x+x^2}}{1+x+\sqrt{1+x+x^2}}\,dx$.

7.11. Нека R е рационална функция на три променливи. Докажете, че $\int R(x, \sqrt{ax+b}, \sqrt{cx+d})\,dx$ с помощта на подходяща субституция може да се сведе до интеграл от рационална функция.

§ 8. Интеграли от диференциален бином

Интеграл от вида $\int x^m(a+bx^n)^p\,dx$, където a и b са различни от нула числа, а m, n и p — рационални числа, се изразява чрез елементарни функции само в следните три случая:

1) p е цяло число. Тогава получаваме интеграл от рационална функция на радикали на x, който разгледахме в § 6 на тази глава. Както вече знаем, той може да се сведе до интеграл от рационална функция посредством субституцията $x=t^k$, където k е най-малкото общо кратно на знаменателите на m и n.

2) $\frac{m+1}{n}$ е цяло число. Полагаме $a+bx^n=t^k$, където k е знаменателят на p.

Посредством тази субституция интегралът се свежда до интеграл от рационална функция.

3) $\frac{m+1}{n} + p$ е цяло число. Полагаме $ax^{-n}+b=t^k$, където k е знаменателят на p.

Интегралът отново се свежда до интеграл от рационална функция.

Интеграли от диференциален бином, които попадат във втория или третия случай без предположението за рационалност на m и n, също могат да бъдат сведени до интеграли от рационални функции с помощта на подходящи субституции.

8.1. $\int \frac{dx}{(1+\sqrt[4]{x})^2}$.

Решение. Записваме интеграла във вида $\int x^0\left(1+x^{\frac{1}{4}}\right)^{-2}dx$. Тогава $m = 0$, $n = \frac{1}{4}$, $p = -2$ — цяло. Следователно налице е първият случай. Полагаме $x=t^4$. Получаваме $dx = 4t^3\,dt$ и

$$\int \frac{dx}{(1+\sqrt[4]{x})^2} = 4\int \frac{t^3\,dt}{(1+t)^2} = 4\int \left(t-2+\frac{3t+2}{(1+t)^2} \right) dt$$

$$= 4\int t\,dt - 8\int dt + 12\int \frac{dt}{1+t} - 4\int \frac{dt}{(1+t)^2}$$

$$= 2t^2 - 8t + 12\ln|t+1| + \frac{4}{1+t} + C.$$

Остава да заместим $t = \sqrt[4]{x}$.

8.2. $\int \frac{\sqrt{1+\sqrt[3]{x}}}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx$.

Решение. Записваме интеграла във вида $\int x^{-\frac{2}{3}}\left(1+x^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}dx$. Тогава $m = -\frac{2}{3}$, $n = \frac{1}{3}$; $p = \frac{1}{2}$; $\frac{m+1}{n} = 1$ — цяло число. Получихме втория случай. Полагаме $1 + x^{\frac{1}{3}} = t^2$. Тогава

$x=(t^2-1)^2,\ \ dx = 6t(t^2-1)^2\,dt,$

$$\int \frac{\sqrt{1+\sqrt[3]{x}}}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx = 6\int t^2 dt = 2t^3 + C \ = 2\left(1+\sqrt[3]{x}\,\right)^{\frac{3}{2}} + C.$$

8.3. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}}$.

Решение. Записваме интеграла във вида $\int x^{-2}(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}\,dx.$ Следователно $m=-2,\ n=2,\ \ p=-\frac{1}{2};\ \frac{m+1}{n}+p=-1$ — цяло число. Получихме третия случай. Преобразуваме $\int x^{-2}(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}dx$ $=\int x^{-2}x^{-1}(x^{-2}+1)^{-\frac{1}{2}}\,dx.$ Полагаме $1+x^{-2}=t^2$. Следователно $x=(t^2-1)^{-\frac{1}{2}},\ dx=-\,t(t^2-1)^{-\frac{3}{2}}\,dx$ и

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}} = -\int dt = -t + C = -\sqrt{\frac{1+x^2}{x^2}} + C.$$

8.4. $\displaystyle\int x^{2\sqrt{2}-1}\left(1+x^{\sqrt{2}}\right)^{\frac{1}{3}}dx.$

Решение. В случая $m=2\sqrt{2}-1,\ n=\sqrt{2}\ ,\ p=\frac{1}{3}\cdot$ Тогава $\frac{m+1}{n}=2.$ Полагаме $1+x^{\sqrt{2}}=t^3$ и получаваме $x=(t^3-1)^{\frac{1}{\sqrt{2}}}$, $dx=\frac{3}{\sqrt{2}}(t^3-1)^{\frac{-\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}}}\,t^2dt.$ Тогава

$$\int x^{2\sqrt{2}-1}\left(1+x^{\sqrt{2}}\right)^{\frac{1}{3}}dx = \frac{3}{\sqrt{2}}\int (t^6-t^3)\,dt \ = \frac{3}{\sqrt{2}}\left(\frac{t^7}{7}-\frac{t^4}{4}\right)+C,$$

където $t=\sqrt[3]{1+x^{\sqrt{2}}}$.

Решете интегралите:

8.5. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{1+\sqrt{x}}}{x}\,dx.$

8.6. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{\left(1+\sqrt[3]{x}\,\right)^2}$.

8.7. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}\left(1+\sqrt[3]{x}\,\right)^3}$.

8.8. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}}$.

8.9. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^3}}$.

8.10. $\displaystyle\int \sqrt[3]{3x-x^3}\,dx.$

8.11. $\displaystyle\int \frac{\left(2-x^{\sqrt{3}}\right)^{\frac{3}{2}}}{x}\,dx.$

8.12. $\displaystyle\int \frac{x^m dx}{\sqrt{1-x^2}}$, $m=1,2,\ldots$

8.13. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^m\sqrt{x^2-1}}$, $m=1,2,\ldots$

§ 9. Интегриране на трансцендентни функции

В този параграф ще разгледаме няколко типа интеграли, които могат да се изразят с помощта на елементарни функции без граничен преход.

Интеграли от вида $\int R(\sin x,\ \cos x)\,dx$, където R е рационална функция на две променливи, могат да се сведат до интеграли от рационални функции с помощта на субституцията $t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ във всеки интервал, в който двете функции $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ и $R(\sin x,\ \cos x)$ са дефинирани.

Субституцията $t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ е универсална за интеграли от тригонометрични функции с един и същ аргумент, тъй като

$$\sin x = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}\ ,\quad \cos x = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}\ ,$$

$$\operatorname{tg}x = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1-t^2}, \quad \operatorname{cotg}x = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{2t},$$

$$t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}, \; x = 2\operatorname{arctg}t, \; dx = \frac{2dt}{1+t^2}.$$

Разгледаната субституция понякога довежда до сложни интеграли от рационални функции. Ако е изпълнено някое от условията:

$$R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x),$$

$$R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x),$$

$$R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x),$$

за изчисляване на интеграла е по-удобно да се използват съответно субституциите: $t = \cos x$, $t = \sin x$, $t = \operatorname{tg}x$.

Интеграли от вида $\int \sin^m x \cos^n x\, dx$ (m, n — рационални числа) могат да се сведат до интеграли от диференциален бином с помощта на субституциите $t = \sin x$ и $t = \cos x$.

В някои конкретни случаи интеграли от тригонометрични функции могат да се пресмятат и по други начини.

Интеграли от вида $\int R(e^{ax})\,dx$ се свеждат до интеграли от рационална функция с помощта на субституцията $t = e^{ax}$. Интеграли от вида $\int P(x)e^{ax}dx$, $\int P(x)\sin ax\,dx$, $\int P(x)\cos ax\,dx$, $\int P(x)\ln x\,dx$, $\int P(x)\arcsin ax\,dx$, $\int P(x)\arccos ax\,dx$, $\int P(x)\operatorname{arctg} ax\,dx$, $\int P(x)\operatorname{arccotg} ax\,dx$, където $P(x)$ е полином, се интегрират по части.

Решете интегралите:

9.1. $\displaystyle\int \frac{dx}{2\sin x - \cos x}$.

Решение. Полагаме $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$. След заместване и опростяване получаваме

$$\int \frac{dx}{2\sin x - \cos x} = 2\int \frac{dt}{t^2+4t-1} = 2\int \frac{d(t+2)}{(t+2)^2-5}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\ln\left|\frac{t+2-\sqrt{5}}{t+2+\sqrt{5}}\right| + C = \frac{1}{\sqrt{5}}\ln\left|\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}+2-\sqrt{5}}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}+2+\sqrt{5}}\right| + C.$$

9.2. $\displaystyle\int \frac{\sin x\, dx}{1+\sin x}$.

Решение. Полагаме $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$. Получаваме

$$\int \frac{\sin x\, dx}{1+\sin x} = 4\int \frac{t\,dt}{(1+t^2)(1+t)^2}.$$

По-просто интегралът може да се реши така:

$$\int \frac{\sin x\, dx}{1+\sin x} = \int \frac{\sin x\,(1-\sin x)\,dx}{(1+\sin x)(1-\sin x)} = \int \frac{\sin x - \sin^2 x}{\cos^2 x}\,dx$$

$$= \int \frac{\sin x\, dx}{\cos^2 x} - \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}\,dx = -\int \frac{d\cos x}{\cos^2 x}$$

$$- \int \frac{dx}{\cos^2 x} + \int dx = \frac{1}{\cos x} - \operatorname{tg}x + x + C.$$

9.3. $\displaystyle\int \frac{dx}{2\sin x - \cos x + 5}$.

Решение. Подинтегралната функция е дефинирана върху цялата числова ос. Ще намерим примитивна, дефинирана също върху цялата ос. Прилагаме универсалната субституция $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$ за $n\pi - \frac{\pi}{2} < \frac{x}{2} < n\pi + \frac{\pi}{2}$, т. е. $(2n-1)\pi < x < (2n+1)\pi$, n — цяло число. След преобразувания получаваме

$$\int \frac{dx}{2\sin x - \cos x + 5} = \int \frac{dt}{3t^2+2t+2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\int \frac{d\,\frac{3t+1}{\sqrt{5}}}{\left(\frac{3t+1}{\sqrt{5}}\right)^2+1} = \frac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{3t+1}{\sqrt{5}} + C_n$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \frac{3\operatorname{tg}\frac{x}{2} + 1}{\sqrt{5}} + C_n.$$

Тъй като примитивната е непрекъсната функция, трябва да е в сила равенството

$$\lim_{\substack{x \to (2n+1)\pi \\ x < (2n+1)\pi}} \left[\frac{1}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \frac{3\operatorname{tg}\frac{x}{2} + 1}{\sqrt{5}} + C_n \right]$$

$$= \lim_{\substack{x \to (2n+1)\pi \\ x > (2n+1)\pi}} \left[\frac{1}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \frac{3\operatorname{tg}\frac{x}{2} + 1}{\sqrt{5}} + C_{n+1} \right],$$

т. е. $\frac{\pi}{2\sqrt{5}} + C_n = -\frac{\pi}{2\sqrt{5}} + C_{n+1}$. Следователно $C_n = \frac{n\pi}{\sqrt{5}} + C_0$, където C_0 е произволна константа. От неравенствата $(2n-1)\pi < x < (2n+1)\pi$ получаваме $n = \left[\frac{x+\pi}{2\pi}\right]$ или

$$I(x) = \int \frac{dx}{2\sin x - \cos x + 5} = \frac{1}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \frac{3\operatorname{tg}\frac{x}{2} + 1}{\sqrt{5}}$$

$$+ \frac{\pi}{\sqrt{5}} \left[\frac{x+\pi}{2\pi}\right] + C_0, \quad x \neq (2n+1)\pi, \ \text{и} \ I((2n+1)\pi)$$

$$= \lim_{x \to (2n+1)\pi} I(x) = \frac{(2n+1)\pi}{2\sqrt{5}} + C_0.$$

Така получената функция е диференцуема и в точките $(2n+1)\pi$ (това може да бъде проверено например с правилото на Лопитал). Получихме примитивна, дефинирана върху цялата ос.

9.4. $\int \sin^2 x \cos^3 x \, dx.$

Решение. Тъй като $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, удобно е да се извърши субституцията $t = \sin x$. Получаваме

$$\int \sin^2 x \cos^3 x \, dx = \int \sin^2 x \cos^2 x \, d\sin x = \int t^2(1-t^2)\, dt$$

$$= \frac{1}{3} t^3 - \frac{1}{5} t^5 + C = \frac{1}{3} \sin^3 x - \frac{1}{5} \sin^5 x + C.$$

9.5. $\int \frac{\sin^5 x \, dx}{\cos^2 x}.$

Решение. Тъй като $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, тук е удобно да се извърши субституцията $t = \cos x$. Получаваме

$$\int \frac{\sin^5 x\, dx}{\cos^2 x} = -\int \frac{\sin^4 x \, d\cos x}{\cos^2 x} = -\int \frac{(1-\cos^2 x)^2 d\cos x}{\cos^2 x}$$

$$= -\int \frac{(1-t^2)^2 dt}{t^2} = -\int \frac{dt}{t^2} + 2\int dt - \int t^2 dt$$

$$= \frac{1}{t} + 2t - \frac{t^3}{3} + C = \frac{1}{\cos x} + 2\cos x - \frac{\cos^3 x}{3} + C.$$

9.6. $\int \frac{dx}{\sin^4 x \cos^2 x}.$

Решение. Тъй като $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$, удобна е субституцията $t = \operatorname{tg} x$. Получаваме

$$\int \frac{dx}{\sin^4 x \cos^2 x} = \int \frac{(1+\operatorname{tg}^2 x)^2 d\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg}^4 x} = \int \frac{(1+t^2)^2 dt}{t^4}$$

$$= t - \frac{2}{t} - \frac{1}{3t^3} + C = \operatorname{tg} x - 2\operatorname{cotg} x - \frac{1}{3}\operatorname{cotg}^3 x + C.$$

9.7. $\int \frac{dx}{\sin^4 x \cos^2 x} =$

Решение. Интеграла можем да запишем така:

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{\sin^5 x \cos x}} = \int \sin^{-\frac{5}{3}} x \cos^{-\frac{1}{3}} x \cos^{-\frac{1}{3}-1} x \, d\sin x$$

$$= \int \sin^{-\frac{5}{3}} x\,(1-\sin^2 x)^{-\frac{2}{3}}\, d\sin x = \int t^{-\frac{5}{3}}(1-t^2)^{-\frac{2}{3}}\, dt \text{ за } t = \sin x.$$

Тук $m = -\dfrac{5}{3}$, $n = 2$, $p = -\dfrac{2}{3}$, $\dfrac{m+1}{n} + p = -1$ — цяло число.

Имаме третия случай за интеграл от диференциален бином. Както знаем, с полагането $t^{-2} - 1 = u^3$ ще получим интеграл от рационална функция.

Интегралът по-лесно може да се пресметне така:

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{\sin^5 x \cos x}} = \int \frac{dx}{\sqrt[3]{\dfrac{\sin^5 x}{\cos^5 x}}\cos^2 x} = \int (\operatorname{tg} x)^{-\frac{5}{3}}\, d\operatorname{tg} x$$

$$= -\frac{3}{2}(\operatorname{tg} x)^{-\frac{2}{3}} + C.$$

9.8. $\displaystyle\int \frac{dx}{1+e^x+e^{2x}+e^{3x}}$.

Решение. Полагаме $t = e^x$. Тогава $dx = \dfrac{1}{t}\,dt$. Следователно

$$\int \frac{dx}{1+e^x+e^{2x}+e^{3x}} = \int \frac{dt}{t(t+1)(t^2+1)}.$$

Получихме интеграл от рационална функция.

Решете интегралите:

9.9. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin x(2+\cos x-2\sin x)}$. **9.10.** $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin x(2\cos^2 x-1)}$.

9.11. $\displaystyle\int \frac{\sin^2 x \cos x}{\sin x+\cos x}\, dx$. **9.12.** $\displaystyle\int \frac{dx}{(e^x-1)^4}$.

§ 10. Общи задачи върху интегриране

Като използвате разгледаните по-рано методи, решете интегралите:

10.1. $\displaystyle\int \frac{dx}{7+x^2}$. **10.2.** $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{7x^2-8}}$.

10.3. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+7}}$. **10.4.** $\displaystyle\int \frac{2^x+3^x}{6^x}\, dx$.

10.5. $\displaystyle\int (1+e^x)^2\, dx$. **10.6.** $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{\sqrt[3]{x^2+a}}$.

10.7. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x}\, dx$. **10.8.** $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{e^x+1}}$.

10.9. $\displaystyle\int \frac{dx}{5-12x-9x^2}$. **10.10.** $\displaystyle\int \frac{dx}{2x^2-5x+7}$.

10.11. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{2+3x-2x^2}}$. **10.12.** $\displaystyle\int \frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x}\, dx$.

10.13. $\displaystyle\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\, dx$. **10.14.** $\displaystyle\int \frac{\sqrt[4]{\operatorname{tg} x}}{\sin^2 x}\, dx$.

10.15. $\displaystyle\int \frac{\cos\ln x}{x}\, dx$. **10.16.** $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$.

10.17. $\displaystyle\int \frac{\ln\arccos x\, dx}{\sqrt{1-x^2}\arccos x}$. **10.18.** $\displaystyle\int \frac{\operatorname{arctg}\sqrt{x}}{(1+x)\sqrt{x}}\, dx$.

10.19. $\displaystyle\int x^2\cos x\, dx$. **10.20.** $\displaystyle\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

10.21. $\int x^2 \arcsin x\,dx$. **10.22.** $\int \sin^2 x\,dx$. **10.23.** $\int \frac{dx}{\sin^4 x}$.

10.24. $\int \sin^{n-1} x \cos(n+1)x\,dx$, n — естествено число.

10.25. $\int \frac{dx}{(3+x^2)^3}$.

10.26. $\int \frac{\arcsin x\,dx}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$. **10.27.** $\int \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) dx$.

10.28. $\int \ln\left(\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x}\right) dx$. **10.29.** $\int \frac{dx}{\sin^5 x}$.

10.30. $\int x^3 \ln^3 x\,dx$. **10.31.** $\int e^{\sqrt{x}}\,dx$.

10.32. $\int x \operatorname{arctg} x^2\,dx$. **10.33.** $\int x \arccos \frac{1}{x}\,dx$.

10.34. $\int \arcsin \sqrt{\frac{x}{x+1}}\,dx$. **10.35.** $\int \arcsin \frac{2\sqrt{x}}{1+x}\,dx$.

10.36. $\int \frac{4x^2-8x}{(x-1)^2(x^2+1)^2}\,dx$. **10.37.** $\int \frac{2x^4+5x^2-2}{2x^3-x-1}\,dx$.

10.38. $\int \frac{7x\,dx}{x^3-5x^2+12x-60}$. **10.39.** $\int \frac{x^2-x+1}{(x^2+x+1)^2}\,dx$.

10.40. $\int \frac{dx}{\left(1 + \sqrt{1-8x} + \sqrt[4]{1-8x}\right)^2 \sqrt[4]{(1-8x)^3}}$.

10.41. $\int \left(\frac{\sqrt[3]{x-1} + 1}{x\sqrt[3]{x-1}} \right)^2 dx$.

10.42. $\int \frac{dx}{\left(\sqrt{1-x} + 2\sqrt[3]{1-x} + 3\sqrt[6]{1-x}\right)^2 \sqrt[3]{1-x}}$.

10.43. $\int \sqrt{x\left(\frac{1}{\sqrt[4]{x^3}} - 2\right)^3}\,dx$. **10.44.** $\int \frac{dx}{\sqrt{x}\left(1-2\sqrt[3]{x}\right)}$.

10.45. $\int \frac{dx}{\sqrt{4-3\sqrt[3]{x^2}}}$.

10.46. Намерете онази примитивна $F(x)$ на функцията

$$f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{-x^2-4x-3}\,\left(x-3+4\sqrt{-x^2-4x-3}\right)^2},\ -3 < x < -1,$$ за която

$\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x<-1}} F(x) = 0$.

Решете интегралите:

10.47. $\int \frac{x\,dx}{\left(2+2x + \sqrt{1+x-x^2}\right)^2 \sqrt{1+x-x^2}}$.

10.48. $\int \frac{dx}{\left(2\sqrt{1+x+x^2} - 1\right)^2}$. **10.49.** $\int \frac{dx}{(x+2)^2\sqrt{x^2+x-4}}$.

10.50. $\int \frac{(1+\cos x)\,dx}{(\sin x+\cos x+2)^3}$. **10.51.** $\int \frac{\sin x \cos x\,dx}{4(2\sin x+2\cos x+3)^3}$.

Глава 5

Риманов определен интеграл

§ 1. Интегруемост. Изчисляване на определени интеграли чрез интегрални суми

Нека $f(x)$ е дефинирана и ограничена функция в интервала $[a, b]$. Разделяме $[a, b]$ на подинтервали с помощта на точките $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$. Нека $m_i = \inf\{f(x),\ x \in [x_{i-1}, x_i]\}$; $M_i = \sup\{f(x),\ x \in [x_{i-1}, x_i]\}$. Сумите $S = \sum_{i=1}^{n} M_i (x_i - x_{i-1})$, $s = \sum_{i=1}^{n} m_i (x_i - x_{i-1})$ наричаме съответно голяма и малка сума на Дарбу.

Горен интеграл на Дарбу от функцията $f(x)$ наричаме точната долна граница $\overline{\int_a^b} f(x)\,dx$ на множеството от големите суми на Дарбу на дадената функция $f(x)$ за всевъзможните деления на интервала $[a, b]$ на подинтервали. Долен интеграл на Дарбу от функцията $f(x)$ наричаме точната горна граница $\underline{\int_a^b} f(x)\,dx$ на множеството от малките суми на Дарбу на дадената функция $f(x)$ за всевъзможните деления на интервала $[a, b]$ на подинтервали.

За горния и долния интеграл на Дарбу е в сила неравенството $\underline{\int_a^b} f(x)\,dx \leq \overline{\int_a^b} f(x)\,dx$.

Функция $f(x)$, дефинирана и ограничена в интервал $[a, b]$, наричаме интегруема в риманов смисъл в този интервал, когато горният и долният ѝ интеграл са равни помежду си. Общата стойност на горния и долния интеграл на една интегруема функция е нейн риманов (или определен) интеграл; означаваме $\int_a^b f(x)\,dx$. Тази дефиниция е на Дарбу.

Еквивалентна на нея е дефиницията на Риман: Нека функцията $f(x)$ е дефинирана в интервала $[a, b]$. Разделяме $[a, b]$ на подинтервали с помощта на точките $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$ и във всеки от тези подинтервали избираме по една точка $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$. Сумата $\sigma = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$ е римановата интегрална сума, съответна на избрания начин на делене на интервала $[a, b]$ на подинтервали и на избора на междинните точка ξ_i. Функцията $f(x)$ е интегруема в интервала $[a, b]$, ако римановите суми σ клонят към някаква граница J, когато максимумът λ от дължините на подинтервалите клони към нула. (Казваме, че римановите суми при $\lambda \to 0$ клонят към J, ако за всяко число $\varepsilon > 0$ може да се намери число $\delta > 0$ такова, че ако $\lambda < \delta$, т.е. интервалът $[a, b]$ е разделен на подинтервали с дължина $x_i - x_{i-1} < \delta$, то неравенството $|\sigma - J| < \varepsilon$ е изпълнено при произволен избор на числата ξ_i.) Границата J се нарича риманов или определен интеграл от $f(x)$ в интервала $[a, b]$.

Известно е, че непрекъснатите в интервала $[a, b]$ функции са интегруеми; такива са и ограничените функции, имащи краен брой точки на прекъсване. Нещо повече, валидна е следната теорема: Ако функцията $f(x)$ е дефинирана и ограничена в интервала $[a, b]$, то тя е интегруема в този интервал, ако за всяко число $\varepsilon > 0$ съществуват краен брой интервали, покриващи всички точки на прекъсване на тази функция, с обща дължина, по-малка от ε.

1.1. Нека $f(x) = C$, $x \in [a, b]$. Докажете, че функцията е интегруема и стойността на интеграла ѝ в разглеждания интервал е $C(b - a)$.

Решение. Да разделим интервала $[a, b]$ на подинтервали с помощта на точките $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$. Във всеки от тези подинтервали точната горна и точната долна граница на разглежданата функция са равни на C. Поради това съответните голяма и малка сума на Дарбу имат стойност

$$\sum_{i=1}^{n} c(x_i - x_{i-1}) = c(x_n - x_0) = c(b - a),$$

т.е.

$$\int_a^b c\,dx = c(b - a).$$

1.2. Нека $f(x) = x$, $x \in [0, 1]$. Докажете, че функцията е интегруема в разглеждания интервал, и пресметнете стойността на интеграла й.

Решение. Да разделим $[0, 1]$ на подинтервали с помощта на точките $0 = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$. Да означим с S и s съответните голяма и малка сума на Дарбу, т.е. $S = \sum_{i=1}^{n} x_i (x_i - x_{i-1})$,

$s = \sum_{i=1}^{n} x_{i-1} (x_i - x_{i-1})$. Изваждаме тези две равенства и получаваме

$S - s = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1})^2$. Като вземем предвид неравенствата

$$S \geqq \overline{\int_0^1} x\,dx,\ s \leqq \underline{\int_0^1} x\,dx,\ \underline{\int_0^1} x\,dx \leqq \overline{\int_0^1} x\,dx,$$

получаваме

$$0 \leqq \overline{\int_0^1} x\,dx - \underline{\int_0^1} x\,dx \leqq S - s = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1})^2.$$

Ако разделим интервала $[0, 1]$ на n равни части, ще получим

$$0 \leqq \overline{\int_0^1} x\,dx - \underline{\int_0^1} x\,dx \leqq \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1})^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n^2} n = \frac{1}{n}.$$

На цялото положително число n можем да даваме произволно големи стойности и тъй като $\overline{\int_0^1} x\,dx - \underline{\int_0^1} x\,dx$ не зависи от n,

получаваме $\overline{\int_0^1} x\,dx - \underline{\int_0^1} x\,dx = 0$. Следователно разглежданата функция е интегруема.

Сега ще пресметнем стойността на интеграла от $f(x) = x$. По дефиницията на Риман $\int_0^1 x\,dx = \lim \sum_{i=1}^{n} \xi_i (x_i - x_{i-1})$ при $\max (x_i - x_{i-1}) \to 0$. Разделяме интервала $[0, 1]$ на n равни части и за $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ взимаме десните краища на получените интервали $[x_{i-1}, x_i]$. Образуваме сумата на Риман

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} \frac{i}{n} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n^2}(1 + 2 + \ldots + n) = \frac{(n+1)\,n}{2n^2}.$$

Тази интегрална сума при $n \to \infty$ клони към $\frac{1}{2}$. Тъй като вече сме доказали интегруемостта на $f(x) = x$, то $\int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2}$.

1.3. Докажете, че функцията на Дирихле

$$D(x) = \begin{cases} 0, \text{ ако } x \text{ е ирационално,} \\ 1, \text{ ако } x \text{ е рационално,} \end{cases}$$

не е интегруема в никой интервал.

Решение. Нека $[a, b]$ е произволен интервал. Да го разделим на подинтервали с помощта на точките $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$. Като изберем във всеки интервал $[x_{i-1}, x_i]$ ирационални числа ξ_i, получаваме $\sum_{i=1}^{n} D(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = 0$. Ако вземем рационални ξ_i, тогава $\sum_{i=1}^{n} D(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = b - a$. Следователно функцията на Дирихле не е интегруема.

1.4. Нека функцията $|f(x)|$ е интегруема. Може ли да се твърди, че $f(x)$ е интегруема?

Решение. В общия случай не може да се твърди, че $f(x)$ е интегруема. Например за функцията

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{ако } x \text{ е рационално,} \\ -1, & \text{ако } x \text{ е ирационално,} \end{cases}$$

имаме $\int\limits_a^b |f(x)|\, dx = b - a$, а самата тя не е интегруема (вж. зад. 1.3).

1.5. Докажете, че е интегруема функцията

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x = 0, \\ \operatorname{sgn}\left(\sin \dfrac{1}{x}\right) & \text{при } x \in \left(0, \dfrac{2}{\pi}\right]. \end{cases}$$

Решение. Дадената функция е прекъсната в точките 0 и $x_k = \dfrac{1}{\pi k}$, $k = 1, 2, \ldots$ Да вземем произволно $\varepsilon > 0$. Вън от интервала $\left(-\dfrac{\varepsilon}{4}, \dfrac{\varepsilon}{4}\right)$ има само краен брой точки на прекъсване на функцията. Нека те са p на брой. Числото p зависи от взетото ε. Да покрием всяка от тези точки на прекъсване с интервали с дължина, по-малка от $\dfrac{\varepsilon}{2p}$. Тогава всички точки на прекъсване на функцията ще бъдат покрити с краен брой интервали, сумата от дължините на които е по-малка от $\dfrac{\varepsilon}{2} + p\dfrac{\varepsilon}{2p} = \varepsilon$. Следователно от теоремата за интегруемост на функции получаваме, че дадената функция е интегруема в интервала $\left[0, \dfrac{2}{\pi}\right]$.

1.6. Докажете, че функцията на Риман (дефинирана за $x \in (0, 1]$):

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{ако } x \text{ е ирационално число,} \\ \dfrac{1}{q}, & \text{ако } x = \dfrac{p}{q},\ p \text{ и } q \text{—естествени и взаимно прости,} \end{cases}$$

е интегруема.

Решение. Както знаем (вж. зад. 1.29 от гл. 2), функцията $f(x)$ е непрекъсната за всяко ирационално x и е прекъсната за всички рационални числа. За решението на задачата ще си послужим със следния критерий за съществуване на определен интеграл: За да съществува определеният интеграл, е необходимо и достатъчно $\lim\limits_{\lambda \to 0} (S - s) = 0$. Тук S е голямата, s — малката сума на Дарбу. Това означава, че за всяко $\varepsilon > 0$ може да се намери $S > 0$ такова, че ако $\lambda < \delta$ (т.е. интервалът е разделен на части с дължини $x_i - x_{i-1} < \delta$), то е изпълнено $S - s < \varepsilon$.

Нека интервалът $[0, 1]$ е разделен на подинтервали с дължини $x_i - x_{i-1} \leqq \lambda$. Да вземем произволно естествено число N и да разделим всички подинтервали на два класа: към първия клас да причислим подинтервалите, съдържащи числата $\dfrac{p}{q}$ със знаменатели $q \leqq N$. Тъй като такива числа са само краен брой $k = k_N$, то и подинтервалите от първия клас ще бъдат не повече от $2k = 2k_N$, а сумата от дължините им няма да надминава $2k\lambda$. Към втория клас естествено сме причислили подинтервалите, несъдържащи разглежданите вече числа. За тях разликите $M_i - m_i$ очевидно са по-малки от $\dfrac{1}{N}$.

Ако според тези два класа разделим разликата $S - s = \sum\limits_{i=1}^{n} (M_i - m_i)(x_i - x_{i-1})$ на две части и ги оценим поотделно, ще получим

$$S - s = \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) < 2k_N\lambda + \frac{1}{N}.$$

Ако вземем отнапред $N > \frac{2}{\varepsilon}$, а след това $\lambda < \frac{\varepsilon}{4k_N}$, ще получим $S - s < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$, което доказва интегруемостта на функцията.

1.7. Да се изчисли $\int_a^b x^k\,dx$, a, b — произволни реални числа, k — естествено число.

Решение. Знаем, че функцията x^k е интегруема в интервала $[a, b]$. Първо ще изчислим $\int_0^a x^k\,dx$, $a \neq 0$. Интервала $[0, a]$ разделяме на n равни части. За всеки подинтервал изчисляваме стойността на функцията в десния край, ако $a > 0$, и в левия край, ако $a < 0$. Тогава за интегралната сума получаваме

$$\sigma_n = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{i}{n}a\right)^k \frac{a}{n} = a^{k+1}\frac{1^k + 2^k + \ldots + n^k}{n^{k+1}}$$ (вж. зад. 1.16, в) от гл. 1).

Следователно

$$\int_0^a x^k\,dx = \lim_{n\to\infty}\sigma_n = \frac{a^{k+1}}{k+1}.$$

Тогава $\int_a^b x^k\,dx = \int_0^b - \int_0^a = \frac{1}{k+1}(b^{k+1} - a^{k+1})$.

1.8. Да се изчисли $\int_a^b x^\mu\,dx$, $b > a > 0$, μ — произволно реално число.

Решение. Ще разделим интервала $[a, b]$ на неравни части. Между числата a и b ще поставим $n-1$ средни геометрични. С други думи, полагаме $q = q_n = \sqrt[n]{\frac{b}{a}}$ и разглеждаме точките $a, aq, aq^2, \ldots, aq^n = b$. При $n \to \infty$ имаме $q = q_n \to 1$ и разликата $aq^i - aq^{i-1} \to 0$. Стойностите на функцията x^μ за подинтервалите изчисляваме за левите краища. Тогава

$$\sigma_n = \sum_{i=1}^{n} (aq^{i-1})^\mu (aq^i - aq^{i-1}) = a^{\mu+1}(q-1)\sum_{i=1}^{n}(q^{\mu+1})^{i-1}.$$

Ако $\mu \neq -1$, то

$$\sigma_n = a^{\mu+1}(q-1)\frac{\left(\frac{b}{a}\right)^{\mu+1} - 1}{q^{\mu+1} - 1} = (b^{\mu+1} - a^{\mu+1})\frac{q-1}{q^{\mu+1}-1}.$$

Като използваме известна граница

$$\left(\frac{x-1}{x^\alpha - 1} \underset{x\to 1}{\longrightarrow} \frac{1}{\alpha},\ \alpha \neq 0\right)$$

или теоремата на Лопитал, получаваме

$$\int_a^b x^\mu\,dx = \lim_{n\to\infty}\sigma_n = (b^{\mu+1} - a^{\mu+1})\lim_{q\to 1}\frac{q-1}{q^{\mu+1}-1} = \frac{b^{\mu+1} - a^{\mu+1}}{\mu+1}.$$

Нека сега $\mu = -1$. Тогава

$$\sigma_n = n(q_n - 1) = n\left(\sqrt[n]{\frac{b}{a}} - 1\right).$$

Като се използва друга известна граница

$$\left(\frac{\alpha^x - 1}{x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \ln\alpha,\ \alpha > 0\right),\ \text{то}\ \int_a^b \frac{dx}{x} = \lim_{n\to\infty}\sigma_n$$

$$= \lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt[n]{\frac{b}{a}} - 1\right) = \ln b - \ln a.$$

1.9 (Поасон). Да се изчисли $\int_0^\pi \ln(1-2r\cos x+r^2)\,dx$.

