Е. Любенова   П. Недевски   К. Николов
Л. Николова   В. Попов

Ръководство по математически анализ

Първа част

София · 1991

Ръководството съдържа задачи от първата част на математическия анализ: граници на редици, граници и непрекъснатост на функции, производни и интеграли, редове и др. В началото на всяка глава са изложени необходимите теоретични сведения. Голяма част от задачите са решени, а за останалите са посочени отговорите им.

Изданието е предназначено главно за студентите от Факултета по математика и информатика при Софийския университет „Климент Охридски", но може да се използва и от студенти от други факултети и висши учебни заведения, както и за самостоятелна работа.

© Елена Тодорова Любенова-Тонева
Петър Спиридонов Недевски
Красимир Иванов Николов
Людмила Йорданова Николова
Владимир Атанасов Попов
1991

c/o Jusautor, Sofia

51

Съдържание

Предговор

Първата част на *Ръководството по математически анализ* съдържа задачи от граници на редици, граници и непрекъснатост на функции, производни, неопределени и определени интеграли, редове и др. и е съобразена с програмите за студентите от първи курс на всички специалности във Факултета по математика и информатика на Софийския университет „Климент Охридски". Същевременно ръководството е отражение на традициите, създадени в сектора по реален и функционален анализ под ръководството на проф. Ярослав Тагамлицки. Първият опит за систематизиране на материала, разглеждан на упражненията по диференциално и интегрално смятане, бяха циклостилните записки от 1970—1972 г. По-късно бе издаден известният *Сборник по диференциално и интегрално смятане* с автори Ив. Проданов, Н. Хаджииванов и Ив. Чобанов.

Настоящото ръководство започва с уводна глава („Предварителни сведения"), която помага на читателите да преодолеят бариерата между средното и висшето образование. Във всяка глава накратко е изложен използваният теоретичен материал (без доказателства). При необходимост от допълнителни сведения могат да се използват учебниците по диференциално и интегрално смятане на Я. Тагамлицки и *Математически анализ* на Илин, Садовничи и Сендов. По-голямата част от задачите са подробно решени, а за останалите са дадени упътвания или отговори (в края на книгата).

Изложението е съвсем подробно и сборникът може да се използва от всички студенти, които изучават математически анализ или желаят да задълбочат знанията си в тази област, а също и за самостоятелна работа.

Задачите са подредени с двойна номерация — на първо място е поставен номерът на параграфа в съответната глава, а на второ — номерът на задачата в този параграф.

Изложеният материал е подбран и обсъждан от целия авторски колектив, а отделните глави са написани, както следва: нулевата и първата глава — от Е. Любенова, втората — от П. Недевски, третата — от Вл. Попов, четвъртата и петата — от Кр. Николов и шестата — от Л. Николова.

Авторите изказват благодарност на рецензентите и на редакторите, които допринесоха много за подобряването и окончателното оформяне на ръкописа.

Май 1989 г. *Авторите*

Глава 0

Предварителни сведения

§ 1. Основни свойства на числата

Ще предполагаме, че понятието реално число е известно. Множеството на реалните числа ще означаваме с $\mathbf{R}$. Ще припомним основните свойства на операциите събиране и умножение в $\mathbf{R}$:

С 1. Комутативност на събирането: $a + b = b + a$.
С 2. Асоциативност на събирането: $a + (b + c) = (a + b) + c$.
С 3. Съществуване на нулев елемент (0): $a + 0 = a$.
С 4. Съществуване на противоположен елемент $(-a) : a + (-a) = 0$.
С 5. Комутативност на умножението: $ab = ba$.
С 6. Асоциативност на умножението: $a(bc) = (ab)c$.
С 7. Съществуване на единица (1): $a.1 = a$.
С 8. Съществуване на обратен елемент (a^{-1}) за всеки ненулев елемент a:

$$a^{-1}=\frac{1}{a},\ aa^{-1}=1.$$

С 9. Дистрибутивен закон: $a(b + c) = ab + ac$.

Част от реалните числа наричаме положителни.

С 10. Нулата не е положително число.

С 11. Ако $a \neq 0$, то точно едно от числата a и $(-a)$ е положително. Число, което не е положително, наричаме отрицателно.

С 12. Ако a и b са положителни, то $a + b$ и $a.b$ също са положителни.

Ако $a - b$ е положително число, казваме, че a е по-голямо от b, и означаваме $a > b$. Ако $a - b$ е положително или нула, казваме, че $a - b$ е неотрицателно, и записваме $a \geqq b$.

Лесно се виждат следните свойства на неравенствата: ако $a \geqq b$, то $a + c \geqq b + c$, $c \in \mathbf{R}$; ако $a \geqq b$ и $c \geqq 0$, то $ac \geqq bc$; ако $a \geqq b$ и $b \geqq c$, то $a \geqq c$, като последното неравенство е строго, ако поне едно от предишните две е строго ($a > b$ наричаме строго неравенство, а $a \geqq b$ — нестрого).

По-голямото от числата a и $(-a)$ се нарича **модул** или **абсолютна стойност** на a и се означава с $|a|$.

Множество от вида $\{x \in \mathbf{R} : a < x < b\} = (a,b)$ наричаме **отворен интервал**, а $\{x \in \mathbf{R} : a \leqq x \leqq b\} = [a,b]$ — **затворен интервал** или **сегмент**. Други отворени интервали са:

$$(a, +\infty) = \{x \in \mathbf{R} : x > a\},\quad (-\infty, b) = \{x \in \mathbf{R} : x < b\},\quad (-\infty, +\infty) = \mathbf{R}.$$

Всеки отворен интервал, който съдържа x, наричаме околност на x. Интервалите

$$(a,b] = \{x \in \mathbf{R} : a < x \leqq b\},\ [a,b) = \{x \in \mathbf{R} : a \leqq x < b\},$$
$$(-\infty,b] = \{x \in \mathbf{R} : x \leqq b\},\ [a,+\infty) = \{x \in \mathbf{R} : x \geqq a\}$$

са полуотворени.

Важни подмножества на $\mathbf{R}$ са:

$\mathbf{N} = \{1,2,3,\ldots\}$ — множеството на естествените числа;

$\mathbf{Z} = \{\ldots,-2,-1,0,1,2,\ldots\}$ — множеството на целите числа;

$\mathbf{Q}$ — множеството на рационалните числа r, т.е. числа r, за които съществуват $p,\ q \in \mathbf{Z}$ такива, че $\frac{p}{q} = r$.

Очевидно $\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$. Ако числото $r \in \mathbf{R}$, но $r \notin Q$, то r се нарича ирационално.

Едно множество от числа $\mathbf{M}$ е ограничено отгоре, ако съществува такова число L, че $x \leqq L$ за всяко $x \in \mathbf{M}$; L наричаме горна граница на $\mathbf{M}$. Аналогично $\mathbf{M}$ е ограничено отдолу, когато съществува такова число l, че $l \leqq x$ за всяко $x \in \mathbf{M}$; l наричаме долна граница на $\mathbf{M}$. Множеството $\mathbf{M}$ е ограничено, когато е ограничено както отгоре, така и отдолу.

Най-малката от горните граници се нарича точна горна граница. Най-голямата от долните граници се нарича точна долна граница.

С 13 (принцип за непрекъснатост). Всяко непразно ограничено отгоре множество от реални числа $\mathbf{M}$ има точна горна граница, която се означава със $\sup \mathbf{M}$.

Нека $\mathbf{M}$ е ограничено отдолу множество от реални числа. Като приложим С 13 към множеството $-\mathbf{M} = \{x \in \mathbf{R} : -x \in \mathbf{M}\}$, получаваме, че $\mathbf{M}$ има точна долна граница, която ще означаваме с $\inf \mathbf{M}$.

От С 13 следва, че множеството $\mathbf{N}$ на естествените числа не е ограничено отгоре (принцип на Архимед).

Ще покажем, че С 13 не е в сила за множеството на рационалните числа. Нека $\mathbf{M} = \{x \in \mathbf{Q} : x^2 \leqq 2\}$. Числото 2 е горна граница за $\mathbf{M}$, следователно $\mathbf{M}$ е ограничено отгоре. Нека l е точната горна граница на $\mathbf{M}$ и да допуснем, че $l \in \mathbf{Q}$. Ясно е, че $l > 1$. Ще покажем, че $l^2 < 2$ е невъзможно. И наистина, тогава $m = \frac{2+2l}{2+l} \in \mathbf{Q}$. Да разгледаме

$$2 - \left(\frac{2+2l}{2+l}\right)^2 = \frac{2(2+l)^2 - (2+2l)^2}{(2+l)^2} = \frac{2(2-l^2)}{(2+l)^2} > 0.$$

Следователно $m^2 < 2$ и $m \in \mathbf{M}$. Но $m - l = \frac{2-l^2}{2+l} > 0$, т.е. $m > l$, което показва, че l не може да бъде горна граница на $\mathbf{M}$. Сега да допуснем, че $l^2 > 2$. Да разгледаме пак числото $m = \frac{2+2l}{2+l}$. Разликата $m - l = \frac{2-l^2}{2+l} < 0$, или $m < l$.

Ще покажем, че m също е горна граница на $\mathbf{M}$. Нека $x \in \mathbf{M}$ и $x > 0$. Разглеждаме

$$m - x = \frac{2+2l}{2+l} - x = \frac{2+2l}{2+l} - \frac{2+2x}{2+x} + \frac{2+2x}{2+x} - x$$

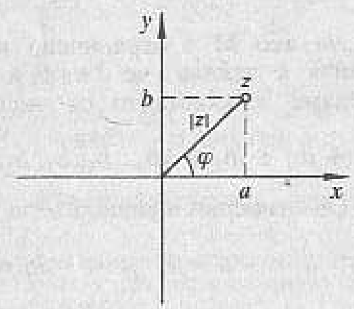
$$= \frac{2(l-x)}{(2+l)(2+x)} + \frac{2-x^2}{2+x} \geqq 0,$$

т.е. l не може да бъде точната горна граница на $\mathbf{M}$. От полученото противоречие следва, че $l^2 = 2$. Но рационално число, чийто квадрат е равен на 2, не съществува. Да допуснем противното, т.е. че съществуват $p,\ q \in \mathbf{Z}$, които ще предполагаме взаимно прости: $\frac{p}{q} = l,\ \frac{p^2}{q^2} = 2,\ p^2 = 2q^2$.

Следователно p е четно и $p = 2p_1$. Тогава $4p_1^2 = 2q^2$, $2p_1^2 = q^2$, а оттук и q е четно, което противоречи на предположението, че p и q са взаимно прости.

Понякога вместо за числа ще говорим за точки, като имаме предвид разположението на реалните числа върху числовата права, но никакви други свойства на реалните числа освен произтичащите от С 1—С 13 няма да използваме.

Както знаем, уравнението $x^2 = -1$ не се удовлетворява за никое $x \in \mathbf{R}$. За да се избегне този недостатък, към $\mathbf{R}$ се добавя имагинерната единица $i = \sqrt{-1}$, за която $i^2 = -1$. Така се получава множеството на комплексните числа $\mathbf{C}$, което съдържа $\mathbf{R}$ като подмножество. Ако $z \in \mathbf{C}$, то $z = a + ib$, като $a,b \in \mathbf{R}$ и a се нарича реална част на z, а b — имагинерна част на z. Множеството $\mathbf{C}$ се отъждествява с точките на една равнина (фиг. 1). Абсцисната ос се нарича още



Фиг. 1

реална права и съвпада с $\mathbf{R}$, съответно ординатната ос — имагинерна права. Началото на координатната система съвпада с комплексното число $z = 0$.

Абсолютна стойност или модул на z се нарича числото $\sqrt{a^2 + b^2}$ и се означава както при реалните числа с $|z|$. От фиг. 1 се вижда, че

$$a = |z| \cos\varphi,\ b = |z| \sin\varphi,\ z = |z|(\cos\varphi + i \sin\varphi).$$

Нека $z = a + ib$ и $u = c + id$. Сума и произведение на z и u се определят съответно така:

$$z + u = (a + c) + i(b + d),$$
$$zu = (ac - bd) + i(ad + bc).$$

Комплексното число $\bar{z} = a + i(-b)$ се нарича **комплексно спрегнато** на z.

1.1. Нека $z \neq 0$. Докажете, че $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|}$.

1.2. Проверете, че свойствата C 1—C 9 са в сила за комплексните числа.

1.3. Проверете, че $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z_1} + \bar{z_2}$ и $\overline{z_1 z_2} = \bar{z_1}\,\bar{z_2}$.

1.4. Нека $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ и $u = \varrho(\cos\psi + i\sin\psi)$. Докажете, че $zu = r\,\varrho(\cos(\varphi + \psi) + i\sin(\varphi + \psi))$.

1.5. Докажете, че $|zu| = |z|\,.\,|u|,\ z, u \in \mathbf{C}$.

1.6. Докажете неравенството на триъгълника:

$$|z + u| \leqq |z| + |u|,\ z, u \in \mathbf{C}.$$

1.7. Докажете, че $|z + u| \geqq |z| - |u|,\ z, u \in \mathbf{C}$.

1.8. Нека $x, a \in \mathbf{R}$ и $\varepsilon > 0$. Докажете, че неравенството $|x - a| < \varepsilon$ е еквивалентно на неравенствата

$$a - \varepsilon < x < a + \varepsilon.$$

1.9. Докажете, че ако **M** е ограничено подмножество на **R**, съществува константа k такава, че $|x| \leqq k$ за $x \in \mathbf{M}$.

1.10. Да разгледаме множеството от числа от вида

$$w = a + ib_1 + jb_2 + kb_3,\ b_1, b_2, b_3, a \in \mathbf{R},$$

където i, j, k са „имагинерни единици“, за които

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1,\ ij = -ji = k,\ jk = -kj = i,\ ki = -ik = j.$$

Ако $u = c + id_1 + jd_2 + kd_3$, то

$$w + u = (a + c) + i(b_1 + d_1) + j(b_2 + d_2) + k(b_3 + d_3).$$

Произведението wu получаваме чрез разкриване на скобите и правилата за умножение на имагинерните единици. Така определените числа се наричат **кватерниони**. Докажете, че свойства C 1—C 9 са в сила за тези числа (с изключение на C 5).

§ 2. Геометрична прогресия

Нека $a, b \in \mathbf{C}$, $n \in \mathbf{N}$. Проверете чрез разкриване на скобите, че

(1) $$(a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + b^{n-1}) = a^n - b^n.$$

Събираемите във вторите скоби от лявата страна на (1) са от вида $a^k b^l$, като $k + l = n - 1$, $0 \leqq k \leqq n - 1$, $0 \leqq l \leqq n - 1$ и броят им е n.

Нека в (1) положим $a = 1$, $b = x \neq 1$. Получаваме

(2) $$1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-1} = \frac{1 - x^n}{1 - x}.$$

Това е формулата за сумата от първите n члена на геометрична прогресия с частно x и първи елемент 1.

2.1. Пресметнете сумата $1 + x^2 + x^4 + \ldots + x^{2n},\ |x| \neq 1$.

Решение. Съгласно (2) имаме

$$1 + x^2 + x^4 + \ldots + x^{2n} = \frac{1 - (x^2)^{(n+1)}}{1 - x^2} = \frac{1 - x^{2n+2}}{1 - x^2}.$$

2.2. Пресметнете сумите:

а) $1 - x + x^2 - x^3 + \ldots + (-1)^n x^n,\ x \neq -1$;

б) $x - x^3 + x^5 - \ldots + (-1)^{n-1} x^{2n-1}$;

в) $2 - x^3 + \frac{x^6}{2} - \frac{x^9}{2^2} + \ldots + \frac{x^{6n}}{2^{2n-1}},\ \frac{x^3}{2} \neq -1$;

г) $ax + ax^2 + \ldots + ax^n,\ x \neq 1$.

2.3. Пресметнете $S = x + 2x^2 + \ldots + nx^n, x \neq 1$.

Упътване. Разгледайте разликата $S - xS$.

§ 3. Математическа индукция

Естествените числа имат едно забележително свойство, наречено принцип на пълната математическа индукция или, както по-кратко ще казваме, математическа индукция, или даже само индукция:

Нека **M** е числово множество. Ако за **M** са изпълнени:

1) $1 \in \mathbf{M}$,

2) от $n \in \mathbf{M}$ следва, че и $n + 1 \in \mathbf{M}$,

то **M** съдържа всички естествени числа.

Условието 2) може да се замени с условието

2') ако $1, 2, \ldots, n \in \mathbf{M}$, то и $n + 1 \in \mathbf{M}$.

3.1. Да разгледаме множеството **M** от тези естествени числа n, за които $P(n) = n^2 + n + 41$ е просто число. Докажете, че $1, 2, 3, \ldots, 39 \in \mathbf{M}$, но $40 \notin \mathbf{M}$.

3.2. Нека **M** е множеството от естествени числа, за които е изпълнено равенството

$$\cos\varphi + \cos 2\varphi + \ldots + \cos n\varphi = \frac{\sin\frac{2n+1}{2}\varphi}{2\sin\frac{\varphi}{2}},\ \varphi \neq 2k\pi.$$

Покажете, че за **M** е изпълнено условието 2), но въпреки това **M** не съдържа нито едно естествено число.