Решение: Тъй като $(1-|r|)^2 \leqq 1-2r\cos x+r^2$, то ако $|r| \neq 1$, получаваме, че подинтегралната функция е непрекъсната и интегралът съществува. Разделяме интервала $[0,\pi]$ на n равни части. За интегралните суми получаваме

$$\sigma_n = \frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1-2r\cos k\frac{\pi}{n}+r^2\right)$$

$$= \frac{\pi}{n}\ln\left[(1+r)^2\prod_{k=1}^{n-1}\left(1-2r\cos k\frac{\pi}{n}+r^2\right)\right].$$

От алгебрата е известна формулата

$$z^{2n}-1=(z^2-1)\prod_{k=1}^{n-1}\left(1-2z\cos\frac{k\pi}{n}+z^2\right).$$

Полагаме $z=r$ и получаваме $\sigma_n = \dfrac{\pi}{n}\ln\left[\dfrac{r+1}{r-1}(r^{2n}-1)\right]$.

Нека $|r|<1$, тогава $r^{2n}\to 0$ при $n\to\infty$ и

$$\int_0^\pi \ln(1-2r\cos x+r^2)\,dx = \lim_{n\to\infty}\sigma_n = 0.$$

Ако $|r|>1$, като запишем σ_n във вида

$$\sigma_n = \frac{\pi}{n}\ln\left[\frac{r+1}{r-1}\,\frac{r^{2n}-1}{r^{2n}}\right]+2\pi\ln|r|\,, \text{ намираме}$$

$$\int_0^\pi \ln(1-2r\cos x+r^2)\,dx = 2\pi\ln|r|\,.$$

§ 2. Изчисляване на определени интеграли посредством неопределени

Основните свойства на определения интеграл са:

1) Ако функцията $f(x)$ и $g(x)$ са интегруеми в интервала $[a,b]$, то $f(x)\pm g(x)$ също е интегруема в този интервал и

$$\int_a^b [f(x)\pm g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx.$$

2) Ако функцията $f(x)$ е интегруема в интервала $[a,b]$, то $c\,f(x)$, където c е константа, е също интегруема в този интервал и

$$\int_a^b c\,f(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx\,.$$

3) Ако функцията $f(x)$ е интегруема в интервалите $[a,c]$ и $[c,b]$, тя е интегруема и в интервала $[a,b]$ и

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx\,.$$

4) Ако функциите $f(x)$ и $g(x)$ са интегруеми в интервала $[a,b]$ и $f(x)\leqq g(x)$ за всяко $x\in[a,b]$, то

$$\int_a^b f(x)\,dx \leqq \int_a^b g(x)\,dx\,.$$

5) Ако функцията $f(x)$ е интегруема в интервала $[a,b]$, то и функцията $|f(x)|$ е интегруема в този интервал и

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqq \int_a^b |f(x)|\,dx\,.$$

По дефиниция

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0 \text{ и } \int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx\,.$$

Теорема на Лайбниц — Нютон. Ако функцията $f(x)$ е интегруема в интервала $[a, b]$ и $p \in [a, b]$, то производната на функцията $F(x) = \int_p^x f(t)\,dt$ съществува във всяка точка на непрекъснатост x_0 на подинтегралната функция и $F'(x_0) = f(x_0)$.

Определени интеграли се пресмятат главно по формулата на Лайбниц — Нютон: ако $f(x)$ е непрекъсната в интервала $[a, b]$ и $F(x)$ е една нейна примитивна, то

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b .$$

Правилото за интегриране по части на определените интеграли е: ако функциите $f(x)$ и $g(x)$ са диференцуеми в интервала $[a, b]$ и производните им са непрекъснати, то:

$$\int_a^b f(x)\,dg(x) = f(x)\,g(x)\Big|_a^b - \int_a^b g(x)\,d f(x).$$

Обобщената формула за интегриране по части е:

$$\int_a^b f(x)\,g^{(n+1)}(x)\,dx = [\,f(x)\,g^{(n)}(x) - f'(x)\,g^{(n-1)}(x) + \dots$$

$$+ (-1)^n f^{(n)}(x)\,g(x)]\Big|_a^b + (-1)^{n+1} \int_a^b f^{(n+1)}(x)\,g(x)\,dx ,$$

където функциите $f(x)$ и $g(x)$ и всички участвуващи производни са непрекъснати.

Изчислете интегралите:

2.1. $\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1 + x^2}$.

Решение. Една примитивна за $f(x) = \dfrac{1}{1 + x^2}$ е функцията $F(x) = \operatorname{arctg} x$. Тогава по формулата на Лайбниц—Нютон получаваме

$$\int_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1 + x^2} = \operatorname{arctg} x \Big|_0^{\sqrt{3}} = \operatorname{arctg} \sqrt{3} - \operatorname{arctg} 0 = \frac{\pi}{3} - 0 = \frac{\pi}{3} .$$

Лесно се вижда, че $\left(\dfrac{1}{2} \operatorname{arctg} \dfrac{2x}{1 - x^2}\right)' = \dfrac{1}{1 + x^2}$, $x \neq \pm 1$. Тогава формално получаваме

$$\int_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1 + x^2} = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{2x}{1 - x^2}\Big|_0^{\sqrt{3}} = \frac{1}{2} [\operatorname{arctg}(-\sqrt{3}) - \operatorname{arctg} 0] = -\frac{\pi}{6} .$$

Това равенство явно не е вярно, тъй като интеграл от положителна функция не е равен на отрицателно число. В случая формулата на Лайбниц — Нютон не може да се прилага, тъй като функцията $\dfrac{1}{2} \operatorname{arctg} \dfrac{2x}{1 - x^2}$ е прекъсната в точката $x = 1$:

$$\lim_{x \to 1-0} \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{2x}{1 - x^2} = \frac{\pi}{4} ; \qquad \lim_{x \to 1+0} \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{2x}{1 - x^2} = -\frac{\pi}{4} .$$

Следователно $\dfrac{1}{2} \operatorname{arctg} \dfrac{2x}{1 - x^2}$ не е примитивна за $f(x) = \dfrac{1}{1 + x^2}$ в интервала $[0, \sqrt{3}]$.

2.2. $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx\,dx$, където $m \neq n$, m и n — цели числа.

Решение. $$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx\,dx = \frac{1}{2}\left[\frac{\sin (m - n)x}{m - n} - \frac{\sin (m + n)x}{m + n} \right]\Bigg|_{-\pi}^{\pi} = 0 .$$

2.3. $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin^2 m\,x\,dx,\ m \neq 0,\ m$ — цяло.

Решение.

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin^2 m\,x\,dx = \frac{1}{2}\left[x - \frac{\sin 2\,m\,x}{2\,m}\right]\Bigg|_{-\pi}^{\pi} = \pi .$$

2.4. Дадена е функцията

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{при } x \in [0, 1], \\ \sqrt{x} & \text{при } x \in [1, 2]. \end{cases}$$

Изчислете $\int\limits_{0}^{2} f(x)\,dx$.

Решение. От адитивността на интеграла следва

$$\int\limits_{0}^{2} f(x)\,dx = \int\limits_{0}^{1} f(x)\,dx + \int\limits_{1}^{2} f(x)\,dx = \int\limits_{0}^{1} x^2\,dx$$

$$+ \int\limits_{1}^{2} \sqrt{x}\,dx = \frac{x^3}{3}\Bigg|_0^1 + \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\Bigg|_1^2 = \frac{1}{3}(4\sqrt{2} - 1) .$$

2.5. $\int\limits_{0}^{2} |1 - x|\,dx.$

Решение. Тъй като

$$|1 - x| = \begin{cases} 1 - x & \text{при } x \in [0, 1], \\ x - 1 & \text{при } x \in [1, 2], \end{cases}$$

от адитивността на интеграла получаваме

$$\int\limits_{0}^{2} |1 - x|\,dx = \int\limits_{0}^{1} (1 - x)\,dx + \int\limits_{1}^{2} (x - 1)\,dx$$

$$= -\frac{(1 - x)^2}{2}\Bigg|_0^1 + \frac{(x - 1)^2}{2}\Bigg|_1^2 = 1.$$

2.6. $\int\limits_{0}^{\pi} \sqrt{\frac{1 + \cos 2\,x}{2}}\,dx$.

Решение. Преобразуваме подинтегралната функция

$$\sqrt{\frac{1 + \cos 2\,x}{2}} = \sqrt{\cos^2 x} = |\cos x|$$

$$= \begin{cases} \cos x & \text{при } x \in [0, \frac{\pi}{2}] , \\ -\cos x & \text{при } x \in [\frac{\pi}{2}, \pi]. \end{cases}$$

Тогава

$$\int\limits_{0}^{\pi} \sqrt{\frac{1 + \cos 2\,x}{2}}\,dx = \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx + \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (-\cos x)\,dx$$

$$= \sin x \Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} + (-\sin x)\Bigg|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = 2.$$

2.7. $\int\limits_{-1}^{1} \sqrt{1 - x^2}\,dx$.

Решение. За този интеграл не можем да приложим непосредствено формулата за интегриране по части, тъй като подинтегралната функция $\sqrt{1 - x^2}$ не е диференцуема в точките $x = \pm 1$. Затова ще приложим формулата за интегриране по части към $F(\varepsilon) = \int\limits_{-1+\varepsilon}^{1-\varepsilon} \sqrt{1 - x^2}\,dx$, където $0 < \varepsilon < 1$. Получаваме

$$F(\varepsilon) = x\sqrt{1 - x^2}\Bigg|_{-1+\varepsilon}^{1-\varepsilon} + \int\limits_{-1+\varepsilon}^{1-\varepsilon} \frac{x^2\,dx}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$= x\sqrt{1-x^2}\,\Big|_{-1+\varepsilon}^{1-\varepsilon} + \int_{-1+\varepsilon}^{1-\varepsilon} \frac{x^2-1+1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

$$= x\sqrt{1-x^2}\,\Big|_{-1+\varepsilon}^{1-\varepsilon} - F(\varepsilon) + \int_{-1+\varepsilon}^{1-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= x\sqrt{1-x^2}\,\Big|_{-1+\varepsilon}^{1-\varepsilon} - F(\varepsilon) + \arcsin x\,\Big|_{-1+\varepsilon}^{1-\varepsilon}.$$

Нека $\varepsilon \to 0$. Тогава

$$F(0) = x\sqrt{1-x^2}\,\Big|_{-1}^{1} - F(0) + \arcsin x\,\Big|_{-1}^{1} = -F(0) + \pi$$

($F(x)$ е непрекъсната, защото удовлетворява условието на Липшиц — това следва от равенството $F(\varepsilon) = \int_0^{1-\varepsilon} \sqrt{1-x^2}\,dx - \int_0^{-1+\varepsilon} \sqrt{1-x^2}\,dx$.) Следователно $F(0) = \frac{\pi}{2}$, т.е. $\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}$.

2.8. Изчислете интеграла на Дирихле $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2m-1)x}{\sin x}\,dx$, m — естествено число.

Решение. Ще смятаме, че подинтегралната функция е дефинирана при $x = 0$, където за нейна стойност ще приемем границата ѝ при $x \to 0$. Както и да додефинираме подинтегралната функция при $x = 0$, новополучената функция ще бъде интегруема и стойността на интеграла няма да зависи от тази дефиниция. Именно от такава функция се иска да се изчисли даденият интеграл. В бъдеще подобни интеграли ще разглеждаме в този смисъл.

От равенството $\frac{1}{2} + \sum_{i=1}^{m-1} \cos 2ix = \frac{\sin(2m-1)x}{2\sin x}$

(вж. зад. 3.3 от гл. 0) получаваме

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2m-1)x}{\sin x}\,dx = \frac{\pi}{2} + \sum_{i=1}^{m-1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2ix\,dx = \frac{\pi}{2}.$$

2.9. Изчислете интеграла на Феер

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sin nx}{\sin x}\right)^2 dx$, n — естествено число.

Решение. Като вземем предвид казаното в решението на предишната задача и равенството $\sum_{m=1}^{n} \sin(2m-1)x = \frac{\sin^2 nx}{\sin x}$

(зад. 3.21, б) от гл. 0), получаваме

$$\sum_{m=1}^{n} \frac{\sin(2m-1)x}{\sin x} = \left(\frac{\sin nx}{\sin x}\right)^2.$$

Използваме резултата от предишната задача:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sin nx}{\sin x}\right)^2 dx = \frac{n\pi}{2}.$$

За функция $f(x)$, дефинирана в интервала $[a, b]$, примитивна в широк смисъл се нарича всяка непрекъсната в този интервал функция $F(x)$, за която равенството $F'(x) = f(x)$ е изпълнено навсякъде в $[a, b]$ с изключение на краен брой точки. Ако $f(x)$ има примитивна в широк смисъл в интервала $[a, b]$, в сила е формулата на Лайбниц — Нютон $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$.

2.10. $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1-r^2}{1-2r\cos x + r^2}\,dx,\ 0 < r < 1.$

Решение. Съответният неопределен интеграл може да бъде решен с помощта на универсалната субституция $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$:

$$\int \frac{1-r^2}{1-2r\cos x + r^2}\,dx = 2\,(1-r^2)\int \frac{dt}{(1-r)^2+(1+r)^2 t^2}$$

$$= 2\operatorname{arctg}\left(\frac{1+r}{1-r}\,t\right) + C = 2\operatorname{arctg}\left(\frac{1+r}{1-r}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right) + C = F(x) + C.$$

Получената примитивна не е дефинирана в точките $\pm\pi$, но $\lim\limits_{k\to-\pi+0} F(x) = -\pi$ и $\lim\limits_{x\to\pi-0} F(x) = \pi$. Ако положим $F(-\pi) = -\pi$, $F(\pi) = \pi$, функцията $F(x)$ ще бъде непрекъсната за $x \in [-\pi, \pi]$ и тогава

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1-r^2}{1-2r\cos x + r^2}\,dx = F(x)\Big|_{-\pi}^{\pi} = F(\pi) - F(-\pi) = 2\pi.$$

С помощта на определени интеграли могат да се намират граници на редици.

2.11. Намерете $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n}\right)$.

Решение. Преобразуваме дадената сума:

$$S_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1+\frac{i}{n}}.$$

Сега е ясно, че това е интегрална сума за функцията $f(x) = \frac{1}{1+x}$ в интервала $[0, 1]$ при разделянето му на n равни части. Тогава

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \ln(1+x)\Big|_0^1 = \ln 2.$$

2.12. Намерете

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^2+1^2} + \frac{n}{n^2+2^2} + \ldots + \frac{n}{n^2+n^2}\right).$$

Решение. Преобразуваме дадената сума:

$$S_n = \frac{n}{n^2+1^2} + \frac{n}{n^2+2^2} + \ldots + \frac{n}{n^2+n^2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1+\left(\frac{i}{n}\right)^2}.$$

Следователно $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x\Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}$.

2.13. $\int_0^1 x e^x\,dx$.

Решение. Да приложим формулата за интегриране по части:

$$\int_0^1 x e^x\,dx = x e^x\Big|_0^1 - \int_0^1 e^x\,dx = e - e^x\Big|_0^1 = 1.$$

2.14. Изчислете интегралите $J_m = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x\,dx$,

$J'_m = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m x\,dx$, m — естествено число.

Решение. Интегрираме по части

$$J_m = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{m-1} x \, d(-\cos x) = -\sin^{m-1} x \cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$+ (m-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{m-2} x \cos^2 x \, dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{m-2} x (1 - \sin^2 x) \, dx = (m-1) J_{m-2} - (m-1) J_m .$$

Получаваме рекурентната формула $J_m = \dfrac{m-1}{m} J_{m-2}$, по

която можем да сведем интеграла J_m до J_0 или J_1. Ако $m = 2n$, получаваме

$$J_{2n} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x \, dx = \frac{(2n-1)(2n-3)\ldots 3.1}{2n(2n-2)\ldots 4.2} \; \frac{\pi}{2}$$

$$= \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{\pi}{2} .$$

Ако $m = 2n + 1$, то

$$J_{2n+1} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} x \, dx = \frac{2n(2n-2)\ldots 4.2}{(2n+1)(2n-1)\ldots 3.1}$$

$$= \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} .$$

Същите резултати се получават и за J'_m.

Следователно

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m x \, dx$$

$$= \begin{cases} \dfrac{(m-1)!!}{m!!} \dfrac{\pi}{2} & \text{при четно } m, \\[2mm] \dfrac{(m-1)!!}{m!!} & \text{при нечетно } m. \end{cases}$$

2.15. Докажете, че за всеки две интегруеми в интервала $[a, b]$ функции $f(x)$ и $g(x)$ е в сила неравенството на Буняковски – Шварц:

$$\left| \int_a^b f(x) g(x) \, dx \right| \leq \sqrt{\int_a^b f^2(x) \, dx} \; \sqrt{\int_a^b g^2(x) \, dx} .$$

Решение. Да разгледаме функцията $F(x) = [f(x) - \lambda g(x)]^2$, където λ е произволно число. Тъй като $F(x) \geqq 0$, то

$$\int_a^b [f(x) - \lambda g(x)]^2 \, dx \geqq 0 \text{ или}$$

$$\lambda^2 \int_a^b g^2(x) \, dx - 2\lambda \int_a^b f(x) g(x) \, dx + \int_a^b f^2(x) \, dx \geqq 0.$$

Получихме, че квадратният тричлен относно λ е неотрицателен за всяко λ. Следователно дискриминантата му е неположителна, т.е.

$$\left[\int_a^b f(x) g(x) \, dx \right]^2 - \int_a^b f^2(x) \, dx \int_a^b g^2(x) \, dx \leqq 0,$$

т. е.

$$\left| \int_a^b f(x) g(x) \, dx \right| \leqq \sqrt{\int_a^b f^2(x) \, dx} \; \sqrt{\int_a^b g^2(x) \, dx} .$$

2.16. Намерете производната по x на функцията

$$F(x) = \int_{\frac{1}{x}}^{\sqrt{x}} \cos t^2 \, dt, \qquad x > 0.$$

Решение. Записваме дадената функция така:

$$F(x) = \int_{\frac{1}{x}}^{c} \cos t^2 \, dt + \int_{c}^{\sqrt{x}} \cos t^2 \, dt$$

$$= -\int_{c}^{\frac{1}{x}} \cos t^2 \, dt + \int_{c}^{\sqrt{x}} \cos t^2 \, dt .$$

Сега производната $F'(x)$ намираме по теоремата на Лайбниц–Нютон и правилото за диференциране на сложна функция:

$$F'(x) = -\left[\int_{c}^{\frac{1}{x}} \cos t^2 \, dt\right]'_{\frac{1}{x}} \left(\frac{1}{x}\right)'_x + \left[\int_{c}^{\sqrt{x}} \cos t^2 \, dt\right]'_{\sqrt{x}} (\sqrt{x})'_x$$

$$= -\cos\frac{1}{x^2}\left(-\frac{1}{x^2}\right) + \cos x \, \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x^2} + \frac{1}{2\sqrt{x}} \cos x .$$

2.17. Намерете локалните екстремуми на функцията

$$F(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} \, dt \text{ при } x > 0.$$

Решение. Намираме производната $F'(x) = \left[\int_0^x \frac{\sin t}{t}\right]'_x = \frac{\sin x}{x}$. Критични точки са $x = n\pi$, $n = 1, 2, \ldots$ Намираме втората производна $F''(x) = \frac{x\cos x - \sin x}{x^2}$. Тогава $F''(n\pi) = \frac{1}{n\pi}\cos n\pi = \frac{(-1)^n}{n\pi}$. Следователно при нечетно n имаме локален максимум, а при четно n — локален минимум.

2.18. Намерете границата $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\left(\int_0^x e^{t^2} dt\right)^2}{\int_0^x e^{2t^2} dt}$.

Решение. Имаме неопределеност от вида $\frac{\infty}{\infty}$. Прилагаме правилото на Лопитал:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\left(\int_0^x e^{t^2} dt\right)^2}{\int_0^x e^{2t^2} dt} = \lim_{x\to\infty} \frac{2\int_0^x e^{t^2} dt \, e^{x^2}}{e^{2x^2}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{2\int_0^x e^{t^2} dt}{e^{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{2e^{x^2}}{e^{x^2}\, 2x} = 0 .$$

2.19. $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}^2 x \, dx .$ **2.20.** $\int_0^1 \frac{x\, dx}{(1+x^2)^2} .$

2.21 $\int_1^{e^3} \frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}} .$ **2.22.** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x \sin 2x \, dx .$

2.23. $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos x - \cos^3 x}\, dx$.

2.24. $\displaystyle\int_a^b \frac{|x|}{x}\, dx$, $a < b$.

2.25. $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{dx}{1 + 2\sin^2 x}$.

2.26. $\displaystyle\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{(1 + x^2)^{3/2}}$.

2.27. Изчислете $\displaystyle\int_0^2 f(x)\, dx$, ако $f(x) = \begin{cases} x^2 \text{ при } x \in [0, 1], \\ 2 - x \text{ при } x \in (1, 2]. \end{cases}$

2.28. $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{dx}{1 + \varepsilon \cos x}$, $0 \leqq \varepsilon < 1$

2.29. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x}$, $ab \neq 0$.

2.30. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{b}} e^{ax} \sin bx\, dx$, $b \neq 0$.

2.31. $\displaystyle\int_1^{e} \ln^3 x\, dx$.

2.32. Докажете, че $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx\, dx = \begin{cases} 0 \text{ при } m \neq n, \\ \pi \text{ при } m = n, \end{cases}$

m и n цели числа.

2.33. Докажете, че $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cos nx\, dx = 0$, m и n — цели числа.

С помощта на определени интеграли намерете границите на редиците с общ член S_n:

2.34. $S_n = \dfrac{1}{n}\left(\sin\dfrac{\pi}{n} + \sin\dfrac{2\pi}{n} + \ldots + \sin\dfrac{n-1}{n}\pi\right)$.

2.35. $S_n = \dfrac{1}{n^2} + \dfrac{2}{n^2} + \ldots + \dfrac{2n-1}{n^2}$.

2.36. $S_n = \dfrac{1}{\sqrt{4n^2 - 1^2}} + \dfrac{1}{\sqrt{4n^2 - 2^2}} + \ldots + \dfrac{1}{\sqrt{4n^2 - n^2}}$.

2.37. $S_n = \dfrac{1^p + 2^p + \ldots + n^p}{n^{p+1}}$, $p > 0$.

2.38. $S_n = \dfrac{\sqrt[n]{n!}}{n}$.

2.39. $S_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} f\left(a + i\frac{b-a}{n}\right)$, където $f(x)$ е интегруема функция в интервала $[a, b]$.

Докажете, че за произволно положително m са в сила равенствата:

2.40. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m x \cos(m+2)x\, dx = 0$.

2.41. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m x \sin(m+2)x\, dx = \frac{1}{m+1}$.

2.42. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x \cos(m+2)x\, dx = -\frac{\sin\frac{m\pi}{2}}{m+1}$.

2.43. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x \sin(m+2)x\, dx = \frac{\cos\frac{m\pi}{2}}{m+1}$.

Докажете, че за всяко естествено n са в сила равенствата:

2.44. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \sin nx\, dx = \frac{1}{2^{n+1}}\left(\frac{2}{1} + \frac{2^2}{2} + \frac{2^3}{3} + \ldots + \frac{2^n}{n}\right)$.

2.45. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \cos n x \, dx = \frac{\pi}{2^{n+1}}$.

2.46. $\int\limits_0^1 x^k \ln^n x \, dx = \frac{(-1)^n n!}{(k+1)^{n+1}}$.

2.47. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \cos^m x \, dx$

$$= \begin{cases} \frac{(n-1)!!\,(m-1)!!}{(m+n)!!} \frac{\pi}{2} & \text{при четни } m \text{ и } n, \\ \frac{(n-1)!!\,(m-1)!!}{(m+n)!!} & \text{във всички останали случаи} \end{cases}$$

(m и n — естествени числа).

Намерете производната по x на функцията:

2.48. $F(x) = \int\limits_{x^2}^{x^3} \frac{dt}{\ln t}$.

2.49. $F(x) = \int\limits_{\sin x}^{\cos x} \frac{\cos t}{t} \, dt$.

Намерете границите:

2.50. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\int\limits_0^{x^2} \sin\sqrt{t} \, dt}{x^3}$.

2.51. $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{\int\limits_0^{x} (\operatorname{arc\,tg} t)^2 \, dt}{\sqrt{x^2+1}}$.

2.52. $\lim\limits_{x \to +0} \frac{\int\limits_0^{\sin x} \sqrt{\operatorname{tg} t} \, dt}{\int\limits_0^{\operatorname{tg} x} \sqrt{\sin t} \, dt}$.

§ 3. Смяна на променливите

Смяна на променливите при определените интеграли се извършва посредством следната

Теорема. Нека: 1) Функцията $f(x)$ е дефинирана и непрекъсната в някакъв интервал Δ; 2) функцията $\varphi(t)$ е дефинирана и притежава непрекъсната първа производна в някакъв интервал $[\alpha, \beta]$; 3) всички стойности на $\varphi(t)$ принадлежат на интервала Δ; 4) $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$. Тогава

$$\int\limits_a^b f(x)\, dx = \int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\, \varphi'(t)\, dt.$$

Интегрирането чрез смяна на променливите се нарича още интегриране чрез **субституция**. За удобство на записването при пресмятане чрез този метод обикновено пишем равенството $x = \varphi(t)$.

3.1. Да се пресметне $\int\limits_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\, dx$, $a \neq 0$.

Решение. Полагаме $x = a \sin t$. Тогава $\alpha = 0$, $\beta = \frac{\pi}{2}$.

Следователно $\int\limits_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\, dx$, $= a^2 \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\, dt$

$$= \frac{a^2}{2}\left(t + \frac{\sin 2t}{2}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi a^2}{4}.$$

3.2. Да се пресметне $\int\limits_{\frac{1}{2}}^{\sqrt{3}/2} \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}$.

Решение. Полагаме $x = \sin t$. За интеграционни граници на новата променлива t можем да вземем $\alpha = \frac{\pi}{6}$, $\beta = \frac{\pi}{3}$. Могат да се вземат и други граници — например $\alpha = \frac{5}{6}\pi$, $\beta = \frac{2\pi}{3}$. И в двата случая, когато $t \in [\alpha, \beta]$, стойностите на $x = \sin t$

принадлежат на интервала $\left[\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$. Ще интегрираме и в двата случая:

$$\int_{\frac{1}{2}}^{\sqrt{3}/2} \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}} = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos t\, dt}{\sin t \cos t} = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dt}{\sin t} = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{t}{2}\right|\Bigg|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}$$

$$= \ln \operatorname{tg}\frac{\pi}{6} - \ln \operatorname{tg}\frac{\pi}{12} = \ln\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}.$$

Във втория случай — при $t \in \left[\frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}\right]$, получаваме $\sqrt{1-\sin^2 t} = \sqrt{\cos^2 t} = |\cos t| = -\cos t$. Следователно

$$\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}} = \int_{\frac{5\pi}{6}}^{\frac{2\pi}{3}} \frac{\cos t\, dt}{\sin t\,(-\cos t)}$$

$$= \int_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{5\pi}{6}} \frac{dt}{\sin t} = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{t}{2}\right|\Bigg|_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{5\pi}{6}}$$

$$= \ln \operatorname{tg}\frac{5\pi}{12} - \ln \operatorname{tg}\frac{\pi}{6} = \ln\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}.$$

Трябва да отбележим, че не може да вземаме произволно границите α и β, като $\sin\alpha = \frac{1}{2}$ и $\sin\beta = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Например не можем да вземем $\alpha = \frac{5\pi}{6}$, $\beta = \frac{\pi}{3}$, тъй като тогава се нарушава

третото условие на теоремата за смяна на променливите при определени интеграли: когато t се изменя в интервала $\left[\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}\right]$, не всички стойности на функцията $x = \sin t$ принадлежат на интервала $\left[\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$.

3.3. Да се пресметне $\int_4^9 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}\, dx$.

Решение. Полагаме $x = t^2$. За интеграционни граници на новата променлива t може да вземем $\alpha = 2$, $\beta = 3$ или $\alpha = -2$, $\beta = -3$. Не можем да вземем $\alpha = -2$, $\beta = 3$, тъй като се нарушава третото условие на теоремата за смяна на променливите при определените интеграли. Да разгледаме случая $\alpha = -2$, $\beta = -3$:

$$\int_4^9 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}\, dx = \int_{-2}^{-3} \frac{\sqrt{t^2}\, 2t\, dt}{\sqrt{t^2}-1} = 2\int_{-2}^{-3} \frac{|t|\, t\, dt}{|t|-1} = 2\int_{-2}^{-3} \frac{-t^2\, dt}{t+1}$$

$= 7 + 2\ln 2.$

3.4. Докажете, че за непрекъсната в $[-a, a]$ функция $f(x)$ са в сила равенствата:

а) $\int_{-a}^{a} f(x)\, dx = 2\int_0^a f(x)\, dx$, ако функцията $f(x)$ е четна;

б) $\int_{-a}^{a} f(x)\, dx = 0$, ако функцията $f(x)$ е нечетна.

Решение. В дясната страна на равенството $\int_{-a}^{a} f(x)\, dx$ $= \int_{-a}^{0} f(x)\, dx + \int_0^a f(x)\, dx$ извършваме смяна на променливите в първия интеграл $x = -t$. Тогава $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = -\int_{a}^{0} f(-t)\,dt$

$+ \int_0^a f(t)\,dt = \int_0^a \left[f(-x) + f(x)\right] dx$. Ако $f(x)$ е четна, то $f(x)$ $+ f(-x) = 2f(x)$ и получаваме първото равенство. Ако $f(x)$ е нечетна, то $f(x) + f(-x) = 0$ и получаваме второто равенство.

3.5. Докажете, че ако $f(x)$ е непрекъсната в интервала $[0, 1]$, то:

а) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)\,dx$;

б) $\int_0^{\pi} x f(\sin x)\,dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} f(\sin x)\,dx$.

Решение. **а)** Полагаме $x = \frac{\pi}{2} - t$. Тогава

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\,dx = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} f\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right)\right) dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos t)\,dx.$$

б) Полагаме $x = \pi - t$. Тогава $\int_0^{\pi} x f(\sin x)\,dx =$

$$-\int_{\pi}^{0} (\pi - t) f(\sin(\pi - t))\,dt = \int_0^{\pi} \pi f(\sin t)\,dt - \int_0^{\pi} t f(\sin t)\,dt.$$

Следователно

$$2\int_0^{\pi} x f(\sin x)\,dx = \pi \int_0^{\pi} f(\sin x)\,dx.$$

3.6. Докажете, че една от примитивните на четна непрекъсната функция е нечетна функция и всяка примитивна на нечетна функция е четна функция.

Решение. Нека $f(x)$ е дефинирана, непрекъсната и четна в интервала $(-l, l)$. Тогава всяка функция от вида $F(x)$

$= \int_0^x f(t)\,dt + C$, където C е произволна константа, е примитивна на $f(x)$ в интервала $(-l, l)$. Ако положим $t = -y$, получаваме

$$F(-x) = \int_0^{-x} f(t)\,dt + C = -\int_0^{x} f(-y)\,dy + C = \int_0^{x} f(y)\,dy + C,$$

ако $f(t)$ е четна. Следователно $F(-x) = -F(x)$, когато $C = 0$.

Ако $f(x)$ е нечетна, след същата субституция получаваме

$$F(-x) = \int_0^{-x} f(t)\,dt + C = -\int_0^{x} f(-y)\,dy + C = \int_0^{x} f(y)\,dy + C$$

$= F(x)$.

3.7. Докажете, че ако $f(x)$ е непрекъсната периодична функция с период T, дефинирана при $x \in (-\infty, +\infty)$, то $\int_a^{a+T} f(x)\,dx$

$= \int_0^{T} f(x)\,dx$, a — произволно число.

Решение. От адитивността на определения интеграл получаваме

$$\int_a^{a+T} f(x)\,dx = \int_a^{T} f(x)\,dx + \int_T^{a+T} f(x)\,dx.$$

Тъй като $f(x)$ е периодична, второто събираемо може да се запише така: $\int_T^{a+T} f(x)\,dx = \int_T^{a+T} f(x - T)\,dx$. Полагаме $x - T = t$ и получаваме $\int_T^{a+T} f(x - T)\,dx = \int_0^{a} f(t)\,dt$.

Следователно

$$\int_a^{a+T} f(x)\,dx = \int_a^T f(x)\,dx + \int_0^a f(x)\,dx = \int_0^T f(x)\,dx .$$

3.8. Пресметнете $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{dx}{\sin^4 x + \cos^4 x}$.

Решение. Подинтегралната функция е периодична с период $\frac{\pi}{2}$. Тогава $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{dx}{\sin^4 x + \cos^4 x} = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin^4 x + \cos^4 x}$

$$= 4\left[\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{(1+\operatorname{tg}^2 x)\,d\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg}^4 x} + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{(1+\operatorname{cotg}^2 x)\,d\operatorname{cotg} x}{1+\operatorname{cotg}^4 x}\right]$$

$$= 8\int_0^1 \frac{(1+t^2)\,dt}{1+t^4}.$$

Да решим съответния неопределен интеграл:

$$\int \frac{t^2+1}{t^4+1}\,dt = \int \frac{1+\frac{1}{t^2}}{t^2+\frac{1}{t^2}}\,dt = \int \frac{d\left(t-\frac{1}{t}\right)}{\left(t-\frac{1}{t}\right)^2+2}$$

$= \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arc\,tg} \frac{t^2-1}{t\sqrt{2}} + \varepsilon(t) + C = F(t) + C$ (срв.зад.9.3 от гл.5.),

където $F(t)$ е непрекъсната функция в $(-\infty, +\infty)$. Ако положим $F(0) = 0$, то $F(-0) = F(+0) = F(0)$, откъдето имаме $\varepsilon(t) = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \operatorname{sgn} t$. Тогава

$$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{\sin^4 x + \cos^4 x} = 8\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arc\,tg} \frac{t^2-1}{t\sqrt{2}} + \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \operatorname{sgn} t\right)\Big|_0^1$$

$$= 8\frac{\pi}{2\sqrt{2}} - F(0) = 2\sqrt{2}\,\pi .$$

3.9. Да се пресметне $\displaystyle\int_0^a (a^2-x^2)^n\,dx$, $a \neq 0$, n — естествено число.

Решение. Полагаме $x = a\sin t$. Тогава

$$\int_0^a (a^2-x^2)^n\,dx = a^{2n+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1} t\,dt = a^{2n+1}\frac{(2n)!!}{(2n+1)!}$$

(вж. зад. 2.14).

3.10. Да се пресметне $\displaystyle\int_0^a (a^2-x^2)^{\frac{2n-1}{2}}\,dx$, $a \neq 0$, n — естествено число.

Решение. Аналогично на решението на предишната задача след същата смяна получаваме

$$\int_0^a (a^2-x^2)^{\frac{2n-1}{2}}\,dx = a^{2n}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\,\frac{\pi}{2}.$$

3.11. Да се изчисли $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\,dx$.

Решение. Полагаме $x = \operatorname{tg} t$. Получаваме $\alpha = 0$, $\beta = \frac{\pi}{4}$ и тогава

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\operatorname{tg} t)\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\frac{\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}+t\right)}{\cos t}\,dt$$

$$= \frac{\pi}{8}\ln 2 + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\sin\left(\frac{\pi}{4}+t\right)dt - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\cos t\,dt .$$

Ако във втория интеграл положим $t = \frac{\pi}{4} - \varphi$, ще получим

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\cos t\, dt = -\int_{\frac{\pi}{4}}^{0} \ln\cos\left(\frac{\pi}{4} - \varphi\right) d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\sin\left(\frac{\pi}{4} + \varphi\right) d\varphi .$$

Следователно двата интеграла са равни и тогава $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{8}\ln 2$. Трябва да отбележим, че $\int \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\,dx$ не се изразява чрез елементарни функции.

Решете интегралите:

3.12. $\int_0^1 x\sqrt{1+x^2}\,dx$.

3.13. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{3+\cos x}$.

3.14. $\int_0^{\pi} \frac{dx}{(2+\cos x)^2}$.

3.15. $\int_2^4 \frac{\sqrt{x^2-4}}{x^4}\,dx$.

3.16. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x\,dx}{6-5\sin x+\sin^2 x}$.

3.17. $\int_1^{e^2} \frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}}$.

3.18. Докажете, че за функцията $L(x) = \int_1^x \frac{dt}{t}$ са в сила равенствата $L(x_1 x_2) = L(x_1) + L(x_2)$; $L\left(\frac{x_1}{x_2}\right) = L(x_1) - L(x_2)$.

Решете интегралите:

3.19. $\int_0^a x^2\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}\,dx$, $a > 0$.

3.20. $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{(1+x^2)^3}$.

3.21. $\int_{-1}^{1} |x|\,dx$.

3.22. $\int_{-7}^{7} \frac{x^4\sin x}{x^6+2}\,dx$.

3.23. Да се пресметнат интегралите $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx$ и $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx$ в случай, че $f(x)$ е четна (нечетна) функция, а n — цяло число.

Решете интегралите:

3.24. $\int_{\pi}^{\frac{5\pi}{4}} \frac{\sin 2x}{\sin^4 x+\cos^4 x}\,dx$.

3.25. $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \cos x \ln\frac{1+x}{1-x}\,dx$.

3.26. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{\sin x-\cos x}{\sin x+\cos x}\right)^{2n+1} dx$, n — цяло число.

3.27. $\int_0^{k\pi} \frac{1-r\cos x}{1-2r\cos x+r^2}\,dx$, $0 < r < 1$, k — цяло число.

Докажете равенствата:

3.28. $\int_{-\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{8}} x^8\sin^9 x\,dx = 0$.

3.29. $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{\cos x}\,dx = 2\int_0^{\frac{1}{2}} e^{\cos x}\,dx$.

3.30. $\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx\cos nx\,dx = 0$, m, n — естествени числа.

3.31. $\int_{-a}^{a} \sin x\, f(\cos x)\,dx = 0$.

3.32. $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(a+b-x)\,dx$.

3.33. $\int_0^t f(x)\,g(t-x)\,dx = \int_0^t g(x)\,f(t-x)\,dx$.

3.34. $$\int_0^{\pi} f(\sin x)\,dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\,dx\,.$$

3.35. $$\int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{x}dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{t}{\sin t}\,dt\,.$$

§ 4. Някои приложения на определените интеграли

4.1. (формула на Уолис). Докажете:

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2 \frac{1}{2n+1}\,.$$

Решение. Нека $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, тогава

$$\sin^{2n+1} x < \sin^{2n} x < \sin^{2n-1} x\,.$$

Да интегрираме тези неравенства

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} x\,dx < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x\,dx < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n-1} x\,dx\,.$$

Като използваме резултата от зад. 2.14, получаваме

$$\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} < \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\,\frac{\pi}{2} < \frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!}\,,$$

или

$$\left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2 \frac{1}{2n+1} < \frac{\pi}{2} < \left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2 \frac{1}{2n}\,.$$

Да разгледаме разликата между първия и последния израз:

$$\left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2 \frac{1}{2n} - \left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2 \frac{1}{2n+1}$$

$$= \left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2 \frac{1}{2n(2n+1)} < \frac{\pi}{2}\,\frac{1}{2n}\,.$$

Следователно разликата между тези изрази клони към нула, когато $n \to \infty$, откъдето

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2 \frac{1}{2n+1}\,.$$

4.2. (формула на Тейлор с остатъчен член във вид на определен интеграл). Докажете:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2$$

$$+ \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)\,(x-t)^n\,dt\,.$$

Решение. Да положим в обобщената формула за интегриране по части при определен интеграл $g(x) = (b-t)^n$. Тогава $g'(t) = -n(b-t)^{n-1}$, $g''(t) = n(n-1)(b-t)^{n-2}$, . . . , $g^{(n)}(t) = (-1)^n n(n-1)\ldots 1$, $g^{(n+1)}(t) = 0$.

Като заместим, ще получим

$$0 = (-1)^n\,[n!\,f(b) - n!\,f(a) - n!\,f'(a)(b-a)$$

$$-\frac{n!}{2!}f''(a)(b-a)^2 - \ldots\ldots - f^{(n)}(a)(b-a)^n]$$

$$+ (-1)^{n+1}\int_a^b f^{(n+1)}(t)\,(b-t)^n\,dt\,,$$

или

$$f(b) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(b-a) + \frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2 + \ldots$$

$$+ \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n + \frac{1}{n!}\int_a^b f^{(n+1)}(t)(b-t)^n\,dt .$$

Остава само да положим $b = x$, $a = x_0$.

Оттук ще получим формулата на Тейлор с остатъчен член в познатата форма. Най-напред да си припомним формулировката на теоремата за средните стойности: Нека функцията $\psi(t)$ е непрекъсната в интервала $[x_0, x]$, а функцията $\varphi(t)$ е интегруема и не си мени знака в този интервал. Тогава съществува точка ζ в затворения интервал $[x_0, x]$ такава, че $\int_{x_0}^{x} \psi(t)\varphi(t)\,dt$

$= \psi(\zeta)\int_{x_0}^{x}\varphi(t)\,dt$. Ще положим $\psi(t) = f^{(n+1)}(t)$, а $\varphi(t) = (x-t)^n$.

Получихме остатъчния член във формата на Лагранж:

$$\frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)(x-t)^n\,dt = \frac{1}{n!}f^{(n+1)}(\zeta)\int_{x_0}^{x}(x-t)\,dt$$

$$= \frac{f^{(n+1)}(\zeta)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.$$

Интегрални аналози на някои неравенства:

4.3 (неравенство на Коши — Хьолдер). Докажете:

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx \leqq \left\{\int_a^b \left[f(x)\right]^p dx\right\}^{\frac{1}{p}}\left\{\int_a^b \left[g(x)\right]^q dx\right\}^{\frac{1}{q}}, p, q > 1,$$

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Решение. Известно е неравенството

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leqq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^q\right)^{\frac{1}{q}} p, q > 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Нека положителните функции $f(x)$ и $g(x)$ са дефинирани и интегруеми в интервала $[a, b]$. Разделяме този интервал на подинтервали с помощта на точките x_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$ и полагаме

$$a_i = f(x_i)\left(x_i - x_{i-1}\right)^{\frac{1}{p}}, \; b_i = g(x_i)\left(x_i - x_{i-1}\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Като използваме, че $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, получаваме

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i)g(x_i)(x_i - x_{i-1}) \leqq \left\{\sum_{i=1}^{n}\left[f(x_i)\right]^p (x_i - x_{i-1})\right\}^{\frac{1}{p}}$$

$$\times \left\{\sum_{i=1}^{n}\left[g(x_i)\right]^q (x_i - x_{i-1})\right\}^{\frac{1}{q}}.$$

Ако извършим граничен преход при $x_i - x_{i-1} \to 0$, ще получим интегралния вариант на неравенството на Коши — Хьолдер

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx \leqq \left\{\int_a^b \left[f(x)\right]^p dx\right\}^{\frac{1}{p}}\left\{\int_a^b \left[g(x)\right]^q dx\right\}^{\frac{1}{q}}.$$

При $p = q = 2$ получаваме

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx \leqq \sqrt{\int_a^b f^2(x)\,dx}\;\sqrt{\int_a^b g^2(x)\,dx}$$

(неравенство на Буняковски — Шварц, вж. зад. 2.15).

4.4 (неравенство на Минковски). Докажете:

$$\left\{\int_a^b \left[f(x) + g(x)\right]^k dx\right\}^{\frac{1}{k}} \leqq \left\{\int_a^b f^k(x)\,dx\right\}^{\frac{1}{k}} + \left\{\int_a^b g^k(x)\,dx\right\}^{\frac{1}{k}},$$

$k \geqq 1$.

Решение. Известно е неравенството

$$\left\{\sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i)^k\right\}^{\frac{1}{k}} \leqq \left\{\sum_{i=1}^{n} a_i^k\right\}^{\frac{1}{k}} + \left\{\sum_{i=1}^{n} b_i^k\right\}^{\frac{1}{k}}, k \geqq 1.$$

Нека положителните функции $f(x)$ и $g(x)$ са дефинирани в интервала $[a, b]$. Разделяме този интервал на подинтервали с помощта на точките k_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots$

$< x_n = b$ и полагаме $a_i = f(x_i)(x_i - x_{i-1})^{\frac{1}{k}}$, $b_i = g(x_i)(x_i - x_{i-1})^{\frac{1}{k}}$.

Получаваме

$$\left\{ \sum_{i=1}^{n} \Big[f(x_i) + g(x_i) \Big]^k (x_i - x_{i-1}) \right\}^{\frac{1}{k}} \leqq \left\{ \sum_{i=1}^{n} \Big[f(x_i) \Big]^k (x_i - x_{i-1}) \right\}^{\frac{1}{k}}$$

$$+ \left\{ \sum_{i=1}^{n} \Big[g(x_i) \Big]^k (x_i - x_{i-1}) \right\}^{\frac{1}{k}}.$$

Ако извършим граничен преход при $x_i - x_{i-1} \to 0$, ще получим интегрален вариант на неравенството на Минковски

$$\left\{ \int_a^b \Big[f(x) + g(x) \Big]^k dx \right\}^{\frac{1}{k}} \leqq \left\{ \int_a^b f^k(x)\, dx \right\}^{\frac{1}{k}} + \left\{ \int_a^b g^k(x)\, dx \right\}^{\frac{1}{k}}.$$

При $k = 2$ имаме

$$\sqrt{\int_a^b [f(x) + g(x)]^2\, dx} \leqq \sqrt{\int_a^b f^2(x)\, dx} + \sqrt{\int_a^b g^2(x)\, dx}.$$

4.5 (интегрално неравенство на Йенсен). Нека функцията $p(x)$ е дефинирана и положителна в интервала $[a, b]$, функцията $\varphi(x)$ е дефинирана в $[a, b]$ и приема стойности в интервала Δ, а функцията $f(x)$ е изпъкнала в Δ. Тогава

$$f\left(\frac{\int_a^b p(x)\varphi(x)\, dx}{\int_a^b p(x)\, dx} \right) \leqq \frac{\int_a^b p(x) f(\varphi(x))\, dx}{\int_a^b p(x)\, dx}.$$

Решение. Известно е неравенството на Йенсен

$$f\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} p_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} p_i} \right) \leqq \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i f(x_i)}{\sum_{i=1}^{n} p_i},$$

където функцията $f(x)$ е изпъкнала в интервала Δ, $x_i \in \Delta$, а p_i са положителни числа. Да разделим интервала $[a, b]$ на подинтервали с помощта на точките x_i, $i = 1, 2, \dots, n$, и в неравенството на Йенсен вместо x_i да положим $\varphi(x_i)$, а вместо $p_i - p(x_i)(x_i - x_{i-1})$. След граничен преход получаваме интегралния вариант на неравенството на Йенсен.

4.6. (полиноми на Льожандър). Да се намери полином от n-та степен $P_n(x)$ такъв, че за всеки полином $Q(x)$ от степен, по-ниска от n, да е в сила равенството $\int_a^b P_n(x) Q(x)\, dx = 0$.

Решение. Всеки полином $P_n(x)$ от n-та степен може да се разглежда като n-та производна от някакъв полином R_{2n} от $2n$-та степен, който пък се получава от $P_n(x)$ чрез n-кратно последователно интегриране. Нека за полинома $R_{2n}(x)$ да са изпълнени условията

(1) $$R_{2n}(a) = R'_{2n}(a) = \dots = R_{2n}^{(n-1)}(a) = 0.$$

Сведохме задачата до следната: да се намери полином $R_{2n}(x)$ от $2n$-та степен, за който $\int_a^b R_{2n}^{(n)}(x) Q(x)\, dx = 0$ за произволен полином $Q(x)$ от степен, по-ниска от n, и да са в сила равенствата (1).

Да приложим обобщената формула за интегриране по части, като заменим n с $n - 1$:

$$\int_a^b R_{2n}^{(n)}(x) Q(x)\, dx = \Big[Q(x) R_{2n}^{(n-1)}(x) - Q'(x) R_{2n}^{(n-2)}(x)$$

$$+ \dots + (-1)^{n-1} Q^{(n-1)}(x) R_{2n}^{(x)} \Big] \Big|_a^b$$

$$+(-1)^n \int_a^b Q^{(n)}(x)\, R_{2n}(x)\, dx\,.$$

От условията (1) и от това, че $Q^{(n)}(x) \equiv 0$, получаваме

$$Q(b)\, R_{2n}^{(n-1)}(b) - Q'(b)\, R_{2n}^{(n-2)}(b) + \dots \tag{2}$$

$$+(-1)^{n-1} Q^{(n-1)}(b)\, R_{2n}(b) = 0\,.$$

Тъй като $Q(x)$ е произволен полином от $(n-1)$-ва степен, то $Q(b), Q'(b), \dots, Q^{(n-1)}(b)$ могат да се разглеждат като произволни числа и от (2) получаваме

$$R_{2n}(b) = R'_{2n}(b) = \dots = R_{2n}^{(n-1)}(b) = 0\,. \tag{3}$$

От (1) и (3) виждаме, че $R_{2n}(x)$ има числата a и b за n-кратни нули. Следователно $R_{2n} = c_n (x-a)^n\ (x-b)^n$ и

$$P_n(x) = c_n\ \frac{d^n}{dx^n}\Big[(x-a)^n (x-b)^n\Big].$$

Ако изберем $a = -1,\ b = 1$, получаваме

$$P_n(x) = C_n \frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n\,.$$

Като положим $C_n = \dfrac{1}{2^n\, n\,!} = \dfrac{1}{(2\,n)\,!!}$, намираме $P_n\ (1) = 1$, $P_n(-1) = (-1)^n$.

Непосредствено от определението на полиномите на Льожандър следва

$$\int_{-1}^{1} P_n(x)\, P_m(x)\, dx = 0 \ \text{ при } \ m \neq n\,.$$

Лесно се вижда и равенството

$$\int_{-1}^{1} P_n^2(x)\, dx = \frac{2}{2n+1} \text{ при } C_n = \frac{1}{(2n)\,!\,!}\,.$$

§ 5. Изчисляване на лица на равнинни фигури, дължини на равнинни дъги и обеми на тела посредством определени интеграли

Лицето на криволинейния трапец T, зададен с неравенствата

$$T\ \begin{cases} a \leqq x \leqq b, \\ f(x) \leqq y \leqq g(x), \end{cases}$$

където $f(x)$ и $g(x)$ са непрекъснати функции за $x \in [a, b]$, се дава с формулата

$$S(T) = \int_a^b \Big[g(x) - f(x)\Big]\, dx\,.$$

Лицето на сектор C, зададен в полярни координати с неравенствата

$$C\!: \begin{cases} \alpha \leqq \theta \leqq \beta, \\ 0 \leqq \varrho \leqq f(\theta), \end{cases}$$

където $f(\theta)$ е непрекъсната и неотрицателна функция, дефинирана в интервала $[\alpha, \beta]$, $0 \leqq \alpha < \beta \leqq 2\pi$, се дава с формулата $S(C) = \dfrac{1}{2} \displaystyle\int_\alpha^\beta f^2(\theta)\ d\theta$.

Ако функциите $f(t)$ и $g(t)$ имат непрекъснати първи производни в интервала $[\alpha, \beta]$, то дължината l на дъгата

$$\Gamma: \begin{cases} x = f(t), \\ y = g(t), \end{cases}$$

където $\alpha \leqq t \leqq \beta$, се дава с формулата

$$l = \int_\alpha^\beta \sqrt{f'^2(t) + g'^2(t)}\, dt\,.$$

В частния случай, когато имаме дъгата $y = f(x)$, $\alpha \leqq x \leqq \beta$, т.е. $k = t$, $y = f(t)$, $\alpha \leqq t \leqq \beta$, получаваме $l = \displaystyle\int_\alpha^\beta \sqrt{1 + f'^2(x)}\, dx$.

Под дъга, зададена в полярни координати с уравнение $\varrho = f(\theta)$, където $\alpha \leqq \theta \leqq \beta$, се разбира дъга, дефинирана в декартови координати със следните уравнения:

$$x = f(\theta)\cos\theta$$
$$y = f(\theta)\sin\theta, \quad \alpha \leqq \theta \leqq \beta.$$

Дължината на дъга, зададена в полярни координати, се дава с формулата

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{f^2(\theta) + f'^2(\theta)}\, d\theta .$$

Нека функцията $y = f(x)$ е непрекъсната в интервала $[a, b]$. Ротационното тяло R, образувано от завъртането около оста Ox на криволинейния трапец, ограничен от графиката на функцията $f(x)$, правите $x = a$ и $x = b$ и отсечката от оста O_x от a до b, има обем

$$V(R) = \pi \int_a^b f^2(x)\, dx .$$

5.1. Изчислете лицето на фигурата, ограничена от правите $x = 0$, $x = 2$ и кривите $y = 2^x$, $y = 2x - x^2$.

Решение. Тъй като $2x - x^2 \leqq 2^x$ при $x \in [0, 2]$, то

$$S = \int_0^2 \left[2^x - (2x - x^2)\right] dx = \frac{2^x}{\ln 2}\Big|_0^2 - \left(x^2 - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^2 = \frac{3}{\ln 2} - \frac{4}{3}.$$

5.2. Изчислете лицето на фигурата, ограничена от параболите $y^2 = 2px$ и $x^2 = 2py$, $p > 0$.

Решение. Най-напред намираме абсцисите на пресечните точки. За целта решаваме съвместно двете уравнения

$$y^2 = 2px,\ x^2 = 2py, \text{ т.е. } \frac{x^2}{2p} = \sqrt{2px}, \text{ откъдето } x = 0 \text{ и } x = 2p.$$

Тогава

$$S = \int_0^{2p} \left(\sqrt{2px} - \frac{x^2}{2p}\right) dx = \left(\frac{3}{2}\sqrt{2p}\, x^{\frac{3}{2}} - \frac{x^3}{6p}\right)\Big|_0^{2p} = \frac{4}{3}p^3 .$$

5.3. Изчислете лицето на фигурата, заградена от спиралата на Архимед $\varrho = a\theta$ при $\theta \in [0, 2\pi]$.

Решение. $S = \frac{1}{2}a^2 \int_0^{2\pi} \theta^2\, d\theta = \frac{a^2}{6}\theta^3 \Big|_0^{2\pi} = \frac{4}{3}\pi^3 a^2$

(вж. зад. 15.2, а) от гл. 3).

5.4 Изчислете лицето на фигурата, заградена от декартовия лист $x^3 + y^3 - 3axy = 0$, $a > 0$, съдържаща се в първи квадрант.

Решение. Първо ще получим уравнение на декартовия лист в полярни координати. Полагаме в даденото уравнение $x = \varrho\cos\theta$, $y = \varrho\sin\theta$ и след съкращаване на ϱ^2 получаваме

$$\varrho = \frac{3a\sin\theta\cos\theta}{\sin^3\theta + \cos^3\theta}.$$

Тогава (вж. зад. 2 14.3,а) от гл. 3)

$$S = \frac{9a^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2\theta\cos^2\theta\, d\theta}{(\sin^3\theta + \cos^3\theta)^2} = \frac{9a^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg}^2\theta\, d\operatorname{tg}\theta}{(1 + \operatorname{tg}^3\theta)^2}$$

$$= -\frac{3a^2}{2}\frac{1}{1 + \operatorname{tg}^3\theta}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{3a^2}{2}\frac{\cos^3\theta}{\sin^3\theta + \cos^3\theta}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3a^2}{2}.$$

5.5. Изчислете лицето на фигурата, заградена от елипсата

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,\ a > 0,\ b > 0.$$

Решение. Ще изчислим лицето σ на частта от разглежданата фигура, съдържаща се в първи квадрат. От уравнението на елипсата получаваме $y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$, $0 \leqq x \leqq a$. Тогава

$$\sigma = \int_0^a \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \left(\frac{ab}{2}\arcsin\frac{x}{a} + \frac{b}{2a}x\sqrt{a^2 - x^2}\right)\Big|_0^a = \frac{\pi ab}{4}.$$

Следователно търсеното лице е $S = 4\sigma = \pi ab$.

При $a = b = r$ получаваме, че лицето на кръг с радиус r е πr^2.

5.6. Изчислете дължината на параболата $y = \frac{x^2}{2p}$, $p \neq 0$ при $x \in [0, x_0]$.

Решение. От формулата за дължина на дъга след преобразуване получаваме

$$l = \frac{1}{p}\int_0^{x_0} \sqrt{x^2 + p^2}\, dx = \frac{1}{p}\left[\frac{1}{2} x \sqrt{x^2 + p^2} + \frac{p^2}{2} \ln\left(x + \sqrt{x^2 + p^2}\right)\right]\Bigg|_0^{x_0}$$

$$= \frac{x_0}{2p}\sqrt{x_0^2 + p^2} + \frac{p}{2} \ln \frac{x_0 + \sqrt{x_0^2 + p^2}}{p}.$$

5.7. Изчислете дължината на астроидата $x = a\cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$, $a > 0$, при $t \in [0, 2\pi]$ (декартово уравнение — $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$.).

Решение. Ще изчислим една четвърт от дължината на астроидата — при $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Тъй като $\sqrt{x_t'^2 + y_t'^2} = 3a \sin t \cos t$ при $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, то дължината на тази четвърт е

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} 3a \sin t \cos t\, dt = \frac{3a}{2} \sin^2 t \,\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3a}{2}.$$

Тогава дължината на цялата астроида е $6a$.

5.8. Изчислете дължината на спиралата на Архимед $\varrho = a\theta$, $a > 0$, при $\theta \in [0, \theta_0]$.

Решение. От формулата за дължина на дъга в полярни координати след преобразуване получаваме

$$l = a\int_0^{\theta_0} \sqrt{1 + \theta^2}\, d\theta = \frac{a}{2}\left[\theta_0\sqrt{1 + \theta_0^2} + \ln\left(\theta_0 + \sqrt{1 + \theta_0^2}\right)\right].$$

5.9. Изчислете обема на елипсоида, получен от въртенето на елипсата $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $a > 0$, $b > 0$, около оста Ox.

Решение. Тъй като $y^2 = b^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)$, търсеният обем ще бъде $V = 2\pi \int_0^a b^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) dx = \frac{4}{3}\pi a b^2$.

При $a = b = r$ получаваме, че обемът на кълбо с радиус r е $\frac{4}{3}\pi r^3$.

5.10. Изчислете обема на тялото, получено от въртене около оста Oy на фигурата, заградена от параболите $y = x^2$ и $8x = y^2$.

Решение. Да намерим ординатите на пресечните точки на параболите. От системата

$$\left|\begin{array}{l} y = x^2 \\ y^2 = 8x \end{array}\right.$$

намираме $y_1 = 0$, $y_2 = 4$.

Тогава $V = \pi \int_0^4 \left(y - \frac{y^4}{64}\right) dy = \frac{24}{5}\pi$.

5.11. Изчислете лицето на фигурата, ограничена от параболите $x = -2y^2$ и $x = 1 - 3y^2$.

5.12. Изчислете лицето на фигурата, лежаща в първи квадрант вътре в окръжността $x^2 + y^2 = 3a^2$ и ограничена от параболите $x^2 = 2ay$ и $y^2 = 2ax$, $a > 0$.

5.13. Изчислете лицето на фигурата, заградена от кривата, зададена с уравнението $\varrho^2 = a^2 \cos 2\theta$, $a > 0$ (лемниската на Бернули — с декартово уравнение $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$ — вж. зад. 15.4, а) от гл. 3).

5.14. Намерете лицето на фигурата, лежаща вън от окръжността $\varrho = a$ и ограничена от кривата $\varrho = 2a \cos 3\theta$ $(a > 0)$.

5.15. Намерете лицето на кръговия сектор $x^2 + y^2 \leqq r^2$, ограничен от лъчи, излизащи от координатното начало и сключващи с оста Ox ъгли φ_1 и φ_2, $\varphi_2 > \varphi_1$.

5.16. Изчислете дължината на кривата с уравнение $y^2 = x^3$, $x \in [0, 4]$.

5.17. Изчислете дължината на крива с уравнение $x = \frac{1}{4} y^2$

$-\frac{1}{2}\ln y$, заключена между точките с ординати $y = 1$ и $y = 2$.

5.18. Изчислете дължината на циклоидата $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ $(a > 0)$ при $t \in [0, 2\pi]$.

5.19. Изчислете дължината на еволвентата на окръжността $x = a(t \sin t + \cos t)$, $y = a(\sin t - t \cos t)$ $(a > 0)$ при $t \in [0, t_0]$.

5.20. Изчислете дължината на кардиоидата $\varrho = a(1 + \cos\theta)$ $(a > 0)$ при $\theta \in [0, \pi]$.

5.21. Изчислете дължината на кривата $\varrho = a \sin^4 \frac{\theta}{4}$ $(a > 0)$ при $\theta \in [0, 4\pi]$.

5.22. Намерете обема на прав кръгов конус с височина h и радиус на основата r.

5.23. Намерете обема на тяло, получено от въртенето на кръг с радиус r около ос, лежаща в равнината на кръга и на разстояние a, $a \geqq r$, от центъра му (тор).

Глава 6

Числови редове

§ 1. Числови редове. Принцип за сравняване на редове с положителни членове

Казваме, че числовият ред

$$(1) \qquad a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

е сходящ, ако съществува границата $\lim_{n\to\infty} S_n = S$, която се нарича сума на реда. Тук $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ е нейната частична (парциална) сума. В противен случай казваме, че редът (1) е разходящ.

Числовият ред (1) е сходящ тогава и само тогава, когато за всяко положително число ε съществува число $N = N(\varepsilon)$ такова, че неравенството

$$\left| S_{n+p} - S_n \right| = \left| \sum_{i=n+1}^{n+p} a_i \right| < \varepsilon$$

е изпълнено за всяко естествено число p винаги когато $n > N(\varepsilon)$ (критерий на Коши).

В частност оттук получаваме едно необходимо условие за сходимост на реда, а именно: Ако редът (1) е сходящ, то $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Нека заедно с реда (1) е даден редът

$$(2) \qquad b_1 + b_2 + \ldots + b_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

Ако при $n \geqq n_0$ са в сила неравенствата

$$0 \leqq a_n \leqq b_n,$$

то: 1) ако редът (2) е сходящ, сходящ е и редът (1); 2) ако редът (1) е разходящ, редът (2) е също разходящ. Освен това, когато $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = K$: 1) при $K < +\infty$, ако редът (2) е сходящ, то и редът (1) е сходящ; 2) при $K > 0$, ако редът (2) е разходящ, то и редът (1) е разходящ. Ако $0 < K < +\infty$, в частност, ако $a_n \sim b_n$, то редовете (1) и (2) са сходящи и разходящи едновременно (принцип за сравняване на редове).

Нека отбележим, че краен брой членове на реда не влияят на неговата сходимост.

1.1. Нека $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a$. Тогава редът

$a_1 + (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + \ldots + (a_n - a_{n-1}) + \ldots$ е сходящ и неговата сума е равна на a.

Решение. Действително $S_n = a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a$.

Като използвате дефиницията за сходимост на редовете, проверете кой от следващите редове е сходящ:

1.2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{(1+a_1)(1+a_2)\ldots(1+a_n)}$, където $a_n \geqq 0$.

Решение. Тъй като $\frac{a_n}{(1+a_1)\ldots(1+a_n)}$

$= \frac{1}{(1+a_1)\ldots(1+a_{n-1})} - \frac{1}{(1+a_1)\ldots(1+a_n)}$, то в сумата S_n се унищожават всички събираеми с изключение на първото и последното и се получава $S_n = 1 - \frac{1}{(1+a_1)\ldots(1+a_n)}$. Нека означим

$b_n = \frac{1}{(1+a_1)\ldots(1+a_n)}$. Тогава $0 \leqq b_{n+1} \leqq b_n$, т.е. редицата b_n е монотонна и ограничена, а следователно и сходяща. Но $S_n = 1 - b_n$, следователно редът е сходящ.

1.3. а) $1 + 1 + \ldots + 1 + \ldots$; б) $1 + (-1) + 1 + (-1) + \ldots$

Решение. а) Редицата от парциалните суми е неограничена. Следователно редът е разходящ.

б) Тъй като $S_{2n} = 0$, а $S_{2n+1} = 1$, то редицата S_n има две точки на сгъстяване. Следователно редът е разходящ.

1.4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$.

Решение. Редът е разходящ, тъй като $S_n \geqq \frac{n}{\sqrt{n}} = \sqrt{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$.

1.5. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n = 1 + q + \ldots + q^{n-1} + \ldots$

Решение. Тъй като $S_n = \frac{1-q^n}{1-q}$, то са възможни три случая:

1) $|q| < 1$, тогава $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{1-q}$, т.е. безкрайната геометрична прогресия е сходящ ред и нейната сума е равна на $\frac{1}{1-q}$.

2) $q = 1$ и $q = -1$ — това е зад. 1.3 — редът е разходящ.

3) $|q| > 1$. В този случай редицата $\{S_n\}$ е неограничена, следователно редът е разходящ.

Ще отбележим, че в случаи 2) и 3) от тази задача (както и в зад. 1.3) редицата от членовете на реда не клони към нула, откъдето се вижда, че той е разходящ. Такъв е очевидно и следният ред:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n}{n+1} = \frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{3}{3} - \ldots$$

1.6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{q^{2^{n-1}}}{1-q^{2^n}}$, $q \neq \pm 1$.

Решение. Тук

$$S_n(q) = \sum_{k=1}^{n} \frac{q^{2^{k-1}} - 1 + 1}{(1 - q^{2^{k-1}})(1 + q^{2^{k-1}})}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{1 - q^{2^{k-1}}} - \frac{1}{1 - q^{2^k}} \right) = \frac{1}{1-q} - \frac{1}{1 - q^{2^n}}.$$

При $|q| > 1$ имаме $S_n(q) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{1-q}$; при $|q| < 1$ $S_n(q) \to \frac{1}{1-q} - 1 = \frac{q}{1-q}$. Следователно редът е сходящ при всяко $q \neq \pm 1$ и неговата сума е $\frac{1}{1-q}$ и $\frac{q}{1-q}$ съответно за $|q| < 1$ и $|q| > 1$.

Като се използват принципите за сравняване, да се изследват за сходимост следващите редове:

1.7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$.

При $p = 1$ този ред се нарича хармоничен, тъй като всеки негов член, започвайки от втория, е средно хармонично на съседните му два. При $p \neq 1$ той се нарича обобщен хармоничен ред.

Решение. Нека $p > 1$. Най-напред с помощта на дефиницията за сходимост на един ред установяваме, че редът

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left[\frac{1}{(n-1)^{p-1}} - \frac{1}{n^{p-1}} \right]$$ е сходящ. Действително за него $S_n = 1 - \frac{1}{n^{p-1}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$. От теоремата за крайните нараствания, приложена функцията $f(x) = \frac{1}{x^{p-1}}$ в интервала $[n-1, n]$ имаме

$$\frac{1}{(n-1)^{p-1}} - \frac{1}{n^{p-1}} = f'(n - \theta) = \frac{p-1}{(n-\theta)^p},$$

или $\frac{1}{n^p} < \frac{1}{(n-\theta)^p} < \frac{1}{(p-1)} \left[\frac{1}{(n-1)^{p-1}} - \frac{1}{n^{p-1}} \right]$.

От принципа за сравняване на редове с положителни членове получаваме, че и редът $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ е сходящ. Неговата сума се нарича дзета-функция на Риман $\zeta(p)$. Тя играе важна роля в теорията на числата.

Нека $p = 1$. Редът $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ е разходящ, тъй като редицата от неговите частични суми $S_n = \ln(n+1)$ е неограничена. Тъй като $\frac{\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$, т.е. $\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n}$, то от принципа за сравняване имаме, че и редът $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ е разходящ.

Нека $p < 1$. Тогава $\frac{1}{n^p} > \frac{1}{n}$ и от разходимостта на реда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ следва разходимостта на реда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$. Окончателно редът е сходящ при $p > 1$ и разходящ при $p \leqq 1$. От принципа за сравняване на редове и от последната задача получаваме следното полезно следствие: Ако $a_n / \frac{1}{n^p} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} K$, $0 < K < \infty$, то при $p > 1$ редът $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ е сходящ, а при $p \leqq 1$ той е разходящ.