Решение. Да предположим, че $n \in \mathbf{M}$. Тогава

$$\cos\varphi+\cos 2\varphi+\ldots+\cos n\varphi+\cos(n+1)\varphi=\frac{\sin\frac{2n+1}{2}\varphi}{2\sin\frac{\varphi}{2}}$$

$$+\cos(n+1)\varphi=\frac{\sin\frac{2n+1}{2}\varphi+2\sin\frac{\varphi}{2}\cos(n+1)\varphi}{2\sin\frac{\varphi}{2}}$$

$$=\frac{\sin\frac{2n+1}{2}\varphi+\sin\left(\frac{\varphi}{2}+(n+1)\varphi\right)+\sin\left(\frac{\varphi}{2}-(n+1)\varphi\right)}{2\sin\frac{\varphi}{2}}$$

$$=\frac{\sin\frac{2n+3}{2}\varphi}{2\sin\frac{\varphi}{2}}.$$

Следователно $n+1\in\mathbf{M}$. Ще покажем, че $1\notin\mathbf{M}$. Действително

$$\frac{\sin\frac{3}{2}\varphi}{2\sin\frac{\varphi}{2}}=\frac{\sin\frac{\varphi}{2}\cos\varphi+\sin\varphi\cos\frac{\varphi}{2}}{2\sin\frac{\varphi}{2}}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\cos\varphi+2\cos^2\frac{\varphi}{2}\right)$$

$$=\cos\varphi+\frac{1}{2}\neq\cos\varphi.$$

Да предположим, че **M** съдържа естествени числа, и нека k е най-малкото от тях. Тъй като $1\notin\mathbf{M}$, то $k>1$. Съгласно допускането

$$\cos\varphi+\ldots+\cos(k-1)\varphi=\frac{\sin\frac{2k+1}{2}\varphi}{2\sin\frac{\varphi}{2}}-\cos k\varphi$$

$$=\frac{\sin\frac{2k+1}{2}\varphi-2\cos k\varphi\sin\frac{\varphi}{2}}{2\sin\frac{\varphi}{2}}=\frac{\sin\frac{2k-1}{2}\varphi}{2\sin\frac{\varphi}{2}}.$$

Но оттук следва, че $k-1\in\mathbf{M}$, противно на избора на k. Следователно **M** не съдържа естествени числа.

3.3. Докажете, че

$$\frac{1}{2}+\cos\varphi+\cos 2\varphi+\ldots+\cos n\varphi=\frac{\sin\frac{2n+1}{2}\varphi}{2\sin\frac{\varphi}{2}},$$

$$\varphi\neq 2k\pi,\ k\in\mathbf{Z}.$$

3.4. Докажете, че $1+3+5+\ldots+(2n-1)=n^2$.

Решение. Да означим с **M** множеството от естествените числа, за които равенството е изпълнено. Очевидно $1\in\mathbf{M}$. Да допуснем, че за някое k имаме $1+3+\ldots+(2k-1)=k^2$. Тогава

$$1+3+\ldots+(2k-1)+(2k+1)=k^2+2k+1=(k+1)^2.$$

Съгласно принципа на математическата индукция **M** съдържа всички естествени числа, т.е. равенството е вярно за всяко $n\in\mathbf{N}$.

3.5. Докажете, че:

а) $1+2+\ldots+n=\frac{1}{2}n(n+1)$;

б) $1^2+2^2+\ldots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$;

в) $1^3+2^3+\ldots+n^3=\frac{1}{4}n^2(n+1)^2$.

3.6. (неравенство на Бернули). За всяко $n\in\mathbf{N}$ и $x\geqq -1$ е в сила неравенството $(1+x)^n\geqq 1+nx$.

Решение. За $n = 1$ имаме равенството $1 + x = 1 + x$. Нека за някое $k \in \mathbf{N}$ е изпълнено $(1 + x)^k \geqq 1 + kx$ за всяко $x \geqq -1$. Да умножим двете страни на това неравенство с $1 + x \geqq 0$. Получаваме

$$(1 + x)^{k+1} \geqq (1 + kx)(1 + x) = 1 + (k + 1)x + kx^2 \geqq 1 + (k + 1)x.$$

3.7. Нека $x_1, x_2, \ldots, x_n$ са n положителни числа, за които $x_1x_2 \ldots x_n = 1$. Докажете, че $x_1 + x_2 + \ldots + x_n \geqq n$ и равенство се достига само за $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$.

Решение. Доказателството ще извършим с индукция по броя n на числата $x_1, \ldots, x_n$. Ако $n = 1$, по условие имаме $x_1 = 1$ и твърдението е изпълнено. Да допуснем, че то е вярно за кои да са n числа, които удовлетворяват условието на задачата. Нека $x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}$ са $n + 1$ положителни числа, чието произведение е единица.

Първи случай. Нека $x_1 = x_2 = \ldots = x_{n+1} = 1$. Тогава $x_1 + x_2 + \ldots + x_n + x_{n+1} = n + 1$ и твърдението е доказано.

Втори случай. Поне едно от числата е по-голямо от 1. Без ограничение на общността можем да предполагаме, че $x_1 > 1$. Тъй като $x_1x_2 \ldots x_{n+1} = 1$, то ще има друго число — нека това е x_2, за което $x_2 < 1$. Тогава

$$(x_1 - 1)(1 - x_2) > 0, \ x_1 + x_2 - x_1x_2 - 1 > 0, \ x_1 + x_2 > 1 + x_1x_2,$$
$$x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_{n+1} > 1 + x_1x_2 + x_3 + \ldots + x_{n+1}.$$

Да разгледаме числата $y_1 = x_1x_2, y_2 = x_3, \ldots, y_n = x_{n+1}$. Очевидно $y_1 > 0, y_2 > 0, \ldots, y_n > 0, y_1y_2 \ldots y_n = x_1x_2 \ldots x_{n+1} = 1$. Съгласно индукционното допускане $y_1 + y_2 + \ldots + y_n > n$. Следователно $x_1 + x_2 + \ldots + x_{n+1} > 1 + y_1 + \ldots + y_n \geqq 1 + n$.

3.8 (неравенство между средното аритметично и средното геометрично — неравенство на Коши). Нека $a_1, a_2, \ldots, a_n$ са n неотрицателни числа. В сила е неравенството

$$(1) \qquad \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \geqq \sqrt[n]{a_1a_2 \ldots a_n}.$$

Равенството се достига само при $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

Числото $\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}$ се нарича средно аритметично, а $\sqrt[n]{a_1a_2 \ldots a_n}$ — средно геометрично на числата $a_1, \ldots, a_n$.

Решение. Първи случай. Ако някое от числата $a_1, a_2, \ldots, a_n$ е нула, то $\sqrt[n]{a_1a_2 \ldots a_n} = 0 \leqq \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}$, като равенство има само ако $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0$.

Втори случай. Числата $a_1, a_2, \ldots, a_n$ са положителни. Нека

$$x_1 = \frac{a_1}{\sqrt[n]{a_1a_2 \ldots a_n}}, \ x_2 = \frac{a_2}{\sqrt[n]{a_1a_2 \ldots a_n}}, \ldots, \ x_n = \frac{a_n}{\sqrt[n]{a_1a_2 \ldots a_n}}.$$

Имаме $x_1 > 0, \ x_2 > 0, \ldots, x_n > 0$ и

$$x_1x_2 \ldots x_n = \frac{a_1a_2 \ldots a_n}{\left(\sqrt[n]{a_1a_2 \ldots a_n}\right)^n} = \frac{a_1a_2 \ldots a_n}{a_1a_2 \ldots a_n} = 1.$$

Съгласно зад. 3.7 $x_1+x_2+\ldots+x_n \geqq n$, т.е.

$$\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{\sqrt[n]{a_1a_2 \ldots a_n}} \geqq n, \quad \frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n} \geqq \sqrt[n]{a_1 \ldots a_n}.$$

Равенството се достига за $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$, което е възможно само при $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

3.9. Нека $a_1 > 0, \ a_2 > 0, \ldots, a_n > 0$. Докажете, че

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}} \leqq \sqrt[n]{a_1a_2 \ldots a_n}.$$

Числото $\frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}}$ се нарича средно хармонично на $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Упътване. Приложете неравенството между средното аритметично и средното геометрично (зад. 3.8) за числата $\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \ldots, \frac{1}{a_n}$.

3.10. Нека $a \geqq 0$ и $b \geqq 0$. Докажете, че $\sqrt[n+1]{ab^n} \leqq \dfrac{a+nb}{n+1}$.

3.11. Докажете, че:

а) сумата от кубовете на три последователни естествени числа се дели на 9;

б) числото n^3+5n се дели на 6, $n \in \mathbf{Z}$.

3.12. Нека $\mathbf{M}$ е множество от цели числа, за което:

1) $k_0 \in \mathbf{M}$;

2) ако $n \in \mathbf{M}$, то и $n+1 \in \mathbf{M}$.

Докажете, че $\mathbf{M}$ съдържа всички цели числа, които са по-големи или равни на k_0.

Да припомним, че $n! = 1.2.\ldots n$, $n \in \mathbf{N}$ (чете се „ен факториел"), като $0!=1$.

3.13. Докажете, че $\dfrac{4^n}{n+1} < \dfrac{(2n)!}{(n!)^2}$, където $n \geqq 2$, $n \in \mathbf{N}$.

Решение. За $n=2$ получаваме вярното неравенство $\dfrac{16}{3} < 6$.

Нека за естественото n е изпълнено $\dfrac{4^n}{n+1} < \dfrac{(2n)!}{(n!)^2}$. За да докажем, че $\dfrac{4^{n+1}}{n+2} < \dfrac{(2(n+1))!}{((n+1)!)^2}$, достатъчно е да проверим, че

$$\frac{4(2n)!(n+1)}{(n+2)(n!)^2} \leqq \frac{(2(n+1))!}{((n+1)!)^2}, \text{ или } \frac{2}{n+2} \leqq \frac{2n+1}{(n+1)^2}.$$

Последното е еквивалентно с $n \geqq 0$.

3.14. Докажете, че $2^{n-1}(a^n+b^n) > (a+b)^n$, като $a+b>0$, $a \neq b$, $n>1$, $n \in \mathbf{N}$.

3.15. Докажете, че $1+\dfrac{k}{n} \leqq \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^k < 1+\dfrac{k}{n}+\dfrac{k^2}{n^2}$

за $k \leqq n$, $k, n \in \mathbf{N}$. Като частен случай се получава неравенството

$$2 \leqq \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 3.$$

3.16. Докажете, че $\left(\dfrac{n}{3}\right)^n < n! < \left(\dfrac{n}{2}\right)^n$ за $n \geqq 6$, $n \in \mathbf{N}$.

Упътване. Използвайте зад. 3.15.

3.17 (формула на Моавър). Нека $z = \cos\varphi + i\sin\varphi$. Докажете, че $z^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi$, $n \in \mathbf{N}$.

Решение. За $n=1$ твърдението е изпълнено. Нека $z^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi$. Тогава $z^{n+1} = z^n z = (\cos n\varphi + i\sin n\varphi)(\cos\varphi + i\sin\varphi) = (\cos n\varphi\cos\varphi - \sin n\varphi\sin\varphi) + i(\sin n\varphi\ \cos\varphi + \cos n\varphi\ \sin\varphi) = \cos(n+1)\varphi + i\sin(n+1)\varphi$.

3.18. Сумирайте $\sin x + \sin 2x + \ldots + \sin nx$.

Решение. Ако $x = k\pi$ за някое $k \in \mathbf{Z}$, то търсената сума е 0. Нека $x \neq k\pi$ и $z = \cos x + i\sin x$. Тъй като $x \neq 2k\pi$, $z \neq 1$, то съгласно (2) от § 2 имаме

$$(2) \qquad 1+z+\ldots+z^n = \frac{1-z^{n+1}}{1-z}.$$

От формулата на Моавър получаваме

$$1+z+\ldots+z^n = (1+\cos x+\ldots+\cos nx) + i(\sin x+\ldots+\sin nx).$$

От друга страна,

$$\frac{1-z^{n+1}}{1-z} = \frac{(1-z^{n+1})(1-\bar z)}{|1-\bar z|^2} = \frac{1-z^{n+1}-\bar z+z^{n+1}\bar z}{2(1-\cos x)} = \frac{1-z^{n+1}-\bar z+z^n}{2(1-\cos x)}.$$

Като приравним имагинерните части от двете страни на (2), получаваме

$$\sin x+\ldots+\sin nx = \frac{\sin nx - \sin(n+1)x + \sin x}{2(1-\cos x)}$$

$$= \frac{2\sin\dfrac{x}{2}\ \cos\dfrac{x}{2} - 2\sin\dfrac{x}{2}\ \cos\dfrac{2n+1}{2}x}{4\sin^2\dfrac{x}{2}} = \frac{\cos\dfrac{x}{2} - \cos\dfrac{2n+1}{2}x}{2\sin\dfrac{x}{2}},$$

или окончателно

$$(3) \qquad \sin x + \sin 2x + \ldots + \sin nx = \frac{\sin\dfrac{n+1}{2}x\ \sin\dfrac{n}{2}x}{\sin\dfrac{x}{2}}.$$

3.19. Докажете (3) по индукция.

3.20. Сумирайте $\cos x + \cos 2x + \ldots + \cos nx$.

3.21. Пресметнете следните суми:

в) $\cos x+\cos 3x+\ldots+\cos(2n-1)x,\ \ x\neq k\pi;$
б) $\sin x+\sin 3x+\ldots+\sin(2n-1)x,\ \ x\neq k\pi.$

3.22. Докажете, че:

а) $$\sin x+2\sin 2x+\ldots+n\sin nx = \frac{(n+1)\sin nx-n\sin(n+1)x}{4\sin^2\frac{x}{2}},$$

$x\neq 2k\pi;$

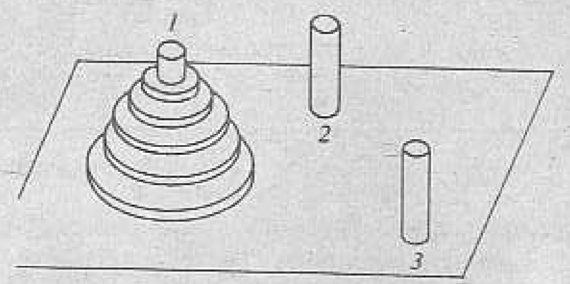
б) $$\frac{n+1}{2}+n\cos x+(n-1)\cos 2x+\ldots+\cos nx=\frac{1}{2}\left(\frac{\sin(n+1)\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\right)^2,$$

$x\neq 2k\pi;$

в) $$\cos^2 x+\cos^2 2x+\ldots+\cos^2 nx=\frac{2n-1}{4}+\frac{\sin(2n+1)x}{\sin x},\ \ x\neq k\pi.$$

3.23. Намерете a_n в явен вид, ако:
а) $a_1=\cos x,\ a_2=\cos 2x,\ a_{n+1}=a_n\,.\,2\cos x-a_{n-1},\ n\geqq 2;$
б) $a_1=\sin x,\ a_2=\sin 2x,\ a_{n+1}=a_n\,.\,2\cos x-a_{n-1},\ n\geqq 2.$

3.24 (ханойски кули). Разполагаме с три колчета. На първото колче са нанизани n концентрични пръстена с намаляващи диаметри (фиг. 2). Покажете, че пръстените могат да се



Фиг. 2

прехвърлят на третото колче с 2^n-1 премествания, като с едно преместване се прехвърля само един пръстен от едно колче на друго, и то само върху пръстен с по-голям диаметър. Покажете, че задачата не може да се реши с по-малко от 2^n-1 премествания.

§ 4. Полиноми. Принцип за сравняване на коефициентите

Функция P от вида $P(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n$ наричаме полином на x. Числата $a_0, a_1, \ldots, a_n$ наричаме коефициенти на полинома, a_0 е старшият коефициент, а естественото число n — степен на полинома (разбира се, трябва a_0 да бъде различно от нула, в противен случай степента на полинома е по-малка от n). Сума на два полинома е пак полином от каква степен?). Произведение на два полинома е също полином (от каква степен и с какъв старши коефициент?). Ако $P(x)=C$, където C е константа, ще казваме, че P е полином от нулева степен. Ако $P(x_0)=0$, ще казваме, че x_0 е нула на полинома P.

4.1 (Безу). Нека x_0 е нула на полинома P. Докажете, че съществува полином Q, за който е изпълнено

$$P(x)=(x-x_0)Q(x),$$

като Q има същия старши коефициент и степен, с единица по-ниска от степента на P.

Решение. Нека $P(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n$. Имаме

$$P(x)=P(x)-P(x_0)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n-(a_0x_0^n+\ldots+a_n)$$
$$=a_0(x^n-x_0^n)+a_1(x^{n-1}-x_0^{n-1})+\ldots+a_{n-1}(x-x_0)$$
$$=(x-x_0)[a_0x^{n-1}+(a_0x_0^{n-1}+a_1)x^{n-2}+\ldots$$
$$+(a_0x_0^{n-1}+a_1x_0^{n-2}+\ldots+a_{n-1})].$$

Полиномът в средните скоби е търсеният полином Q.

4.2. Нека $P(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n$ е полином от степен, ненадминаваща n. Нека $x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}$ са $n+1$ различни нули на P. Докажете, че P е нулев полином, т.е.

$$a_0=a_1=a_2=\ldots=a_n=0.$$

Решение. Според зад. 4.1 $P(x)=(x-x_1)Q_1(x)$. Нека $2\leqq k\leqq n+1$, тогава от равенството $P(x_k)=(x_k-x_1)Q_1(x_k)=0$ следва, че $Q_1(x_k)=0$ за $x_k\neq x_1$. Прилагаме пак зад. 4.1 към $Q_1(x)$ и x_2 и получаваме $P(x)=(x-x_1)(x-x_2)Q_2(x)$, където Q_2 е от степен, ненадминаваща $n-2$ и със старши коефициент a_0. Към Q_2 и x_3 пак прилагаме зад. 4.1 и т.н. Стигаме до представянето

$$P(x)=(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)Q_n(x),$$

където полиномът Q_n е от нулева степен със старши коефициент a_0, т.е. $Q_n(x)=a_0$ и за P получаваме

$$P(x) = a_0(x - x_1)(x - x_2)\dots(x - x_n).$$

Но $P(x_{n+1}) = 0$ и $a_0(x_{n+1} - x_1)(x_{n+1} - x_2)\dots(x_{n+1} - x_n) = 0$ и тъй като x_{n+1} е различно от $x_1, \dots, x_n$, получаваме $a_0 = 0$. Аналогично се вижда, че $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$.