1.8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n^2+1)}}$.

Решение. Редът е сходящ съгласно принципа за сравняване, тъй като за неговия общ член a_n имаме $a_n \leqq \frac{1}{n^{3/2}}$.

1.9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\sqrt{n} + 1}{(n+1)^2 \sqrt{n+1}}$.

Решение. Редът е сходящ, тъй като $\dfrac{a_n}{\frac{1}{n^2}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 2$, а редът $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$ е сходящ.

1.10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(n\,!)^2}{(2\,n)\,!}$.

Решение. Този ред е сходящ, понеже общият му член $a_n = \dfrac{n\,!}{2^n\,(2\,n-1)\,!\,!} < \dfrac{1}{2^n}$, а $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{2^n}$ е сходяща геометрична прогресия.

1.11. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{\sqrt{n}\,\ln n}{n^2+1}\,|\sin n\,\theta\,|$.

Решение. Редът е сходящ, тъй като от неравенствата $|\sin n\,\theta\,| \leqq 1$ и $\ln n < \sqrt[4]{n}$ (валидно за достатъчно големи n) следва, че съществува номер n_o такъв, че при $n \geqq n_o$ имаме $a_n < \dfrac{\sqrt{n}\,\sqrt[4]{n}}{n^2} = \dfrac{1}{n^{5/4}}$.

1.12. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{(\ln n)^p}\,,\, p > 0.$

Решение. Този ред е разходящ, понеже за достатъчно големи n имаме неравенството $\dfrac{1}{(\ln n)^p} > \dfrac{1}{n}$, а $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ е разходящ ред.

1.13. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$.

Решение. Редът е сходящ. Представяме общия член във вида

$a_n = \dfrac{1}{n^{\ln\ln n}}$. При достатъчно големи n той се мажорира от общия член на сходящия ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$.

1.14. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{(\ln n)^{\ln\ln n}}$.

Решение. Редът е разходящ, тъй като

$a_n = \dfrac{1}{(e^{\ln\ln n})^{\ln\ln n}} = \dfrac{1}{e^{(\ln\ln n)^2}} > \dfrac{1}{e^{\ln n}} = \dfrac{1}{n}$ за достатъчно големи n.

1.15. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin\dfrac{1}{n}$.

Решение. Този ред е разходящ, защото $\dfrac{a_n}{\frac{1}{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$.

1.16. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{\pi}{2} - \arcsin\dfrac{n}{n+1}\right)$.

Решение. Ще отбележим, че ако $a_n = \dfrac{\pi}{2} - \arcsin\dfrac{n}{n+1}$, то $\cos a_n = \sin\left(\arcsin\dfrac{n}{n+1}\right) = \dfrac{n}{n+1} = 1 - \dfrac{1}{n+1}$. Тогава $\dfrac{1}{n+1} = 1 - \cos\,a_n$, а тъй като $\dfrac{1-\cos a_n}{\frac{a_n^2}{2}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$, то $\dfrac{\frac{a_n^2}{2}}{\frac{2}{n+1}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$, т.е. $a_n \sim \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{n+1}}$. Следователно $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ е разходящ.

При изследване сходимостта на реда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ понякога е възможно с помощта на формулата на Тейлор да се получи асимптотична формула от вида $a_n \sim \frac{K}{n^p}$.

1.17. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1 - \cos \frac{2\pi}{\sqrt[5]{n^2}}\right)$.

Решение. Тъй като $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ при $x \to 0$, то при $n \to \infty$

$$a_n = \frac{1}{2}\left(\frac{2\pi}{\sqrt[5]{n^2}}\right)^2 + o\left(\frac{1}{n^{4/5}}\right),$$

откъдето получаваме, че $a_n \sim \frac{4\pi^2}{n^{4/5}}$. Следователно редът е разходящ.

1.18. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(e^{\frac{1}{n}} - 1\right) \sin \frac{1}{\sqrt{n+1}}$.

Решение. Знаем, че $e^x = 1 + x + o(x)$ при $x \to 0$ и затова

$a_n = \left[\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right] \sin \frac{1}{\sqrt{n+1}}$ при $n \to \infty$. Тогава

$$\frac{a_n}{\frac{1}{n^{3/2}}} = [1 + o(1)] \frac{\sin \frac{1}{\sqrt{n+1}}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$$

и следователно според принципа за сравняване редът е сходящ.

1.19. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} e^{-n}$.

Решение. От $a_n = e^{-n + n^2 \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)}$, като използваме формулата на Тейлор за $\ln(1+x)$, получаваме $a_n =$

$$e^{-n + n^2\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)} = e^{-n + n - \frac{1}{2} + o(1)}, \quad n \to \infty.$$

Следователно $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{2} \neq 0$ и редът е разходящ.

1.20. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\ln\left(1 + \sin\frac{1}{n}\right)}{n + \ln^2 n}$.

Решение. Тъй като $\frac{\ln^2 n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, то знаменателят се представя като $n\left(1 + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)$, $n \to \infty$. От формулата $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x)$, $x \to 0$ следва, че числителят може да се представи като $\sin\frac{1}{n} + o\left(\sin\frac{1}{n}\right)$, $n \to \infty$. Тогава $a_n \sim \frac{\sin\frac{1}{n}}{n} \sim \frac{1}{n^2}$, което показва, че редът е сходящ.

1.21. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{2n+1}$.

1.22. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 + a^n}$, $a > 0$.

1.23. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \ln\frac{n+1}{n}\right)$.

1.24. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$.

1.25. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$.

1.26. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n \sin\frac{x}{3^n}$, $0 < x < 3\pi$.

1.27. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg}\frac{x}{n^2}$, $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

1.28. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n + \frac{2}{n}}}{(n+2)^n}$.

1.29. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + n + 1}{n^4 + 1}$.

1.30. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right)$, $x > 0$.

1.31. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt[n]{a} - 1\right), \ a > 0, \ a \neq 1.$ **1.32.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \sqrt[n]{n}}$.

1.33. $\sum\limits_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(\ln \ln n)^{\ln n}}$. **1.34.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln \frac{1 + \operatorname{tg} \frac{1}{\sqrt{n}}}{1 + \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{n}}}$.

1.35. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n \operatorname{tg} \frac{n+2}{n^2+3}$. **1.36.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(n \ln \frac{2n+1}{2n-1} - 1\right)$.

1.37. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg}(n + 2^n)}{3^n + n^2}$. **1.38.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n + \sin n}{n^2 + 2 \ln n}$.

1.39. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n^2+1} - \sqrt[3]{n^2-1}}{n^a}$.

§ 2. Критерии на Даламбер и Коши

Нека $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ е ред с положителни членове.

Ако за достатъчно големи n е в сила неравенството $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqq q < 1$, то редът е сходящ; ако от някакво място нататък $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geqq 1$, то редът е разходящ (**критерий на Даламбер**).

Често е удобно да се използва едно следствие на този критерий (т.нар. гранична форма на критерия): Нека редицата $\left\{\frac{a_{n+1}}{a_n}\right\}$ има граница D при $n \to \infty$ (крайна или безкрайна). Тогава при $D < 1$ редът $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ е сходящ, а при

$D > 1$ той е разходящ. Ако $D = 1$ и редицата $\frac{a_{n+1}}{a_n} \xrightarrow[n \to 1]{} 1$ отгоре, то редът е разходящ, иначе критерият на Даламбер не дава отговор.

Ако за достатъчно големи n е в сила неравенството $\sqrt[n]{a_n} \leqq q < 1$, то редът е сходящ; ако от някакво място нататък $\sqrt[n]{a_n} \geqq 1$, то редът е разходящ (**критерий на Коши**).

Граничната форма на критерия на Коши е: Нека редицата $\sqrt[n]{a_n}$ има граница C при $n \to \infty$ (крайна или безкрайна). Ако $C < 1$, то редът е сходящ; ако $C > 1$, то редът е разходящ. Ако $C = 1$ и редицата $\sqrt[n]{a_n} \xrightarrow[n \to \infty]{} 1$ отгоре, то редът е разходящ, иначе критерият на Коши не дава отговор.

Когато се установява, че даден ред е сходящ, критерият на Коши е по-силен от критерия на Даламбер. А именно неравенството $\overline{\lim\limits_{n \to \infty}} \frac{a_{n+1}}{a_n} \geqq \overline{\lim\limits_{n \to \infty}} \sqrt[n]{a_n}$ (вж. зад. 5.10 от гл. 1) показва, че винаги когато с критерия на Даламбер установим, че един ред е сходящ, това може да установим и с критерия на Коши. Има примери, показващи, че критерият на Коши дава отговор, а критерият на Даламбер не дава отговор за поведението на реда.

Обаче има и редове, при които разходимостта може да се установи с критерия на Даламбер, но това не може да стане с критерия на Коши. На практика използването на критерия на Даламбер в повечето случаи е по-просто.

С помощта на критерия на Даламбер или на Коши да се види сходящи ли са следващите редове:

2.1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n}$.

Решение. Тъй като $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+1}{3n} \xrightarrow[n \to \infty]{} \frac{1}{3}$, редът е сходящ съгласно граничната форма на критерия на Даламбер.

2.2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)!!}$.

Решение. Тук $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(2n-1)!!}{(2n+1)!!} = \frac{1}{2n(2n+1)} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$ и редът е сходящ съгласно критерия на Даламбер (всъщност съгласно неговата гранична форма, но ние и в този случай за краткост ще казваме пак „съгласно критерия на Даламбер").

2.3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!!}{n!} \operatorname{arctg} \frac{1}{3^n}$.

Решение. Имаме

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n!\,(2n+2)!!\,\operatorname{arctg}\frac{1}{3^{n+1}}}{(n+1)!\,(2n)!!\,\operatorname{arctg}\frac{1}{3^n}} = 2\,\frac{\operatorname{arctg}\frac{1}{3^{n+1}}}{\operatorname{arctg}\frac{1}{3^n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{2}{3}$$

и следователно редът е сходящ съгласно критерия на Даламбер.

2.4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n!}$, $a > 0$.

Решение. Тъй като $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a}{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, редът е сходящ съгласно критерия на Даламбер.

2.5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!\,(2,7)^{n+1}}$.

Решение. Редицата с общ член $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \frac{1}{2,7}$ клони към $\frac{e}{2,7} > 1$ при $n \to \infty$. Следователно съгласно критерия на Даламбер редът е разходящ.

2.6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!} a^n$, $a > 0$.

Решение. Имаме $\frac{a_{n+1}}{a_n} = a\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} ae$. Следователно съгласно критерия на Даламбер при $a < \frac{1}{e}$ редът е сходящ, а при $a > \frac{1}{e}$ той е разходящ. При $a = \frac{1}{e}$ критерият на Даламбер не дава отговор.

2.7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n!\,\frac{a^n}{n^n}$, $a > 0$.

Решение. Тук $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{a}{e}$.

При $a > e$ редът е разходящ, а при $a < e$ той е сходящ съгласно критерия на Даламбер. При $a = e$ граничната форма на критерия на Даламбер не дава отговор, но тъй като $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} e$, монотонно растейки, то $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ и редът е разходящ съгласно критерия на Даламбер.

2.8. $1 + p + pq + p^2 q + p^2 q^2 + \ldots + p^n q^{n-1} + p^n q^n + \ldots$, където p и q са две различни положителни числа.

Тук $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ приема стойности p и q в зависимост от това, дали n е нечетно или четно, което позволява да се направи извод с помощта на критерия на Даламбер за сходимостта или разходимостта на реда само ако p и q са едновременно по-малки или по-големи от 1.

От друга страна, $\sqrt[2n-1]{a_{2n-1}} = \sqrt[2n-1]{p^{n-1} q^{n-1}}$ и $\sqrt[2n]{a_{2n}} = \sqrt[2n]{p^n q^n}$ така, че $\sqrt[n]{a_n} \to pq$. Съгласно критерия на Коши редът е сходящ при $pq < 1$ и разходящ при $pq > 1$. При $pq = 1$ той очевидно е разходящ.

Задачата беше пример за това, че критерият на Коши (неговата гранична форма) дава отговор за сходимост и разходимост на реда за разлика от критерия на Даламбер. Ако граничната форма на критерия на Даламбер дава отговор за разходимостта на един ред, то отговор дава и граничната форма на Коши. Действително нека $\frac{a_{n+1}}{a_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} l$. От неравенствата $\varliminf\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \geqq \varliminf\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \geqq \varlimsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$ (вж. зад. 5.10, гл. 1) следва, че $\sqrt[n]{a_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} l$. Обаче има случаи, при които с критерия на Даламбер се установява разходимост на един ред, но това не може да стане с критерия на Коши. Такъв е например редът $\frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \dots$ (който е очевидно разходящ, тъй като общият му член не клони към нула). Тук $\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$, т.е. с критерия на Даламбер разходимостта може да се установи, докато $\sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{\sqrt[n]{5}}$ и $\sqrt[n]{a_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$ със стойности, по-малки от единица, т.е.с критерия на Коши разходимостта не може да бъде установена.

2.9. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^n}$.

Решение. Редът е сходящ съгласно критерия на Коши в неговата гранична форма, защото $\sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{\ln n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

2.10. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2}$.

Решение. Тъй като $\sqrt[n]{a_n} = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{e}$, редът е сходящ.

2.11. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{an}{n+2}\right)^n$, $a > 0$.

Решение. Имаме $\sqrt[n]{a_n} = \frac{an}{n+2} \xrightarrow[n\to\infty]{} a$. При $a < 1$ редът е сходящ съгласно критерия на Коши, а при $a > 1$ той е разходящ. При $a = 1$ редът е също разходящ, тъй като $a_n = \left(\frac{n}{n+2}\right)^n = \frac{1}{\left(1 + \frac{2}{n}\right)^n} \to \frac{1}{e^2}$, т.е. общият член не клони към нула.

2.12. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a}{n}\right)^n$, $a > 0$.

Решение. Тук $\sqrt[n]{a_n} = \frac{a}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ — редът е сходящ съгласно критерия на Коши.

2.13. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a}{b_n}\right)^n$, където $a > 0$, $b_n > 0$ и $b_n \xrightarrow[n\to\infty]{} b$.

Решение. Имаме $\sqrt[n]{a_n} = \frac{a}{b_n}$. Ако $b = 0$, то $\sqrt[n]{a_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$ и редът е разходящ съгласно критерия на Коши; ако $b \neq 0$, то $\sqrt[n]{a_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{a}{b}$. При $a < b$ редът е сходящ, при $a > b$ той е разходящ. В общия случай при $a = b$ не може да се каже нищо определено за поведението на реда — то зависи от това, как $|b_n|$ клони към b. Нека $a = b$ и $b_n \leqq b$, тогава редът е разходящ, понеже $\sqrt[n]{a_n} \geqq 1$. Нека $a = b$, $b_n \geqq b$. Ще разгледаме два частни случая: $b_n = \sqrt[n]{n^2}\, b$ и $b_n = \sqrt[n]{n^2}\, b$. В първия случай $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a}{b_n}\right)^n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ е разходящ ред, във втория $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a}{b_n}\right)^n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ е сходящ.

2.14. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^a}{[\ln(n+1)]^{\frac{n}{2}}}$, $a > 0$.

Решение. Тук $\sqrt[n]{a_n} = \frac{(\sqrt[n]{n})^a}{\sqrt{\ln(n+1)}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ и следователно редът е сходящ.

2.15. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \tau(n)\, a^n$, където $a > 0$, а $\tau(n)$ (функция на Ойлер) е броят на делителите на числото n.

Решение. Критерият на Даламбер тук е неудобен, тъй като $\tau(n)$ се мени безразборно при изменението на n. Критерият на Коши може да се приложи, т.к. $\tau(n) \leqq n$ и следователно $a \leqq \sqrt[n]{a_n} = a\sqrt[n]{\tau(n)} \leqq a\sqrt[n]{n}$, откъдето $\sqrt[n]{a_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} a$. При $a < 1$ редът е сходящ, при $a > 1$ разходящ, при $a = 1$ очевидно е разходящ, тъй като a_n не клони към 0 при $n \to \infty$.

2.16. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^3[\sqrt{2} + (-1)^n]^n}{3^n}$.

Решение. Тъй като $\sqrt[n]{n^3} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$, редицата $\sqrt[n]{a_n} = \frac{\sqrt[n]{n^3}[\sqrt{2} + (-1)^n]}{3}$ има две точки на сгъстяване $\frac{\sqrt{2}+1}{3}$ и $\frac{\sqrt{2}-1}{3}$, които са по-малки от 1. Следователно редът е сходящ съгласно критерия на Коши.

2.17. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2.5.8\ldots[2+3(n-1)]}{1.5.9\ldots[1+4(n-1)]}$.

2.18. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(3n)!}{(n!)^3 4^{3n}}$.

2.19. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \binom{2n}{n}$.

2.20. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} n \operatorname{tg} \frac{\pi}{2^n}$.

2.21. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{100^n}$.

2.22. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^5}{5^n}$.

2.23. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} na^n,\ a > 0$.

2.24. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 3^{n+1}\left(\frac{n+2}{n+3}\right)^{n^2}$.

2.25. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{n}+2}{\sqrt{n}+3}\right)^{n^{\frac{3}{2}}}$.

2.26. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3.6\ldots 3n}{(n+1)!} \arcsin\frac{1}{2^n}$.

§ 3. Критерий на Раабе — Дюамел и Гаус

Ако за всички достатъчно големи стойности на n е в сила неравенството $n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) \geqq r$, където r е число, по-голямо от единица, то редът $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n > 0$, е сходящ. Ако от известно място нататък имаме $n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) \leqq 1$, то редът е разходящ (критерий на Раабе — Дюамел).

Критерият на Раабе — Дюамел често се прилага в неговата гранична форма:

Нека $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = R$. Ако $R > 1$, то редът е сходящ, ако $R < 1$, редът е разходящ. При $R = 1$ критерият на Раабе—Дюамел не дава отговор.

Ще отбележим, че ако критерият на Даламбер дава отговор на въпроса за поведението на реда, то и критерият на Раабе—Дюамел го дава. Нещо повече, в тези случаи получаваме винаги $R = \pm\infty$. Всички останали стойности на $R \neq 1$ съответствуват на случаи, когато критерият на Даламбер не дава отговор, тъй като $D = 1$. Както отбелязахме при $R = 1$, критерият на Раабе—Дюамел не дава отговор. Тогава прибягваме до по-силни критерии като например:

Нека отношението $\frac{a_n}{a_{n+1}}$ за реда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n > 0$, може да се представи в следния вид: $\frac{a_n}{a_{n+1}} = \alpha + \frac{\beta}{n} + \frac{\gamma_n}{n^{1+\varepsilon}}$, където $|\gamma_n| \leqq C$, $\varepsilon > 0$. Тогава:

а) ако $\alpha > 1$, редът $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ е сходящ; ако $\alpha < 1$, редът $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ е разходящ;

б) при $\alpha = 1$ този ред е сходящ в случай, че $\beta > 1$, и разходящ, ако $\beta \leqq 1$ (критерий на Гаус).

Ще отбележим, че случай а) е всъщност критерият на Даламбер. Ако $\alpha = 1$ и $\beta > 1$ или $\beta < 1$, получаваме критерия на Раабе—Дюамел ($n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = \beta + \frac{\gamma}{n^\varepsilon}$, т.е. $R = \beta$). Случаят $\alpha = 1$, $\beta = 1$ отговаря на ред, за който критериите на Даламбер и Раабе—Дюамел не дават отговор, а критерият на Гаус дава.

С помощта на критерия на Раабе—Дюамел да се изследва сходимостта на следващите редове.

3.1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{[(2n-1)!!]^2}{n!\,3.7.11\ldots(4n-1)}$.

Решение. Тъй като $\dfrac{a_n}{a_{n+1}} = \dfrac{(n+1)(4n+3)}{(2n+1)^2}$, то

$$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right) = n\,\frac{3n+2}{4n^2+4n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{3}{4}$$

и от граничната форма на критерия на Раабе—Дюамел следва, че редът е разходящ.

3.2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n(n!)^2}{(2n)!(n+1)}$.

Решение. Имаме $\dfrac{a_n}{a_{n+1}} = \dfrac{(2n+1)(n+2)}{2(n+1)^2}$ и

$$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right) = \frac{n^2}{2(n+1)^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{2}.$$

Следователно съгласно критерия на Раабе—Дюамел редът е разходящ.

3.3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(a+1)(a+2)\ldots(a+n)}$, $a>0$.

Решение. Тъй като $\dfrac{a_n}{a_{n+1}} = \dfrac{a+n+1}{n+1}$, то

$$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right) = \frac{an}{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} a$$

и съгласно критерия на Раабе—Дюамел редът е сходящ при $a>1$ и

разходящ при $a<1$. При $a=1$ имаме $a_n = \dfrac{n!}{(n+1)!} = \dfrac{1}{n+1}$.

Следователно редът е разходящ.

3.4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^2 \cdot \frac{1}{n}$.

Решение. Тук $\dfrac{a_n}{a_{n+1}} = \left(\dfrac{2n+2}{2n+1}\right)^2 \dfrac{n+1}{n}$ и

$$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right) = n\left[\left(1+\frac{1}{2n+1}\right)^2\left(1+\frac{1}{n}\right)-1\right]$$

$$= n\left[1+\frac{2}{2n+1}+\frac{1}{(2n+1)^2}+\frac{1}{n}+\frac{2}{n(2n+1)}+\frac{1}{n(2n+1)^2}-1\right]$$

$$= n\left[\frac{2}{2n+1}+\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right] = \frac{4n+1}{2n+1}+o(1) \xrightarrow[n\to\infty]{} 2.$$

Съгласно критерия на Раабе—Дюамел редът е сходящ.

3.5. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{e}\right)^n \frac{1}{n!}$.

Решение. Както видяхме в зад. 2.6, критерият на Даламбер не дава отговор в този случай. Разглеждаме $\dfrac{a_n}{a_{n+1}} = \dfrac{e}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$

$$= e^{1-n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} = e^{1-n\left[\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]} = e^{\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)} = 1+\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Тогава $n\left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}}-1\right) = \dfrac{1}{2}+o(1) \xrightarrow[n\to\infty]{} \dfrac{1}{2}$, откъдето съгласно критерия на Раабе—Дюамел редът е разходящ.

С помощта на критерия на Гаус да се изследва сходимостта на следващите редове:

3.6. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right]^p$.

Решение. Тук $\frac{a_n}{a_{n+1}} = \left[\frac{2n+2}{2n+1}\right]^p = \left[1+\frac{1}{2n+1}\right]^p$

$$= 1+\frac{p}{2n+1}+\frac{p(p-1)}{2(2n+1)^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$=1+\frac{p}{2n}+\frac{p}{2n(2n+1)}+\frac{p(p-1)}{2(2n+1)^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Тъй като $\alpha=1$, $\beta=\frac{p}{2}$, съгласно критерия на Гаус получаваме, че при $p>2$ редът е сходящ, а при $p\leqq 2$ той е разходящ.

3.7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!e^n}{n^{n+p}}$.

Решение. Имаме $\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{1}{e}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+p} = e^{-1+(n+p)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}$

$$= e^{-1+(n+p)\left[\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+\frac{1}{3n^3}+o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right]}$$

$$= e^{-1+1+\frac{p}{n}-\frac{1}{2n}-\frac{p}{2n^2}+\frac{n+p}{3n^3}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)} = 1+\frac{p-\frac{1}{2}}{n}+\frac{\gamma_n}{n^2},$$

където $\gamma_n=-\frac{p}{2}+\frac{n+p}{3n}+o(1)$ при $n\to\infty$.

Съгласно критерия на Гаус при $p-\frac{1}{2}>1$, т. е. $p>\frac{3}{2}$, редът е сходящ, а при $p\leqq\frac{3}{2}$ той е разходящ.

3.8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)!}{p(p+1)\ldots(p+n)\,n^q}$, $p>0$.

Решение. Разглеждаме при $n\to\infty$ частното

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}=\frac{(p+n+1)(n+1)^q}{(n+2)n^q}=\left(1+\frac{p-1}{n+2}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)^q$$

$$=\left(1+\frac{p-1}{n+2}\right)\left[1+\frac{q}{n}+o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)\right]$$

$$=1+\frac{q}{n}+o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)+\frac{p-1}{n+2}+\frac{(p-1)q}{n(n+2)}+o\left(\frac{1}{n^{5/2}}\right)$$

$$=1+\frac{q+p-1}{n}+o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right),$$ т. е. $\alpha=1$, $\beta=q+p-1$,

откъдето следва, че редът е сходящ при $q+p>2$ и разходящ при $q+p\leqq 2$ съгласно критерия на Гаус.

3.9. Ако за всички достатъчно големи стойности на n е в сила неравенството $\frac{n}{\ln n}(1-\sqrt[n]{a_n})\geqq p>1$, редът $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n\geqq 0$, е сходящ; ако от известно място нататък имаме $\frac{n}{\ln n}(1-\sqrt[n]{a_n})\leqq 1$, този ред е разходящ (критерий на Жаме).

Решение. Тъй като за достатъчно големи n е вярно неравенството $1-p\frac{\ln n}{n}\geqq 0$, то в първия случай получаваме $0\leqq a_n\leqq\left(1-p\frac{\ln n}{n}\right)^n$, откъдето $0\leqq a_n \leqq e^{n\ln\left(1-p\frac{\ln n}{n}\right)}$

$$= e^{-n\frac{p\ln n}{n}-\frac{p^2\ln^2 n}{2n}+o\left(\frac{\ln^2 n}{n}\right)} = \frac{1}{n^p}e^{-p^2\frac{\ln^2 n}{2n}+o\left(\frac{\ln^2 n}{n}\right)}$$

$$=\frac{1}{n^p}\left[1-\frac{p^2\ln^2 n}{2n}+o\left(\frac{\ln^2 n}{n}\right)\right]=b_n.$$

Като сравняваме с реда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$, $p > 1$, виждаме, че редът с общ член $b_n \geqq 0$ е сходящ, откъдето следва, че и редът $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ е сходящ.

Ако $\frac{n}{\ln n}\left(1 - \sqrt[n]{a_n}\right) \leqq 1$, както в първия случай получаваме

$$a_n \geqq \left(1 - \frac{\ln n}{n}\right)^n = \frac{1}{n} - \frac{\ln^2 n}{2n^2} + o\left(\frac{\ln^2 n}{n^2}\right).$$

Тук $b_n \sim \frac{1}{n}$ и следователно редът $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, а заедно с него и редът $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ са разходящи.

3.10. Докажете следния „логаритмичен" критерий: Ако за всички достатъчно големи стойности на n е в сила неравенството

$\frac{\ln a_n^{-1}}{\ln n} \geqq p > 1$, редът $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n > 0$, е сходящ; ако $\frac{\ln a_n^{-1}}{\ln n} \leqq 1$, редът е разходящ.

И критерият на Жаме, и логаритмичният критерий не позволяват обаче да се установи сходящ ли е редът $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^p n}$ при $p > 0$.

В този случай ще използваме следния критерий:

Редът $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n \geqq 0$, $a_n \geqq a_{n+1}$, е сходящ тогава и само тогава, когато е сходящ редът $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ (критерий на Коши за редове с неотрицателни намаляващи членове).

3.11. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^p n}$, $p > 0$.

Решение. Според критерия на Коши за редове с монотонно намаляващи членове даденият ред е сходящ едновременно с реда с общ член

$$\frac{2^n}{2^n \ln^p 2^n} = \frac{1}{(\ln 2)^p} \frac{1}{n^p}, \text{ т. е. при } p > 1.$$

При $p \leqq 1$ редът е разходящ.

По същия начин се установява, че редът

$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n (\ln n)^p (\ln \ln n)^q}$ е сходящ при $p > 1$ и всяко q или при $p = 1$, $q > 1$.

Ако $f(x) \geqq 0$ при $x \geqq 1$ е непрекъсната и нерастяща, редът $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ е сходящ и разходящ едновременно с несобствения интеграл $\int_a^{\infty} f(x)dx$, $a \geqq 1$ (интегрален критерий на Маклорен—Коши).

Ще покажем отново, че $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ е сходящ при $p > 1$ и разходящ при $p \leqq 1$. Очевидно достатъчно е да разгледаме случая $p > 0$ (в противен случай $a_n = \frac{1}{n^p} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$)

Разглеждаме функцията $f(x)=\frac{1}{x^p}$. Тя е положителна, непрекъсната, нерастяща при $x\geqq 1$. Затова нашият ред е сходящ и разходящ едновременно с интеграла

$\int_1^\infty \frac{dx}{x^p}$. При $p>1$ имаме $\int_1^\infty \frac{dx}{x^p}=\left.\frac{x^{-p+1}}{-p+1}\right|_1^\infty=\frac{1}{1-p}$,

а при $p=1$ $\int\frac{dx}{x}=\ln|x|$ и следователно $\int_1^\infty\frac{dx}{x}$ е разходящ. Той очевидно е разходящ и при $p<1$.

Да разгледаме пак зад. 3.11: Тук $f(x)=\frac{1}{x\ln^p x}$.

Лесно се вижда, че $f'(x)<0$ при $x>1$, $p>0$. Имаме

$$\int_2^\infty\frac{dx}{x\ln^p x}=\int_2^\infty\frac{d\ln x}{\ln^p x}=\frac{1}{(p-1)2^{p-1}}\text{ при } p>1.$$

Следователно при $p>1$ редът $\sum_{n=2}^\infty\frac{1}{n\ln^p n}$ е сходящ. Вижда се, че при $p\leqq 1$ интегралът е разходящ, откъдето следва, че и редът е разходящ.

Изследвайте самостоятелно за сходимост следните редове:

3.12. $\sum_{n=1}^\infty \frac{(2n-1)!!\,2^n}{3.7.\ldots(4n-1)}$.

3.13. $\sum_{n=1}^\infty \frac{\sqrt{n!}}{(2+\sqrt{1})\ldots(2+\sqrt{n})}$.

3.14. $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{(1+\sin\frac{\pi}{2})\ldots(1+\sin\frac{\pi}{n})}$.

3.15. $\sum_{n=1}^\infty \frac{\ln 2\quad \ln 3\ldots\ln(n+1)}{\ln(2+a)\ln(3+a)\ldots\ln(n+1+a)}$, $a>0$.

3.16. $\sum_{n=1}^\infty \left[\frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!}\right]^p\frac{1}{n^q}$.

3.17. $\sum_{n=1}^\infty \frac{p(p+1)\ldots(p+n-1)}{n!\,n^q}$, $p>0$.

3.18. $\sum_{n=1}^\infty \left(\frac{p(p+1)\ldots(p+n-1)}{q(q+1)\ldots(q+n-1)}\right)^s$, $p>0$, $q>0$.

3.19. $\sum_{n=1}^\infty (2-\sqrt{a})(2-\sqrt[3]{a})\ldots(2-\sqrt[n]{a})$, $a>0$.

§ 4. Абсолютно и условно сходящи редове

Дефиниция. Редът $\sum_{n=1}^\infty a_n$ се нарича абсолютно сходящ, ако е сходящ редът $\sum_{n=1}^\infty |a_n|$ от абсолютните стойности на членовете му.

Ако един ред е абсолютно сходящ, той е сходящ.

Ако редът $\sum_{n=1}^\infty a_n$ е сходящ, а редът $\sum_{n=1}^\infty |a_n|$ е разходящ, ще казваме, че редът $\sum_{n=1}^\infty a_n$ е условно сходящ.

Ако един ред е абсолютно сходящ, то редът, съставен от неговите членове, взети в произволен друг ред, е също абсолютно сходящ и сумата му е равна на първоначалния ред. Напротив, ако редът е само условно сходящ, то чрез подходящо разместване на членовете му може да се получи ред с отнапред зададена стойност на сумата му (включително $\pm\infty$).

При изследване на редовете за абсолютна сходимост се използват критериите за сходимост на редове с неотрицателни членове и се прилагат към реда от абсолютните стойности. Това са например критериите на Даламбер, Коши, Раабе—Дюамел, Гаус. Ако обаче с помощта на някои от тези критерии се окаже, че редът $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ е разходящ, това не означава непременно, че редът $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ е разходящ. Изключение правят критериите на Даламбер и Коши, тъй като, ако с тяхна помощ е установена разходимостта на реда $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$, това означава, че общият му член не клони към нула, т. е. в тези два случая не само $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$, а и $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ е разходящ.

За установяване на условната сходимост на редове се използват критериите на Лайбниц, Дирихле, Абел и др.

Редът

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots + (-1)^{n-1} a_n + \dots,$$

където всички $a_n \geqslant 0$ или всички $a_n \leqslant 0$, се нарича **алтернативен** или **знакопроменлив ред**. За такива редове често се използва следният критерий:

Ако редицата $\{a_n\}$ е монотонна и клони към нула, редът $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ е сходящ (**критерий на Лайбниц**).

Ще отбележим, че остатъкът $r_n = \sum_{k=n}^{\infty} (-1)^{k-1} a_k$ на такъв ред (ред от Лайбницов тип) има знака на своя първи член и неговият модул не надминава модула на този първи член.

Ако редицата $\{a_n\}$ е монотонна и ограничена, а редът $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ е сходящ, редът $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ е също сходящ (**критерий на Абел**).

Ако редицата $\{a_n\}$ е монотонна и клони към нула, а парциалните суми на реда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ са ограничени, редът $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ е сходящ (**критерий на Дирихле**).

Да се провери дали са сходящи следните алтернативни редове:

4.1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$.

Решение. Тук $a_n = \frac{1}{2n-1}$. Очевидно $a_n \geqslant a_{n+1} \geqslant 0$ и $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, т.е. редът е сходящ съгласно критерия на Лайбниц.

4.2. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \operatorname{tg} \frac{1}{n}$.

Решение. Редът е сходящ съгласно критерия на Лайбниц, тъй като редицата с общ член $a_n = \operatorname{tg} \frac{1}{n}$ е монотонна и клони към нула.

4.3. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(2n)!}{n^n}$.

Решение. Тук $a_n = \frac{(2n)!}{n^n}$ и $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2(2n+1)}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$.

Съгласно критерия на Даламбер получаваме, че редът от абсолютните стойности е разходящ, а това означава, че и даденият ред е разходящ. По-подробно, когато имаме $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geqslant D > 1$, откъдето $a_{n+1} \geqslant Da_n \geqslant \dots \geqslant D^n a_1$, получаваме $a_{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$.