4.3 (принцип за сравняване на коефициентите). Нека $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n$, $Q(x) = b_0x^n + b_1x^{n-1} + \dots + b_n$, $P(x_1) = Q(x_1)$, $P(x_2) = Q(x_2), \dots, P(x_{n+1}) = Q(x_{n+1})$, където $x_1, \dots, x_n, x_{n+1}$ са $n+1$ различни числа. Докажете, че $a_0 = b_0$, a_1a2053$b_1, \dots, a_n = b_n$.

Упътване. Разгледайте полинома $R(x) = P(x) - Q(x)$.

4.4. Покажете, че съществуват константи A и B, за които равенството

$$\frac{x+2}{x^2-5x+6} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-3}$$

е изпълнено за всяко x, $x \neq 2$, $x \neq 3$.

Решение. Ако A и B са такива константи, за тях е изпълнено равенството $x + 2 = A(x - 3) + B(x - 2)$ за всяко x, $x \neq 2$, $x \neq 3$. Но $x + 2$ и $A(x - 3) + B(x - 2)$ са полиноми от първа степен, които приемат равни стойности за безбройно много стойности на x. Следователно те имат едни и същи коефициенти, т.е.

$$1 = A + B,\ 2 = -3A - 2B.$$

Тази система има единствено решение: $A = -4$, $B = 5$. Следователно, ако задачата има решение, то е единствено. С непосредствена проверка се вижда, че намерените стойности за A и B са решение.

4.5. Намерете всички тройки числа A, B, C, за които

$$\frac{x+2}{x^3-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1} \text{ при } x \neq 1 \text{ е тъждество.}$$

4.6. Нека $x_0, x_1, \dots, x_n$ са $n+1$ различни числа и y_0 е произволно число. Покажете, че съществува единствен полином P от степен, ненадминаваща n, за който $P(x_0) = y_0$, $P(x_1) = \dots = P(x_n) = 0$.

Решение. Нека C е константа, която ще определим допълнително. Да разгледаме $P(x) = C(x - x_1)(x - x_2)\dots(x - x_n)$. Имаме

$$P(x_1) = P(x_2) = \dots = P(x_n) = 0.$$

Ще дадем на C такава стойност, че $P(x_0) = y_0$. Полиномът

$$P(x) = y_0\frac{(x - x_1)(x - x_2)\dots(x - x_n)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)\dots(x_0 - x_n)}$$

е търсеният. Той е единствен съгласно зад. 4.3.

4.7 (Лагранж). Нека (x_0,y_0), $(x_1,y_1), \dots, (x_n,y_n)$ са $n+1$ двойки числа, като $x_0, x_1, \dots, x_n$ са различни. Покажете, че съществува единствен полином P от степен, ненадминаваща n, за който $P(x_0) = y_0, P(x_1) = y_1, \dots, P(x_n) = y_n$.

Решение. Съгласно принципа за сравняване на коефициентите (зад. 4.3) повече от един полином с изброените свойства не може да има. Да разгледаме полинома

$$P(x) = y_0\frac{(x - x_1)(x - x_2)\dots(x - x_n)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)\dots(x_0 - x_n)}$$

$$+ y_1\frac{(x - x_0)(x - x_2)\dots(x - x_n)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)\dots(x_1 - x_n)} + \dots$$

$$+ y_k\frac{(x - x_1)\dots(x - x_{k-1})(x - x_{k+1})\dots(x - x_n)}{(x_k - x_1)\dots(x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1})\dots(x_k - x_n)}$$

$$+ \dots + y_n\frac{(x - x_0)\dots(x - x_{n-1})}{(x_n - x_0)\dots(x_n - x_{n-1})}.$$

Очевидно $P(x_0) = y_0$, $P(x_1) = y_1, \dots, P(x_n) = y_n$, т.е. това е търсеният полином. Той се нарича интерполационен полином на Лагранж за точките $(x_0,y_0), \dots, (x_n,y_n)$.

4.8. Намерете полином P_n, за който $P_n(0) = 0$, $P_n(1) = 0, \dots, P_n(n-1) = 0$, $P_n(n) = 1$.

4.9 (Нютон). Покажете, че съществуват константи $c_0, c_1, \dots, c_n$ такива, че интерполационният полином на Лагранж от зад. 4.7 може да се запише във вида

$$P(x) = c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)(x - x_1) + \dots + c_n(x - x_0)\dots(x - x_{n-1}).$$

Числата $c_0, c_1, \dots, c_n$ се наричат нютонови части.

Решение. Системата

$$(1)\qquad \begin{cases} c_0=y_0 \\ c_0+c_1(x_1-x_0)=y_1 \\ c_0+c_1(x_2-x_0)+c_2(x_2-x_0)(x_2-x_1)=y_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ c_0+c_1(x_n-x_0)+\dots+c_n(x_n-x_0)\dots(x_n-x_{n-1})=y_n \end{cases}$$

има единствено решение $c_0, c_1, \dots, c_n$.

За полинома

$$Q(x)=c_0+c_1(x-x_0)+\dots+c_n(x-x_0)\dots(x-x_{n-1})$$

имаме $Q(x_i)=y_i$, $0\leqq i\leqq n$, и съгласно зад. 4.3 $P(x)=Q(x)$, където P е интерполационният полином на Лагранж за $(x_0,y_0), \dots, (x_n,y_n)$. Пресмятането на $c_0,c_1,\dots,c_n$ от (1) не е удобно. Ще посочим попряк начин за получаване на нютоновите частни. Нека

$$(2)\qquad g_k(x)=c_0+c_1(x-x_0)+\dots+c_k(x-x_0)\dots(x-x_{k-1}).$$

Ясно е, че $g_k(x_i)=y_i$, $0\leqq i\leqq k$, и съгласно зад. 4.7

$$(3)\quad g_k(x)=y_0\frac{(x-x_1)\dots(x-x_k)}{(x_0-x_1)\dots(x_0-x_k)}+\dots+y_k\frac{(x-x_0)\dots(x-x_{k-1})}{(x_k-x_0)\dots(x_k-x_{k-1})}.$$

Като сравним коефициентите пред k-тите степени в (2) и (3), получаваме

$$c_k=\frac{y_k}{(x_0-x_1)\dots(x_0-x_k)}+\dots+\frac{y_k}{(x_k-x_0)\dots(x_k-x_{k-1})}.$$

4.10. Нека $n\in\mathbf{N}$. Докажете, че съществуват единствени полиноми P_n и Q_n със старши коефициенти 2^{n-1} от степени съответно n и $n-1$, за които

$$(4)\qquad \begin{aligned} &\cos ny=P_n(\cos y), \\ &\sin ny=\sin y\, Q_n(\cos y). \end{aligned}$$

Решение. От зад. 4.3 следва, че ако такива полиноми съществуват, те са единствени. Съществуването ще докажем с индукция по n. Нека $n=1$. Полиномите $P_1(x)=x$ и $Q_1(x)=1$ удовлетворяват условието на задачата. Да предположим, че сме намерили полиноми $P_1,\dots,P_n$ и $Q_1,\dots,Q_n$, които удовлетворяват условието на задачата. Ще определим следващата двойка полиноми P_{n+1} и Q_{n+1}. В сила са тъждествата

$$\begin{aligned} &\cos(n+1)y=2\cos y\cos ny-\cos(n-1)y, \\ &\sin(n+1)y=2\cos y\sin ny-\sin(n-1)y. \end{aligned}$$

От индукционното допускане следва, че

$$\begin{aligned} &\cos(n+1)y=2\cos y P_n(\cos y)-P_{n-1}(\cos y), \\ &\sin(n+1)y=\sin y(2\cos y Q_n(\cos y)-Q_{n-1}(\cos y)). \end{aligned}$$

Остава да положим $P_{n+1}(x)=2xP_n(x)-P_{n-1}(x)$,

$$Q_{n+1}(x)=2xQ_n(x)-Q_{n-1}(x).$$

§ 5. Нютонов бином

Нека α е произволно реално число. Числата

$$\binom{\alpha}{0}=1,\ \binom{\alpha}{k}=\frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!},\ k\in\mathbf{N},$$

се наричат биномни коефициенти.

5.1. Докажете, че

$$\binom{\alpha}{k}+\binom{\alpha}{k+1}=\binom{\alpha+1}{k+1}.$$

Решение. Нека $k=0$. Тогава

$$\binom{\alpha}{0}+\binom{\alpha}{1}=1+\alpha=\binom{\alpha+1}{1}.$$

Нека сега $k\in\mathbf{N}$. Имаме

$$\binom{\alpha}{k}+\binom{\alpha}{k+1}=\frac{\alpha\dots(\alpha-k+1)}{k!}+\frac{\alpha\dots(\alpha-k)}{(k+1)!}$$

$$=\frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)[(k+1)+(\alpha-k)]}{(k+1)!}=\frac{(\alpha+1)\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{(k+1)!}$$

$$=\binom{\alpha+1}{k+1}.$$

5.2. Нека n и k са цели неотрицателни числа и $n\geqq k$. Докажете, че: **а)** $\binom{n}{k}=\frac{n!}{(n-k)!\,k!}$, **б)** $\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$.

5.3. Докажете, че:

а) $\binom{n}{0}+\binom{n+1}{1}+\ldots+\binom{n+k}{k}=\binom{n+k+1}{k}$, $k\in\mathbf{N}$, $n\in\mathbf{R}$;

б) $\binom{n}{n}+\binom{n+1}{n}+\ldots+\binom{n+k}{n}=\binom{n+k+1}{n+1}$, $n, k\in\mathbf{N}$.

5.4. Нека $n, k\in\mathbf{N}$. Докажете, че:

а) $\binom{n}{k}=0$ при $k>n$; б) $\binom{n}{k}\in\mathbf{N}$ за $k\leqq n$.

5.5. Нека $n\in\mathbf{N}$ и $k\leqq n$. Покажете, че броят на k-елементните подмножеста на множество, състоящо се от n елемента, е $\binom{n}{k}$.

5.6. Докажете равенството

$$\binom{\alpha}{0}-\binom{\alpha}{1}+\binom{\alpha}{2}-\ldots+(-1)^n\binom{\alpha}{n}=(-1)^n\binom{\alpha-1}{n}.$$

5.7 (биномна формула на Нютон). Докажете тъждествата:

а) $(1+x)^n=\binom{n}{0}+\binom{n}{1}x+\ldots+\binom{n}{n}x^n=\sum\limits_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k$;

б) $(a+b)^n=\binom{n}{0}a^n+\binom{n}{1}a^{n-1}b+\ldots+\binom{n}{n}b^n=\sum\limits_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$.

Решение. а) Ще докажем тъждеството индуктивно. За $n=1$ имаме $(1+x)^1=\binom{1}{0}+\binom{1}{1}x$. Допускаме, че а) е вярно за някое $n\in\mathbf{N}$. $n\in\mathbf{N}$. Тогава

$$(1+x)^{n+1}=\left[\binom{n}{0}+\binom{n}{1}x+\ldots+\binom{n}{n}x^n\right](1+x)$$

$$=\binom{n}{0}+\left[\binom{n}{1}+\binom{n}{0}\right]x+\ldots+\left[\binom{n}{k}+\binom{n}{k-1}\right]x^k$$

$$+\ldots+\left[\binom{n}{n}+\binom{n}{n-1}\right]x^n+\binom{n}{n}x^{n+1}$$

$$=\binom{n+1}{0}+\binom{n+1}{1}x+\ldots+\binom{n+1}{k}x^k+\ldots+\binom{n+1}{n}x^n+\binom{n+1}{n+1}x^{n+1}.$$

При доказателството използвахме свойството на биномните коефициенти, дадено в зад. 5.1.

б) Положете в а) $x=\frac{b}{a}$.

5.8. Докажете, че:

а) $\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\ldots+\binom{n}{n}=2^n$;

б) $\binom{n}{0}-\binom{n}{1}+\ldots+(-1)^n\binom{n}{n}=0$.

Упътване. Приложете зад. 5.7.

5.9. Нека n е фиксирано естествено число. Намерете сумата на биномните коефициенти от вида

а) $\binom{n}{2k}$; б) $\binom{n}{2k+1}$.

Упътване. Приложете зад. 5.8.

5.10. Докажете, че:

а) $\binom{n}{0}^2+\binom{n}{1}^2+\ldots+\binom{n}{n}^2=\binom{2n}{n}$;

б) $\binom{2n}{0}^2-\binom{2n}{1}^2+\ldots+\binom{2n}{2n}^2=(-1)^n\binom{2n}{n}$;

в) $\binom{n}{1} - 2\binom{n}{2} + 3\binom{n}{3} - \ldots + (-1)^{n-1} n\binom{n}{n}$

$$= \begin{cases} 1 \text{ за } n=1, \\ 0 \text{ за } n>1; \end{cases}$$

г) $\binom{n}{1}^2 + 2\binom{n}{2}^2 + \ldots + n\binom{n}{n}^2 = \dfrac{(2n-1)}{((n-1)!)^2}$.

Решение. а) От тъждеството $[(1+x)^n]^2 = (1+x)^{2n}$, като приложим зад. 5.7, а), получаваме

$$\left[\binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \ldots + \binom{n}{n}x^n\right]\left[\binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1} + \ldots + \binom{n}{n}\right]$$

$$= \binom{2n}{0} + \binom{2n}{1}x + \ldots + \binom{2n}{n}x^n + \ldots + \binom{2n}{2n}x^{2n}.$$

Тези два полинома приемат равни стойности за всяко x. Съгласно принципа за сравняване на коефициентите те са едни и същи. Чрез приравняване на коефициентите пред n-тите степени получаваме търсеното равенство.

б) Използвайте равенството $(1+x)^{2n}(1-x)^{2n} = (1-x^2)^{2n}$.

в) и г) Докажете и използвайте съответно равенствата

$$nx^{n-1} = \binom{n}{1} + 2\binom{n}{2}(x-1) + \ldots + n\binom{n}{n}(x-1)^{n-1}$$

и

$$n(1+x)^{2n-1} = (1+x)^n \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}x^{k-1}.$$

5.11. Нека $p \in \mathbf{N}$.

а) Ако $m, n \in \mathbf{N}$ и $m+n \leqq p$, докажете, че

$$\binom{n}{0}\binom{m}{p} + \binom{n}{1}\binom{m}{p-1} + \ldots + \binom{n}{p}\binom{m}{0} = \binom{m+n}{p};$$

б) докажете горното равенство за произволни реални числа m, n.

5.12 (Бернули). Нека $k \in \mathbf{N}$. Докажете, че съществува полином

$$P_{k+1}(x) = a_0x^{k+1} + a_1x^k + a_2x^{k-1} + \ldots + a_{k+1},$$

който за всяко естествено n удовлетворява равенството

$$1^k + 2^k + \ldots + n^k = P_{k+1}(n).$$

Числата $a_0, a_1, \ldots, a_{k+1}$ се наричат числа на Бернули. Съществуват формули за тяхното пресмятане.

Покажете, че $a_0 = \dfrac{1}{k+1}$, $a_1 = \dfrac{1}{2}$.

Решение. Зад. 3.5 показва, че $P_2(x) = \dfrac{1}{2}(x+1)x = \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{1}{2}x$, $P_3(x) = \dfrac{1}{6}x(x+1)(2x+1) = \dfrac{1}{3}x^3 + \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{1}{6}x$ и т.н.

Като използвате това, решете задачата чрез индукция по k.

Решението, което тук излагаме, е предложено от аспиранта А. Александров. Да означим с P_{k+1} полинома на x, за който $P_{k+1}(1) = 1$, $P_{k+1}(2) = 1^k + 2^k, \ldots, P_{k+1}(k+2) = 1^k + 2^k + \ldots + (k+2)^k$. Такъв полином съществува и е единствен съгласно зад. 4.7. Полиномът $Q(x) = P_{k+1}(x+1) - P_{k+1}(x)$ е от степен най-много k, като $Q(1) = (1+1)^k$, $Q(2) = (1+2)^k, \ldots, Q(k+1) = (1+(k+1))^k$. Пак от зад. 4.7 имаме $Q(x) = (1+x)^k$. Но $P_{k+1}(x+1) - P_{k+1}(x)$ $= a_0(k+1)x^k + \left(a_0\dfrac{(k+1)k}{2} + a_1k\right)x^{k-1} + \ldots + a_k$, а $Q(x) = \binom{k}{0}x^k + \binom{k}{1}x^{k-1} + \ldots + \binom{k}{k}$.

Като приравним коефициентите пред най-високите степени, получаваме $a_0(k+1) = 1$, $a_0\dfrac{(k+1)k}{2} + a_1k = k$,

откъдето $a_0 = \dfrac{1}{k+1}$, $a_1 = \dfrac{1}{2}$.

§ 6. Обратни кръгови функции. Полиноми на Чебишов

Нека функцията f е дефинирана в множеството D. Употребяваме още означенията $f(x)$ или $x \mapsto f(x)$.

Казваме, че функцията f е *обратима* в D, ако в различни точки от D тя приема различни стойности.

Нека f е обратима в D. Да означим с M множеството от функционалните стойности на f. В M ще дефинираме функция g по следния начин: за $x \in M$ с $g(x)$ означаваме това $y \in D$, за което $f(y) = x$. Поради обратимостта на f съществува единствено такова y.

Така дефинираната функция g се нарича обратна на f и често се означава с f^{-1}.