4.4. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n^3}{2^n}$.

Решение. Този ред е сходящ — при това абсолютно, тъй като $\frac{n^3}{2^n} < \frac{2^{\frac{n}{2}}}{2^n} = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$ за достатъчно големи n, т. е.

абсолютната стойност на общия му член се мажорира от общия член на една сходяща геометрична прогресия.

4.5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{\ln n}{\sqrt{n}}$.

Решение. Тук $a_n=\dfrac{\ln n}{\sqrt{n}}$. Да означим $f(x)=\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$.

Тогава за $x\geqq 8$ имаме $f'(x)=\dfrac{2-\ln x}{x\sqrt{x}}<\dfrac{2-\ln 8}{x\sqrt{x}}<0$,

т. е. $f(x)$ е намаляваща при $x\geqq 8$, което означава, че редицата $\{a_n\}$ от осмия член нататък е намаляваща. Тъй като краен брой членове на реда не влияят върху неговата сходимост, редът е сходящ съгласно критерия на Лайбниц (за достатъчно големи n имаме

$0\leqq a_n\leqq\dfrac{\sqrt[4]{n}}{\sqrt{n}}=\dfrac{1}{\sqrt[4]{n}}$, т. е. $a_n\xrightarrow[n\to\infty]{}0$).

4.6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\sin\dfrac{\pi}{n}$.

Решение. Редът е сходящ съгласно критерия на Лайбниц, тъй като $\sin\dfrac{\pi}{n}\xrightarrow[n\to\infty]{}0$ и $\{\sin\dfrac{\pi}{n}\}$ монотонно намалява от втория член нататък.

4.7. $\dfrac{1}{\sqrt{2}-1}-\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}+\dfrac{1}{\sqrt{3}-1}-\dfrac{1}{\sqrt{3}+1}+\dots$

Решение. Този ред е разходящ, въпреки че общият му член клони към нула, а знаците се сменят алтернативно. Действително

$$S_{2n}=\frac{\sqrt{2}+1-\sqrt{2}+1}{2-1}+\frac{\sqrt{3}+1-\sqrt{3}+1}{3-1}+\dots+\frac{\sqrt{n}+1-\sqrt{n}+1}{n-1}$$

$$=2\left(1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n-1}\right),$$

а редицата с такъв общ член е разходяща (това е удвоената $(n-1)$-ва парциална сума на разходящия хармоничен ред).

Този пример показва, че в критерия на Лайбниц условието за монотонност на редицата $\{a_n\}$ е съществено.

4.8 (лема). Нека $a_n\geqq 0$, $n\left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)\xrightarrow[n\to\infty]{}r>0$.

Тогава редицата $\{a_n\}$ клони към нула, при това монотонно намалявайки от известно място нататък.

Решение. Тъй като $r>0$, от известно място нататък имаме $n\left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)>0$, т. е. $a_n>a_{n+1}$. Тогава редицата с общ член a_n е монотонно намаляваща и ограничена отдолу (с нулата), откъдето следва, че тя е сходяща. Нека $a_n\xrightarrow[n\to\infty]{}a$. Да допуснем, че $a\neq 0$, и да фиксираме такова цяло число k, че $kr>1$. Разглеждаме реда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^k$ и прилагаме към него критерия на Раабе—Дюамел. Имаме

$$n\left(\frac{a_n^k}{a_{n+1}^k}-1\right)=n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)\left[\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}\right)^{k-1}+\dots+1\right].$$

От допускането $a\neq 0$ следва, че $\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\xrightarrow[n\to\infty]{}\dfrac{a}{a}=1$ и изразът в средните скоби клони към k. $1=k$. Тогава от условието и избора на k получаваме, че $n\left(\dfrac{a_n^k}{a_{n+1}^k}-1\right)\xrightarrow[n\to\infty]{}kr>1$, откъдето според критерия на Раабе—Дюамел получаваме, че редът $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^k$ е сходящ. Едно необходимо условие за сходимост на произволен ред е $a_n^k\xrightarrow[n\to\infty]{}0$, което противоречи на допускането $a_n\xrightarrow[n\to\infty]{}a\neq 0$. Следователно това допускане не е вярно, т. е. $a_n\xrightarrow[n\to\infty]{}0$.

Нека с критерия на Раабе—Дюамел е доказано, че редът $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \ (a_n>0)$ е разходящ, но границата r на редицата с общ член $n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)$ е положителна. Тогава с помощта на току-що доказаната лема получаваме съгласно критерия на Лайбниц, че редът $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ е сходящ. С други думи, в този случай редът $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ е условно (неабсолютно) сходящ.

4.9. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1.3. \ldots (2n-1)}{2.4. \ldots 2n}$.

Решение. Тук $a_n = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$, $n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right) = \frac{n}{2n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{2}$.

Редът $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ е разходящ съгласно критерия на Раабе—Дюамел, но нашият ред $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ е сходящ съгласно критерия на Лайбниц, тъй като според твърдението на зад. 8 имаме $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ и $\{a_n\}$ намалява. Следователно нашият ред е условно сходящ.

4.10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} \ 4^n (n!)^2}{(2n)! \ (n+1)}$.

Решение. Този ред е сходящ по критерия на Лайбниц, тъй като

$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{2}$ според зад. 3.2.

4.11. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} \ n!}{(a+1) \ (a+2) \ldots (a+n)}$, $a>0$.

Решение. Както се вижда от критерия на Лайбниц, лемата — зад. 8 и 3.3, $n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} a$ — редът е абсолютно сходящ при $a>1$ и условно сходящ при $0<a\leqq 1$.

4.12. $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \left(\sqrt{n^2+a^2}\,\pi\right)$, $a \in R$.

Решение. От равенството $\sqrt{n^2+a^2}-n = \frac{a^2}{\sqrt{n^2+a^2}+n}$ получаваме $\pi\sqrt{n^2+a^2} = \pi n + \frac{\pi a^2}{\sqrt{n^2+a^2}+n}$. Да означим $b_n = \frac{\pi a^2}{\sqrt{n^2+a^2}+n}$.

Тогава $\sin \left(\sqrt{n^2+a^2}\,\pi\right) = (-1)^n \sin b_n$.

Очевидно редицата с общ член b_n монотонно намалява и клони към нула. Следователно $\sin b_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ и от някакво място нататък $|\sin b_n|$ монотонно намалява. Съгласно критерия на Лайбниц редът $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \left(\sqrt{n^2+a^2}\,\pi\right)$ е сходящ.

С критериите на Абел и Дирихле да се изследват следните редове:

4.13. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos\left(\frac{\pi n^2}{n+1}\right)}{\ln^p n}$, $p > 0$.

Решение. Тъй като

$$\cos\frac{\pi n^2}{n+1} = (-1)^{n-1}\cos\left[\pi\frac{n^2}{n+1} - \pi(n-1)\right],$$

редът приема вида $\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^{n-1}\cos\frac{\pi}{n+1}/\ln^p n$. Редът

$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\ln^p n}$ е сходящ съгласно критерия на Лайбниц ($a_n=\frac{1}{\ln^p n}\xrightarrow[n\to\infty]{}0$, монотонно намаляйки при $n\to\infty$, тъй като $p>0$).

Понеже от известно място нататък редицата $\cos\frac{\pi}{n+1}$ е монотонно растяща и ограничена с 1, съгласно критерия на Абел редът

$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\cos\frac{\pi}{n+1}}{\ln^p n}$ е сходящ.

4.14. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\operatorname{arctg}\sqrt{n+1}}{\ln\ln(2\sqrt{n}+1)}$.

Решение. И този ред е сходящ съгласно критерия на Абел, защото редът $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\ln\ln(2\sqrt{n}+1)}$ е сходящ (съгласно критерия на Лайбниц), а редицата $\{\operatorname{arctg}\sqrt{n+1}\}$ е монотонно растяща и ограничена с $\frac{\pi}{2}$.

4.15. Да се докаже, че ако редицата $\{a_n\}$ е монотонна и клони към нула, редът $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\sin n\alpha$ е сходящ при всяко α.

Решение. Ако $\alpha=2k\pi$, твърдението е очевидно — при $\alpha\neq 2k\pi$ ще си послужим с критерия на Дирихле. Достатъчно е да оценим

парциалните суми $\sum\limits_{k=1}^{n}\sin k\alpha$. От зад. 3.18 от гл. 0 следва, че

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\sin k\alpha\right| = \left|\frac{\sin\frac{k\alpha}{2}\sin\frac{k+1}{2}\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2}}\right| \leqslant \frac{1}{\sin\frac{\alpha}{2}},$$

което при $\alpha\neq 2k\pi$ дава ограниченост на парциалните суми на реда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin n\alpha$.

Ще отбележим, че твърдение, аналогично на зад. 4.15, е валидно и за ред от вида $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\cos n\alpha$ при условие $\alpha\neq 2k\pi$.

Така се получава например, че са сходящи следните редове:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{\sqrt[5]{n}},\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\alpha}{n}\ (\alpha\neq 2k\pi),$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\alpha}{n}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}\right).$$

Да видим например последния. Тъй като $\frac{1}{n}\xrightarrow[n\to\infty]{}0$, то средноаритметично $\frac{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}}{n}\xrightarrow[n\to\infty]{}0$ също клони към нула.

Остава да се покаже монотонността, т. е.

$$\frac{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}}{n} \geqslant \frac{(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n})+\frac{1}{n+1}}{n+1},$$

или $1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\geqslant\frac{n}{n+1}$, което е очевидно.

4.16. Да се докаже, че критериите на Лайбниц и Абел са следствие на критерия на Дирихле.

Решение. Редът $1-1+1-1+\dots$ има ограничени парциални суми и затова, ако $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ и $\{a_n\}$ е монотонна, каквито са условията в критерия на Лайбниц, то редът $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ е сходящ.

От предположенията в критерия на Абел следва, че редицата $\{a_n\}$ (монотонна и ограничена) има крайна граница a. Тогава редът $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ може да се запише като сума на два реда $\sum_{n=1}^{\infty} a b_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n-a) b_n$. Първият ред е сходящ по условие, а вторият — съгласно критерия на Дирихле, тъй като $a_n - a \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, а от сходимостта на реда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ следва ограничеността на парциалните му суми.

Като се използват изучените критерии, да се изследва абсолютната и условната сходимост на следните редове:

4.17. $\sum_{n=1}^{\infty} n^3 e^{-\sqrt{n}} \sin n$.

Решение. Този ред е абсолютно сходящ, тъй като за общия му член $|a_n| < \frac{n^3}{e^{\sqrt{n}}}$, а при достатъчно големи n е вярно $\frac{n^3}{e^{\sqrt{n}}} < \frac{1}{n^2}$, т.е. редът от абсолютните стойности се мажорира от сходящия ред $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ (краен брой членове не влияят на сходимостта).

4.18. $\sum_{n=1}^{\infty} nq^n$.

Решение. Към реда от абсолютните стойности прилагаме критерия на Даламбер. Имаме $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{(n+1)q^{n+1}}{nq^n}\right| = |q|$, откъдето, ако $|q|<1$, то редът $\sum_{n=1}^{\infty} |nq^n|$ е сходящ, т. е. $\sum_{n=1}^{\infty} nq^n$ е абсолютно сходящ. Ако $|q|>1$, както бе споменато, можем да твърдим, че редът е разходящ (общият член не клони към нула, което може да се види и директно). Ако $|q|=1$, редът е разходящ поради нарушаване на необходимото условие $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

4.19. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^p}$.

Решение. Както вече е известно, редът $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ е сходящ при $p>1$ и разходящ при $p\leqq 1$, т. е. нашият ред е абсолютно сходящ при $p>1$, а при $p\leqq 1$ той може да бъде условно сходящ. При $p>0$ това е ред, удовлетворяващ условията на критерия на Лайбниц, тъй като $\frac{1}{n^p} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, монотонно намаляйки. Следователно редът е сходящ. Ако $p\leqq 0$, редът е разходящ, тъй като е нарушено необходимото условие за сходимост $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. С други думи, при $p>1$ редът е абсолютно сходящ; при $0<p\leqq 1$ той е условно сходящ; при $p\leqq 0$ е разходящ.

4.20. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \ln^p n}$.

Решение. От зад. 3.12 знаем, че при $p>1$ редът е абсолютно сходящ. Означаваме $a_n = \frac{1}{n \ln^p n}$. Независимо от p имаме $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Да разгледаме функцията $f(x)=x^p \ln x$. Нейната производна $f'(x)=\ln^{p-1}x\,(\ln x+p)$ става положителна при $x>e^{-p}$, т. е. за достатъчно големи n имаме $f(n+1)>f(n)$ или $a_{n+1}<a_n$. Получихме, че при $p\leqq 1$ са изпълнени условията на критерия на Лайбниц (за достатъчно големи n) и редът $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\ln^p n}$ е условно сходящ.

4.21. Редът на Дирихле $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^p}$, където $\{a_n\}$ е произволна редица.

Решение. Ще докажем следното твърдение: Ако редът на Дирихле е сходящ при някое p_0, той е сходящ при всяко $p>p_0$. Това следва веднага от критерия на Абел. Действително, $\frac{a_n}{n^p}=\frac{a_n}{n^{p_0}}\times\frac{1}{n^{p-p_0}}$, редът $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^{p_0}}$ е сходящ, а редицата $\frac{1}{n^{p-p_0}}$ е ограничена и монотонна.

Има редове на Дирихле, сходящи при всяко p, като например $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\frac{1}{n^p}$ (при достатъчно големи n имаме $n^{2-p}<2^n$, т. е. нашият ред се мажорира от сходящия ред $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$). Има и редове, разходящи при всяко p — например $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n^p}$. Може да се намери (за всеки ред на Дирихле) точка λ, такава, че при $p>\lambda$ редът на Дирихле да е сходящ, а при $p<\lambda$ той да е разходящ. Действително $\lambda=\inf\left\{p:\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^p}\text{ е сходящ}\right\}$. За реда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ очевидно $\lambda=1$, обаче за реда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^p}$, както видяхме в предишните задачи, $\lambda=0$. Когато редът на Дирихле е сходящ при всяко p, можем да смятаме, че $\lambda=-\infty$, а когато той е навсякъде разходящ — че $\lambda=+\infty$. Тук има аналогия със степенните редове, които ще бъдат разгледани по-нататък. Но има една съществена разлика — областта на сходимост може съществено да се различава от областта на абсолютната сходимост — например редът

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^p}$ е сходящ при $p>0$, а абсолютно сходящ само при $p>1$.

4.22. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{n}{e}\right)^n\cos n\alpha$.

Решение. Нека $\alpha\neq 2k\pi$. Тогава, за да приложим критерия на Дирихле, е достатъчно да проверим, че редицата с общ член $a_n=\frac{1}{n!}\left(\frac{n}{e}\right)^n$ клони към нула и е монотонна. Както видяхме от лемата (зад. 4.8), достатъчно е редицата с общ член $n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)$ да има положителна граница. Но в зад. 3.5 видяхме, че тази граница е равна на $\frac{1}{2}$. С други думи, получихме, че при $\alpha\neq 2k\pi$ редът е сходящ. Нека $\alpha=2k\pi$. Тогава $\cos 2k\pi n=1$ и полученият ред $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{n}{e}\right)^n$ е разходящ съгласно критерия на Раабе—Дюамел, вж. зад. 3.5.

Нека отбележим, че ако редът $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ е абсолютно сходящ, то редовете $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$ и $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ са едновременно или абсолютно сходящи, или условно сходящи, или разходящи.

С помощта на това твърдение ще решим следната задача:

4.23. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2\sqrt[3]{n}+(-1)^{n-1}}$.

Решение. Представяме общия член на реда във вида

$$a_n=\frac{(-1)^{n-1}}{2\sqrt[3]{n}}\left(1+\frac{(-1)^{n-1}}{2n^{1/3}}\right).$$

Тъй като $(1+x)^{-1}=\dfrac{1}{1+x}=1-x+x^2+o(x^{5/2})$ при $x\to 0$, то

$$a_n=\frac{(-1)^{n-1}}{2n^{1/3}}\left[1-\frac{(-1)^{n-1}}{2n^{1/3}}+\frac{1}{4n^{2/3}}+o\left(\frac{1}{n^{5/6}}\right)\right],$$

или $a_n=\dfrac{(-1)^{n-1}}{2n^{1/3}}-\dfrac{1}{4n^{2/3}}+\dfrac{(-1)^{n-1}}{8n}+\alpha_n,$

където $\alpha_n=o\left(\dfrac{1}{n^{7/6}}\right)$. Редът с общ член α_n е абсолютно сходящ.

Тогава нашият ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ е сходящ едновременно с реда с общ член $\dfrac{(-1)^{n-1}}{2n^{1/3}}-\dfrac{1}{4n^{2/3}}+\dfrac{(-1)^{n-1}}{8n}$. Но $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{2n^{1/3}}$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n}}{8n}$ са сходящи съгласно критерия на Лайбниц, а $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{4n^{2/3}}$ е разходящ, тъй като $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{p}}$ при $p<1$ е разходящ. Следователно редът $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ е разходящ, макар че $a_n\sim\dfrac{(-1)^{n-1}}{2n^{1/3}}$.

Аналогично може да бъде изследвана сходимостта например на реда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\dfrac{(-1)^n}{2\sqrt[3]{n^2}}\right)$, който се оказва условно сходящ.

Изследвайте за сходимост следните редове:

4.24. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{\ln n}$. **4.25.** $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{(-1)^n\ln n}{\sqrt{n}}$.

4.26. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{\sqrt[n]{n^2+1}}$. **4.27.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\arcsin\dfrac{n}{n^2+1}$.

4.28. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}+(-1)^{n-1}}$. **4.29.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin n\alpha}{\ln n}$.

4.30. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin n\alpha\ \cos\frac{\pi}{n}}{\ln\ln(n+2)}$. **4.31.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos n\ \arccos\frac{1}{n}}{n}$.

4.32. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(n+1)\sin 2n}{n^2-\ln n}$.

Изследвайте за абсолютна и условна сходимост следните редове:

4.33. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}\ n^n}{n!}$. **4.34.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}\ n^n}{(2n)!}$.

4.35. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\ \mathrm{arctg}\dfrac{\sqrt{n}}{2n-1}$. **4.36.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin n\alpha}{n\sqrt{n}}$.

4.37. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\ln^2(\ln(n+2))}{\ln(n+1)}\sin\left(\pi n+\dfrac{\pi}{4}\right)$. **4.38.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n n^2 2^n}{3^n+1}$.

4.39. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{\sqrt{n^2+2n+3}-\sqrt{n^2-2n+3}}{n}$.

За кои стойности на α са абсолютно сходящи и за кои — условно сходящи следните редове:

4.40. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left[\dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right]^{\alpha}$. **4.41.** $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n\ln n(\ln\ln n)^{\alpha}}$.

4.42. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n\ln^{\alpha}(n+1)}$, $0<x<\pi$.

4.43. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha^n}{1-\alpha^n}$, $\alpha\neq\pm1$.

4.44. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha^n}{(1+\alpha)(1+\alpha^2)\ldots(1+\alpha^n)}$, $\alpha\neq-1$.

§ 5. Умножение на редове

Теорема на Коши. Ако числовите редове $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ са абсолютно сходящи и имат суми, съответно равни на s и σ, то редът $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$, където $c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots$ са произведения от вида

$$\begin{array}{l} a_1b_1,\ a_1b_2,\ a_1b_3, \ldots, a_1b_q, \ldots \\ a_2b_1,\ a_2b_2,\ a_2b_3, \ldots, a_2b_q, \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_pb_1,\ a_pb_2,\ a_pb_3, \ldots, a_pb_q, \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

взети в произволен ред, е абсолютно сходящ и има сума, равна на $s\sigma$.

При умножение на редове най-често е удобно произведенията a_pb_q да се групират по диагонали, т.е.

$$a_1b_1+(a_1b_2+a_2b_1)+(a_1b_3+a_2b_2+a_3b_1)+\ldots$$

(произведение в смисъл на Коши).

Нека редовете $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ са сходящи и имат съответно суми s и σ, като поне един от тях е абсолютно сходящ. Тогава тяхното произведение в смисъл на Коши е сходящ ред и има сума $s\sigma$ (теорема на Мертенс).

5.1. Да се изчисли произведението на редовете:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^{n-1}}{(n-1)!}$ и $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}a^{n-1}}{(n-1)!}$, $|a|<1$;

б) $\sum_{n=1}^{\infty} a^n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n(n+1)}$, $|a|<1$;

в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n-1)!}$ и $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-2)!}$.

Решение. **а)** И двата реда са абсолютно сходящи — това се вижда например с критерия на Даламбер. Следователно е все едно в каква последователност ще вземем $a_i b_j$. Изчисляваме n-тия член на произведението в смисъл на Коши $(a_1 b_n+a_2 b_{n-1}+\ldots+a_nb_1)$. Ако $n=1$, имаме $c_1=a_1b_1=1$; ако $n>1$, имаме

$$c_n=1\frac{a^{n-1}}{(n-1)!}-a\frac{a^{n-2}}{(n-2)!}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{a^{n-1}}{(n-1)!}$$

$$=\frac{a^{n-1}}{(n-1)!}\left[1-\frac{(n-1)!}{1!(n-2)!}+\ldots+(-1)^{n-1}\right]$$

$$=\frac{a^{n-1}}{(n-1)!}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n-1}{k}=(1-1)^{n-1}\frac{a^{n-1}}{(n-1)!}=0,$$

т. е. сумата на произведението на двата реда е равна на 1, а и самото произведение представлява ред само с един различен от нула член.

б) Очевидно общият член на произведението по Коши ще има вида

$$c_n=a.\frac{a_n}{n(n+1)}+\frac{a^2a^{n-1}}{(n-1).n}+\ldots+\frac{a^n.a}{2.1}$$

$$=a^{n+1}\left[\left(-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n}\right)+\left(-\frac{1}{n}+\frac{1}{n-1}\right)+\ldots+\left(-\frac{1}{2}+1\right)\right]$$

$$=a^{n+1}\left[1-\frac{1}{n+1}\right]=\frac{a^{n+1}.\,n}{n+1}.$$

5.2. Намерете квадрата на реда:

а) $\sum_{n=0}^{\infty} a^n$, $|a|<1$; **б)** $\zeta(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}$, $x>1$;

в) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^n}{n!}$; **г)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n a^{2n}}{2^{2n}(n!)^2}$.

Решение. **а)** Знаем, че при $|a|<1$ редът е сходяща геометрична прогресия със сума $\frac{1}{1-a}$. По правилото на Коши за умножаване на редове получаваме

$$\frac{1}{(1-a)^2}=1+(a.1+1.a)+\ldots+(1.a^n+a.\,a^{n-1}+\ldots+a^n.1)+\ldots$$

$$=1+2a+3a^2+\ldots+na^n+\ldots$$

б) При $x>1$ този ред е абсолютно сходящ. Според теоремата на Коши сумата от произведението на реда със самия него е една и съща независимо от последователността, в която се взимат събираемите a_ib_j. Ще изчислим квадрата на реда не в смисъл на Коши, а като подредим всевъзможните произведения $\frac{1}{l^x}\frac{1}{m^x}=\frac{1}{(lm)^x}$ така, че членовете с един и същ знаменател да бъдат съседни, след това ще съберем тези членове. На всяко число $n=lm$ ще отговарят толкова равни помежду си членове, колкото са делителите на n. По такъв начин получаваме, че $[\zeta(x)]^2=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\tau(n)}{n^x}$, където $\tau(n)$ е функцията на Ойлер.

г) Упътване. Покажете, че

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2=\binom{2n}{n}=\frac{(2n)!}{(n!)^2}.$$

5.3. Да се докаже, че произведението на два разходящи реда може да бъде абсолютно сходящ ред.

Решение. Да разгледаме редовете $1-\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^n$ и $1+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}\left(2^n+\frac{1}{2^{n+1}}\right)$. Те са разходящи, тъй като общият член на всеки от тях не клони към нула при $n\to\infty$. По правилото на Коши за умножение на редове имаме

$$c_n=a_1b_n+a_nb_1+\sum_{k=2}^{n-1}a_kb_{n-k+1},$$

където $a_1=b_1=1$ и $a_k=-\left(\frac{3}{2}\right)^{k-1}$, $b_k=\left(\frac{3}{2}\right)^{k-2}\left(2^{k-1}+\frac{1}{2^k}\right)$ за $k\geqq 2$.

Тогава $c_n=\left(\frac{3}{2}\right)^{n-2}\left(2^{n-1}+\frac{1}{2^n}\right)-\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}-\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{3}{2}\right)^{k-1}\left(\frac{3}{2}\right)^{n-k+1-2}$

$$\left(2^{n-k+1-1}+\frac{1}{2^{n-k+1}}\right)=\left(\frac{3}{2}\right)^{n-2}\left(2^{n-1}+\frac{1}{2^n}\right)-\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}-3^{n-2}.2^2\sum_{k=2}^{n-1}\frac{1}{2^k}$$

$$-\frac{3^{n-2}}{2^{2n-1}}\sum_{k=2}^{n-1}2^k=\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}.$$

5.4. Да се докаже, че в теоремата на Мертенс условието поне един от редовете да бъде абсолютно сходящ е съществено.

Решение. Ще дадем пример на условно сходящ ред, чийто квадрат (в смисъл на Коши) е разходящ ред. Такъв е редът $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$. Общият член на произведението в смисъл на Коши на $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$ и $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$ е

$$c_n=(-1)^{n-1}\left[\frac{1}{\sqrt{n}.\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{n-1}\sqrt{2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{n}}\right],$$

откъдето $c_n>\frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{n}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{n}}=1$, т. е. е нарушено необходимото условие за сходимост на реда c_n да клони към 0.

Следователно за условно сходящи редове не е вярна теоремата за умножение на редове.

Да разгледаме сега условно сходящия ред $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$, чиято сума ще означим с S (както знаем $S=\ln 2$). Общият член на неговия квадрат ще бъде

$$c_n=(-1)^{n-1}\left[\frac{1}{1.n}+\frac{1}{2(n-1)}+\ldots+\frac{1}{n.1}\right]$$

$$=\frac{(-1)^{n+1}}{n+1}\left[\frac{n+1}{1.n}+\frac{n-1+2}{2(n-1)}+\frac{n-2+3}{3(n-2)}+\ldots+\frac{n+1}{n.1}\right]$$

$$= \frac{(-1)^{n-1}.2}{n+1}\left[1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\right].$$

Тук $|c_n|$ монотонно намалява и клони към нула при $n\to\infty$ и следователно редът е сходящ съгласно критерия на Лайбниц. Ще бъде ли обаче неговата сума равна на S^2 ? Отговорът е положителен и се дава със следната теорема:

Ако произведението в смисъл на Коши на сходящите редове $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ е сходящ ред, то неговата сума е равна на произведението от сумите на тези редове (теорема на Абел).

§ 6. Безкрайни произведения

Ако $p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots$ е произволна редица, символът $p_1 p_2 \ldots p_n \ldots = \prod\limits_{n=1}^{\infty} p_n$ се нарича безкрайно произведение.

Произведението $\pi_n = p_1 p_2 \ldots p_n$ на първите n члена на безкрайното произведение се нарича n-то парциално произведение. Безкрайното произведение се нарича сходящо, когато редицата от парциалните му произведения е сходяща и границата ѝ е различна от нула. В противен случай безкрайното произведение се нарича разходящо. Числото $P=\lim\limits_{n\to\infty} \pi_n$ се нарича стойност на произведението и се пише $P=\prod\limits_{n=1}^{\infty} p_n$ или $P=p_1 p_2 \ldots p_n \ldots$ Ако един от множителите е равен на нула, то и стойността на безкрайното произведение е нула. Занапред този случай ще бъде изключен, т. е. ще предполагаме, че $p_n \neq 0$ за всяко n.

Ще отбележим някои от свойствата на безкрайното произведение:

1. Ако безкрайното произведение е сходящо, то $\lim\limits_{n\to\infty} p_n = 1$.

Следващото свойство показва връзката между безкрайното произведение и редовете, тъй като от известно място нататък всички $p_n > 0$ (вж. свойство 1), а краен брой членове не влияят на сходимостта на безкрайното произведение. Ще предполагаме, че $p_n > 0$ за всяко n.

2. За да бъде безкрайното произведение $\prod\limits_{n=1}^{\infty} p_n$ сходящо, е необходимо и достатъчно да е сходящ редът $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln p_n$. При това, ако L е сумата на този ред, то $P=e^L$.

Оттук става ясно защо в дефиницията на сходящо произведение се иска редицата от парциалните произведения да не клони към нула.

Да се изследват за сходимост следните произведения:

6.1. $\prod\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

Решение. Това произведение е разходящо, тъй като е нарушено необходимото условие общият му член p_n да клони към 1 (тук $p_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$), а тъй като $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln\frac{1}{n} = -\infty$, то произведението е разходящо към 0 (а именно

$\ln\pi_n = \sum\limits_{n=1}^{n} \ln\frac{1}{k} = -\sum\limits_{k=1}^{n} \ln k \xrightarrow[n\to\infty]{} -\infty$). Следователно $\pi_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

6.2. $\prod\limits_{n=3}^{\infty} \cos\frac{\pi}{n}$.

Решение. Образуваме реда $\sum\limits_{n=3}^{\infty} \ln\cos\frac{\pi}{n}$. Неговият общ член се представя като $\ln\left[1-\frac{\pi^2}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right] = -\frac{\pi}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

Редът е сходящ, тъй като е сходящ редът с общ член $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

Следователно и безкрайното произведение е сходящо.

6.3. $\prod\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(1+\frac{1}{n})^n}{e}$.

Решение. Образуваме реда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln\frac{(1+\frac{1}{n})^n}{e}$. Неговият общ член се представя като

$$n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-1=n\left[\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]-1=\frac{-1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right),$$

т. е. този ред е сходящ или разходящ едновременно с реда

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$. Това показва, че редът, а с него и безкрайното произведение са разходящи.

6.4. $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$.

Решение. Тук

$$\pi_n=\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=\frac{2^2-1}{2^2}\,\frac{3^2-1}{3^2}\ldots\frac{n^2-1}{n^2}$$

$$=\frac{(2-1)(2+1)(3-1)(3+1)\ldots(n-1)(n+1)}{(n!)^2}=\frac{1}{2}\,\frac{n+1}{n}.$$

Тъй като $\pi_n\xrightarrow[n\to\infty]{}\frac{1}{2}$, то $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=\frac{1}{2}$.

6.5. $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left[1+\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}\right]$.

Решение. Представяме π_n в следния вид:

$$\pi_n=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)\left[1+\left(\frac{1}{2}\right)^2\right]\ldots\left[1+\left(\frac{1}{2}\right)^{2^n}\right]=2\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{2^{n+1}}\right].$$

Тогава $\pi_n\xrightarrow[n\to\infty]{}2$, т. е. $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left[1+\left(\frac{1}{2}\right)^{2^n}\right]=2$.

6.6. $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\cos\frac{\alpha}{2^n}$.

Решение. Нека $\alpha\neq0$. Представяме π_n във вида

$$\pi_n=\frac{1}{2\sin\frac{\alpha}{2^n}}\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2^2}\ldots\cos\frac{\alpha}{2^n}\,2\sin\frac{\alpha}{2^n}$$

$$=\frac{1}{2^2\sin\frac{\alpha}{2^n}}\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2^2}\ldots\cos\frac{\alpha}{2^{n-1}}\cdot2\sin\frac{\alpha}{2^{n-1}}\ldots=\frac{\sin\alpha}{2^n\sin\frac{\alpha}{2^n}}$$

Тъй като $\dfrac{\sin\frac{\alpha}{2^n}}{\frac{\alpha}{2^n}}\xrightarrow[n\to\infty]{}1$, то

$$\pi_n\xrightarrow[n\to\infty]{}\frac{\sin\alpha}{\alpha}\text{ и }\prod_{n=1}^{\infty}\cos\frac{\alpha}{2^n}=\frac{\sin\alpha}{\alpha}.$$

Нека $\alpha=0$, тогава $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\cos\frac{\alpha}{2^n}=1$.

6.7. Докажете, че:

а) ако в безкрайното произведение $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ поне за достатъчно големи n е изпълнено неравенството $a_n>0$ (или $a_n<0$), за сходимостта на това безкрайно произведение е необходимо и достатъчно да бъде сходящ редът $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$;

б) ако заедно с реда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ е сходящ и редът $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2$, безкрайното произведение $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ е сходящо;

в) ако редът $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ е сходящ, а редът $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2$ е разходящ, то $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+a_n)=0$.

Решение. **а)** За сходимостта на безкрайното произведение $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ и на реда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ е необходимо редицата с общ член a_n да клони към нула при $n\to\infty$. Но ние знаем, че при това условие $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln(1+a_n)}{a_n}=1$. Тъй като общите членове на редовете $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1+a_n)$ от някакво място нататък имат определен знак, тези редове са сходящи или разходящи едновременно. От това, че редът $\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1+a_n)$ е сходящ или разходящ едновременно с $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$, следва верността на нашето твърдение. Ако $\sum_{n=1}^{\infty} a_n=-\infty$, т. е. парциалните суми на този ред клонят към $-\infty$, то $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)=0$ (безкрайното произведение е разходящо към нулата).

б) Ако $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ са сходящи, то във всеки случай $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. От разлагането $\ln(1+a_n)=a_n-\frac{1}{2}a_n^2+o(a_n^2)$ при $n\to\infty$ следва, че $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n-\ln(1+a_n)}{a_n^2}=\frac{1}{2}$. Оттук и от условието следва, че е сходящ редът $\sum_{n=1}^{\infty}[a_n-\ln(1+a_n)]$, а тъй като $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ е сходящ, то трябва редът $\sum_{n=1}^{\infty}\ln(1+a_n)$, а заедно с него и безкрайното произведение да бъдат сходящи.

в) От разходимостта на реда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ следва разходимостта на реда $\sum_{n=1}^{\infty}[a_n-\ln(1+a_n)]$, като при това $\sum_{n=1}^{\infty}[a_n-\ln(1+a_n)]=+\infty$ (парциалните суми на този ред клонят към $+\infty$). От сходимостта на реда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ тогава следва, че $\sum_{n=1}^{\infty}\ln(1+a_n)=-\infty$, т. е. $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)=0$.

6.8. Сходящо ли е безкрайното произведение

$$(1-\sin 1)\left(1-\sin\frac{1}{2}\right)\dots\left[1+(-1)^n\sin\frac{1}{n}\right]\dots?$$

Решение. Редът $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\sin\frac{1}{n}$ е сходящ съгласно критерия на Лайбниц, а редът $\sum_{n=1}^{\infty}\sin^2\frac{1}{n}$ е сходящ, тъй като $\dfrac{\sin^2\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$. Тогава според зад. 7 безкрайното произведение е сходящо.

Да се изследват за сходимост следните безкрайни произведения:

6.9. $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{n}{n+1}\ln\frac{n}{n+1}\right)$.

Решение. Това безкрайно произведение е сходящо едновременно с реда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$. Имаме

$$\frac{a_n}{\frac{1}{n+1}} = n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=n\left[\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right]$$

при $n\to\infty$ т.е. $a_n\sim\frac{1}{n+1}$. Следователно редът $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ е разходящ (вж. зад. 1.7), а с него и безкрайното произведение.

6.10. $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n^p}\right)$, $p>0$.

Решение. Отново според зад. 1.7 безкрайното произведение е сходящо при $p>1$, а разходящо при $p\leqq 1$ (едновременно с реда

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$). В тази връзка безкрайното произведение $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n^p}\right)$ е сходящо при $p>1$, а при $0<p\leqq 1$ е разходящо към нулата.

6.11. $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{(-1)^n}{n^p}\right)$.

Решение. Според зад. 6.7 при $p>\frac{1}{2}$ произведението е сходящо, тъй като са сходящи редовете $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^p}$ и $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2p}}$. При $0\leqq p\leqq\frac{1}{2}$ редът $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^p}$ е сходящ, а редът $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2p}}$ е разходящ и по подусловие в) на зад. 6.7 получаваме, че произведението е разходящо към нулата. При $p\leqq 0$ е нарушено необходимото условие за сходимост на произведение $p_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$ (редицата $\{p_n\}$ няма граница).

Ще направим едно приложение на теорията на безкрайните произведения към въпроси за сходимост на редове.

6.12. Да се изследва за абсолютна и условна сходимост редът

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{p(p+1)\ldots(p+n)(-1)^{n-1}}{n^n}e^n.$$

Решение. Да означим $a_n=\frac{p(p+1)\ldots(p+n)}{n^n}e^n$. Тогава нашият ред има вида $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$. Най-напред ще разгледаме въпроса за абсолютната сходимост. Имаме $\frac{a_n}{a_{n+1}}$ $=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\frac{1}{e}\frac{n+1}{p+n+1}$. Очевидно е, че за достатъчно големи n частното $\frac{a_n}{a_{n+1}}$ е положително число. Имаме

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}=e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-1-\ln\left(1+\frac{p}{n+1}\right)}=e^{-\left(\frac{1}{2}+p\right)\frac{1}{n}+\frac{\gamma_n}{n^2}}$$

$$=e^{n\left[\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+\frac{1}{3n^3}+o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right]-1-\frac{p}{n+1}+\frac{p^2}{2(n+1)^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)}=e^{-\left(\frac{1}{2}+p\right)\frac{1}{n}+\frac{\gamma_n}{n^2}}$$

Съгласно критерия на Гаус при $-(p+\frac{1}{2})>1$, т. е. при $p<-\frac{3}{2}$, редът е абсолютно сходящ, а при $p\geqq-\frac{3}{2}$ той не е абсолютно сходящ.

Нека $p+\frac{1}{2}>0$, т. е. $p>-\frac{1}{2}$. Тогава при достатъчно големи n изразът $\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ става по-малък от единица, т. е. $|a_n|\leqq|a_{n+1}|$, което показва, че a_n не клони към 0 при $n\to\infty$, и редът е разходящ.

Ако $p+\frac{1}{2}<0$, т.е. $p<-\frac{1}{2}$, изразът $\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ става по-голям от единица при достатъчно големи n, т.е. членовете на нашия ред намаляват по абсолютна стойност. Поради това, че $\frac{a_n}{a_{n+1}}>0$ при достатъчно големи n, реда $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ можем да разглеждаме като ред с алтернативно сменящи се знаци. За да намерим $\lim_{n\to\infty} a_n$, ще си послужим с безкрайно произведение. Именно

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n_0}}=\lim_{n\to\infty}\prod_{k=n_0}^{n-1}\frac{a_{k+1}}{a_k}=\prod_{n=n_0}^{\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

(Началната стойност n_0 се предполага толкова голяма, че всички множители да са положителни). Имаме

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=e^{\left(\frac{1}{2}+p\right)\frac{1}{n}-\frac{\gamma_n}{n^2}}=1+\left(\frac{1}{2}+p\right)\frac{1}{n}-\frac{\gamma_n}{n^2}.$$

Означаваме $b_n=\left(\frac{1}{2}+p\right)\frac{1}{n}-\frac{\gamma_n}{n^2}$. Ако $p+\frac{1}{2}<0$, можем да смятаме, че за достатъчно големи n: $b_n<0$, т. е. имаме $\sum_{n=n_0}^{\infty} b_n=-\infty$, което означава, че $\prod_{n=1}^{\infty}(1+b_n)=0$. Така получихме, че ако $p+\frac{1}{2}<0\,(p<-\frac{1}{2})$, то $\lim_{n\to\infty} a_n=0$ и тогава съгласно критерия на Лайбниц редът е сходящ.

Нека $p+\frac{1}{2}=0$. Тогава безкрайното произведение

$\prod_{n=n_0}^{\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\prod_{n=n_0}^{\infty}\left(1-\frac{\gamma_n}{n^2}\right)$ (вж. зад. 6.7) е сходящо заедно с реда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$, което означава, че a_n не клони към 0 при $n\to\infty$, т.е. редът е разходящ.

Окончателно получихме, че при $p<-\frac{3}{2}$ редът е абсолютно сходящ; при $-\frac{3}{2}\leqq p<-\frac{1}{2}$ той е условно сходящ, а при $-\frac{1}{2}\leqq p$ е разходящ.

Ще отбележим, че когато $p+\frac{1}{2}<0$, бихме могли да постъпим както при решаването на някои задачи от § 4, а именно за доказателството на факта, че $|a_n|\xrightarrow[n\to\infty]{}0$, монотонно намаляйки, да използваме твърдението на зад. 4.8 (лемата).

Изследвайте за сходимост следните безкрайни произведения:

6.12. $\prod_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}$. **6.13.** $\prod_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[n]{e}}{1+\frac{1}{n}}$.

6.14. $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{2}{n+1}\right)$.

Намерете стойността на всяко от безкрайните произведения:

6.15. $\prod_{n=1}^{\infty}(1+x^{2^n})$. **6.16.** $\prod_{n=2}^{\infty}\frac{n^3-1}{n^3+1}$.

6.17. $\prod_{n=1}^{\infty}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}$.

Упътване. Използвайте формулата*

$\cos\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos\alpha}$.

Отговори

Глава 0. Предварителни сведения

2.2, а) $S=\frac{1+(-1)^n x^{n+1}}{1+x}$; б) $x\frac{1-(-1)^n x^{2n}}{1+x^2}$; в) $\frac{2^{2n+1}+x^{6n+3}}{2^{2n-1}(2+x^3)}$;

г) $\frac{ax(1-x^n)}{1-x}$; **2.3.** $\frac{x-(n+1)x^{n+1}+nx^{n+2}}{(1-x)^2}$.

3.20. $\frac{\sin\frac{n}{2}x\cdot\cos\frac{n+1}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}$. **3.21,** а) $\frac{\sin 2nx}{2\sin x}$; б) $\frac{\sin^2 nx}{\sin x}$.

3.23, а) $a_n=\cos nx$; б) $a_n=\sin nx$.

4.5. $A=1$, $B=-1$, $C=-1$. **4.8.** $P_n(x)=\frac{x(x-1)\dots(x-n+1)}{n!}$.

5.9, а) 2^{n-1}; б) 2^{n-1}

6.3. $0, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{6}$.

6.21. $\arcsin\left(x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}\right)=\begin{cases}\pi-(\arcsin x+\arcsin y),\ x>0,\\ -\pi-(\arcsin x+\arcsin y),\ x<0.\end{cases}$

6.30. $x_k=\cos\frac{k\pi}{n}$, $k=0,\dots,n$.

Глава 1. Числови редици

1.1, а) a, b; б) $1,2,\dots,k$; в) **N**. **1.5.** $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \dots$

1.9, а) 0; б) 0; в) 0; г) 0. **1.10,** а) $\frac{1}{4}$; б) $a-1$; в) $\frac{a^2}{a^2-a+1}$.

1.11, а) 0; б) 1; в) $\frac{3}{2}$. **1.12.** Например $a_n=q^n$, $q<-1$. **1.16,** а) $\frac{1}{2}$;

б) $\frac{1}{3}$; в) $\frac{1}{k+1}$; г) $\frac{1}{2}$. **1.20,** в) 0; г) 0; д) $-\frac{1}{4}$; е) $\frac{1}{2}$; ж) 0;

з) 1; и) 1; к) $\frac{\sqrt{3}}{3}$. **1.21.** а) $\frac{1}{3}$; б) 1. **1.22,** б) 0; г) $\frac{1}{1-q}$.

1.24, б) $\max(a_1,\dots,a_k)$; в) 1; г) x $(1\le x\le 2)$, $\frac{x^2}{2}$ $(x>2)$.

1.25, б) 1; в) 4. **1.26,** а) $\frac{1}{2}$; б) $\frac{2}{3}$; в) $\frac{1}{1-x}$; г) 0; д) $\frac{1}{4}$; е) 1; ж) 0.

2.9, а) e^2; б) $e^{-\frac{3}{2}}$; в) e.

3.2. 2. **3.4,** б) $\alpha\in(-\frac{7}{3}, 3)$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=1$, $\alpha\in\{-\frac{7}{3}, 3\}$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=3$;

в) $\alpha>1$, $a_n\to 2$, $\alpha<1$, $a_n\to -1$; г) $\alpha\in\left[-\frac{1}{3}, 0\right]$, $a_n\to 0$, $\alpha\notin\left[-\frac{1}{3}, 0\right]$, $a_n\to 2$;

д) $\alpha\in\left(-\frac{7}{2}, 4\right)$, $a_n\to 3$, $\alpha\in\{-\frac{7}{2}, 4\}$, $a_n\to 4$; е) $a_n\to\sqrt{2}$; ж) $\alpha\in[-1, 1]$, $a_n\to 1$.

3.5, б) $\alpha\in(0,3]$, $a_n\to 3$, $\alpha>3$, $a_n\to\infty$. **3.6,** б) $\sqrt{a^2+b^2}$. **3.7,** а) сходяща $a_n\to 4$ за $\alpha\in(0,4]$ растяща, $\alpha>4$ намаляваща; б) сходяща, $a_n\to 2$; в) сходяща $a_n\to\frac{3+\sqrt{5}}{2}$; г) сходяща, разпада се на две монотонни подредици, $a_n\to\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

3.8. $\alpha\in\left(-3, -\frac{1}{2}\right)\cup(2, \infty)$, $a_n\to\infty$, $\alpha<-3$, $a_n\to-\infty$,

$\alpha\in\left(-\frac{1}{2}, 2\right)$, $a_n\to\frac{1}{3}$, $\alpha\in\{-\frac{1}{2}, 2\}$, $a_n\to 2$. **3.11.** $\frac{\mu a+b}{1+\mu}$.

4.3, а) 1; б) 1; в) e. **4.8,** а) $\frac{1}{e}$; б) $\frac{27}{4e}$. **4.11.** в) $\frac{2^p}{p+1}$. **4.12.** a. **4.15.** $4k-3$.

5.4, а) $\overline{\lim}\, a_n=2$, $\underline{\lim}\, a_n=0$; б) $\overline{\lim}\, a_n=\ln 2$, $\underline{\lim}\, a_n=-2\ln 2$;

в) $\overline{\lim}\, a_n=2$, $\underline{\lim}\, a_n=0$; г) $\overline{\lim}\, a_n=1$, $\underline{\lim}\, a_n=\frac{1}{2}$.

5.11. $\overline{\lim}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\infty$, $\underline{\lim}\frac{a_{n+1}}{a_n}=0$, $\overline{\lim}\sqrt[n]{a_n}=\sqrt{t}$, $\underline{\lim}\sqrt[n]{a_n}=\sqrt{s}$.

Глава 2. Непрекъснатост на функции

1.9, в) Ще използваме неравенството $|a|-|b|\leqq|a+b|\leqq|a|+|b|$.
Оценяваме знаменателя $|x^2-x-5|$ отдолу: $|x^2-x-5|$

$=|(x^2-1)-(x+1)-3|\geqq 3-|x-1||x+1|-|x+1|$
$\geqq 3-(|x|+1)|x+1|-|x+1|=3-|x+1|(|x|+2)$

Нека $|x+1|\leqq \frac{1}{2}$, т.е. $-\frac{3}{2}<x<-\frac{1}{2}$ и $|x|<\frac{3}{2}$. Тогава

$$|x^2-x-5|>3-\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}+2\right)=\frac{5}{4}.$$

Обърнете внимание — оценката отдолу трябва да бъде с положително число!

Сега да разгледаме $|f(x)-f(-1)|$ при $|x+1|<\frac{1}{2}$:

$$|f(x)-f(-1)|=\left|\frac{3x^2-x+1}{x^2-x-5}+\frac{5}{3}\right|=\frac{1}{3}\left|\frac{14x^2-8x-22}{x^2-x-5}\right|$$

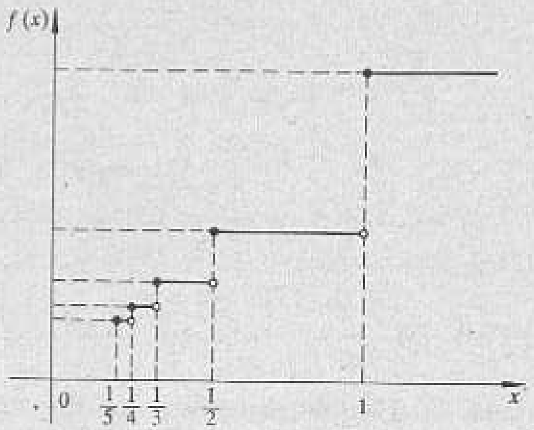
$$\leqq \frac{1}{3}\cdot\frac{4}{5}|x+1||14x-22|\leqq \frac{4}{15}|x+1|(14|x|+22)$$

$$\leqq \frac{4}{15}|x+1|\left(14\cdot\frac{3}{2}+22\right)\leqq 10|x+1|.$$

И така, нека ε е произволно положително число. Да му съпоставим числото $\delta=\min\left(\frac{1}{2},\frac{\varepsilon}{10}\right)$. От направените разсъждения следва, че за всяко x, удовлетворяващо неравенството $|x+1|<\delta$, е в сила $|f(x)-f(-1)|<\varepsilon$.

1.30. Непрекъсната в точката 0 и във всички положителни ирационални числа и прекъсната в останалите точки.

1.33. Решението е илюстрирано на фиг. 27:



Фиг. 27

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{n+1} & \text{при } \frac{1}{n+1}\leqq x<\frac{1}{n},\\ 1 & \text{при } x\geqq 1.\end{cases}$$

2.1. б) -11; г) $\frac{1}{8}$; д) 1; е) $-\frac{2}{5}$; ж) $3x^2$; к) $-\frac{1}{3}$.

2.2. б) $\frac{n(n-1)}{2}$; е) $\frac{n^2+n-2k}{2}$.

2.3. в) $\frac{2}{3}$; д) 0; и) $-\infty$.

2.4. д) $+\infty$; е) $-\infty$; ж) $+\infty$; з) $-\infty$.

2.5. б) $\frac{4}{3}$; г) $\frac{q}{p}$; д) $\frac{2}{3}$; ж) $\frac{12}{5}$; з) $-\frac{1}{12}$; и) $\frac{112}{27}$; к) $\frac{1}{\sqrt{2a}}$;

л) $\frac{1}{2}$; н) $-\frac{1}{8}$; о) $-\frac{n-1}{2n^2}$; п) $\frac{1}{16}$.

2.6. г) 0; е) 0; ж) 0; з) $\frac{1}{2}$; и) $-\frac{1}{2}$.

2.7. б) a; г) $\frac{n}{m}$.

2.8. б) 1; д) 2; е) -24.

2.9. б) $-\frac{1}{4}$; в) 0; ж) $\frac{3}{2}$; з) $\frac{3}{4}$.

2.10. а) $\frac{1}{2}$; б) 1; в) $\frac{1}{4\sqrt{2}}$; д) $-\sqrt{3}$; з) 0.

2.11. б) 3; в) 1; д) $\frac{1}{\sqrt{1-x_0^2}}$; е) $-\frac{1}{\sqrt{1-x_0^2}}$; и) $-\frac{1}{2}$; з) $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$.

2.17. д) $-\frac{a\ln a}{2}$; е) $\ln a-1$; ж) $a^a(\ln a-1)$; з) $\ln a$.

2.18. б) e^2; д) $\sqrt{e}$; е) $\sqrt{e^3}$; ж) e; з) $\frac{2}{\pi}$; и) e; к) $e^{\frac{\beta^2-\alpha^2}{2}}$ м) c^2.

2.19. в) $\sqrt{ab}$; г) $-\ln x$; ж) $\frac{\sin x}{x}$ при $x\neq 0$, 1 при $x=0$.

3.23. б) Упътване. Използвайте неравенството

$|x^3 - y^3| \leqq |x-y||x^2+xy+y^2| \leqq |x-y|.3c^2$, където $c = \max(|a|, |b|)$.

д) Използвайте неравенството

$$|\sin x^2 - \sin y^2| = 2\left|\sin\frac{x^2-y^2}{2}\right|\left|\cos\frac{x^2+y^2}{2}\right| \leqq |x^2-y^2| \leqq 6\,|x-y|.$$

е) Използвайте неравенството

$$|\sin\sqrt{x} - \sin\sqrt{y}| \leqq |\sqrt{x}-\sqrt{y}| \leqq \sqrt{|x-y|} \text{ при } x \geqq 0,\ y \geqq 0.$$

з) Нека $0 \leqq t \leqq 1$. Тогава неравенството $1 - \sqrt[n]{t} \leqq \sqrt[n]{1-t}$ е вярно за всяко естествено число n, тъй като е еквивалентно с вярното неравенство $1 \leqq (\sqrt[n]{t} + \sqrt[n]{(1-t)})^n = t+(1-t)+\binom{n}{1}\sqrt[n]{t^{n-1}(1-t)}+\ldots$ Нека сега $0 \leqq x<y$. Да положим t

$= \frac{x}{y}$. Получаваме $1-\sqrt[n]{\frac{x}{y}} \leqq \sqrt[n]{1-\frac{x}{y}}$ или $\sqrt[n]{y}-\sqrt[n]{x} \leqq \sqrt[n]{y-x}$.

Използвайте доказаното неравенство при $n=3$;

к) Равномерната непрекъснатост следва от $\lim\limits_{x\to\infty} e^{-x^2} = \lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x^2}=0$ и лемата, доказана в зад. 3.23, и).

л) Нека $x \geqq 1$ и $y \geqq 1$. От неравенството

$$\left|x\sin\frac{1}{x} - y\sin\frac{1}{y}\right| \leqq \left|x\sin\frac{1}{x} - x\sin\frac{1}{y}\right| + \left|x\sin\frac{1}{y} - y\sin\frac{1}{y}\right|$$

$$\leqq x\left|\sin\frac{1}{x} - \sin\frac{1}{y}\right| + |x-y| \leqq$$

$$x\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right| + |x-y| \leqq \frac{1}{y}|x-y| + |x-y| \leqq 2|x-y|$$

следва равномерната непрекъснатост на функцията $x\sin\frac{1}{x}$ в интервала $[1,\infty)$, а от $\lim x\sin\frac{1}{x}=0$ следва равномерната непрекъснатост на $x\sin\frac{1}{x}$ в $(0,1]$. Приложете лемата, доказана в зад. 3.23, и).

3.25, а) Не; **б)** да; **в)** да; **е)** не.

3.26, в) $\frac{4\delta}{2\delta+1}$; **г)** ∞; **е)** $\ln(1+\delta)$; **ж)** ∞.

3.27, а) Да; **б)** не; **в)** да; **г)** не; **е)** да; **ж)** не; **з)** не.

Глава 3. Производни

1.3. а) $1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}$; **б)** $1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}$;

в) $-\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}\right)$; **г)** $1-x+x^2-x^3$.

1.4, а) $\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}+\frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}$, $x>0$; **б)** $-\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x^3}-\frac{3}{x^4}$, $x\neq 0$;

в) $-\frac{1}{2x\sqrt{x}}-\frac{1}{3x^2\sqrt[3]{x}}-\frac{1}{4x\sqrt[4]{x}}$, $x>0$; **г)** $\frac{1}{x\ln 2}+\frac{1}{x}+\frac{1}{x\ln 10}$, $x>0$;

д) $\frac{\ln x}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{\ln 2}{2\sqrt{x}}+\frac{\sqrt{2}}{x}$, $x>0$; **е)** $\sqrt{2}\,x^{\sqrt{2}-1}$, $x>0$;

з) $e^{\frac{1}{x}}\left(\frac{-1}{x^2}\right) - e^{-x} - 2x\,e^{-x^2}$, $x\neq 0$;

и) $a^x\ln a + ax^{a-1} + x^x(\ln x+1)$, $x>0$;

л) $e^x\ln x + xe^x\ln x + e^x$, $x>0$;

м) $\frac{1}{x\ln x} + \cos(\sin x)\cos x + \frac{1}{\mathrm{ch}^2\,\mathrm{th}x}\frac{1}{\mathrm{ch}^2 x}$, $x>1$.

1.5, а) $3(x^2+1)^2\,2x$; **б)** $2\,\mathrm{arctg}x\,\frac{1}{1+x^2}$;

в) $4x\sin 4x^2$; **г)** $2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}$, $x\neq 0$;

д) $\frac{|x|}{x^2\sqrt{x^2-1}}$, $|x|>1$; **е)** $\frac{x^2}{2\sqrt{1+\sqrt[3]{1+x^3}}\sqrt[3]{(1+x^3)^2}}$, $x>-\sqrt[3]{2}$, $x\neq -1$;

ж) $\frac{1}{e^x-1}$, $x<0$; **з)** $\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}$, $x\neq 0$;

и) $\frac{1}{1+x^2}$, $x\neq 1$; **й)** $\frac{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d\end{vmatrix}}{(cx+d)^2}$, $x\neq -\frac{d}{c}$, ако $c\neq 0$.

1.6, б) $-\mathrm{tg}x$, $\cos x\neq 0$;

е) $\cos\cos\mathrm{tg}\,\mathrm{ctg}x(-\sin\mathrm{tg}\,\mathrm{ctg}x)\frac{1}{\cos^2\mathrm{ctg}x}\frac{-1}{\sin^2 x}$, $x\neq k\pi$, $\mathrm{ctg}x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$.

1.7, б) $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\left[\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x+1}\right]$, $x>0$ или $x<-1$;

в) $(1+x)^{\frac{1}{x}}\left[\frac{1}{x+x^2}-\frac{1}{x^2}\ln(1+x)\right]$, $x>-1$, $x\neq 0$;

д) $x^{\ln x}\,2\ln x\,\frac{1}{x}$, $x>0$; е) $x^{\sin x}\left(\cos x\,\ln x+\frac{\sin x}{x}\right)$, $x>0$;

з) $\frac{(x-3)^2\,(2x-1)}{(x+1)^3}\left(\frac{2}{x-3}+\frac{2}{2x-1}-\frac{3}{x+1}\right)$, $x\neq -1$;

ако сме логаритмували, трябва още $x\neq\frac{1}{2}$, $x\neq 3$; това допълнително ограничение отпада, ако диференцираме направо (и разкрием скобите в отговора);

и) $\sqrt[3]{1+x}\,\sqrt{2+x^2}\,(3+x^3)\left(\frac{1}{3(1+x)}+\frac{x}{2+x^2}+\frac{3x^2}{3+x^3}\right)$, $x\neq -1$,

като още $x\neq-\sqrt[3]{3}$, ако сме логаритмували.

1.8, а) $\frac{1}{\sqrt{2x-x^2}}$, $0<x<2$; б) $\sin^3 x$; в) $\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$, $-1<x<1$;

г) $\frac{2}{(\sin x-\cos x)^2}$, $x\neq\frac{\pi}{4}+k\pi$; д) $\frac{x^2+1}{x^4+1}$, $x\neq 0$; е) $4\cos 8x$, $8x\neq k\pi$;

ж) $\frac{-1}{4x^{\frac{3}{4}}}$, $x>0$, $x\neq 1$; з) $\frac{1}{2(1+x^2)}$; и) $\frac{1+x^4}{1+x^6}$, $x\neq\pm 1$;

й) $\frac{1+x^2}{1+x^2+x^4}$, $x\neq\pm 1$ к) $\operatorname{arctg} x$; л) $\arcsin x$, $-1<x<1$;

м) $2\operatorname{tg}^3 x$, $x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$; н) $\operatorname{tg}^4 x$, $x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$;

о) $\frac{\pi}{2\sqrt{1-x^2}\arccos^2 x}$, $-1<x<1$; п) $\cos\ln x$, $x>0$. р) $\frac{-2x}{(1+x^4)^{\frac{3}{2}}}$,

с) x^2e^x; т) $\frac{1}{x^3+1}$, $x>-1$; у) $\frac{1}{x^4+1}$, $x\neq\pm 1$;

ф) $\frac{1}{x}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$, $0<x<1$; х) $\frac{2x^2}{x^4-1}$, $-1<x<1$; ц) $(\arccos x)^2$, $-1<x<1$.

1.11. $\frac{d}{dA}f=e^{-kx}\sin(\omega x+\alpha)$, $\frac{d}{dk}f=-Axe^{-kx}\sin(\omega x+\alpha)$,

$\frac{d}{dx}f=-Ake^{-kx}\sin(\omega x+\alpha)+A\omega e^{-kx}\cos(\omega x+\alpha)$, $\frac{d}{d\omega}f=Axe^{-kx}\cos(\omega x+\alpha)$,

$\frac{d}{d\alpha}f=Ae^{-kx}\cos(\omega x+\alpha)$.

1.12. $\frac{mv'}{(1-\frac{v^2}{c^2})^{\frac{3}{2}}}=F$.

1.14, б) $\frac{\frac{v'}{v}\ln u-\frac{u'}{u}\ln v}{\ln^2 u}$; в) $\frac{u'}{n}-\frac{v'}{v}$; г) $\frac{v'u-u'v}{u^2+v^2}$; е) $u'(u)u'$

1.19, а) $\frac{nx^{n+1}-(n+1)x^n+1}{(x-1)^2}$, $x\neq 1$;

б) $\frac{n^2x^{n+2}-(2n^2+2n-1)x^{n+1}+(n+1)^2x^n-x-1}{(x-1)^3}$, $x\neq 1$.

1.20, а) $y'=\frac{1}{1+3y^2}$; в) $y'=\frac{1}{1+e^y}$.

2.1, а) $\frac{1}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}$; б) $\frac{3x+2x^3}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}$; в) $\frac{x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$, $-1<x<1$;

г) $u^v\left[\left(v'\ln u+\frac{v}{u}u'\right)^2+v''\ln u+2\frac{u'v'}{u}-v\frac{u'^2}{u^2}+\frac{v}{u}u''\right]$, $u>0$;

е) $\frac{-6y}{(1+3y^2)^3}$ (зад.1.20,а)), $\frac{-e^y}{(1+e^y)^3}$, (зад.1.20,г)), $\frac{-x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}$ (зад.1.20,г)).

2.2, б) $6u'u''+2uu'''$; в) $\frac{u^2u'''-3uu'u''+2u'^3}{u^3}$; г) $f'''(u)u'^3+3f''(u)u'u''+f'(u)u'''$;

д) $8x^3f'''(x^2)+12xf''(x^2)$; е) $e^{3x}f'''(e^x)+3e^{2x}f''(e^x)+e^xf'(e^x)$.

2.4, а) $\frac{(-1)^n n!}{(x+a)^{n+1}}$, $x\neq -a$; б) $(-1)^n\frac{m(m+1)\ldots(m+n-1)}{(x+a)^{n+m}}$, $x\neq -a$;

в) $a^n\frac{(-1)^n n!}{(ax+b)^{n+1}}$, $a\neq 0$, $x\neq-\frac{b}{a}$; г) $\frac{(-1)^n n!}{2a}\left(\frac{1}{(x-a)^{n+1}}-\frac{1}{(x+a)^{n+1}}\right)$, $x\neq\pm a$.

2.5, а) $\frac{(-1)^{n-1}(2n-3)!!}{2^nx^n}\sqrt{x}$, $x>0$; б) $\frac{(-1)^n(2n-1)!!}{2^nx^{n+1}}\sqrt{x}$, $x>0$;

г) $(-1)^n n!\left[\frac{1}{(x-2)^{n+1}}-\frac{1}{(x-1)^{n+1}}\right]$, $x\neq 1$, $x\neq 2$;

д) $\frac{(-1)^n n!}{4}\left[\frac{1}{(x-1)^{n+1}} - \frac{1}{(x+1)^{n+1}} - \frac{2(n+1)}{(x+1)^{n+2}}\right]$, $x \neq \pm 1$;

е) $\frac{3.2^{n-1}(-1)^n n!}{(2x+1)^{n+1}}$, $x \neq -\frac{1}{2}$; ж) $\frac{1}{a}\,\frac{(-1)^n n!}{(a^2+x^2)^{\frac{n+1}{2}}}\sin\left[(n+1)\operatorname{arcctg}\frac{x}{a}\right]$;

з) $\frac{1}{a}\,\frac{(-1)^n n!}{(x^2+px+q)^{\frac{n+1}{2}}}\sin\left[(n+1)\operatorname{arcctg}\frac{x}{a}\right]$ при $a = \frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}$;

и) $\frac{(-1)^n n!}{4(x-1)^{n+1}} - \frac{(-1)^n n!}{4(x+1)^{n+1}} - \frac{(-1)^n n!}{2(1+x^2)^{\frac{n+1}{2}}}\sin\left[(n+1)\operatorname{arcctg}x\right]$, $x \neq \pm 1$;

й) $\frac{(-1)^n (n+1)!}{2(1+x^2)^{\frac{n+2}{2}}}\sin\left[(n+2)\operatorname{arcctg}x\right]$; к) $\frac{(2n-3)!!}{2^n(1-x)^n}\sqrt{1-x}\left(\frac{2(2n-1)}{1-x}+1\right)$, $x<1$;

л) $\frac{(-1)^{n-1}a^n(2n-3)!!}{2^n(ax+b)^n}\sqrt{ax+b}$, $ax+b>0$; м) $-2^{n-1}\cos\left(2x+n\frac{\pi}{2}\right)$;

н) $\frac{3}{4}\sin\left(x+n\frac{\pi}{2}\right) - \frac{3^n}{4}\sin\left(3x+n\frac{\pi}{2}\right)$; о) $4^{n-1}\cos\left(4x+n\frac{\pi}{2}\right)$;

п) $\frac{1}{2}\cos\left(x+n\frac{\pi}{2}\right) - \frac{5^n}{2}\cos\left(5x+n\frac{\pi}{2}\right)$; р) $\frac{(-1)^n (n-2)!}{x^{n-1}}$, $n \geqq 2$, $x>0$.

2.8, б) $a^{n-1}e^{ax}(a^2x^2+2nax+n^2-n)$. в) $x\sin\left(x+n\frac{\pi}{2}\right)+n\sin\left(x+(n-1)\frac{\pi}{2}\right)$;

г) $\left[x^2-n(n-1)\right]\cos\left(x+n\frac{\pi}{2}\right)+2nx\cos\left(x+(n-1)\frac{\pi}{2}\right)$;

д) $\frac{(-1)^{n-2}\,1.4\ldots(3n-5)}{3^n(1+x)^n\sqrt[3]{1+x}}(2x+3n)$, $x \neq -1$;

е) $e^x\left[\frac{1}{x} - \frac{n}{x^2} + \binom{n}{2}\frac{2}{x^3} - \binom{n}{3}\frac{3!}{x^4} + \ldots + \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}\right]$, $x \neq 0$;

ж) $\frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}}\sqrt{1-x^2}\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}(-1)^k\frac{(2k-1)!!\,(2n-2k-3)!!}{(1-x)^{k+1}(1+x)^{n-k}}$, $-1<x<1$.

2.9, б) $y^{(2k)}(0)=0$, $y^{(2k+1)}(0) = [(2k-1)!!]^2$ за $k \geqq 1$, $y'(0)=1$.

3.5, б) $\operatorname{arctg}3 \approx 71^\circ 33' 54''$; в) $\operatorname{arctg} 2\sqrt{2} \approx 70^\circ 31' 44''$.

3.8, в) 1,213; б) −1,532, −0,347, 1,879; в) 0,322; г) −0,200; д) 1,310;

е) 4,493; ж) 0,666.

3.9, б) 0; в) 5; д) $-\frac{1}{3}$; е) $e^{\frac{2}{\sin 2a}}$.

4.2, в) $\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$, $-1<x<1$; г) $(x+1)e^x dx$; д) $\frac{vdu-udv}{u^2+v^2}$;

е) $\frac{udu+vdv}{\sqrt{u^2+v^2}}$; ж) $\frac{udu+vdv}{u^2+v^2}$; и) $vwdu+uwdv+uvdw$;

й) $u^v(\ln u dv+\frac{v}{u}du)$ (формула на Лайбниц – Бернули).

4.3, м) $d\left(\frac{1}{2}\arcsin x^2\right)$; н) $d\left[x\operatorname{arctg}x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right]$.

4.7, б) $\frac{3}{(1{,}002)^3} \approx 2{,}97$. **4.12,** б) $e^u\left((du)^2+d^2u\right)$.

5.1, б) $\sqrt[3]{4}$ и $1+\sqrt[3]{9}$; в) 0 и 2; д) $\frac{\pi}{2}+\ln 2-1$ и $1-\frac{\pi}{2}-\ln 2$,

з) $y_{max}=-2$, няма най-малка стойност;

и) $y_{max}=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\ln 2$, няма най-малка стойност;

й) 1 и $\frac{3}{5}$, к) 0 и $\sqrt[3]{9}$.

5.2. $\alpha=\sqrt{\frac{8}{3}}\,\pi$.