6.1. Докажете, че:

а) $f(f^{-1}(x)) = x,\ x \in M$; **б)** $f^{-1}(f(y)) = y, y \in D$.

Решение. **а)** Нека $x \in M$ и $f^{-1}(x) = y$. По дефиниция $f(y) = x$. Следователно $f(f^{-1}(x)) = x$.

Една функция наричаме монотонна, ако е растяща (за $x_1 < x_2$, $f(x_1) < f(x_2)$) или намаляваща (за $x_1 < x_2$, $f(x_1) > f(x_2)$).

6.2. Нека f е монотонна в D. Докажете, че тогава f е обратима и обратната ѝ функция е също монотонна.

Решение. Да предположим за определеност, че f е растяща. Очевидно f е обратима. Ще покажем, че f^{-1} е също растяща. Нека $x_1, x_2 \in M$ и $x_1 < x_2$. Да предположим, че $f^{-1}(x_1) \geqq f^{-1}(x_2)$. Тъй като $f^{-1}(x_1), f^{-1}(x_2) \in D$, а f е растяща в D, ще имаме $f(f^{-1}(x_1)) \geqq f(f^{-1}(x_2))$. Но от зад. 6.1, а) следва, че $f(f^{-1}(x_1)) = x_1$ и $f(f^{-1}(x_2)) = x_2$, т.е. $x_1 \geqq x_2$, което противоречи на избора на x_1 и x_2.

Преди да преминем към обратните кръгови функции, ще припомним основните тригонометрични зависимости, които е достатъчно да се помнят, за да не се нуждае човек от никакви допълнителни помагала. Преди всичко трябва да знаем как се изменят $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ в зависимост от аргумента им α и да можем да скицираме графиките им (фиг. 3)

Първата основна група формули е:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\ \cos\beta + \sin\beta\cos\alpha,$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\ \cos\beta - \sin\beta\cos\alpha,$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\ \cos\beta - \sin\alpha\sin\beta,$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\ \cos\beta + \sin\alpha\sin\beta.$$

Втората основна група формули може (при нужда) да се изведе от първата, но не е трудно да се запомни:

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2},$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

Третата основна група формули е директно следствие от първата:

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)),$$

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)),$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)).$$

Забелязвате, че tg и ctg не участвуват в тези формули. Разбира се, трябва да знаем поведението на tg и ctg и да можем да скицираме графиките им, но всяка формула, свързана с тях, можем лесно да изведем от основните и не е необходимо да се помни. Например да изразим $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)$ чрез $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{tg}\beta$:

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} = \frac{\sin\alpha.\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha}{\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta}$$

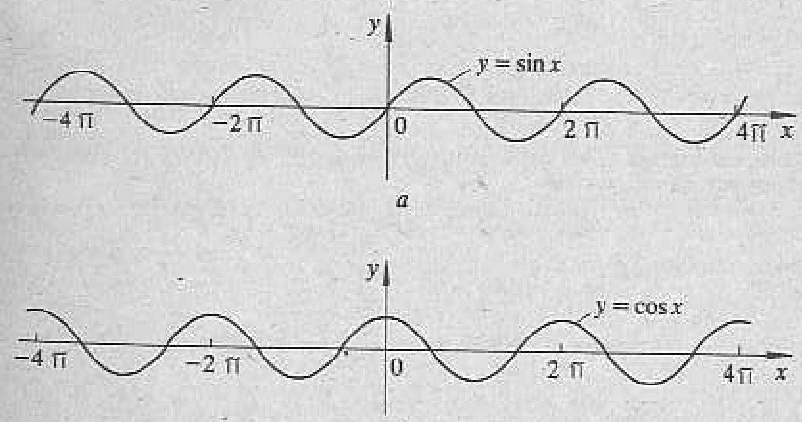
$$= \frac{\cos\alpha.\cos\beta\left(\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \dfrac{\sin\beta}{\cos\beta}\right)}{\cos\alpha\cos\beta\left(1 - \dfrac{\sin\alpha.\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}\right)} = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}.$$

Други важни формули изразяват $\sin 2\alpha$ и $\cos 2\alpha$ чрез $\operatorname{tg}\alpha$:

$$\sin 2\alpha = \frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha} = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha},$$

$$\cos 2\alpha = \frac{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha} = \frac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}.$$

Да разгледаме сега функцията sin (фиг. 3). Тя е дефинирана върху цялата



Фиг. 3

числова права и не е обратима, тъй като $\sin\alpha = \sin(\alpha + 2k\pi)$, $k\in\mathbf{Z}$. Но ако я разгледаме само в множеството $D = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, тя е обратима. Обратната ѝ

функция е дефинирана в $M = [-1, 1]$ и се означава с arcsin (чете се „аркус синус"; наименованието произхожда от гръцката дума „аркус" — дъга, и ако прочетем $\arcsin x$ като „дъга, чийто синус е x", това ни подсеща за начина, по който е дефинирана функцията).

Нека $-1 \leqq x \leqq 1$ и $\arcsin x = \alpha$. Тогава

(1) $$\sin\alpha = x,$$

(2) $$-\frac{\pi}{2} \leqq \alpha \leqq \frac{\pi}{2}.$$

Обратно, нека (1) и (2) са изпълнени за x и α. Тогава $\arcsin x = \alpha$. И така (1) и (2) определят еднозначно α и могат да служат за дефиниция на функцията $\arcsin x$.

6.3. Пресметнете $\arcsin 0$, $\arcsin 1$, $\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)$.

6.4. Докажете, че:

а) $\sin(\arcsin x)=x$, $-1\leqq x\leqq 1$;

б) $\arcsin(\sin\alpha)=\alpha$, $-\frac{\pi}{2}\leqq\alpha\leqq\frac{\pi}{2}$;

в) $\arcsin(\sin\alpha)=\pi-\alpha$, $\frac{\pi}{2}\leqq\alpha\leqq\frac{3\pi}{2}$;

г) $\arcsin(\sin\alpha)=-\pi-\alpha$, $-\frac{3\pi}{2}\leqq\alpha\leqq-\frac{\pi}{2}$;

д) $\arcsin(\sin\alpha)$ е линейна функция на α във всеки интервал от вида $[-(2k-1)\frac{\pi}{2}, (2k+1)\frac{\pi}{2}]$, $k\in\mathbf{Z}$ (f е линейна, ако $f(x)=ax+b$).

Решение. **в)** Достатъчно е да покажем, че $\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha$, което очевидно е изпълнено, и $-\frac{\pi}{2}\leqq\pi-\alpha\leqq\frac{\pi}{2}$.

От неравенството $\frac{\pi}{2}\leqq\alpha\leqq\frac{3\pi}{2}$ последователно получаваме

$$-\frac{3\pi}{2}\leqq-\alpha\leqq-\frac{\pi}{2}, -\frac{3\pi}{2}+\pi\leqq\pi-\alpha\leqq\pi-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\leqq\pi-\alpha\leqq\frac{\pi}{2}.$$

6.5. Докажете, че $\arcsin x$ е растяща функция.

6.6. Докажете, че

$$\arcsin(2x^2-1) = \begin{cases} -\frac{\pi}{2} - 2\arcsin x & \text{за } -1\leqq x\leqq 0, \\ -\frac{\pi}{2} + 2\arcsin x & \text{за } 0\leqq x\leqq 1. \end{cases}$$

Решение. Нека $\arcsin x = \alpha$. Тогава $\sin\alpha = x$, $-\frac{\pi}{2}\leqq\alpha\leqq\frac{\pi}{2}$ и $\arcsin(2x^2-1) = \arcsin(2\sin^2\alpha - 1) = \arcsin(\sin^2\alpha - \cos^2\alpha)$

$= \arcsin(-\cos 2\alpha) = \arcsin(-\sin(\frac{\pi}{2} - 2\alpha)) = \arcsin(\sin(2\alpha - \frac{\pi}{2}))$.

Нека $0\leqq x\leqq 1$. Съгласно зад. 6.5 $\arcsin 0\leqq\arcsin x\leqq\arcsin 1$, т.е.

$0\leqq\alpha\leqq\frac{\pi}{2}$ и съответно $-\frac{\pi}{2}\leqq 2\alpha-\frac{\pi}{2}\leqq\frac{\pi}{2}$. От зад. 6.4, б) следва $\arcsin(2x^2-1) = 2\alpha - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2} + 2\arcsin x$. Нека сега $-1\leqq x\leqq 0$. Тогава $-\frac{\pi}{2}\leqq\alpha\leqq 0$ и $-\frac{\pi}{2}\leqq-\frac{\pi}{2}-2\alpha\leqq\frac{\pi}{2}$.

$\arcsin(2x^2-1) = \arcsin(\sin(\pi-2\alpha+\frac{\pi}{2})) = \arcsin(\sin(-\frac{\pi}{2}-2\alpha))$

$= -\frac{\pi}{2} - 2\alpha = -\frac{\pi}{2} - 2\arcsin x$.

Да разгледаме функцията cos в множеството $D = [0,\pi]$. Там тя е намаляваща и обратима. Обратната ѝ функция се означава с $\arccos x$ („аркус косинус"), дефинирана е за $-1\leqq x\leqq 1$ и ако $\alpha = \arccos x$, то

(3) $$\cos\alpha = x,$$

(4) $$0\leqq\alpha\leqq\pi.$$

От (3) и (4) α се определя еднозначно.

Аналогично се дефинират функциите $\operatorname{arctg} x$ и $\operatorname{arcctg} x$ като обратни съответно на $\operatorname{tg}\alpha$ в $D = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ и $\operatorname{ctg}\alpha$ в $D = (0,\pi)$. Дефиниционната област на arctg и arcctg е цялата числова права. Ако $\operatorname{arctg} x = \alpha$, то

(5) $$\operatorname{tg}\alpha = x,$$

(6) $$-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}.$$

α се определя еднозначно от (5) и (6) при дадено x. Ако

(7) $$\operatorname{ctg}\alpha = x,$$

(8) $$0 < \alpha < \pi$$

за някое x, то α се определя еднозначно от (7) и (8) и $\operatorname{arcctg} x = \alpha$.

6.7. Докажете, че:
а) $\cos(\arccos x) = x, \quad -1 \leqq x \leqq 1;$
б) $\arccos(\cos\alpha) = \alpha, \quad 0 \leqq \alpha \leqq \pi;$
в) $\arccos(\cos\alpha) = 2\pi - \alpha, \quad \pi \leqq \alpha \leqq 2\pi;$
г) $\arccos(\cos\alpha)$ е линейна функция на α във всеки интервал от вида $[k\pi, \ (k+1)\pi], \ k \in \mathbf{Z}$.

6.8. Докажете, че:

а) $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = x,$

б) $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}\alpha) = \alpha, \ -\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2};$

в) $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}\alpha) = \alpha - k\pi, (2k-1)\frac{\pi}{2} < \alpha < (2k+1)\frac{\pi}{2}, \ k \in \mathbf{Z}.$

6.9. Докажете, че:
а) $\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} x) = x;$
б) $\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg}\alpha) = \alpha, \quad 0 < \alpha < \pi;$
в) $\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg}\alpha) = \alpha - k\pi, \quad k\pi < \alpha < (k+1)\pi, \quad k \in \mathbf{Z}.$

6.10. Докажете, че $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}, \ -1 \leqq x \leqq 1.$

Решение. Нека $\arccos x = \alpha$, тогава $0 \leqq \alpha \leqq \pi$ и $\cos\alpha = x$.

Достатъчно е да проверим, че $\arcsin x = \frac{\pi}{2} - \alpha$, т.е.

$\sin(\frac{\pi}{2} - \alpha) = x$ и $-\frac{\pi}{2} \leqq \frac{\pi}{2} - \alpha \leqq \frac{\pi}{2}$ ((1), (2)).

Но $\sin(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \cos\alpha = x$, а от $0 \leqq \alpha \leqq \pi$ последователно получаваме

$-\pi \leqq -\alpha \leqq 0, \ -\frac{\pi}{2} \leqq \frac{\pi}{2} - \alpha \leqq \frac{\pi}{2}.$

6.11. Докажете, че:

а) $\sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2}, \quad -1 \leqq x \leqq 1;$

б) $\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}, \quad -1 \leqq x \leqq 1;$

в) $\sin(2\arccos x) = 2x\sqrt{1-x^2}, \quad -1 \leqq x \leqq 1.$

6.12. Докажете, че:

а) $\sin(2\operatorname{arctg} x) = \frac{2x}{1+x^2};$

б) $\cos(2\operatorname{arctg} x) = \frac{1-x^2}{1+x^2}.$

6.13. Проверете, че $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2}.$

6.14. Докажете, че

а) $\arcsin(-x) = -\arcsin x, \quad -1 \leqq x \leqq 1;$
б) $\operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x;$
в) $\arccos(-x) = \pi - \arccos x, \quad -1 \leqq x \leqq 1;$
г) $\operatorname{arcctg}(-x) = \pi - \operatorname{arcctg} x.$

6.15. Докажете равенствата:

а) $2\arcsin\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} + \arccos\frac{1}{2} = \frac{\pi}{2};$

б) $\arccos x + \arccos\left(\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3-3x^2}\right) = \frac{\pi}{3}, \quad \frac{1}{2} \leqq x \leqq 1.$

Докажете равенствата:

6.16. $\arccos(4x^3-3x) = \begin{cases} 3\arccos x \text{ за } \frac{1}{2} \leqq x \leqq 1, \\ 2\pi - 3\arccos x \text{ за } -\frac{1}{2} \leqq x \leqq \frac{1}{2}, \\ -2\pi + 3\arccos x \text{ за } -1 \leqq x \leqq -\frac{1}{2}. \end{cases}$

6.17. $\operatorname{arctg} \frac{x-1}{x+1} = \begin{cases} \operatorname{arctg} x - \frac{\pi}{4} \text{ за } x>-1, \\ \operatorname{arctg} x + \frac{3\pi}{4} \text{ за } x<-1. \end{cases}$

6.18. $\arcsin \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \begin{cases} \arccos \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \text{ за } x \geqq 0. \\ \pi - \arccos \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \text{ за } x \leqq 0. \end{cases}$

6.19. **а)** $\sin(\operatorname{arctg} x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$; **б)** $\sin(\operatorname{arcctg} x)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$;

в) $\cos(\operatorname{arctg} x)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$; **г)** $\cos(\operatorname{arcctg} x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$;

д) $\operatorname{tg}(\arcsin x)=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$, $|x|<1$; **е)** $\operatorname{tg}(\arccos x)=\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$,

$|x|\leqq 1$, $x\neq 0$.

Р е ш е н и е. а) Разгледайте правоъгълен триъгълник с дължина на единия катет x, на другия — 1. Острият ъгъл срещу катета с дължина x е равен на $\operatorname{arctg} x$. Следователно $\sin(\operatorname{arctg} x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

6.20. Нека числата $x,y\in[-1,1]$ са с различни знаци или удовлетворяват неравенството $x^2+y^2\leqq 1$. Докажете, че $\arcsin x+\arcsin y$ $=\arcsin(x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2})$.

Р е ш е н и е. Да въведем означенията $\arcsin x=\alpha$, $\arcsin y=\beta$. Тогава $\sin\alpha=x$, $\sin\beta=y$ и $\alpha,\beta\in[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, $\arcsin(x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2})$ $=\arcsin(\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha)=\arcsin(\sin(\alpha+\beta))$. Като имаме предвид 6.4, б), достатъчно е да проверим, че $-\frac{\pi}{2}\leqq\alpha+\beta\leqq\frac{\pi}{2}$. Ако $xy\leqq 0$, то или $x\geqq 0$ и $y\leqq 0$, или $x\leqq 0$ и $y\geqq 0$. В първия случай $0\leqq\alpha\leqq\frac{\pi}{2}$ и $-\frac{\pi}{2}\leqq\beta\leqq 0$, във втория — обратното, но и в двата случая $-\frac{\pi}{2}\leqq\alpha+\beta\leqq\frac{\pi}{2}$. Нека сега $xy\geqq 0$ и $x^2+y^2\leqq 1$. От дефиницията на α и β имаме $-\pi\leqq\alpha+\beta\leqq\pi$. Необходимото и достатъчно условие за $\alpha+\beta\in[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ е $\cos(\alpha+\beta)\geqq 0$. Но $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\times\sin\beta=\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}-xy$. Неравенството $\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}-xy\geqq 0$ е еквивалентно на всяко от неравенствата:

$$\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}\geqq xy,\quad (1-x^2)(1-y^2)\geqq x^2y^2,\quad x^2+y^2\leqq 1.$$

6.21. Изразете $\arcsin(x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2})$ чрез $\arcsin x+\arcsin y$ за $x,y\in[-1,1]$, $x^2+y^2>1$, $xy>0$.

6.22. Докажете, че

а) $\operatorname{arctg} x+\operatorname{arctg}\frac{1}{x} = \begin{cases} \frac{\pi}{2} \text{ за } x>0, \\ -\frac{\pi}{2} \text{ за } x<0; \end{cases}$

б) $\operatorname{arctg}x+\operatorname{arctg}y=\operatorname{arctg}\frac{x+y}{1-xy}+\varepsilon\pi$, където $\varepsilon=0$ при $xy<1$; $\varepsilon=1$

при $xy>1$ и $x>0$; $\varepsilon=-1$ при $xy>1$ и $x<0$;

в) $\operatorname{arcctg} x+\operatorname{arcctg} y=\operatorname{arcctg}\dfrac{x+y}{xy-1}+\varepsilon\pi$, където $\varepsilon=0$ при $x+y>0$ и $\varepsilon=1$ при $x+y<0$.

Решение. **б)** Нека $\operatorname{arctg} x=\alpha$ и $\operatorname{arctg} y=\beta$. Тогава $\operatorname{tg}\alpha=x$, $\operatorname{tg}\beta=y$, $\alpha,\beta\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$, $-\pi<\alpha+\beta<\pi$ и $\operatorname{arctg}\dfrac{x+y}{1-xy}+\varepsilon\pi=\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}(\alpha+\beta))+\varepsilon\pi$. Ще приложим зад. 6.8, б). Нека $xy<1$. Тогава $\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta<1$, $\sin\alpha\sin\beta<\cos\alpha\cos\beta$, $\cos(\alpha+\beta)>0$, т.е. $-\dfrac{\pi}{2}<\alpha+\beta<\dfrac{\pi}{2}$, $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}(\alpha+\beta))=\alpha+\beta$ и равенството е изпълнено при $xy<1$. Останалите случаи се разглеждат аналогично.

6.23. Докажете, че:

а) $\arcsin\dfrac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2-2x}}=\dfrac{\pi}{8}+\dfrac{1}{4}\arcsin x$, $|x|\leqq 1$;

б) $\operatorname{arctg}\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\arcsin x}{2}$, $|x|\leqq 1$;

в) $\arcsin\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}\right)=\dfrac{\arcsin x}{2}$, $|x|\leqq 1$.

6.24. Докажете, че ако $|x|\leqq 1$ и $xy\leqq 0$ или $x^2(y^2+1)\leqq 1$, е вярно равенството

$$\arcsin x+\operatorname{arctg} y=\arcsin\frac{x+y\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+y^2}}.$$

6.25. Докажете, че:

а) $\operatorname{arctg} x-\operatorname{arctg} y=\operatorname{arctg}\dfrac{x-y}{1+xy}$, $x,y>0$;

б) $\operatorname{arcctg} x-\operatorname{arcctg} y=\dfrac{\pi}{2}-\operatorname{arcctg}\dfrac{y-x}{1+xy}$, $x,y>0$;

в) $\operatorname{arctg}\dfrac{x\cos\varphi}{1-x\sin\varphi}-\operatorname{arctg}\dfrac{x-\sin\varphi}{\cos\varphi}=\varphi$, $\varphi\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$, $1-x\sin\varphi>0$;

г) $\operatorname{arcctg}\dfrac{1-x\sin\varphi}{x\cos\varphi}-\operatorname{arcctg}\dfrac{\cos\varphi}{x-\sin\varphi}=\varphi$, $\varphi\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$, $1-x\sin\varphi<0$ или $\varphi\in\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$, $1-x\sin\varphi>0$.

6.26. Нека $n\in\mathbf{N}$. Докажете равенствата:

а) $\operatorname{arctg}\dfrac{1}{3}+\operatorname{arctg}\dfrac{1}{7}+\ldots+\operatorname{arctg}\dfrac{1}{1+n+n^2}=\operatorname{arctg}\dfrac{n}{n+2}$;

б) $\operatorname{arcctg}\dfrac{1}{2.1^2}+\operatorname{arcctg}\dfrac{1}{2.2^2}+\ldots+\operatorname{arcctg}\dfrac{1}{2n^2}=\operatorname{arcctg}\dfrac{n}{n+1}+(n-1)\dfrac{\pi}{2}$.

Упътване. Доказателството извършете по индукция, като използвате зад. 6.25, а) и б).

6.27. Нека $T_n(x)=\cos(n\arccos x)$, $x\in[-1,1]$, $n\in\mathbf{N}$,

$$U_n(x)=\frac{\sin((n+1)\arccos x)}{\sqrt{1-x^2}},\quad x\in(-1,1).$$

Докажете, че T_n и U_n са полиноми от n-та степен със старши коефициенти съответно 2^{n-1} и 2^n.

T_n и U_n се наричат полиноми на Чебишов.

6.28. Докажете, че полиномите на Чебишов T_n и U_n, дефинирани в зад. 6.27, удовлетворяват следните рекурентни връзки:

а) $T_{n+1}(x)-2xT_n(x)+T_{n-1}(x)=0$;

б) $U_{n+1}(x)-2xU_n(x)+U_{n-1}(x)=0$.

Упътване. Вж. зад. 4.10.

6.29. Покажете, че $C_n(x)=\dfrac{1}{2^{n-1}}T_n(x)$ е полином със старши коефициент единица и $|C_n(x)|\leqq\dfrac{1}{2^{n-1}}$ за $x\in[-1,1]$.

6.30. Нека C_n е полиномът, дефиниран в зад. 6.29. Покажете, че съществуват $n+1$ точки $-1 \leqq x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n \leqq 1$, за които

$$|C_n(x_k)| = \frac{1}{2^{n-1}} \text{ и } C_n(x_k) \,.\, C_n(x_{k+1}) < 0.$$

Точките $x_0, x_1, \ldots, x_n$ от зад. 6.30 се наричат чебишов алтернанс.

6.31. Нека P е полином от степен n със старши коефициент единица, за който $|P(x)| \leqq \frac{1}{2^{n-1}}$ за $x \in [-1,1]$. Докажете, че $P(x) = C_n(x)$, където C_n е дефиниран в зад. 6.29.

Упътване. Разгледайте полинома $R(x) = C_n(x) - P(x)$. Нека $x_0, x_1, \ldots, x_n$ е чебишовият алтернанс за C_n (зад. 6.29). Покажете, че R съвпада с интерполационния полином на Лагранж за точките $(x_0, R(x_0)), (x_1, R(x_1)), \ldots, (x_n, R(x_n))$. Като имате предвид степента на R, покажете, че коефициентът пред n-тата степен на интерполационния полином е нула. Използвайте това, за да покажете, че $R(x_0) = R(x_1) = \ldots = R(x_n) = 0$.

Глава 1

Числови редици

§ 1. Основни свойства на числовите редици

Ако на всяко естествено число n е съпоставено по някакъв начин числото a_n, казваме, че е определена редицата $a_1, a_2, a_3, \ldots$, която за по-кратко означаваме с $\{a_n\}$.

Казваме, че a е точка на сгъстяване за редицата $\{a_n\}$, ако всяка околност на a съдържа безбройно много членове на редицата. Да припомним, че околност на една точка е всеки отворен интервал, който съдържа точката.

1.1. Намерете точките на сгъстяване на редиците:

а) $x_{2k} = a,\ x_{2k+1} = b,\ a \neq b;$

б) $x_1 = 1,\ x_2 = 2, \ldots,\ x_k = k,\ x_{k+1} = 1,\ x_{k+2} = 2, \ldots\ (x_{lk} = k,\ x_{lk+r} = r,\ 0 < r \leqq k-1);$

в) $1,2,1,2,3,1,2,3,4,1, \ldots$

Теорема (Болцано—Вайерщрас). Всяка ограничена редица има поне една точка на сгъстяване.

Казваме, че $\{b_k\}$ е подредица на $\{a_n\}$, ако $b_k = a_{n_k}$, където $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$

Казваме, че редицата $\{a_n\}$ е сходяща, ако е ограничена и има единствена точка на сгъстяване (първа дефиниция на сходяща редица).

Казваме, че редицата $\{a_n\}$ е сходяща, ако съществува число a такова, че за всяко $\varepsilon > 0$ може да се намери число ν със свойството — за всяко $n > \nu$, $n \in \mathbb{N}$, е изпълнено $|a_n - a| < \varepsilon$ (втора дефиниция за сходяща редица, ε-дефиниция или дефиниция на Коши).

1.2. Докажете, че двете дефиниции на сходяща редица са еквивалентни, т.е. ако една редица е сходяща според първата дефиниция, то за единствената ѝ точка на сгъстяване е изпълнено условието от втората дефиниция и обратно, ако една редица е сходяща според втората дефиниция, то тя е ограничена и a е единствената ѝ точка на сгъстяване.

Единствената точка на сгъстяване на една сходяща редица или точката, за която е изпълнено условието от втората дефиниция, наричаме граница на редицата. Ако a е граница на $\{a_n\}$, казваме, че $\{a_n\}$ клони към a, и това изразяваме кратко чрез символа $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ или $a_n \to a$.

1.3. Докажете, че ако a е точка на сгъстяване за $\{a_n\}$, то съществува подредица на $\{a_n\}$, която клони към a.

1.4. Докажете, че ако една редица е сходяща, то всичките ѝ подредици са сходящи и имат една и съща граница.

1.5. Постройте редица, която да има за точки на сгъстяване всички точки от интервала $[0,1]$.

1.6. Докажете чрез дефиницията на Коши, че:

а) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$; **б)** $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0, 0 < q < 1$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^k} = 0,\ k\in\mathbf{N}$; **г)** $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$;

д) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{1+n^2} = 0$; **е)** $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} = 0$.

Решение. **а)** Избираме произволно $\varepsilon > 0$. Търсим ν такова, че при $n > \nu$

да имаме $\left|\frac{n}{n+1} - 1\right| < \varepsilon$. За всяко $n\in\mathbf{N}$ имаме

$$\left|\frac{n}{n+1} - 1\right| = \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}. \tag{1}$$

Да изберем $\nu = \frac{1}{\varepsilon}$. Нека сега $n > \nu$. Тогава $\frac{1}{n} < \varepsilon$ и от (1) за всяко $n\in\mathbf{N}$ получаваме $\left|\frac{n}{n+1} - 1\right| < \varepsilon$.

б) Нека $\varepsilon > 0$ и $q = \frac{1}{Q}$, $Q > 1$, $Q = 1+\alpha$, $\alpha > 0$. От неравенството на Бернули (зад. 3.6 от гл. 0) следва, че

$$(1+\alpha)^n \geqq 1+\alpha n \quad \text{и} \quad q^n = \frac{1}{(1+\alpha)^n} \leqq \frac{1}{1+\alpha n}.$$

Но $\frac{1}{1+\alpha n} < \varepsilon$ за $n > \frac{1}{\alpha}\left(\frac{1}{\varepsilon} - 1\right)$. Следователно $\nu = \frac{1}{\alpha}\left(\frac{1}{\varepsilon} - 1\right)$ е търсеното число.

е) Вж. зад. 3.16 от гл. 0.

Една редица се нарича *безкрайно малка*, ако е сходяща и клони към нула.

1.7. Докажете, че редицата $\{a_n\}$ е безкрайно малка тогава и само тогава, когато $\{|a_n|\}$ е безкрайно малка. Покажете, че следващите редици са безкрайно малки:

а) $a_n = \frac{(-1)^n}{n+2}$; **б)** $a_n = \frac{1}{(-1)^n\, n+1}$; **в)** $a_n = q^n$, $-1<q<1$.

1.8. Докажете, че ако $\{a_n\}$ е безкрайно малка редица, а $\{b_n\}$ е ограничена, то $\{a_nb_n\}$ е безкрайно малка.

Решение. Да изберем $\varepsilon > 0$. Редицата $\{b_n\}$ е ограничена, следователно съществува константа $K > 0$ такава, че $|b_n| \leqq K$, $n\in\mathbf{N}$. Числото $\frac{\varepsilon}{K}$ е положително. Следователно съществува ν, за което при $n > \nu$ е изпълнено $|a_n| < \frac{\varepsilon}{K}$. За същите стойности на n имаме $|a_nb_n| < \varepsilon$.

1.9. Намерете границите на редиците с общ член съответно:

а) $a_n = \frac{\sin(n!)}{n}$; **б)** $a_n = \frac{\operatorname{arctg}(n+1)}{n^2+1}$;

в) $a_n = \frac{\arcsin \frac{1}{n}}{n}$; **г)** $a_n = \frac{\cos(n^2+n+1)}{n - \sqrt{2}}$.

Ако $a_n \to a$ и $b_n \to b$, то:

1) $a_n + b_n \to a + b$.
2) $Ca_n \to Ca$, $C = \text{const}$.
3) $a_nb_n \to ab$.
4) Ако $b \neq 0$, то $b_n \neq 0$ при достатъчно големи стойности на n, т.е. при $n>k$ (докажете го), и можем да образуваме редицата $\frac{a_n}{b_n}$, която е сходяща и $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$.
5) Ако $a_n \leqq b_n$, то $a \leqq b$. Обърнете внимание, че от $a_n < b_n$ за всяко n не следва, че $a < b$. Например, ако $a_n = \frac{1}{n+1}$, $b_n = \frac{1}{n}$, то $a^n < b^n$, но

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = 0.$$

б) Ако $a = b$ и за елементите на редицата $\{c_n\}$ е изпълнено $a_n \leqq c_n \leqq b_n$, то $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = a = b$.

1.10. Нека $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Намерете $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$, ако

а) $b_n = \dfrac{a_n^3 - 6a_n^2 + 11a_n - 6}{a_n^2 - 8a_n + 12}$, $a = 2$, $a_n \neq 2$, $a_n \neq 6$;

б) $b_n = \dfrac{a_n^2 - (a+1)a_n + a}{a_n - a}$, $a_n \neq a$;

в) $b_n = \dfrac{2a_n^2 - aa_n}{a_n^2 - a_n + 1}$.

1.11. Намерете границите на следните редици:

а) $x_n = \dfrac{n+3}{n^3+4}$; б) $x_n = \dfrac{n^3+n+1}{n^3-n+2}$; в) $x_n = \sum\limits_{k=1}^{n} (1 + \dfrac{k}{n})n$;

г) $x_n = \dfrac{a_0n^k+a_1n^{k-1}+\ldots+a_k}{b_0n^l+b_1n^{l-1}+\ldots+b_l}$, $l \geqq k$.

Решение. г) $x_n = \dfrac{a_0 + \dfrac{a_1}{n} + \ldots + \dfrac{a_k}{n^k}}{n^{l-k}\left(b_0 + \dfrac{b_1}{n} + \ldots + \dfrac{b_l}{n_l}\right)}$. Ако $l > k$,

то $\dfrac{1}{n^{l-k}} \to 0$ и по правилата за действия със сходящи редици получаваме $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$. При $l = k$ получаваме $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \dfrac{a_0}{b_0}$.

Казваме, че редицата $\{a_n\}$ клони към безкрайност, и пишем $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ или $a_n \to \infty$, ако за всяко число A съществува ν такова, че за $n > \nu$ е изпълнено $a_n > A$.

Казваме, че редицата $\{a_n\}$ клони към минус безкрайност, ако $\lim\limits_{n\to\infty} (-a_n) = \infty$.

Казваме, че редицата $\{a_n\}$ е безкрайно голяма, ако $|a_n| \to \infty$.

1.12. Покажете, че съществува безкрайно голяма редица, която не клони нито към безкрайност, нито към минус безкрайност.

1.13. Нека $\{a_n\}$ е безкрайно голяма редица. Докажете, че редицата $\left\{\dfrac{1}{a_n}\right\}$ е безкрайно малка. Вярно е и обратното: ако $\{b_n\}$ е безкрайно малка редица и $b_n \neq 0$, то $\left\{\dfrac{1}{b_n}\right\}$ е безкрайно голяма.

1.14. Нека $a_n \to \infty$, а $b_n \to l \neq 0$. Докажете, че редицата $\{a_nb_n\}$ е безкрайно голяма и $a_nb_n \to \infty$ при $l > 0$ и $a_nb_n \to -\infty$ при $l < 0$.

Решение. Нека $l > 0$. Да изберем $A > 0$. Нека ε е такова положително число, че $l-\varepsilon>0$. Избираме ν такова, че при $n > \nu$ да имаме $|b_n-l| < \varepsilon$, т.е. $l-\varepsilon<b_n<l+\varepsilon$. Нека ν_1 е такова, че при $n>\nu_1$ е изпълнено $a_n > \dfrac{A}{l-\varepsilon}$. Числата ν и ν_1 можем да изберем, тъй като $b_n \to l$, а $a_n \to \infty$. Тогава за $n > \max(\nu,\nu_1)$ е изпълнено $a_nb_n > A$. Аналогично се разглежда случаят $l < 0$.

1.15. Нека $x_n = \dfrac{a_0n^k+a_1n^{k-1}+\ldots+a_k}{b_0n^l+b_1n^{l-1}+\ldots+b_l}$, $l < k$, $a_0b_0 \neq 0$.

Покажете, че $\{x_n\}$ е безкрайно голяма редица, като $x_n \to \infty$ при $a_0b_0 > 0$ и $x_n \to -\infty$ при $a_0b_0 < 0$.

Упътване. Приложете предишната задача, като предварително покажете, че $n^p \underset{n\to\infty}{\to} \infty$, $p \in \mathbf{N}$.

1.16. Намерете границите на редиците с общ член:

а) $a_n = \dfrac{1}{n^2} + \dfrac{2}{n^2} + \ldots + \dfrac{n}{n^2}$;

б) $a_n = \dfrac{1^2}{n^3} + \dfrac{2^2}{n^3} + \ldots + \dfrac{n^2}{n^3}$;

в) $a_n = \dfrac{1^k+2^k+\ldots+n^k}{n^{k+1}}$, $k \in \mathbf{N}$;

г) $a_n = \dfrac{1^k+2^k+\ldots+n^k}{n^k} - \dfrac{n}{k+1}$, $k \in \mathbf{N}$.

Упътване. Вж. зад. 5.12 от предишната глава.

Казваме, че редицата $\{a_n\}$ е фундаментална или редица на Коши, ако за всяко $\varepsilon > 0$ съществува такова число ν, че за всеки $n, m \in \mathbf{N}$, $n > \nu$, $m > \nu$ е изпълнено $|a_n - a_m| < \varepsilon$.

Една редица е сходяща тогава и само тогава, когато е фундаментална.

1.17. Нека $a_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \ldots + \dfrac{1}{n}$. Докажете, че $\{a_n\}$ не е сходяща.