7.2. $\operatorname{arctg}\frac{x-1}{x+1} = \begin{cases}\operatorname{arctg}x - \frac{\pi}{4}, & x>-1,\\ \operatorname{arctg}x + \frac{3\pi}{4}, & x<-1,\end{cases}$

$\operatorname{arctg}\frac{1+x}{1-x} = \begin{cases}\operatorname{arctg}x - \frac{3\pi}{4}, & x>1,\\ \operatorname{arctg}x + \frac{\pi}{4}, & x<1,\end{cases}$

и като 7.1, в).

7.4. $\operatorname{arctg}\frac{2x}{1+x^2} = \begin{cases}\pi-2\operatorname{arctg}x, & x \geqq 1,\\ 2\operatorname{arctg}x, & -1 \leqq x \leqq 1,\\ -\pi-2\operatorname{arctg}x, & x \leqq -1.\end{cases}$

7.5, д) $y=Ce^{-ax}$; ж) $y=Ae^{-x}+Be^{-2x}$.

7.7, а) Ce^{kx}; б) $\dfrac{k}{l(1+Ce^{-kx})}$.

7.11. $V = 2\pi^2ab^2$, $S=4\pi^2ab$.

7.12, в) $\left(\dfrac{x^2}{2}+C\right)e^{-x^2}$ и $\left(\dfrac{x^2}{2}+C\right)^2e^{-2x^2}$.

8.1, а) $y(0)=0$ — лок. мин., $y(\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}})=\dfrac{1}{4}$ – макс.; в) $y\left(\dfrac{1}{2}\right)=2^{-6}$ – макс.;

г) $y(\sqrt{2}-1)=\dfrac{1}{2}(1+\sqrt{2})$ — макс., $y(-1-\sqrt{2})=\dfrac{1}{2}(1-\sqrt{2})$ — мин.;

д) $y(\dfrac{1}{2})=4^{\frac{1}{3}}$ — макс.;

е) $y(3^{\frac{1}{2}})=-2.3^{-\frac{3}{2}}$ — лок. мин., $y(-3^{\frac{1}{2}})=2.3^{-\frac{3}{2}}$ — лок. макс.;

з) $y(0)=y(-1)=0$ — мин., $y(-\dfrac{2}{3})=\dfrac{2}{3\sqrt{3}}$ — лок. макс.;

и) $y(1)=1$ — мин.;

й) $y(\dfrac{4}{3})=-\dfrac{\sqrt[3]{4}}{3}$ — лок. мин., $y(2)=0$ — лок. макс.;

к) $y(0)=0$ — мин., $y(2)=4e^{-2}$ — лок. макс.;

л) $y(0)=0$ — мин., $y(\pm1)=\dfrac{1}{e}$ — макс.;

м) $y((\dfrac{2}{3})^{\frac{1}{5}})=(\dfrac{2}{3})^{\frac{1}{5}}+(\dfrac{3}{2})^{\frac{2}{5}}$ — лок. мин.;

н) $y(-\dfrac{1}{\sqrt{3}})=e^{\frac{1}{3\sqrt{3}}}$ — лок. макс., $y(\dfrac{1}{\sqrt{3}})=e^{\frac{2}{3\sqrt{3}}}$ — лок. мин.;

о) $y(1)=\dfrac{\pi}{2}$ — макс., $y(-1)=-\dfrac{\pi}{2}$ — мин.

п) при нечетно n $y(0)=1$ — макс., при четно n няма лок. екстр;
р) $y(0)=2$ — мин.

8.2, а) 1; б) $\dfrac{1}{e}$; в) $\dfrac{1}{e}$; г) 2; д) 1; ж) $\dfrac{1}{6}\ln\dfrac{4}{3e}$.

8.4, а) При $x=0$ — макс., няма най-малка стойност;

б) при $x=0$ — мин., при $x=\pm\dfrac{1}{\sqrt[4]{45}}$ — макс.;

в) при $x=0$ — мин., при $x=\pm\dfrac{1}{\sqrt[6]{56}}$ — макс.

8.5. Реалните корени на уравнението са: три различни при $\Delta<0$, един прост при $\Delta>0$, един трикратен, ако $p=q=0$, един прост и един двукратен, ако $\Delta=0$, но $(p,q)\neq(0,0)$.

9.5, в) $a=e$.

9.10, а) $a\geqq 0$; б) $a=0$; в) $-\dfrac{1}{3}\leqq a\leqq\dfrac{2}{3}$; г) $a\geqq\dfrac{5}{4}$.

11.1, а) 2; в) $-\dfrac{1}{3}$; г) $\dfrac{2}{3}$; д) $\dfrac{1}{2}$; е) $-\dfrac{1}{3}$; ж) 0; и) -2; й) $\dfrac{2}{3}$;

к) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{e}}$; л) $\dfrac{1}{e}$; н) $\dfrac{1}{e}$; о) 0; п) $\sqrt{e}$; р) e^{a}; т) $-\dfrac{1}{4}$; у) $e^{-\frac{1}{2}}$.

11.2, б) 0; в) 0; г) 0; д) 1; е) 1; ж) 1; з) 1; и) 1; й) 1;

к) $e^{-\frac{2}{\pi}}$; л) 0; н) a; о) 1; п) 1; р) -1; с) $\sqrt{2}$.

11.3, а) 0; б) 1; в) ∞; г) ∞; д) 0.

11.4, а) $\sqrt{ab}$; б) $\max(a,b)$; в) $\min(a,b)$.

11.5, а) 0; б) 0; в) $\dfrac{1}{2}$; г) $\dfrac{1}{2}$.

11.6. $p=0$, $p=2$, $p\geqq 4$.

12.2. $\dfrac{\pi^2}{8}$. Най-малка стойност не се достига.

12.3, **б)** x^2; **в)** $\frac{x}{e}$; **г)** $-\frac{x^5}{30}$; **д)** $-\frac{x}{3}$; **е)** $-\frac{x^3}{45}$; **з)** $\frac{x^7}{30}$.

12,6, **б)** $A=-\frac{1}{15}$, $B=-\frac{2}{5}$; **в)** $A=-\frac{2}{5}$, $B=-\frac{1}{15}$;

г) $A=\frac{1}{2}$, $B=\frac{1}{12}$, $C=-\frac{1}{2}$, $D=-\frac{1}{12}$.

12.7, **а)** $\operatorname{sh}x = x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}$ и т.н., $\operatorname{ch}x = 1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}$ и т.н.;

в) $\frac{1}{x^2-3x+2} = \left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(1-\frac{1}{2^2}\right)x+\left(1-\frac{1}{2^3}\right)x^2$ и т.н.;

г) $y=x-x^3+o(x^4)$ $(x\to 0)$; **д)** 56 320; **е)** $\left(\ln 10+\frac{1}{\ln 10}\right)x$.

12.11, **б)** При $h\to 0$: $\frac{f(x+h)-2f(x)+f(x-h)}{h^2} = f''(x)+\frac{h^2}{24}f^{IV}(x)+o(h^2)$,

$\frac{f(x+2h)-2f(x+h)+f(x)}{h^2} = f''(x)+hf'''(x)+o(h)$.

12.13, **а)** $A=-3$, $B=4$, $C=-1$. **б)** $A=2$, $B=-5$, $C=4$, $D=-1$.

13.1, **в)** — **е)**, **з)** — **н)**, **п)** на фиг. 28.

13.2, **а)** — **п)** на фиг. 29. **13.3.** 11 скици.

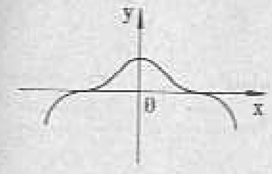
13.4, **б)** — **ж)**, **и)** — **н)**, **п)** на фиг. 30; **р)** — **ц)** на фиг. 31.

13.5, **а)** — **д)** на фиг. 32.

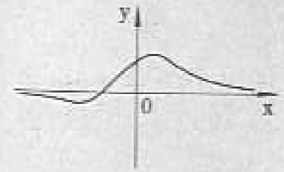
13.6, **а)** — **г)**, **е)** — **з)**, **й)** — **л)**, **н)**, **о)** на фиг. 33.

13.10. На фиг. 34. **14.1,** **б)** — **н)** на фиг. 35.

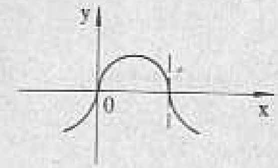
14.3, **а)** — **к)**, **м)**, **н)** на фиг. 36.



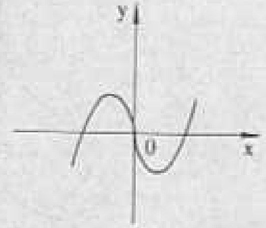
зад. 13.1, в



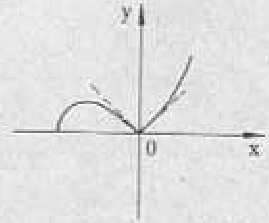
зад. 13.1, г



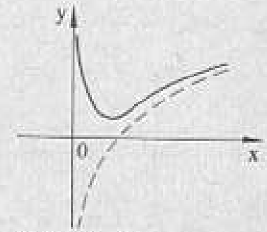
зад. 13.1, д



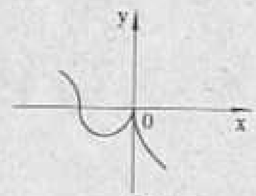
зад. 13.1, е



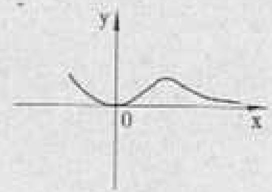
зад. 13.1, з



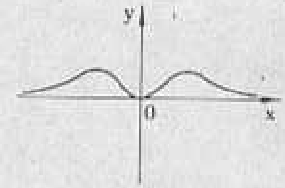
зад. 13.1, и



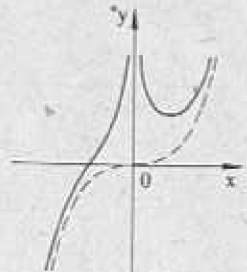
зад. 13.1, й



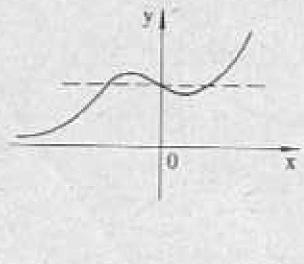
зад. 13.1, к



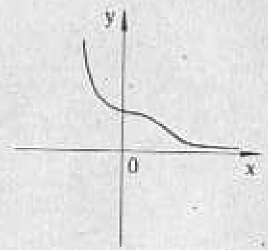
зад. 13.1, л



зад. 13.1, м

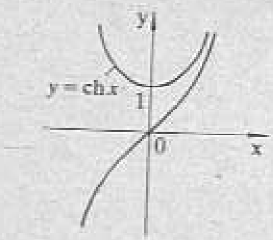


зад. 13.1, н

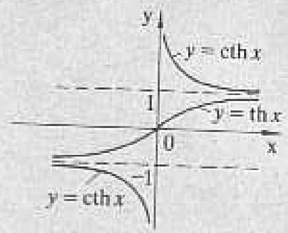


зад. 13.1, п
(n–четно)

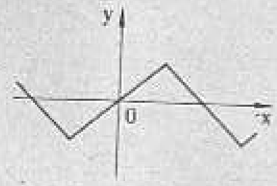
Фиг. 28



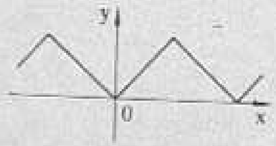
зад. 13.2, *а*, *б*



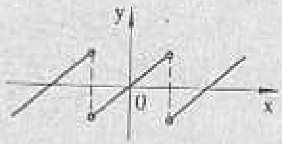
зад. 13.2, *в*, *г*



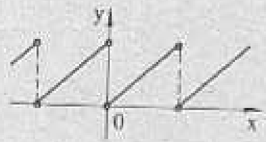
зад. 13.2, *д*



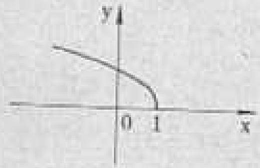
зад. 13.2, *е*



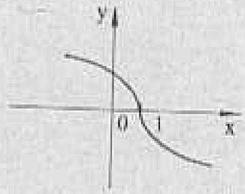
зад. 13.2, *ж*



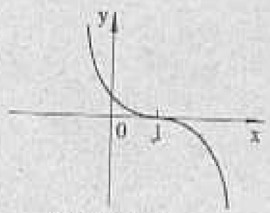
зад. 13.2, *з*



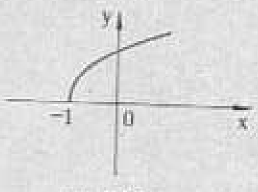
зад. 13.2, *и*



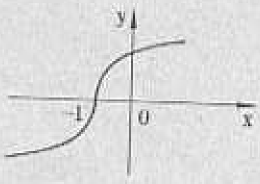
зад. 13.2, *й*



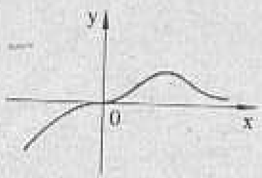
зад. 13.2, *к*



зад. 13.2, *л*

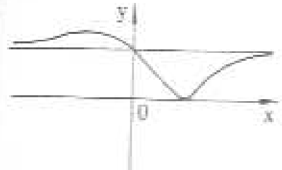


зад. 13.2, *м*

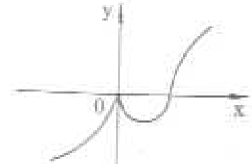


зад. 13.2, *н* $(n=3)$

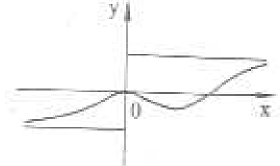
Фиг. 29



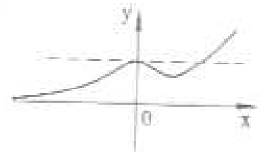
зад. 13.4, *б*



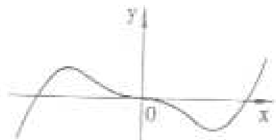
зад. 13.4, *в*



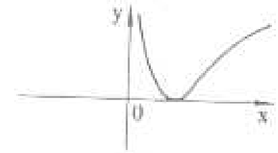
зад. 13.4, *г*



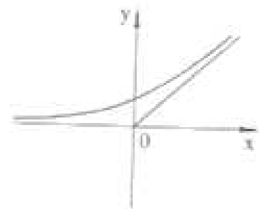
зад. 13.4, *д*



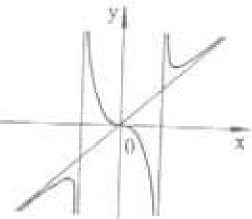
зад. 13.4, *е*



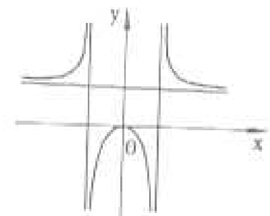
зад. 13.4, *ж*



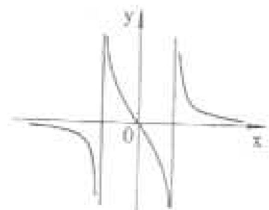
зад. 13.4, *и*



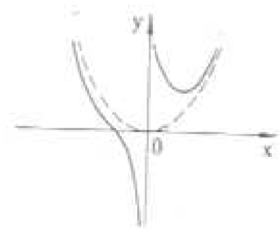
зад. 13.4, *й*



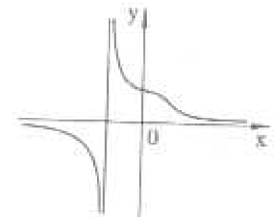
зад. 13.4, *к*



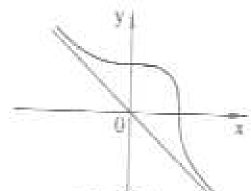
зад. 13.4, *л*



зад. 13.4, *м*

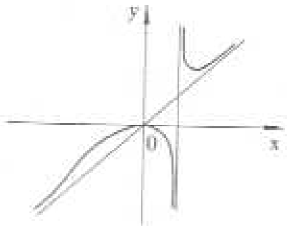


зад. 13.4, *н*

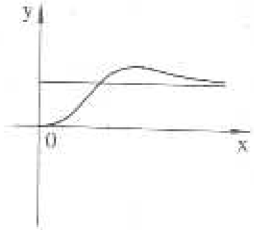


зад. 13.4, *п*

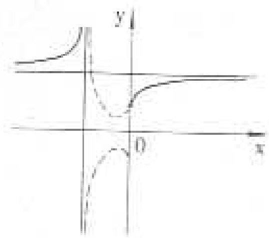
Фиг. 30



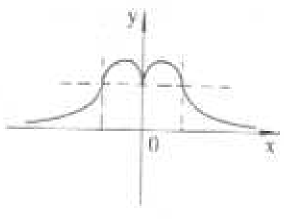
зад. 13.4, *р*



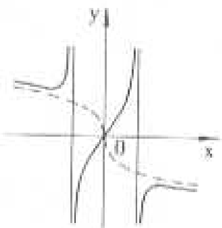
зад. 13.4, *с*



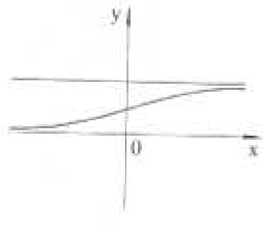
зад. 13.4, *у*



зад. 13.4, *ф*

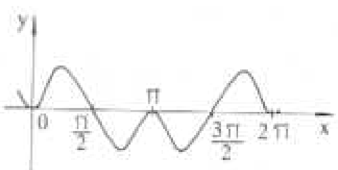


зад. 13.4, *х*

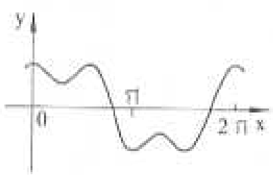


зад. 13.4, *ц*

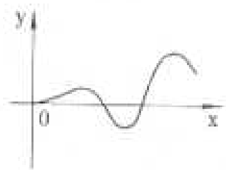
Фиг. 31



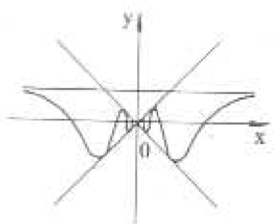
зад. 13.5, *а*



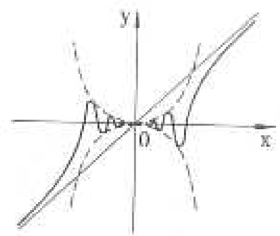
зад. 13.5, *б*



зад. 13.5, *в*

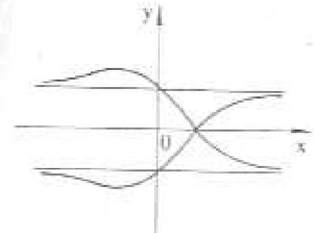


зад. 13.5, *г*

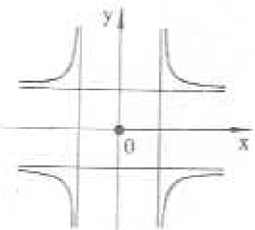


зад. 13.5, *д*

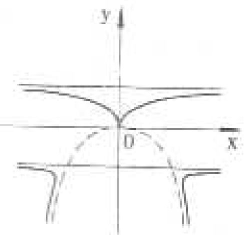
Фиг. 32



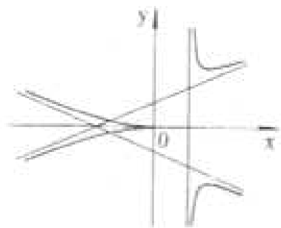
зад. 13.6, *а*



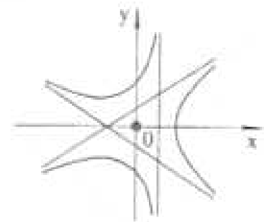
зад. 13.6, *б*



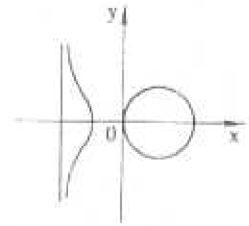
зад. 13.6, *в*



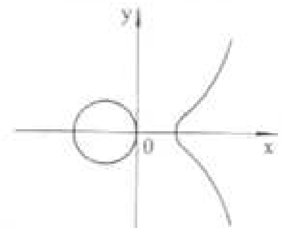
зад. 13.6, *г*



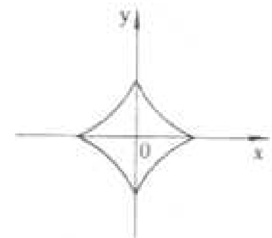
зад. 13.6, *е*



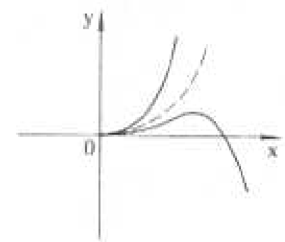
зад. 13.6, *ж*



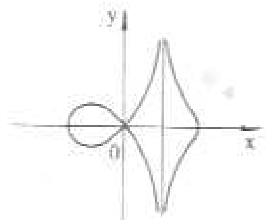
зад. 13.6, *з*



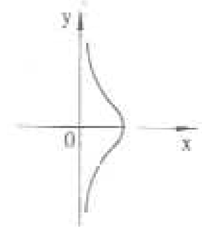
зад. 13.6, *й*



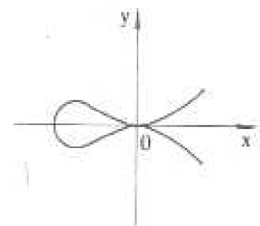
зад. 13.6, *к*



зад. 13.6, *л*

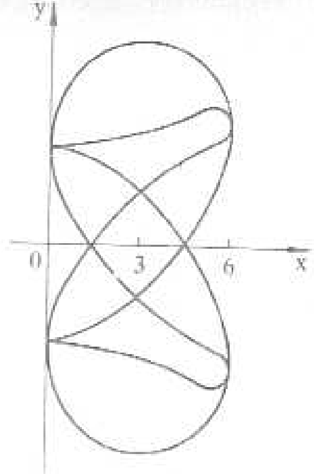


зад. 13.6, *н*



зад. 13.6, *о*

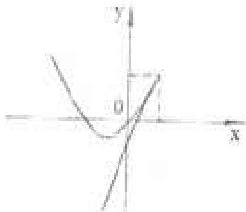
Фиг. 33



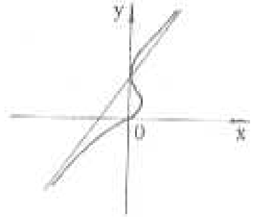
зад. 13.10

Фиг. 34

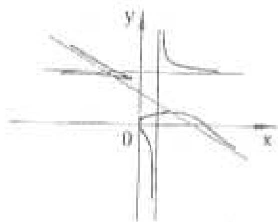
Фиг. 35



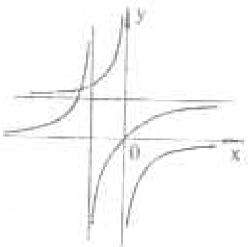
зад. 14.1, б



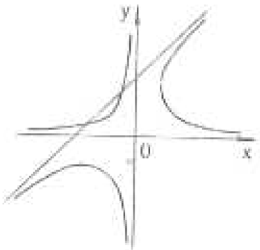
зад. 14.1, в



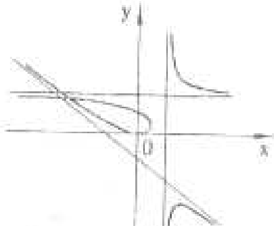
зад. 14.1, г



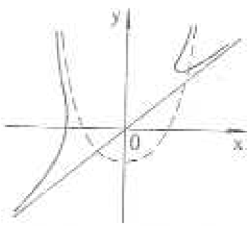
зад. 14.1, д

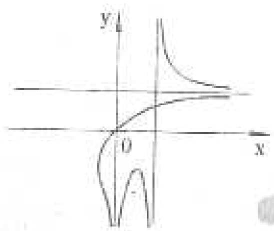


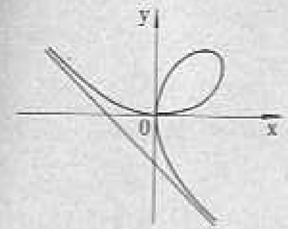
зад. 14.1, е



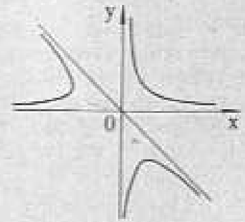
зад. 14.1, ж



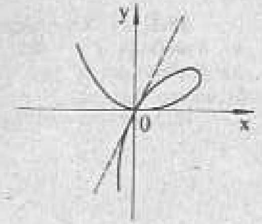




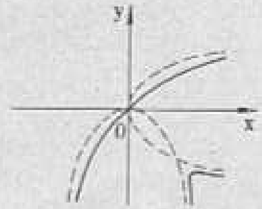
зад. 14.3, а



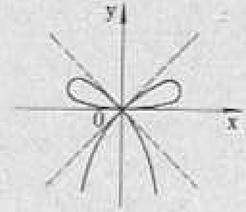
зад. 14.3, б



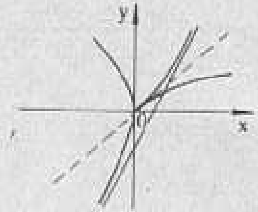
зад. 14.3, в



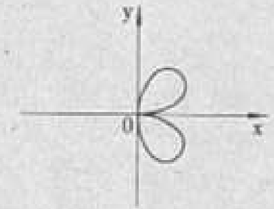
зад. 14.3, г



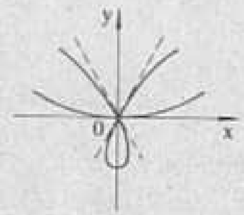
зад. 14.3, д



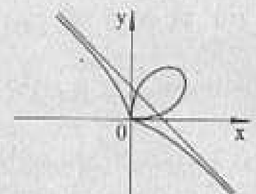
зад. 14.3, е



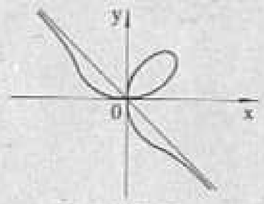
зад. 14.3, ж



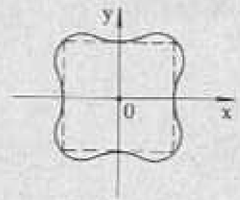
зад. 14.3, з



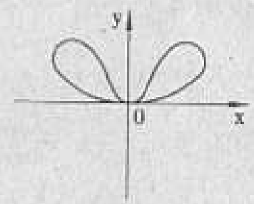
зад. 14.3, и



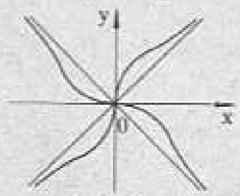
зад. 14.3, й



зад. 14.3, к



зад. 14.3, м

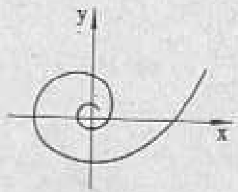


зад. 14.3, н

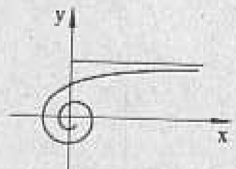
Фиг. 36

15.1, а) Хипербола $3x^2-y^2-4x+1=0$.
в) парабола $y^2=1-2x$; **г)** права $x\sin\alpha+y\cos\alpha=1$;
д) окръжност $x^2+y^2=x$; **е)** елипса $3x^2+4y^2+2x-1=0$.
б) както зад. 15.3, и); **в), г), е) ж)** на фиг. 39.

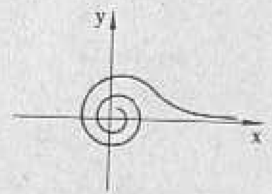
15.2, б) – г) на фиг. 37. **15.3, б), г), д), б) – й)** на фиг. 38. **15.4, а)** на фиг. 39;



зад. 15.2, *б*



зад. 15.2, *в*



зад. 15.2, *г*

Фиг. 37

16.1, б) $|R| \leqq \frac{|x|^9}{9!}$; **в)** $|R| \leqq \frac{x^8}{8!}$;

г) $0 < R < \frac{x^5}{5}$ при $x > 0$, $|R| < \frac{|x|^5}{5\,(1-|x|)^5}$ при $-1 < x < 0$;

д) $\frac{-5x^4}{128} < R < 0$ при $x > 0$, $|R| < \frac{5x^4}{128\,(1-|x|)^{\frac{7}{2}}}$ при $-1 < x < 0$;

е) $|R| \leqq \frac{|x|^5}{1-3x^2}\left(\frac{2}{15}+x^2+x^4\right)$ при $|x| \leqq \frac{1}{2}$.

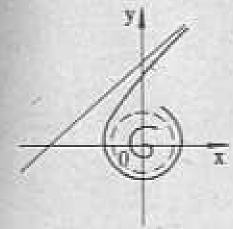
16.2, в) 2π, π; **г)** $e = 2{,}7183$.

17.2, а) $y\,(0)=0$, $y\left(\frac{2\pi}{3}\right)=y\left(\frac{4\pi}{3}\right)=-1$ – лок. мин., $y(\pi)=0$,

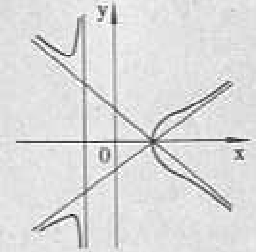
$y\left(\frac{\pi}{3}\right)=y\left(\frac{5\pi}{3}\right)=1$ – лок. макс.; **б)** $y\left(\frac{1}{2}\ln\frac{\beta}{\alpha}\right)=2\sqrt{\alpha\beta}$ – мин.;

в) При $x=0$, π – лок. макс., при $x=\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$ – лок. мин. и т. н. – по периодичност); **г)** при $x=\frac{\pi}{2}$ – лок. макс., при $x=\frac{3\pi}{2}$ – лок. мин. и т. н.;

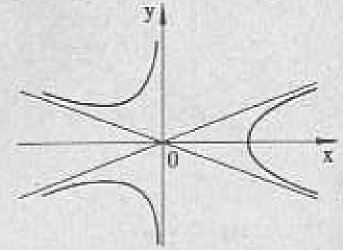
д) $y\,(1)=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\ln 2$ — макс.;



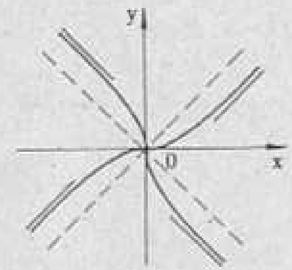
зад. 15.3, *б*



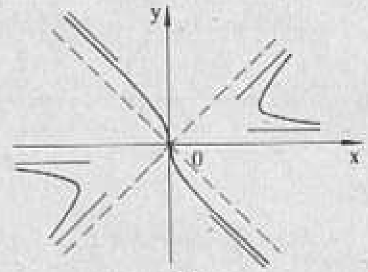
зад. 15.3, *г*



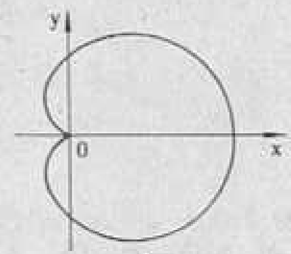
зад. 15.3, *д*



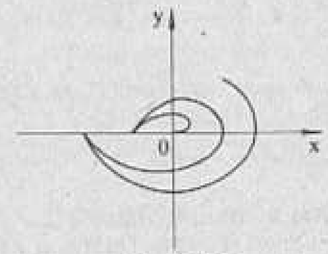
зад. 15.3, *ж*



зад. 15.3, *з*



зад. 15.3, *и*



зад. 15.3, *й*

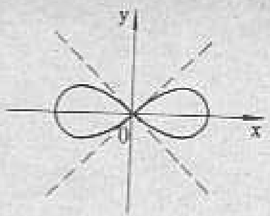
Фиг. 38

е) При $x=\frac{\pi}{3}$ – лок. макс., при $x=\frac{5\pi}{3}$ — лок. мин.;

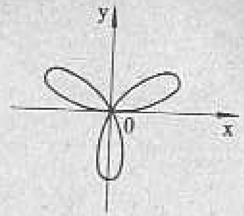
з) $y\left(\frac{3}{4}\right)=-\frac{3^3}{4^4}$ — мин.;

и) $y\,(1)=0$ — мин., $y\,(e^2)=\frac{4}{e^2}$ — лок. макс.;

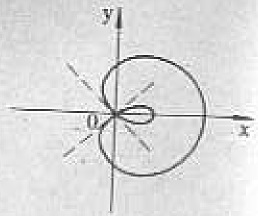
й) при $x=0, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}$ — лок. макс.,



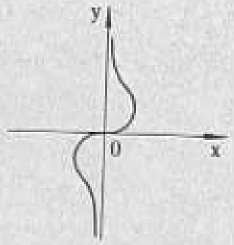
зад. 15.4, *а*



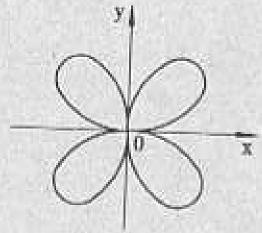
зад. 15.4, *в*



зад. 15.4, *г*



зад. 15.4, *е*



зад. 15.4, *ж*

Фиг. 39

при $x=\frac{\pi}{4}, \pi, \frac{3\pi}{2}$ — лок. мин., и т. н.;

к) при $x=0$ няма лок. екстр.; **л)** $y\left(\frac{3}{4}\right)=-\frac{3}{4\sqrt[3]{4}}$ — мин.

17.4. $x^4-6x^2-8x+25$.

18.1. **а)** 0,60701; **б)** − 2,26180, — 0,33988, 2,60168; **в)** −0,04758, 4,04758; **г)** −0,50773, 0,55203, 2,34350, 7,61219; **д)** 0,69969; **е)** −0,21781; **ж)** 0,47652; **з)** 1,06538.

18.2. $x_1=0$, $x_{2,3}=\pm 2{,}78590$, $x_{4,5}=\pm 7{,}49775$, $x_{6,7}=\pm 7{,}95732$.

18.3. 0,97456; 0,87076; 0,70293; 0,50000; 0,29708; 0,12923; 0,02545.

18.4. $x_1=-1{,}9624901$, $x_2=1{,}5378905$, $x_3=1{,}1080166$. Разлагането е $(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x^2-0{,}6092132x+1{,}0766801)(x^2+1{,}2926302x+1{,}6664238)$.