Решение. Ще покажем, че редицата не е фундаментална. За тази цел е достатъчно да посочим положително число ε_0, за което не може да се намери съответно ν, т.е. каквото и число ν да изберем, съществуват поне две числа $n, m \in \mathbf{N}$, $n > \nu$, $m > \nu$, за които $|a_n - a_m| \geqq \varepsilon_0$. Да разгледаме $a_{2n} - a_n$

$$= \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} > n\frac{1}{2n} = \frac{1}{2}.$$

Нека $\varepsilon_0 = \dfrac{1}{2}$, а ν е произволно и $n > \nu$. Тогава $2n > \nu$ и

$|a_{2n} - a_n| > \dfrac{1}{2} = \varepsilon_0$.

1.18. Нека $a > 0$ и $k \in \mathbf{N}$. Покажете, че съществува единствено реално положително число x такова, че $x^k = a$.

Решение. Лесно се убеждаваме, че повече от едно такова число не може да има. Наистина да допуснем, че $x^k = y^k = a$, $x \neq y$ и $x > 0$, $y > 0$. Тогава

$$x^k - y^k = 0 = (x - y)(x^{k-1} + x^{k-2}y + \ldots + y^{k-1}).$$

Но $x^{k-1} + x^{k-2}y + \ldots + y^{k-1} > 0$, следователно $x - y = 0$.

Сега ще покажем, че такова x съществува, като построим подходяща сходяща редица, чиято граница е търсеното число. Нека $n \in \mathbf{N}$. Има само краен брой естествени числа p, за които $p^k \leqq an^k$.

Нека p_n е най-голямото от тях. Да разгледаме редицата $x_n = \dfrac{p_n}{n}$.

От дефиницията на p_n е ясно, че $\left(\dfrac{p_n}{n}\right)^k \leqq a < \left(\dfrac{p_n + 1}{n}\right)^k$, т.е.

$$x_n^k \leqq a < \left(x_n + \frac{1}{n}\right)^k. \tag{2}$$

Ако m е друго естествено число, имаме пак $\left(\dfrac{p_m}{m}\right)^k \leqq a < \left(\dfrac{p_m+1}{m}\right)^k$. Следователно $\left(\dfrac{p_n}{n}\right)^k < \left(\dfrac{p_m+1}{m}\right)^k$, откъдето $\dfrac{p_n}{n} - \dfrac{p_m}{m} < \dfrac{1}{m}$, тъй като от $y^k > z^k$ следва $y > z$ при $y > 0$, $z > 0$. Аналогично получаваме $\dfrac{p_m}{m} - \dfrac{p_n}{n} < \dfrac{1}{n}$ и следователно

$$\left|\frac{p_n}{n} - \frac{p_m}{m}\right| < \frac{1}{n} + \frac{1}{m}, \text{ т.е. } |x_n - x_m| < \frac{1}{n} + \frac{1}{m}.$$

Нека ε е произволно положително число. Тъй като $\dfrac{1}{n} \to 0$, съществува ν такова, че за всяко $n > \nu$ е изпълнено $\dfrac{1}{n} < \dfrac{\varepsilon}{2}$.

Нека сега $n, m \in \mathbf{N}$, $n > \nu$, $m > \nu$. Тогава $\dfrac{1}{n} < \dfrac{\varepsilon}{2}$, $\dfrac{1}{m} < \dfrac{\varepsilon}{2}$ и $|x_n - x_m| < \varepsilon$, което показва, че редицата $\{x_n\}$ е фундаментална, а следователно и сходяща. Да означим с x границата ѝ. Като извършим граничен преход в (2), прилагайки 1), 3) и 5), получаваме

$x^k \leqq a \leqq x^k$, т.е. $x^k = a$. Числото x се означава с $\sqrt[k]{a}$ или $a^{\frac{1}{k}}$.

Ако $a = 0$, под $\sqrt[k]{a}$ ще разбираме пак нула.

1.19. Нека $\{a_n\}$ е сходяща редица от неотрицателни числа и $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = l$. Нека $k \in \mathbf{N}$. Докажете, че редицата $b_n = \sqrt[k]{a_n}$ също е сходяща и $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \sqrt[k]{l}$.

Решение. Разгледайте сами случая $l = 0$. Ще предполагаме, че $l > 0$. Нека $\varepsilon > 0$. Като приложим формулата $x^k - y^k =$

$(x-y)(x^{k-1}+\ldots+y^{k-1})$ за $x=\sqrt[k]{a_n}$ и $y=\sqrt[k]{l}$, получаваме

$$\left|\sqrt[k]{a_n}-\sqrt[k]{l}\right|=\frac{|a_n-l|}{\sqrt[k]{a_n^{k-1}}+\sqrt[k]{a_n^{k-2}l}+\ldots+\sqrt[k]{l^{k-1}}}\leq\frac{|a_n-l|}{\sqrt[k]{l^{k-1}}}$$

Да изберем число ν такова, че при $n>\nu$ да е изпълнено $|a_n-l|<\varepsilon\sqrt[k]{l^{k-1}}$. За същите стойности на n имаме $\left|\sqrt[k]{a_n}-\sqrt[k]{l}\right|<\varepsilon$.

1.20. Намерете границите на следните редици:

а) $a_n=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$;

б) $a_n=\dfrac{\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n}}{n+\sqrt[3]{n^2+1}}$;

в) $a_n=\sqrt[8]{n^2+1}-\sqrt[4]{n+1}$;

г) $a_n=\sqrt[3]{1-8n^3}+2n$;

д) $a_n=n^{3/2}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}-2\sqrt{n})$;

е) $a_n=\dfrac{\sqrt{n^2+3n+1}}{\sqrt{n^2+1}+n}$;

ж) $a_n=\dfrac{\sqrt[3]{n^5+n+2}}{\sqrt[3]{1-n^6}-\sqrt[3]{n}}$;

з) $a_n=\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n^2-n+1}$;

и) $a_n=\dfrac{1+3+5+\ldots+(2n-1)}{\sqrt{n^4+n^2+1}}$;

к) $a_n=\sqrt{3n^2+2n}-\sqrt{3n^2+\left(\frac{1}{2}\right)^n}$.

Решение. а) $\sqrt{n+1}-\sqrt{n}=\dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\to 0$;

б) $\dfrac{\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n}}{n+\sqrt[3]{n^2+1}}=\dfrac{\sqrt{1+\frac{1}{n}}-\frac{1}{\sqrt{n}}}{1+\sqrt[3]{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^3}}}\to 1$.

1.21. Нека $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$, $a_n\neq 0$. Намерете $\lim\limits_{n\to\infty}b_n$, ако:

а) $b_n=\dfrac{\sqrt[3]{1+a_n}-1}{a_n}$;

б) $b_n=\dfrac{\sqrt{1+a_n}-\sqrt{1+a_n^2}}{\sqrt{1+a_n}-1}$,

1.22. Намерете границите на редиците:

а) $a_n=\dfrac{n^k}{a^n}$, $a>1$, $k\in\mathbf{N}$; б) $a_n=nq^n$, $|q|<1$;

в) $a_n=\dfrac{a^n+b^n}{a^{n+1}+b^{n+1}}$, $a,b>0$;

г) $a_n=1+q+q^2+\ldots+q^n$, $|q|<1$; д) $a_n=\dfrac{a^n}{n!}$.

Решение а) Нека $a=1+\alpha$, $\alpha>0$ и $n>k+1$. Тогава

$$(1+\alpha)^n=1+n\alpha+\ldots+\frac{n(n-1)\ldots(n-k)}{(k+1)!}\alpha^{k+1}+\ldots+\alpha^n$$

$$>\frac{n(n-1)\ldots(n-k)}{(k+1)!}\alpha^{k+1}\ \text{ и }\ a_n=\frac{n^k}{(1+\alpha)^n}<$$

$$\frac{(k+1)!\,\alpha^{k+1} n^k}{n(n-1)\dots(n-k)} \underset{n\to\infty}{\to} 0.$$

Следователно $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

б) Приложете а).

в) Ако $a > b$, то

$$a_n = \frac{1}{a}\,\frac{1+\left(\dfrac{b}{a}\right)^n}{1+\left(\dfrac{b}{a}\right)^{n+1}} \underset{n\to\infty}{\to} \frac{1}{a}$$

и следователно $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \dfrac{1}{\max(a,b)}$.

г) Вж. зад. 1.6, б) и § 2 от предишната глава.

д) Нека $k \in \mathbf{N}$, $k > |a|$ и $n > k$. Тогава

$$\left|\frac{a^n}{n!}\right| = \frac{|a|^k}{k!}\cdot\frac{|a|^{n-k}}{(k+1)\dots(k+n)} < \frac{|a|^k}{k!}\left(\frac{|a|}{k+1}\right)^{n-k} \underset{n\to\infty}{\to} 0,$$

тъй като редицата $b_n = \left(\dfrac{|a|}{k+1}\right)^{n-k}$ е безкрайно малка.

1.23. Докажете, че:

а) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$, $a > 0$; **б)** $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

Решение. **а)** Нека $\alpha_n = \sqrt[n]{a} - 1$. Да предположим, че $a > 1$. Тогава $\alpha_n > 0$ и от неравенството на Бернули получаваме $a = (1+\alpha_n)^n \geqq 1 + n\,\alpha_n$. Следователно $0 \leqq \alpha_n \leqq \dfrac{a-1}{n}$. Тъй като $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a-1}{n} = 0$, редицата $\{\alpha_n\}$ е безкрайно малка и $\sqrt[n]{a} \to 1$. Ако $a < 1$, то $\sqrt[n]{a} = \dfrac{1}{\sqrt[n]{\dfrac{1}{a}}}$ и пак $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$.

Забележка. Решете задачата по друг начин, като използвате неравенството между средното аритметично и средното геометрично (зад. 3.8 от гл. 0).

б) Нека пак $\alpha_n = \sqrt[n]{n} - 1$. Тогава

$$n = (1+\alpha_n)^n = 1 + n\,\alpha_n + \frac{n(n-1)}{2}\,\alpha_n^2 + \dots + \alpha_n^n.$$

За $n > 1$ имаме $n > \dfrac{n(n-1)}{2}\,\alpha_n^2$ и $0 < \alpha_n < \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{n-1}}$,

откъдето пак получаваме, че $\alpha_n \to 0$ и $\sqrt[n]{n} \to 1$. Може ли да се реши задачата чрез неравенството на Бернули?

1.24. Намерете границите на следните редици:

а) $b_n = \sqrt[n]{a_n}$, където $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a > 0$;

б) $b_n = \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \dots + a_k^n}$, $a_1 > 0$, $a_2 > 0, \dots, a_k > 0$;

в) $b_n = \sqrt[n]{n^k + a_1 n^{k-1} + \dots + a_k}$;

г) $x_n = \sqrt[n]{1 + x^n + \left(\dfrac{x^2}{2}\right)^n}$, $x \geqq 1$.

Решение. **а)** Нека ε е такова положително число, че $a - \varepsilon > 0$. Избираме ν такова, че при $n > \nu$ да е изпълнено $|a_n - a| < \varepsilon$, т.е. $\sqrt[n]{a-\varepsilon} < \sqrt[n]{a_n} < \sqrt[n]{a+\varepsilon}$. От това неравенство чрез граничен преход, използвайки предишната задача, получаваме, че $\sqrt[n]{a_n} \to 1$.

1.25. Намерете границите на следните редици:

а) $a_n = \dfrac{n}{n^2+1} + \dfrac{n}{n^2+2} + \dots + \dfrac{n}{n^2+n}$;

б) $a_n = \dfrac{n^2+1}{n^3+2n+1} + \dfrac{n^2+2}{n^3+2n+2} + \dots + \dfrac{n^2+n}{n^3+2n+n}$;

в) $a_n = \dfrac{(2n)^2}{\sqrt{n^6+1}} + \dfrac{(2n)^2+1}{\sqrt{n^6+3}} + \ldots + \dfrac{(2n)^2+n}{\sqrt{n^6+(2n+1)}}$.

Решение. а) $\dfrac{n^2}{n^2+n} \leqq a_n \leqq \dfrac{n^2}{n^2+1}$.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2+n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2+1} = 1.$$

Следователно $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$.

1.26. Намерете границите на следните редици:

а) $a_n = \left(1 - \dfrac{1}{2^2}\right)\left(1 - \dfrac{1}{3^2}\right) \ldots \left(1 - \dfrac{1}{n^2}\right)$;

б) $a_n = \dfrac{(2^3-1)(3^3-1)\ldots(n^3-1)}{(2^3+1)(3^3+1)\ldots(n^3+1)}$;

в) $a_n = (1+x)(1+x^2)\ldots(1+x^{2n}),\ |x| < 1$;

г) $a_n = \dfrac{a^n}{(1+a)(1+a^2)\ldots(1+a^n)}$, $a \neq -1$;

д) $a_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k(k+1)(k+2)}$;

е) $a_{n+1} = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} a_i,\ a_1 = 1$;

ж) $b_{n+1} = \dfrac{n}{n+1}\, b_n,\ b_1 = \dfrac{1}{2}$.

1.27. Докажете, че са разходящи следните редици:

а) $a_n = \sin nx,\ x \neq k\pi,\ k \in \mathbf{Z}$;

б) $a_n = \cos nx,\ x \neq 2k\pi,\ k \in \mathbf{Z}$.

Решение. а) Да предположим, че редицата $\{a_n\}$ е сходяща и $a_n \to l$. Но $\sin nx + \sin(n+2)x = 2\sin(n+1)x\cos x$ и чрез граничен преход получаваме $2l = 2l\cos x$. Следователно $l = 0$, тъй като $x \neq k\pi$ и $\cos x \neq 1$. От равенството

$\sin(n+1)x = \sin nx \cos x + \cos nx \sin x$ получаваме

$$\cos nx = \frac{\sin(n+1)x - \sin nx \cos x}{\sin x}.$$

Следователно редицата $\{\cos nx\}$ също е сходяща и $\cos nx \to 0$. Но това е невъзможно, тъй като $\cos^2 nx + \sin^2 nx = 1$.

§ 2. Монотонни числови редици

Редицата $\{a_n\}$ се нарича монотонно растяща (намаляваща), ако $a_n \leqq a_{n+1}$ ($a_n \geqq a_{n+1}$) за всяко $n \in \mathbf{N}$. Всяка ограничена монотонна редица е сходяща.

2.1. Докажете, че са сходящи редиците:

а) $a_n = 1 + \dfrac{1}{1.2} + \dfrac{1}{2.3} + \ldots + \dfrac{1}{(n-1)n}$;

б) $a_n = 1 + \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{3^2} + \ldots + \dfrac{1}{n^2}$;

в) $a_n = 1 + \dfrac{1}{2!} + \dfrac{1}{3!} + \ldots + \dfrac{1}{n!}$;

г) $a_n = \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \ldots + \dfrac{1}{2n}$;

Решение. а) $a_n = 1 + \left(1 - \dfrac{1}{2}\right) + \left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{3}\right) + \ldots + \left(\dfrac{1}{n-1} - \dfrac{1}{n}\right)$ $= 2 - \dfrac{1}{n} \to 2$.

б) $\{a_n\}$ е монотонно растяща редица и от неравенството

$$a_n < 1 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \ldots + \frac{1}{(n-1)n}$$

следва, че е ограничена, следователно е сходяща.

в) Покажете, че $\{a_n\}$ се мажорира $(a_n \leqq b_n)$ от сходяща геометрична прогресия $\{b_n\}$, $b_n = 1+q+q^2+\ldots+q^{n-1}$.

г) Покажете, че $\{a_n\}$ е ограничена и монотонно растяща.

2.2. Докажете, че:

а) ако $\{a_n\}$ е монотонно растяща и не е ограничена, то $a_n \to \infty$;

б) ако $\{a_n\}$ е монотонно намаляваща и не е ограничена, то $a_n \to -\infty$;

в) ако монотонна редица има сходяща подредица, то тя е сходяща.

Решение. **а)** Нека A е произволно число. Тъй като $\{a_n\}$ не е ограничена, A не е горна граница за $\{a_n\}$ и съществува k такова, че $a_k > A$. Нека $n > k$. Понеже редицата е монотонно растяща, имаме $a_n \geqq a_k > A$.

2.3. Нека $p_0, p_1, p_2, \ldots$ е редица от цели числа, $0 \leqq p_i \leqq 9$. Докажете, че редицата

$$a_n = p_0 + \frac{p_1}{10} + \frac{p_2}{10^2} + \ldots + \frac{p_n}{10^n}$$

е сходяща. Границата на тази редица се записва така: $p_0, p_1p_2p_3\ldots$, и се нарича безкрайна десетична дроб (има редици $\{p_i\}$, за които дробта може да се окаже и крайна).

Да припомним, че редицата с общ член $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ е монотонно растяща и ограничена. Границата ѝ се отбелязва с e.

2.4. Докажете, че:

а) редицата $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ е монотонно намаляваща и $a_n \to e$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+k} = e$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right)^{n} = \frac{1}{e}$;

г) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1-\frac{1}{n^2}\right)^{n} = 1$;

д) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{k}{n}\right)^{n} = e^k$, $k \in \mathbf{N}$;

е) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1-\frac{k}{n}\right)^{n} = e^{-k}$, $k \in \mathbf{N}$;

ж) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{kn}\right)^{n} = e^{\frac{1}{k}}$, $k \in \mathbf{N}$;

з) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1-\frac{1}{kn}\right)^{n} = e^{-\frac{1}{k}}$, $k \in \mathbf{N}$.

Решение. **а)** Ще докажем монотонността:

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+2}} = \left(\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right)^{n+1} \frac{n+1}{n+2}$$

$$= \left(1+\frac{1}{n^2+2n}\right)^{n+1} \frac{n+1}{n+2} \geqq \left(1+\frac{n+1}{n^2+2n}\right) \frac{n+1}{n+2} \geqq 1.$$

б) $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+k} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{k} \to e.$

в) За $n > 1$ имаме $\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n} = \left(\frac{n-1}{n}\right)^{n} = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n}} \to \frac{1}{e}$.

г) Като имаме предвид в),

$$a_n = \left(1-\frac{1}{n}\right)^{n} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} \to \frac{e}{e} = 1.$$

Можем да разсъждаваме и така: $1 > a_n \geqq 1 - \frac{n}{n^2}$ и $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$.

д) Докажете по индукция, като използвате, че

$$\left(1+\frac{k+1}{n}\right)^{n} = \left(\frac{n+k+1}{n}\right)^{n} = \left(\frac{n+k+1}{n+1}\right)^{n} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n}$$

ж) Приложете зад. 1.19 към редицата $a_n^k = \left(1 + \frac{1}{kn}\right)^{kn} \to e$.

2.5. Докажете, че редицата $a_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$ е сходяща за всяко x.

Решение. Нека $x > 0$. Тогава $\{a_n(x)\}$ е монотонно растяща редица и това се доказва по същия начин както за редицата $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. Направете разсъжденията подробно. Нека $k > x$ и $k \in \mathbf{N}$. Имаме $\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n < \left(1 + \frac{k}{n}\right)^n$, но редицата $\left(1 + \frac{k}{n}\right)^n$ е сходяща съгласно зад. 2.4, д). Следователно тя е ограничена, а оттам и $\{a_n(x)\}$ е ограничена, а оттам и сходяща. За $x=0$ очевидно $a_n(0)=1$ и $\lim\limits_{n\to\infty} a_n(0)=1$. Нека $x<0$ Тогава

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \frac{\left(1 - \frac{x}{n}\right)^n}{\left(1 - \frac{x}{n}\right)^n} = \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)^n \frac{1}{\left(1 - \frac{x}{n}\right)^n}.$$

Редицата $\left(1 - \frac{x}{n}\right)^n = a_n(-x)$ е сходяща, тъй като $-x > 0$. Нека $n > |x|$. От неравенството на Бернули получаваме $1 - \frac{x^2}{n} \leqq \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)^n < 1$. Следователно $\left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)^n \to 1$, а

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n}.$$

С това е доказано, че $\lim\limits_{n\to\infty} a_n(x)$ съществува за всяко x. Като имаме предвид зад. 2.4, д), е), ж), з), естествено е да въведем означението

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x.$$

2.6. Докажете следните свойства на e^x:

а) $e^x > 0$; **б)** $e^0 = 1$; **в)** $e^x > 1,\ x > 0$;

г) $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$; **д)** $e^{x+y} = e^x e^y$; **е)** ако $x>y$, то $e^x > e^y$;

ж) нека $x_n \to x$, тогава $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x_n}{n}\right)^n = e^x$.

Решение. **а), б), в)** Следват непосредствено от дефиницията на e^x.

г) Доказахме го в процеса на решаването на зад. 2.5.

д) Нека $a_n = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$, $b_n = \left(1 + \frac{y}{n}\right)^n$, тогава

(1) $$a_n b_n = \left[\left(1 + \frac{x}{n}\right)\left(1 + \frac{y}{n}\right)\right]^n = \left(1 + \frac{x+y}{n} + \frac{xy}{n^2}\right)^n.$$

Нека $xy \geqq 0$. Тогава $a_n b_n \geqq \left(1 + \frac{x+y}{n}\right)^n$ за достатъчно големи стойности на n и като извършим граничен преход, получаваме

(2) $$e^x e^y \geqq e^{x+y}.$$

Но $(-x)(-y) \geqq 0$ и от (2) се получава $e^{-x}e^{-y} \geqq e^{-x-y}$, което съгласно г) има вида $\frac{1}{e^x} \cdot \frac{1}{e^y} \geqq \frac{1}{e^{x+y}}$. Като имаме предвид, че $e^x > 0$ за всяко x, получаваме

(3) $$e^{x+y} \geqq e^x e^y.$$

От (2) и (3) следва, че $e^{x+y} = e^x e^y$. Аналогични разсъждения можем да направим и при $xy < 0$. Тогава $a_n b_n \leqq \left(1 + \frac{x+y}{n}\right)^n$ и получаваме $e^x e^y \leqq e^{x+y}$ и т.н.

е) Нека $x > y$. Тогава $e^{x-y} > 1, \frac{e^x}{e^y} > 1$, $e^x > e^y$.

ж) Нека $x_n \to 0$ и $x_n \leqq 0$. Тогава $1 + x_n \leqq \left(1 + \frac{x_n}{n}\right)^n \leqq 1$ и чрез граничен преход получаваме $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x_n}{n}\right)^n = e^0 = 1$.

Ако $x_n \to 0$ и $x_n \geqq 0$, то

$$\left(1+\frac{x_n}{n}\right)^n = \left(1-\frac{x_n^2}{n^2}\right)^n \frac{1}{\left(1-\frac{x_n}{n}\right)^n} \to 1$$

(вж. разсъжденията в зад. 2.5.). Нека сега $x_n \to 0$ с произволни стойности. Тъй като $-|x_n| \leqq x_n \leqq |x_n|$, то

$$\left(1-\frac{|x_n|}{n}\right)^n \leqq \left(1+\frac{x_n}{n}\right)^n \leqq \left(1+\frac{|x_n|}{n}\right)^n$$

и пак получаваме, че $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{x_n}{n}\right)^n = 1$. Нека сега $x_n \to x$. Да разгледаме редицата $c_n = \left(1+\frac{x_n}{n}\right)^n\left(1-\frac{x}{n}\right)^n = \left(1+\frac{x_n - x - \frac{x_n x}{n}}{n}\right)^n$.

Но $x_n - x - \frac{x_n x}{n} \to 0$, следователно $c_n \to 1$ и $\left(1+\frac{x_n}{n}\right)^n$

$$= \frac{c_n}{\left(1-\frac{x}{n}\right)^n} \to \frac{1}{e^{-x}} = e^x.$$

2.7. Нека $x>0$ и $l_n(x) = 2^n\left(\sqrt[2^n]{x}-1\right)$. Докажете, че редицата $\{l_n(x)\}$ е сходяща.

Решение. Нека $x>1$. Ще покажем, че $\{l_n(x)\}$ е намаляваща:

$$\frac{l_{n+1}(x)}{l_n(x)} = \frac{2^{n+1}\left(\sqrt[2^{n+1}]{x}-1\right)}{2^n\left(\sqrt[2^n]{x}-1\right)} = \frac{2\left(\sqrt[2^{n+1}]{x}-1\right)\left(\sqrt[2^{n+1}]{x}+1\right)}{\left(\sqrt[2^n]{x}-1\right)\left(\sqrt[2^{n+1}]{x}+1\right)}$$

$$= \frac{2\left(\sqrt[2^n]{x}-1\right)}{\left(\sqrt[2^n]{x}-1\right)\left(\sqrt[2^{n+1}]{x}+1\right)} = \frac{2}{\sqrt[2^{n+1}]{x}+1} < 1.$$

Но $l_n(x) > 0$, тогава редицата е ограничена и монотонна, следователно е сходяща. Да означим с $l(x)$ границата ѝ: $l(1)=0$ за $x=1$. Нека $0<x<1$, $y=\frac{1}{x}>1$. Тогава

$$l_n(x) = 2^n\left(\sqrt[2^n]{\frac{1}{y}}-1\right) = -\frac{2^n\left(\sqrt[2^n]{y}-1\right)}{\sqrt[2^n]{y}} \to -l(y).$$

Тук използвахме, че $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[2^n]{y} = 1$, което е следствие от зад. 1.23, а). Едновременно доказахме, че $l\left(\frac{1}{x}\right) = -l(x)$, където с $l(x)$ сме означили $\lim\limits_{n\to\infty} 2^n\left(\sqrt[2^n]{x}-1\right)$.

2.8. Докажете следните свойства на функцията $l(x)$:
а) $e^{l(x)} = x$; **б)** $l(xy) = l(x)+l(y)$;
в) $l(x)$ е растяща функция.

Решение. **а)** Да разгледаме редицата $\left(1+\frac{l_n(x)}{2^n}\right)^{2^n}$.

Съгласно зад. 2.6, ж) тя е сходяща и клони към $e^{l(x)}$. От друга страна,

$$\left(1+\frac{l_n(x)}{2^n}\right)^{2^n} = \left(1+\frac{2^n\left(\sqrt[2^n]{x}-1\right)}{2^n}\right)^{2^n} = x.$$

Следователно $e^{l(x)} = x$. Това равенство показва, че $l(x)$ е обратна функция на e^x (вж. зад. 6.1 и 6.2 от гл. 0).

б) и в) Докажете чрез дефиницията на $l(x)$ или като използвате, че $l(x)$ е обратна функция на e^x, и зад.2.6.

Функцията $l(x)$ се нарича естествен логаритъм и обикновено се означава с $\ln x$.

2.9. Намерете границите на следните редици:

а) $a_n = \left(\frac{n^2-1}{n^2-2n-3}\right)^n$; **б)** $a_n = \left(\frac{2n^2+n-1}{2n^2+6n}\right)^n$;

в) $a_n = \left(\frac{n^2+5n+6}{n^2+3n+2}\right)^{\frac{n}{2}}$.

След като разполагаме с функциите e^x и $\ln x$, дефинираме a^x при $a>0$ и $x\in\mathbf{R}$ така: $a^x = e^{x\ln a}$.

Покажете, че a^x е растяща функция при $a>1$ и намаляваща при $a<1$.

2.10. Нека $\{x_n\}$ е редица от цели числа и $x_n \to \infty$. Докажете, че $\left(1+\frac{1}{x_n}\right)^{x_n} \to e$.

2.11. Нека $\{x_n\}$ е редица от реални числа и $x_n \to \infty$. Докажете, че $\left(1+\frac{1}{x_n}\right)^{x_n} \to e$.

2.12. Докажете, че за всяко $n \in \mathbf{N}$ е в сила

$$\frac{1}{n+1} \leqq \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \leqq \frac{1}{n}.$$

Упътване. Използвайте зад. 2.4, а) и 2.8, в).

2.13. Докажете, че редиците $a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n+1)$ и $b_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n$ са сходящи и имат обща граница.

Упътване. Използвайте зад. 2.12, за да покажете, че

$$a_n \leqq a_{n+1} \leqq b_{n+1} \leqq b_n$$

и че $\{b_n - a_n\}$ е безкрайно малка редица.

Общата граница на $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ се бележи с C и се нарича константа на Ойлер. Не се знае дали C е рационално или ирационално число ($C = 0{,}577\ldots$).

2.14. Намерете границата на редицата

$$c_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n}.$$

Решение. От зад. 2.1, г) знаем, че редицата $\{c_n\}$ е сходяща. Нека b_n е както в зад. 2.13. Тогава

$$c_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} - \ln 2n + \ln 2n$$

$$-1 - \frac{1}{2} - \ldots - \frac{1}{n} = b_{2n} - b_n + \ln 2.$$

Но $\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} b_{2n} = C$. Следователно $\lim_{n\to\infty} c_n = \ln 2$.

§3. Рекурентни редици

Често се срещат редици от следния вид: дадени са първите k елемента на редицата $\{a_n\}$ – $a_1, \ldots, a_k$, останалите се определят по индукция чрез формулата $a_n = f(a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_{n-k})$, където $f(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ е дадена функция на k променливи. Такива редици наричаме рекурентни.

3.1. Нека $a_1 = \sqrt{2}$, $a_{n+1} = \sqrt{2a_n}$. Покажете, че редицата е сходяща, и намерете границата ѝ.

Решение. Да разгледаме

$$(1)\quad a_{n+1} - a_n = \sqrt{2a_n} - a_n = \frac{2a_n - a_n^2}{\sqrt{2a_n} + a_n} = \frac{a_n(2-a_n)}{\sqrt{2a_n} + a_n}.$$

Тъй като $a_n > 0$, знакът на $a_{n+1} - a_n$ се определя от знака на $2 - a_n$.

За a_1 имаме $0 < a_1 = \sqrt{2} < 2$. Тогава $a_2 = \sqrt{2a_1} < 2$. Да предположим, че $0 < a_k < 2$ за някое k. Тогава $0 < a_{k+1} = \sqrt{2a_k} < 2$ и по метода на пълната математическа индукция получаваме $0 < a_n < 2$ за всяко $n \in N$. От (1) получаваме, че $\{a_n\}$ е монотонно растяща и тъй като е ограничена, тя е сходяща. Като извършим граничен преход в равенството $a_{n+1} = \sqrt{2a_n}$, получаваме за $l = \lim_{n\to\infty} a_n$ уравнението $l = \sqrt{2l}$. Следователно възможните стойности на l са 0 и 2. Но редицата е монотонно растяща с първи елемент $\sqrt{2}$ и не може да клони към 0. Следователно $\lim_{n\to\infty} a_n = 2$.

3.2. Покажете, че редицата $\{a_n\}$ с първи елемент $a_1 = \alpha$, $0 < \alpha < 2$, $a_{n+1} = \sqrt{2a_n}$ е сходяща и намерете границите ѝ.

3.3. Изследвайте в зависимост от α поведението на редицата

$$a_1 = \alpha, \quad a_{n+1} = \frac{a_n^2 + 1}{2}.$$

Решение. Да предположим, че $\{a_n\}$ е сходяща и l е границата ѝ. Чрез граничен преход в дадената рекурентна връзка получаваме $l = \dfrac{l^2 + 1}{2}$, или $l = 1$. Изразяваме чрез a_n:

$$(2) \qquad a_{n+1} - 1 = \frac{(a_n-1)\ (a_n+1)}{2},$$

$$(3) \qquad a_{n-1} - a_n = \frac{(a_n-1)^2}{2}.$$

Равенството (3) показва, че независимо от α редицата е монотонно растяща и е сходяща тогава и само тогава, когато е ограничена.

Нека $-1<\alpha<1$. Тогава $a_2>0$ и от (2) се вижда, че $a_2<1$. Да допуснем, че $0<a_k<1$ за някое $k \geqq 2$. От (2) следва, че $0<a_{k+1}<1$, и по индукция имаме $0<a_n<1$ за всяко $n \geqq 2$. Следователно редицата е сходяща и клони към 1.

Нека $\alpha=1$ или $\alpha=-1$. Тогава $a_2=1$ и $a_n=1$ за $n \geqq 2$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$.

Ако $\alpha<-1$, или $\alpha>1$, то $a_2-1 = \dfrac{(\alpha-1)\,(\alpha+1)}{2} >0$, т.е. $a_2>1$. Ако допуснем, че редицата е ограничена, тя трябва да клони към 1, а това е невъзможно, тъй като тя е растяща и $a_2>1$. Следователно $a_n \to \infty$ (вж. зад 2.2, а)).

3.4. За кои стойности на α е сходяща редицата $\{a_n\}$ и колко е границата ѝ за тези стойности на α, ако:

а) $a_1=\alpha, \quad a_{n+1}=\dfrac{2a_n^2 + a_n + 4}{a_n + 6}, \quad \alpha \neq -6;$

б) $a_1=\alpha, \quad a_{n+1} = \dfrac{3a_n^2 + a_n + 6}{a_n + 9}, \quad \alpha \neq -9;$

в) $a_1=\alpha, \quad a_{n+1} = \sqrt[3]{\dfrac{2a_n^2}{a_n-1}}, \quad \alpha \neq 1;$

г) $a_1=\alpha, \quad a_{n+1} = \dfrac{3a_n^2 + a_n}{a_n^2 + a_n + 1};$

д) $a_1=\alpha, \quad a_{n+1} = \dfrac{2a_n^2 + 3a_n + 12}{a_n + 10}, \quad \alpha \neq -1;$

е) $a_1=\alpha=1, \quad a_{n+1} = \dfrac{2 + 2a_n}{2 + a_n};$

ж) $a_1=\alpha, \quad a_{n+1} = \dfrac{3a_n^2 + a_n + 2}{a_n + 5}, \quad \alpha \neq -5.$

Решение. **а)** Да допуснем, че $a_n \to l$. Тогава $l(l+6)=2l^2+l+4$ и $l=1$ или $l=4$. Да пресметнем разликите:

$$(4) \qquad a_{n+1}-a_n=\frac{a_n^2-5a_n+4}{a_n+6} = \frac{(a_n-1)\ (a_n-4)}{a_n+6},$$

$$(5) \qquad a_{n+1}-4 = \frac{(2a_n+5)\ (a_n-4)}{a_n+6},$$

$$(6) \qquad a_{n+1}-1 = \frac{2(a_n-1)\ (a_n+1)}{a_n+6},$$

$$(7) \qquad a_{n+1}+6 = \frac{2a_n^2+7a_n+40}{a_n+6}.$$

Ще разгледаме няколко случая за α. Какви да бъдат те ни подсещат равенствата (4) — (7).

I. Нека $\alpha>4$. Допускаме, че $a_k>4$. Тогава от (5) следва, че $a_{k+1}>4$, т.е. $a_n>4$ за всяко $n \in \mathbf{N}$. От (4) се вижда, че редицата в този случай е монотонно растяща. Допускането, че е ограничена води до противоречие, тъй като $\{a_n\}$ не може да клони нито към 1, нито към 4. Следователно $a_n \to \infty$.

II. Нека $\alpha=4$. Тогава $a_n=4$ за всяко n и $a_n \to 4$.

III. Нека $1 \leqq \alpha<4$. Пак по индукция от (5) и (6) получаваме, че всички елементи на редицата са от интервала $[1,4)$. От (4) следва, че $\{a_n\}$ е монотонно намаляваща. Следователно тя е сходяща и $a_n \to 1$.

IV. Нека $-1<\alpha<1$. Аналогично на предишните случаи получаваме $0<a_n<1$ за $n \geqq 2$. Редицата е монотонно растяща и $a_n \to 1$.