18.5. **а)** $x=0{,}7390850$, т.е. $x=42°20'47''$; **б)** $108°36'14''$; **в)** $66°46'54''$; **г)** $x_1=180°+77°27'12''$, $x_2=2.180°+82°37'28''$, $x_3=3.180°+84°45'38''$, $x_4=4.180°+85°56'01''$, $x_5=5.180°+86°40'36''$, $x_6=6.180°+87°11'23''$, $x_7=7.180°+87°33'55''$, $x_8=8.180°+87°51'09''$, $x_9=9.180°+88°04'44''$.

18.6. **а)** $132°20'47''$; **б)** $149°16'27''$; **в)** $138°11'53''$; **г)** $84°53'39''$.

18.7. ln 2 = 0,69314 71805 59945 30941 72321,
ln 3 = 1,09861 22886 68109 69139 52452,
ln 4 = 1,38629 43611 19890 61883 44642,
ln 5 = 1,60943 79124 34100 37460 07593,
ln 6 = 1,79175 94692 28055 00081 24774,
ln 7 = 1,94591 01490 55313 30510 53527,
ln 8 = 2,07944 15416 79835 92825 16964,
ln 9 = 2,19722 45773 36219 38279 04905,
ln 10 = 2,30258 50929 94045 68401 79915.

18.9. $e^{-3/4}=0{,}472367$, $\frac{1}{30}=0{,}033333$.

18.11. **а)** 0,577; **б)** 3,14159.

Глава 4. Неопределени интеграли

1.9. $a_0\frac{x^{n+1}}{n+1}+a_1\frac{x^n}{n}+\ldots+a_{n-1}\frac{x^2}{2}+a_nx$.

1.10. $\frac{x^2}{2}+\frac{3}{2}x-\frac{3}{2}x^{-\frac{1}{2}}-\frac{1}{16}x^{-2}+C$.

1.11. $\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{3}-x^2+C$. **1.12.** $\frac{8}{15}x^{\frac{15}{8}}+C$. **1.13.** $\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}-2x^{\frac{3}{2}}+8x^{\frac{1}{2}}+C$.

1.14. $\frac{2^x}{\ln 2}+2\sqrt{x}+C$. **1.15.** $-x^{-1}-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C$

1.16. $\frac{1}{2}(x-\sin x)+C$. **1.17.** $\operatorname{tg}x-x+C$.

1.18. $x+\frac{8}{3}x^{\frac{3}{2}}+3x^2+\frac{8}{5}x^{\frac{5}{2}}+\frac{x^3}{3}+C$.

1.19. $\frac{x^3}{3}+x+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C$. **1.20.** $x^3+\operatorname{arctg}x+C$. **1.21.** $-\operatorname{ctg}x-\operatorname{tg}x+C$.

1.22. $\operatorname{tg}x-\operatorname{ctg}x+C$. **1.23.** $\sqrt{2}\sin x+C$.

1.24. $\frac{4}{10^x\ln 10}-\sqrt{2}\arcsin\sqrt{2}x+C$.

2.36. $\frac{1}{a}\sin ax+C$. **2.37.** $-\frac{1}{2}e^{-2x}+C$. **2.38.** $\ln\left|\frac{x-3}{x-2}\right|+C$.

2.39. $-\frac{1}{2}(1+x^2)^{-1}+C$. **2.40.** $-\frac{1}{2}(1+x)^{-2}+\frac{1}{3}(1+x)^{-3}+C$.

2.41. $\frac{1}{6}(x^4+1)^{\frac{3}{2}}+C$. **2.42.** $-\frac{2}{3}(1-x)^{\frac{3}{2}}+\frac{2}{5}(1-x)^{\frac{5}{2}}+C$.

2.43. $\frac{1}{2}x - \frac{1}{4a}\sin 2ax + C.$

2.44. $\frac{1}{2(a+b)}\sin(a+b)\,x + \frac{1}{2(a-b)}\sin(a-b)x + C.$

2.45. $\frac{1}{2(a-b)}\sin(a-b)\,x - \frac{1}{2(a+b)}\sin(a+b)x + C.$

2.46. $-\frac{1}{2}e^{-x^2} + C.$ **2.47.** $\ln|\ln x| + C.$ **2.48.** $\ln|\ln|\ln x|| + C.$

2.49. $2\operatorname{arctg}\sqrt{x} + C.$ **2.50.** $\frac{1}{2}\ln(e^{2x} + \sqrt{e^{4x}+1}) + C.$ **2.51.** $\frac{1}{5}\sin^5 x + C.$

2.52. $\ln(1+\sin x) + C.$ **2.53.** $-\sin\frac{1}{x} + C.$ **2.54.** $\ln|\sin x| + C.$

2.55. $-2\cos\sqrt{x} + C.$ **2.56.** $\frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x + \operatorname{tg}x + C.$ **2.57.** $-\operatorname{cotg}x - \frac{1}{3}\operatorname{cotg}^3 x + C.$

2.58. $\ln\left|\operatorname{tg}\frac{\sqrt{x}}{2}\right| + C.$ **2.59.** $\frac{3}{4}\sin^{\frac{4}{3}}x - \frac{3}{10}\sin^{\frac{10}{3}}x + C.$ **2.60.** $\frac{5}{6}\operatorname{tg}^{\frac{6}{5}}x + C.$

2.61. $\frac{1}{16}\sqrt{25\sin^2 x + 9\cos^2 x} + C.$ **2.62.** $-\ln(1+\cos x + \sqrt{2+2\cos x+\cos^2 x}) + C.$

2.63. $-\ln|\arccos x| + C.$ **2.64.** $\frac{2}{3}\arcsin^{\frac{3}{2}}x + c.$ **2.65.** $\frac{1}{4}\operatorname{arctg}^4 x + C.$

2.66. $-\frac{1}{2}\ln^2\arccos x + C.$ **2.67.** $x(1+x^n)^{-\frac{1}{n}} + C.$

2.68. $\ln\left(x + \frac{1}{2} + \sqrt{x^2+x+1}\right) + C.$

2.69. Упътване. $I = \int\frac{dx}{ax^2+bx+c} = \frac{1}{a}\int\frac{dx}{\left(k+\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac-b^2}{4a^2}}$. Тогава

1) ако $b^2-4ac<0$, то $I = \frac{2}{\sqrt{4ac-b^2}}\operatorname{arctg}\frac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}} + C,$

2) ако $b^2-4ac>0$, то $I = \frac{1}{\sqrt{b^2-4ac}}\ln\left[\frac{2ax+b-\sqrt{b^2-4ac}}{2ax+b+\sqrt{a^2-4ac}}\right] + C.$

3) ако $b^2-4ac=0$, то $I = -\frac{2}{2ax+b} + C.$

2.70. $\sqrt{x^2+a^2} - a\ln\left(\frac{a}{x} + \sqrt{1+\frac{a^2}{x^2}}\right) + C.$ **2.71.** $\arcsin\sqrt{\frac{x^2-a^2}{b^2-a^2}} + C.$

3.29. $\frac{x^3}{3}\arcsin x - \frac{x^2}{3}\sqrt{1-x^2} - \frac{2}{9}\sqrt{(1-x^2)^3} + C.$ **3.30** $(x^2-2x+2)e^x + C.$

3.31. $(x^3+3x^2+5x+3)\operatorname{arctg}x - \frac{x^2}{2} - 3x - 2\ln(1+x^2) + C.$

3.32. $\frac{1}{2}(x^2-1)\ln(x+1) - \frac{x^2}{2}\ln x + \frac{x}{2} + C.$

3.33. $\frac{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}{9x^3}\left[2 - 3\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\right] + C.$

3.34. $x\ln(\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x}) - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\arcsin x + C.$

3.35. $\frac{1}{8}\left[x(2x^2+a^2)\sqrt{a^2+x^2} - a^4\ln|x+\sqrt{a^2+x^2}|\right] + C.$ **3.36.** Упътване. xdx $= 2(\sqrt{x})^3\, d\sqrt{x}$. $I = 2\sqrt{x}(6-x)\cos\sqrt{x} + 6(x-2)\sin\sqrt{x} + C$ $(x \geqslant 0)$

3.37. $\frac{x}{4(1+x^2)^2} + \frac{3x}{8(1+x^2)} + \frac{3}{8}\operatorname{arctg}x + C.$ **3.38.** $\frac{1}{4}\,\frac{x}{x^2+2} + \frac{1}{4\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}} + C.$

3.39. $\frac{x}{4(3+2x^2)} + \frac{1}{4\sqrt{6}}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{2}{3}}x + C.$ **3.40.** $-\frac{5x^3+6x}{8(2+x^2)^2} + \frac{3}{8\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}} + C.$

3.41. $2\sqrt{1+x}\arcsin x + 4\sqrt{1-x} + C.$ **3.42.** $-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\sin^2 x} + \operatorname{ctg}x\right) + C.$

3.43. $\frac{3^x(\sin x + \cos x\ \ln 3)}{1+(\ln 3)^2} + C.$ **3.44.** $\frac{x\ln x}{x+1} - \ln(x+1) + C.$

3.45. $x\operatorname{arctg}\sqrt{2x-1} - \frac{1}{2}\sqrt{2x-1} + C.$ **3.46.** $\frac{(1+x)\,e^{\operatorname{arctg}x}}{2\sqrt{1+x^2}} + C.$

3.47. $\frac{1}{2}(1+x^2)\operatorname{arctg}^2 x - x\operatorname{arctg}x + \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C.$ **3.48.** $\frac{e^x}{x+1} + C.$

3.49. $\sqrt{1+x^2}\ln(x+\sqrt{1+x^2}) - x + C.$ **3.50.** $\frac{l^{2x}}{8}(2 - \sin 2x - \cos 2x) + C.$

3.51. $\frac{x}{2}[\sin(\ln x) - \cos(\ln x)] + C.$ **3.52.** $\frac{x}{2}[\sin(\ln x) + \cos(\ln x)] + C.$

4.15. $2\sqrt{x}\,e^{\sqrt{x}} - 2e^{\sqrt{x}} + C.$ **4.16.** $2\arcsin\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\sqrt{4-x^2} + C.$

4.17. $-\frac{1}{x}\sqrt{x^2+a^2} + \ln(x+\sqrt{x^2+a^2}) + C.$ **4.18.** $\frac{1}{2}x\sqrt{x^2+9} + \frac{9}{2}\ln(x+\sqrt{x^2+9}) + C.$

4.19. $\frac{1}{9}\sin\left(\operatorname{arctg}\frac{x}{3}\right) + C.$ **4.20.** $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + C.$ **4.21.** $\frac{x^4}{4a^2(a^2+x^2)^2} + C.$

4.22. $\frac{x}{2\,(x^2+1)}+\frac{1}{2}\,\mathrm{arctg}x+C.$ **4.23.** $a\mathrm{cotg}\left(\arcsin\frac{a}{x}\right)+a\arcsin\frac{a}{x}+C.$

4.24. $a\cos^{-1}\left(\mathrm{arctg}\frac{x}{a}\right)+a\,\ln\left|\,\mathrm{tg}\left(\frac{1}{2}\,\mathrm{arctg}\,\frac{x}{a}\right)\right|+C.$

5.14. $\frac{2x-7}{4(2x^2-4x+10)}+\frac{1}{8}\,\mathrm{arctg}\,\frac{x-1}{2}+C.$

5.15. $x-\frac{1}{2}\,\frac{x}{x^2-1}+\frac{3}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C.$

5.16. $\frac{2}{3}\,\mathrm{arctg}\,\frac{x}{2}-\frac{1}{3}\,\mathrm{arctg}\,x+C.$

5.17. $\frac{4}{7}\ln|x-2|+\frac{17}{14}\ln(x^2+3)-\frac{\sqrt{3}}{21}\,\mathrm{arctg}\,\frac{x}{\sqrt{13}}+C.$

5.18. $\frac{1}{3}\ln|x-1|-\frac{1}{6}\ln\,(x^2+x+1)-\frac{1}{\sqrt{3}}\,\mathrm{arctg}\,\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C.$

5.19. $\frac{1}{9}\ln\,(x^2+2)-\frac{1}{9\sqrt{2}}\,\mathrm{arctg}\,\frac{x}{\sqrt{2}}-\frac{1}{3(x-1)}-\frac{2}{9}\ln|x-1|+C.$

5.20. $\frac{1}{6}\ln\left|\frac{(x-1)\,\sqrt{x^2-x+1}}{(x+1)\,\sqrt{x^2+x+1}}\right|-\frac{1}{2\sqrt{3}}\,\mathrm{arctg}\,\frac{x\sqrt{3}}{1-x^2}+C.$

5.21. $\frac{4x^2+3}{4(x^2+1)^2}+\ln\,\sqrt{x^2+1}+C.$

5.22. $\frac{2(1-k)}{3(x^2+x+1)}+\ln|x|-\frac{1}{2}\ln\,(x^2+x+1)-\frac{1}{3\sqrt{3}}\,\mathrm{arctg}\,\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C.$

5.23. $\frac{2x+1}{3(x^2+x+1)}+\frac{4}{3\sqrt{3}}\,\mathrm{arctg}\,\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C.$

5.24. $\frac{2x^3-6x^2+8x-9}{(x^2-2x+2)^2}+\ln\frac{(x-1)^2}{x^2-2x+2}+2\mathrm{arctg}\,(x-1)+C.$

5.25. $\frac{x+1}{(x-1)\,(x^2+x+1)^2}+C.$

5.26. $\frac{x}{4(x^4-1)}-\frac{3}{16}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+\frac{3}{8}\,\mathrm{arctg}x$ **5.27.** $a+2b+3c=0.$ **5.28.** $a\gamma+c\alpha=2b\beta.$

6.4. $\frac{3}{2}\,x^{\frac{2}{3}}+6\,\mathrm{arctg}\,\sqrt[6]{x}+C.$

6.5. $3[\frac{1}{7}\,(2x-3)^{\frac{7}{6}}-\frac{1}{5}\,(2x-3)^{\frac{5}{6}}+\frac{1}{3}\,(2x-3)^{\frac{1}{2}}-(2x-3)^{\frac{1}{6}}+\mathrm{arctg}\,(2x-3)^{\frac{1}{6}}]+C.$

6.6. Полагаме $\frac{x+2}{x-1}=t^4$ и получаваме $\frac{4}{3}\sqrt[4]{\frac{x-1}{x+1}}+C.$

6.7. Полагаме $\frac{x}{a-x}=t^4$ и получаваме $-\frac{at}{1+t^4}+\frac{9}{4\sqrt{2}}\ln\frac{t^2+t\sqrt{2}+1}{t^2-t\sqrt{2}+1}$ $+\frac{a}{2\sqrt{2}}\,\mathrm{arctg}\,\frac{t^2-1}{t\sqrt{2}}+C,$ където $t=\sqrt[4]{\frac{x}{a-x}}$.

6.8. Упътване. $I=\int\frac{dx}{(x-a)^2\,\sqrt[n]{\left(\frac{x-b}{x-a}\right)^{n-1}}}$; полагаме $\frac{x-b}{x-a}=t^n$ и получаваме $\frac{(b-a)\;dx}{(x-a)^2}=nt^{n-1}\;dt.$ Тогава дадения интеграл е равен на $\frac{n}{b-a}\int dt=\frac{n}{b-a}\,t\;+C=\frac{n}{b-a}\sqrt[n]{\frac{x-b}{x-a}}+C.$

6.9. $\frac{x^2}{2}-\frac{x\sqrt{x^2-1}}{2}+\frac{1}{2}\ln|x+\sqrt{x^2-1}|+C.$

7.4. $-\ln|1+2x-2\sqrt{x^2+x+1}\,|+C.$ **7.5.** $\ln\left|\frac{x-2+\sqrt{x^2-5x+4}}{x+2-\sqrt{x^2-5x+4}}\right|+C.$

7.6. $\frac{2}{5}\sqrt{\frac{x-1}{x+4}}+C.$ **7.7.** $\ln\,(x+1+\sqrt{x^2+2x+2}\,)+\frac{2}{x+2+\sqrt{x^2+2x+2}}+C.$

7.8. $\frac{1}{a^2\sqrt{2}}\,\mathrm{arctg}\,\frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{a^2-x^2}}+C.$

7.9. $-\frac{2}{9}\left[-\frac{5(x-2)}{\sqrt{7x-10-x^2}}+\frac{2\sqrt{7x-10-x^2}}{x-2}\right]+C.$ **7.10.** $\sqrt{1+x+x^2}$ $+\frac{1}{2}\ln\frac{1+2x+2\sqrt{1+x+x^2}}{(2+x+2\sqrt{1+x+x^2})^2}+C.$ **7.11.** Упътване. Положете $t=\sqrt{ax+b}.$ Ще получите интеграл, към който са приложими субституциите на Ойлер.

8.5. $4\sqrt{1+\sqrt{x}}+2\ln\left|\frac{1+\sqrt{1+\sqrt{x}}}{1-\sqrt{1+\sqrt{x}}}\right|+C.$ **8.6.** $\frac{6}{5}\,t^5-4t^3+18t+\frac{3t}{1+t^2}$ $-21\mathrm{arctg}t+C,\;t=x^6.$ **8.7.** $-\frac{3}{2}\,(1+\sqrt[3]{x})^{-2}+C.$

8.8 $\frac{3}{5}\,(1+x^{\frac{2}{3}})^{\frac{5}{2}}+(1-2x^{-\frac{1}{3}})\,(1+x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}+C.$

8.9. $\frac{1}{6}\ln\frac{t^2+t+1}{t^2-2t+1}-\frac{1}{\sqrt{3}}\,\mathrm{arctg}\,\frac{2t+1}{\sqrt{3}}+C,\;t=\frac{\sqrt[3]{1+x^3}}{x}.$

8.10. $\dfrac{3t}{2(t^3+1)} - \dfrac{1}{4}\ln\dfrac{(t+1)^2}{t^2-t+1} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{arctg}\dfrac{2t-1}{\sqrt{3}} + C,\ t = \dfrac{\sqrt[3]{3x-x^3}}{x}$;

$0<x<\sqrt{3}$; $x \leqq -\sqrt{3}$. **8.11.** $\dfrac{2t^3}{3\sqrt{3}} + \dfrac{4t}{\sqrt{3}} + \dfrac{2\sqrt{6}}{3}\ln\left|\dfrac{\sqrt{2}-t}{\sqrt{2}+t}\right| + C,\ t = \sqrt{2-x^{2/3}}$.

8.12. Упътване. При $m=1, 2, \ldots$ докажете, че $\displaystyle\int\frac{x^m\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$

$\displaystyle = -\frac{1}{m}x^{m-1}\sqrt{1-x^2} + \frac{m-1}{m}\int\frac{x^{m-2}\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$. По такъв начин пресмятането на дадения интеграл се свежда до пресмятането на $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ или $\displaystyle\int\frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

8.13. Упътване. При $m=1,2,\ldots$ докажете, че $\displaystyle\int\frac{dx}{x^m\sqrt{1-x^2}}$

$\displaystyle = -\frac{1}{m-1}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x^{m-1}} + \frac{m-2}{m-1}\int\frac{dx}{x^{m-2}\sqrt{1-x^2}}$. Пресмятането на интеграла се свежда до пресмятането на $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ и $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

9.8. $x - \dfrac{1}{2}\ln\left[(1+e^x)\sqrt{1+e^{2x}}\right] - \dfrac{1}{2}\operatorname{arctg} e^x + C$.

9.9. $\dfrac{1}{3}\ln\left|\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}\right| + \dfrac{5}{3}\ln\left|\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}-3\right| - \ln\left|\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}-1\right| + C$.

9.10. $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\dfrac{1+\sqrt{2}\cos x}{1-\sqrt{2}\cos x}\right| + \ln\left|\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}\right| + C$.

9.11. $\dfrac{1}{4}\ln|\sin x+\cos x| - \dfrac{1}{4}\cos x(\sin x+\cos x) + C$.

9.12. $x - \ln|1-e^x| + \dfrac{1}{1-e^x} + \dfrac{1}{2(1-e^x)^2} + \dfrac{1}{3(1-e^x)^3} + C$.

10.1 $\dfrac{1}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{\sqrt{7}} + C$. **10.2.** $\dfrac{1}{\sqrt{7}}\ln\left|x+\sqrt{x^2-\dfrac{8}{7}}\right| + C$.

10.3. $\ln\left(x+\sqrt{x^2+7}\right) + C$. **10.4.** $-\dfrac{1}{2^x\ln 2} - \dfrac{1}{3^x\ln 3} + C$.

10.5 $x+2e^x + \dfrac{1}{2}e^{2x} + C$. **10.6.** $\dfrac{3}{4}\sqrt[3]{(a^2+x^2)^2} + C$.

10.7. $\dfrac{2}{3}\sqrt{(1+\ln x)^3} + C$. **10.8.** $\ln\dfrac{\sqrt{e^x+1}-1}{\sqrt{e^x+1}+1} + C$.

10.9. $\dfrac{1}{18}\ln\left|\dfrac{3x+5}{1-3x}\right| + C$. **10.10.** $\dfrac{2}{\sqrt{31}}\operatorname{arctg}\dfrac{4x-5}{\sqrt{31}} + C$.

10.11. $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\dfrac{4x-3}{5} + C$. **10.12.** $-\sin\dfrac{1}{x} + C$. **10.13.** $-2\cos\sqrt{x} + C$.

10.14. $-\dfrac{4}{3}\sqrt[4]{\operatorname{cotg}^3 x} + C$. **10.15.** $\sin(\ln x) + C$. **10.16.** Упътване. вж 2.69.

10.17. $-\dfrac{1}{2}\ln^2\arccos x + C$. **10.18.** $(\operatorname{arctg}\sqrt{x})^2 + C$.

10.19. $(x^2-2)\sin x + 2x\cos x + C$. **10.20.** $-\dfrac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + \dfrac{1}{2}\arcsin x + C$.

10.21. $\dfrac{1}{9}(2+x^2)\sqrt{1-x^2} + \dfrac{x^3}{3}\arcsin x + C$. **10.22.** $\dfrac{1}{2}(x-\sin x\cos x) + C$.

10.23. $-\operatorname{cotg}x - \dfrac{1}{3}\operatorname{cotg}^3 x + C$. **10.24.** $\dfrac{1}{n}\sin^n x\cos nx + C$.

10.25. $\dfrac{1}{24\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{\sqrt{3}} + \dfrac{x}{24(1+x^2)} + \dfrac{x}{12(1+x^2)^2} + C$.

10.26. $\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}\arcsin x + \dfrac{1}{2}\ln(1-x^2) + C$.

10.27. $x\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) - \sqrt{1+x^2} + C$.

10.28. $x\ln\left(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}\right) + \dfrac{1}{2}(\arcsin x - x) + C$.

10.29. $-\dfrac{\cos x}{4\sin^4 x} - \dfrac{3\cos x}{8\sin^2 x} + \dfrac{3}{8}\ln\left|\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}\right| + C$.

10.30. $\dfrac{x^4}{4}\left(\ln^3 x - \dfrac{3}{4}\ln^2 x + \dfrac{3}{8}\ln x - \dfrac{3}{32}\right) + C$. **10.31.** $2(\sqrt{x}-1)e^{\sqrt{x}} + C$.

10.32. $\dfrac{x^2}{2}\operatorname{arctg}x^2 - \dfrac{1}{4}\ln(1+x^4) + C$. **10.33.** $-\dfrac{1}{2}(\operatorname{sgn}x)\sqrt{x^2-1} + \dfrac{x^2}{2}\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x} + C$.

10.34. $x\arcsin\sqrt{\dfrac{x}{x+1}} - \sqrt{x} + \operatorname{arctg}\sqrt{x} + C$.

10.35. $-2\operatorname{sgn}(1-x)\sqrt{x} + (1+x)\arcsin\dfrac{2x}{1+x} + C$.

10.36. $\ln\dfrac{(x-1)^2}{x^2+1} + \operatorname{arctg}x + \dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1+2x}{x^2+1} + C$.

10.37. $\frac{x^2}{2} + \ln|x-1| + \ln|2x^2+2x+1| + \operatorname{arctg}(2x+1) + C.$

10.38. $\frac{35}{37}\ln\frac{|x-5|}{\sqrt{x^2+12}} + \frac{42}{37\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x}{2\sqrt{3}} + C.$

10.39. $\frac{2}{3}\,\frac{x+2}{x^2+x+1} + \frac{10}{3\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C.$

10.40. Упътване. Положете $1-8x = t^4$. След преобразувания ще достигнете до $\int\frac{dt}{(t^2+t+1)^2}$. **10.41.** Упътване. Положете $x-1=t^3$, след преобразувания ще получите $\int\frac{dt}{(t^2-t+1)^2}$. **10.42.** Упътване. Положете $1-x=t^6$. Ще получите $\int\frac{t\,dt}{(t^2+2t+3)^2}$. **10.43.** Упътване. Това е интеграл от диференциален бином, втори случай. След полагане $x^{-\frac{1}{4}}-2=t^2$ се стига до $\int\frac{t^4\,dt}{(t^2-2)^3}$.

10.44. и **10.45.** Упътване. Това е интеграл от диференциален бином, трети случай. **10.47.** Упътване. Ако положим $\sqrt{1+x-x^2} = tx+1$, ще достигнем до $\int\frac{(2t-1)\,dt}{(t^2-3t+5)^2}$.

10.48. Упътване. Чрез полагането $\sqrt{1+x+x^2} = x+t$ достигаме до $\int\frac{t^2-t+1}{(2t^2-4t+3)^2}\,dt$. **10.49.** Упътване. Чрез полагането $\sqrt{x^2+x-4} = x+t$ достигаме до $\int\frac{1-2t}{(t^2-4t+6)^2}\,dt$. **10.50.** Упътване. След прилагане на универсалната субституция получаваме

$$4\int\frac{(t^2+1)\,dt}{(t^2+2t+3)^3} = 4\int\frac{dt}{(t^2+2t+3)^2} - 8\int\frac{(t+1)\,d(t+1)}{[(t+1)^2+2]^3}.$$

10.51. Упътване. След прилагане на универсалната субституция получаваме

$$\int\frac{t(1-t^2)\,dt}{(t^2+4t+5)^2} = -5\int\frac{(2t+4)\,dt}{(t^2+4t+5)^3} + \int\frac{(4-t)\,dt}{(t^2+4t+5)^2} = -5\int\frac{d(t^2+4t+5)}{(t^2+4t+5)^3} + \int\frac{(4-t)\,dt}{(t^2+4t+5)^2}.$$

Глава 5. Определен интеграл на Риман

2.19. $2-\frac{\pi}{2}$. **2.20.** $\frac{1}{4}$. **2.21.** 2. **2.22.** $\frac{2}{7}$. **2.23.** $\frac{4}{3}$.

2.24. $|b|-|a|$. **2.25.** $\frac{\pi}{\sqrt{3}}$. **2.26.** $\frac{1}{2}(\sqrt{3}-\sqrt{2})$. **2.27.** $\frac{5}{6}$. **2.28.** $\frac{\pi}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}$.

2.29. $\frac{\pi}{2|ab|}$. **2.30.** $\frac{b(e^{a\pi/b}+1)}{a^2+b^2}$. **2.31.** $6-2e$. **2.34.** $\frac{2}{5}$. **2.35.** 2.

2.36. $\frac{\pi}{6}$. **2.37.** $\frac{1}{p+1}$. **2.38.** $\frac{1}{e}$. **2.39.** $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$.

2.48. $\frac{e^x}{x}-\frac{x}{\ln x}$. **2.49.** $-\cos(\cos x)\operatorname{tg}x - \cos(\sin x)\operatorname{cotg}x$. **2.50.** $\frac{2}{3}$.

2.51. $\frac{\pi^2}{4}$. **2.52.** 1.

3.12. $\frac{4}{15}(\sqrt{2}-1)$. **3.13.** $\frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}}{2}$. **3.14.** $\frac{2\sqrt{3}}{9}$.

3.15. $\frac{\sqrt{3}}{32}$. **3.16.** $\ln\frac{4}{3}$. **3.17.** $2(\sqrt{3}-1)$. **3.19.** $a^3\left(\frac{\pi}{4}-\frac{2}{3}\right)$.

3.20. $\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}$. **3.21.** 1. **3.22.** 0. **3.24.** $\frac{\pi}{4}$. **3.25.** 0.

3.26. $(-1)^n\left[-\ln\sqrt{2}+\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}\right)\right]$.

3.27. $2n\pi$ при $k=2n\pi$, $(2n+1)\pi$ при $k=2n+1$.

5.11. $\frac{4}{3}$. **5.12.** $a^2\left(\frac{\sqrt{2}}{3}+\frac{3}{2}\arcsin\frac{1}{3}\right)$ **5.13.** a^2. **5.14.** $a^2\left(\frac{\pi}{9}+\frac{\sqrt{3}}{6}\right)$.

5.15. $\frac{r^2}{2}(\varphi_2-\varphi_1)$. **5.16.** $\frac{8}{27}(10\sqrt{10}-1)$. **5.17.** $\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\ln 2$.

5.18. $8a$. **5.19.** $\frac{at_0^2}{2}$. **5.20.** $4a$. **5.21.** $\frac{16}{3}a$. **5.22.** $\frac{1}{3}\pi r^2h$. **5.23.** $2\pi^2r^2a$

Глава 6. Числови редове

1.21. Разходящ. **1.22.** Сходящ при $a>1$ и разходящ при $a\leqq 1$. **1.23.** Сходящ. **1.24.** Разходящ. **1.25.** Разходящ. **1.26.** Сходящ. **1.27.** Сходящ. **1.28.** Разходящ. **1.29.** Сходящ. **1.30.** Разходящ. **1.31.** Разходящ. **1.32.** Разходящ. **1.33.** Сходящ. **1.34.** Сходящ. **1.35.** Разходящ. **1.36.** Сходящ. **1.37.** Сходящ. **1.38.** Сходящ. **1.39.** Сходящ при $a>-\frac{1}{3}$, разходящ при $a \leqq -\frac{1}{3}$.

2.17. Сходящ. **2.18.** Сходящ. **2.19.** Разходящ. **2.20.** Сходящ.
2.21. Разходящ. **2.22.** Сходящ. **2.23.** Сходящ при $a < 1$, разходящ при $a \geqq 1$.
2.24. Разходящ. **2.25.** Сходящ. **2.26.** Сходящ.

3.12. Разходящ. **3.13.** Сходящ. **3.14.** Сходящ. **3.15.** Разходящ. **3.16.** Сходящ при $\frac{p}{2} + q > 1$, разходящ при $\frac{p}{2} + q \leqq 1$. **3.17.** Сходящ при $q > p$, разходящ при $q \leqq p$. **3.18.** Сходящ при $s(q-p) > 1$, разходящ при $s(q-p) \leqq 1$. **3.19.** Сходящ при $a > e$, разходящ при $a \leqq e$. **3.20.** Сходящ при $p > 1$ и произволно q или при $p=1$, $q>1$, разходящ при $p<1$ и произволно q или $p=1$, $q \leqq 1$.

4.24. Сходящ. **4.25.** Сходящ. **4.26.** Разходящ. **4.27.** Сходящ. **4.28.** Разходящ. **4.29.** Сходящ. **4.30.** Сходящ. **4.31.** Сходящ. **4.32.** Сходящ. **4.33.** Разходящ. **4.34.** Абсолютно сходящ. **4.35.** Условно сходящ. **4.36.** Абсолютно сходящ. **4.37.** Условно сходящ. **4.38.** Абсолютно сходящ. **4.39.** Условно сходящ. **4.40.** а) Абсолютно сходящ при $\alpha > 2$, условно сходящ при $0 < \alpha \leqq 2$. **4.41.** Абсолютно сходящ при $\alpha > 1$, условно сходящ при $\alpha \leqq 1$. **4.42.** Условно сходящ при $\alpha \leqq 1$, абсолютно сходящ при $\alpha > 1$. **4.43.** Абсолютно сходящ при $|\alpha| < 1$, разходящ при $|\alpha| > 1$. **4.44.** Абсолютно сходящ при всяко $\alpha \neq -1$.

5.1. в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n-2}}{(2n-1)!}$. **5.2.** в) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(2a)^n}{n!}$.

5.2. г) $1 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n\,(2n)!\,a^{2n}}{2^{2n}\,(n!)^4}$.

6.12. Разходящо към нулата. **6.13.** Сходящо. **6.14.** Сходящо.

6.15. $\frac{1}{1-x}$ при $|x| < 1$, разходящо при $|x| \geqslant 1$. **6.16.** $\frac{2}{3}$. **6.17.** $\frac{2}{\pi}$.

Литература

1. Берман, Г. Н. Сборник задач по курсу математического анализа, М., 1977.
2. Гребенча, М. К., С. И. Новоселов. Курс математического анализа.М., 1961.
3. Давыдов, Н. А., П. П. Коровкин, В. А. Никольский. Сборник задач по математическому анализу. М., 1964.
4. Демидович, Б. П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. М., 1963.
5. Запорожец, Г. И. Руководство к решению задач по математическому анализу. М., 1964.
6. Задачи по анализ (циклостилни записки и издадени от колектив при сектор Реален и функционален анализ), 1972.
7. Илин, В. А., В. А. Садовничи, Б. Х. Сендов. Математически анализ, Ч. 1. С., 1979.
8. Кудрявцев, Л. Д., А. Д. Кутасов, В. И. Чехлов, М. И. Шабунин. Сборник задач по математическому анализу. Ч. 1. М., 1984; Ч. 2, 1986.
9. Ляшко, И. И., А. К. Боярчук, Я. Г. Гай, Г. П. Головач. Справочное пособие по математическому анализу. Ч. 1, Ч. 2, Киев, 1979.
10. Ляшко, И. И., А. К. Боярчук, Я. Г. Гай, А. Ф. Калайда. Математический анализ. Киев, Ч. 1, 1983; Ч. 2, 1985.
11. Марон, И. А. Дифференциальное и интегральное исчисление в примерах и задачах, функции одной переменной. М., 1973.
12. Проданов, И. Р., Н. Г. Хаджииванов, И. Г. Чобанов. Сборник от задачи по диференциално и интегрално смятане. Ч. 1. С., 1976.
13. Тагамлицки, Я. А. Диференциално смятане. Интегрално смятане. С., 1971.
14. Фихтенгольц, Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. I, т. II, т. III. М., 1969.
15. Marsden, J., A. Weinstein. Calculus. New York — Berlin — London, 1980.