V. Нека $-\dfrac{5}{2} <\alpha \leqq -1$. Тогава $1 \leqq a_2<4$ и резултатът е както в

III случай.

VI. За $\alpha=-\dfrac{5}{2}$, $a_2=4$ и нататък — както във II случай

VII. За $-6<\alpha<-\dfrac{5}{2}$ имаме $a_2>4$ — вж. I случай.

VIII. За $\alpha<-6$ от (7) получаваме, че $a_n<-6$ за всяко n. Редицата е монотонно намаляваща, както се вижда от (4) и $a_n\to-\infty$ (вж. зад. 2.2, б).

3.5. Нека за редицата $\{a_n\}$ са изпълнени условията:

а) $$a_1=\alpha>0,\quad \frac{1}{4}a_n^2+\frac{1}{2}a_n^2+\frac{1}{4}\leqq a_{n+1}\leqq\frac{1}{2}a_n^2+\frac{1}{2};$$

б) $$a_1=\alpha>0,\quad \frac{1}{12}a_n^2+\frac{1}{2}a_n+\frac{3}{4}\leqq a_{n+1}\leqq\frac{1}{6}a_n^2+\frac{3}{2}.$$

За кои α е сходяща редицата?

Решение. **а.)** Да предположим, че $a_n\to l$. Тогава

$\frac{1}{4}l^2+\frac{1}{2}l+\frac{1}{4}\leqq l$, или $(l-1)^2\leqq 0$, т. е. $l=1$. От неравенството $a_{n+1}-a_n\geqq\frac{1}{4}a_n^2-\frac{1}{2}a_n+\frac{1}{4}=\frac{1}{4}(a_n-1)^2$ следва, че $\{a_n\}$ е монотонно растяща. Ако $\alpha>1$, то $a_1+1>2$ и $a_2\geqq\frac{1}{4}a_1^2+\frac{1}{2}a_1+\frac{1}{4}=\frac{1}{4}(a_1+1)^2>1$. По индукция получаваме $a_n>1$. Редицата е монотонно растяща и неограничена. За $0<\alpha\leqq 1$ от неравенствата $\frac{1}{4}(a_n+1)^2\leqq a_{n+1}\leqq\frac{1}{2}a_n^2+\frac{1}{2}$

лесно се вижда, че $0<a_n\leqq 1$. Редицата е монотонно растяща и ограничена, $\lim a_n=1$.

3.6. Покажете, че редиците са сходящи и намерете границите им, ако:

а) $$a_1=1,\quad a_{n+1}=1+\frac{1}{1+a_n};$$

б) $$a_1=a,\quad a_{n+1}=a+\frac{b}{a+a_n},\quad a,b>0.$$

Решение. а) Лесно се вижда, че $a_n>0$. Освен това

$$(8)\qquad a_{n+1}-a_n=\frac{2-a_n^2}{1+a_n},$$

$$(9)\qquad a_{n+1}^2-2=\frac{(2+a_n)^2}{(1+a_n)^2}-2=\frac{2-a_n^2}{(1+a_n)^2}.$$

От (9) следва, че ако $a_n\leqq\sqrt{2}$, то $a_{n+1}\geqq\sqrt{2}$ и обратното. Следователно

$$(10)\qquad a_{2k+1}\leqq\sqrt{2},\quad a_{2k}\geqq\sqrt{2}.$$

Неравенствата (10) ни навеждат на мисълта да образуваме разликата

$$(11)\qquad a_{n+1}-a_{n-1}=\frac{2-a_n^2}{1+a_n}+\frac{2-a_{n-1}^2}{1+a_{n-1}}=(2-a_{n-1}^2)\frac{2+2a_{n-1}}{(1+a_{n-1})^2(1+a_n)}.$$

От (10) и (11) се получава, че $\{a_{2k+1}\}$ е монотонно растяща редица, а $\{a_{2k}\}$ — монотонно намаляваща и тъй като са ограничени, те са сходящи. Нека $\lim\limits_{k\to\infty}a_{2k+1}=l$, $\lim\limits_{k\to\infty}a_{2k}=m$. От рекурентната връзка получаваме за m и l системата

$$\left|\begin{aligned} l&=\frac{2+m}{1+m}\\ m&=\frac{2+l}{1+l}.\end{aligned}\right.$$

Единственото положително решение на тази система е $l=m=\sqrt{2}$.

Следователно $\{a_n\}$ е сходяща и $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\sqrt{2}$.

3.7. Изследвайте в зависимост от α поведението на редиците:

а) $$a_1=\alpha>0,\quad a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+\sqrt{a_n};$$

б) $$a_1=\alpha>1,\quad a_{n+1}=3-\frac{2}{a_n};$$

в) $a_1 = \alpha > \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$, $a_{n+1} = 3 - \dfrac{1}{a_n}$;

г) $a_1 = \alpha > 0$, $a_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{a_n}$.

3.8. Изследвайте в зависимост от α поведението на редицата $\{a_n\}$, за която

$$a_1 = \alpha,\quad a_{n+1} = \frac{4a_n^2 - 4a_n + 2}{a_n + 3},\quad \alpha \neq -3.$$

Упътване. За $-\dfrac{1}{2} < \alpha < 2$ покажете, че $\{a_{2k+1}\}$ и $\{a_{2k}\}$ са монотонни редици, които имат обща граница. За тази цел докажете и използвайте, че $\left|\dfrac{4a_n-3}{a_n+3}\right| < 1$ за $n \geqq 2$.

3.9. Нека $a > 0$ и $k \in \mathbb{N}$, $k > 1$. Докажете, че редицата $\{x_n\}$, за която $x_1 > 0$ и $x_{n+1} = \dfrac{a - x_n^k}{k x_n^{k-1}} + x_n$, е сходяща и $\left(\lim\limits_{n\to\infty} x_n\right)^k = a$.

3.10. Нека $a_1 = a$, $a_2 = b$, $a_{n+1} = \dfrac{a_n + a_{n-1}}{2}$. Намерете границата на редицата $\{a_n\}$.

Решение: От рекурентната връзка получаваме

$$a_{n+1} - a_n = -\frac{a_n - a_{n-1}}{2} = \ldots = (-1)^{n-1}\frac{b-a}{2^{n-1}}.$$

Имаме

$$a_n = a_1 + (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + \ldots + (a_n - a_{n-1})$$

$$= a + (b-a) - \frac{1}{2}(b-a) + \ldots + (-1)^{n-2}\frac{1}{2^{n-2}}(b-a)$$

$$= a + (b-a)\frac{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{1+\frac{1}{2}} \xrightarrow[n\to\infty]{} a + (b-a)\frac{2}{3} = \frac{a+2b}{3}.$$

3.11. Нека $a_1 = a$, $a_2 = b$, $a_{n+1} = \lambda a_n + \mu a_{n-1}$, където $\lambda + \mu = 1$, $|\mu| < 1$. Намерете границата на редицата $\{a_n\}$.

3.12. Нека $a > 0$, $b \geqq 0$, $a \geqq b$. Покажете, че редиците $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ са сходящи и имат обща граница, ако:

а) $a_1 = \dfrac{a+b}{2}$, $a_2 = \dfrac{a_1+b_1}{2}$, $\ldots$, $a_{n+1} = \dfrac{a_n+b_n}{2}$, $\ldots$,

$b_1 = \sqrt{ab}$, $b_2 = \sqrt{a_1 b_1}$, $\ldots$, $b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$, $\ldots$;

б) $a_1 = \dfrac{a+b}{2}$, $a_2 = \dfrac{a_1+b_1}{2}$, $\ldots$, $a_{n+1} = \dfrac{a_n+b_n}{2}$, $\ldots$,

$b_1 = \dfrac{2ab}{a+b}$, $b_2 = \dfrac{2a_1b_1}{a_1+b_1}$, $\ldots$, $b_{n+1} = \dfrac{2a_nb_n}{a_n+b_n}$, $\ldots$

Упътване. Използвайте зад. 3.8 и 3.9 от гл. 0, за да покажете, че

$$b_n \leqq b_{n+1} \leqq a_{n+1} \leqq a_n.$$

§4. Сходимост в смисъл на Чезаро. Теореми на Шолц

4.1. Нека $\{a_n\}$ е сходяща редица с граница a. Разгледайте редицата с общ член $b_n = \dfrac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}$. Покажете, че $\{b_n\}$ е сходяща и $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = a$.

Решение. Ще използваме дефиницията на Коши за сходяща редица. Нека $\varepsilon > 0$. Избираме ν такова, че $|a_n - a| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ при всяко $n > \nu$. Да фиксираме $k \in \mathbb{N}$ и $k > \nu$. Нека $n > k$. Тогава

$$|b_n - a| = \left|\frac{a_1 + a_2 \ldots + a_n - na}{n}\right| \leqq \frac{|a_1 - a| + \ldots + |a_n - a|}{n}$$

$$< \frac{|a_1 - a| + \ldots + |a_{k-1} - a|}{n} + \frac{n-k+1}{2n}\varepsilon.$$

Числото $|a_1 - a| + \ldots + |a_{k-1} - a|$ не зависи от n. Да го означим с

A. При $n > \frac{2A}{\varepsilon}$ имаме $\frac{A}{n} < \frac{\varepsilon}{2}$. Нека $\nu_0 = \max\left(\frac{2A}{\varepsilon}, k\right)$.

За всяко $n > \nu_0$ е изпълнено $|b_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

Една редица се нарича сходяща в смисъл на Чезаро, ако редицата $b_n = \frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}$ е сходяща. Зад. 4.1 показва, че ако една редица е сходяща в обичайния смисъл, тя е сходяща и в смисъл на Чезаро и има същата граница.

4.2. Докажете, че редицата $a_n = \sin nx$, $x \neq k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$, е сходяща в смисъл на Чезаро, въпреки че не е сходяща.

Упътване. Вж. зад. 3.18 от гл. 0 и зад. 1.27.

4.3. Намерете границите на редиците с общ член:

а) $a_n = \frac{a + \sqrt{a} + \sqrt[3]{a} + \ldots + \sqrt[n]{a}}{n}$, $a > 0$;

б) $a_n = \frac{1 + \sqrt{2} + \ldots + \sqrt[n]{n}}{n}$;

в) $b_n = \frac{a_n}{n}$, ако $\lim\limits_{n\to\infty}(a_{n+1} - a_n) = l$.

4.4. Нека $a_n \to \infty$. Докажете, че редицата с общ член

$$b_n = \frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}$$

също клони към безкрайност.

4.5. Нека $a_n > 0$ и $a_n \to a$. Докажете, че редицата

$$b_n = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}}$$ е сходяща и $b_n \to a$.

Решение.

Да разгледаме редицата $\frac{1}{b_n} = \frac{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}}{n}$.

Ако $a \neq 0$, то $\frac{1}{b_n} \to \frac{1}{a}$, както следва от зад 4.1 и $b_n \to a$.

Ако $a = 0$, то $\frac{1}{a_n} \to \infty$ (зад. 1.13) и $\frac{1}{b_n} \to \infty$ (зад. 4.4.).

Следователно $b_n \to 0$.

4.6. Нека $a_n > 0$ и $a_n \to a$. Докажете, че редицата

$b_n = \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}$ също е сходяща и $b_n \to a$.

Упътване. Вж. зад. 3.8 и 3.9 от гл. 0, където е доказано, че

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}} \leqq \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} \leqq \frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}.$$

4.7. Нека $a_n > 0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$. Докажете, че

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = l.$$

Упътване. Приложете зад. 4.6.

4.8. Намерете границите на редиците с общ член:

а) $a_n = \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$;

б) $a_n = \frac{1}{n}\left[(2n+1)(2n+2)\ldots 3n\right]^{\frac{1}{n}}$

4.9. Нека $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ са сходящи редици с граници съответно a и b. Да се докаже, че редицата с общ член

$$x_n = \frac{a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \ldots + a_n b_1}{n}$$

е сходяща и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = ab$.

4.10 (I теорема на Щолц). Нека $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ са две редици от числа, като $y_n \to \infty$ и $y_{n+1} > y_n$. Докажете, че ако

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} = l, \text{ то } \lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = l.$$

Решение. Нека $\varepsilon>0$. Съществува $k\in\mathbf{N}$ такова, че при $n\geqq k$ е изпълнено

$$(1)\qquad \left|\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}-l\right|<\varepsilon.$$

Като се освободим от модула и вземем предвид, че при $y_{n+1}-y_n>0$, получаваме

$$(2)\qquad (l-\varepsilon)\ (y_{n+1}-y_n)<x_{n+1}-x_n<(y_{n+1}-y_n)\ (l+\varepsilon).$$

Да приложим (2) за $k,\ k+1,\ \ldots,\ n-1$. В сила са следните $n-k$ неравенства:

$$(l-\varepsilon)\ (y_{k+1}-y_k)<x_{k+1}-x_k<(y_{k+1}-y_k)\ (l+\varepsilon),$$
$$(l-\varepsilon)\ (y_{k+2}-y_{k+1})<x_{k+2}-x_{k+1}<(y_{k+2}-y_{k+1})\ (l+\varepsilon),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$(l-\varepsilon)\ (y_n-y_{n-1})<x_n-x_{n-1}<(y_n-y_{n-1})\ (l+\varepsilon).$$

Събираме тези неравенства и получаваме

$$(l-\varepsilon)\ (y_n-y_k)<x_n-x_k<(l+\varepsilon)\ (y_n-y_k),$$

а оттук имаме

$$(3)\qquad \left|\frac{x_n-x_k}{y_n-y_k}-l\right|<\varepsilon.$$

Предимството на (3) пред (1) е, че x_k и y_k са фиксирани, не зависят от n и това ще ни даде възможност да покажем, че $\left|\frac{x_n}{y_n}-l\right|<2\varepsilon$ за достатъчно големи стойности на n. Правим следните преобразования:

$$\frac{x_n}{y_n}=\frac{x_n-x_k+x_k}{y_n}=\frac{x_n-x_k}{y_n}+\frac{x_k}{y_n}$$
$$=\frac{(x_n-x_k)\ (y_n-y_k)}{y_n\,(y_n-y_k)}+\frac{x_k}{y_n}=\frac{x_n-x_k}{y_n-y_k}-\frac{y_k\ (x_n-x_k)}{y_n\,(y_n-y_k)}+\frac{x_k}{y_n}.$$

Тогава

$$\left|\frac{x_n}{y_n}-l\right|\leqq\left|\frac{x_n-x_k}{y_n-y_k}-l\right|+\frac{|y_k|}{|y_n|}\ \left|\frac{x_n-x_k}{y_n-y_k}\right|+\frac{|x_k|}{|y_n|}$$
$$<\varepsilon+\frac{1}{|y_n|}\left(|y_k|\,(l+\varepsilon)+|x_k|\right).$$

Използвахме, че $\left|\frac{x_n-x_k}{y_n-y_k}\right|<|l|+\varepsilon$, което следва от (3). Но $y_n\to\infty$, а числото $|y_k|\ (l+\varepsilon)+|x_k|$ не зависи от n и за достатъчно големи стойности на n имаме $\frac{1}{|y_n|}\left(|y_k|\,(l+\varepsilon)+|x_k|\right)<\varepsilon$ и следователно $\left|\frac{x_n}{y_n}-l\right|<2\varepsilon$.

Това показва, че редицата $\frac{x_n}{y_n}\to l$.

4.11. С помощта на I теорема на Щолц:
а) намерете границите от зад. 1.16;
б) решете зад. 4.1;
в) намерете границата на редицата с общ член

$$a_n=\frac{1^p+3^p+\ldots+(2n+1)^p}{n^{p+1}},\ p\in\mathbf{N}.$$

4.12. Нека $c_n=\frac{p_1a_1+p_2a_2+\ldots+p_na_n}{p_1+p_2+\ldots+p_n}$, където $a_n\to a$, $p_n>0$ и $p_1+p_2+\ldots+p_n\to\infty$. Докажете, че $\{c_n\}$ е сходяща редица и намерете границата ѝ.

4.13. Нека $y_n\to\infty$, $y_{n+1}>y_n$ и $\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}\to\infty$.

Докажете, че $\frac{x_n}{y_n}\to\infty$.

4.14 (II теорема на Щолц). Нека $x_n\to0$, $y_n\to0$ и освен това $\{y_n\}$ е монотонна редица, като $y_{n+1}\neq y_n$ и $y_n\neq0$ за всяко $n\in\mathbf{N}$.

Докажете, че ако $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}=l$, то и $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=l$.

Решение. Да предположим за определеност, че $\{y_n\}$ е растяща редица. Тогава $y_{n+1} > y_n$. Нека $\varepsilon > 0$. Съществува ν такова, че при $n>\nu$ имаме $\left|\dfrac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n} - l\right| < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Нека $k>\nu$ и $n>k$. Разсъждавайки както в първата теорема на Щолц, получаваме неравенствата

$$(l-\frac{\varepsilon}{2})\,(y_{k+1}-y_k) < x_{k+1}-x_k < (y_{k+1}-y_k)\,(l+\frac{\varepsilon}{2}),$$

. . . .

$$(l-\frac{\varepsilon}{2})\,(y_n-y_{n-1}) < x_n-x_{n-1} < (y_n-y_{n-1})\,(l+\frac{\varepsilon}{2}),$$

от които чрез събиране имаме

$$(4)\qquad \left|\frac{x_n-x_k}{y_n-y_k} - l\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Тъй като $x_n \to 0$ и $y_n \to 0$, то

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n-x_k}{y_n-y_k} = \frac{x_k}{y_k}.$$

Извършвайки в (4) граничен преход по n, получаваме

$$\left|\frac{x_k}{y_k} - l\right| \leqq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon, \quad k>\nu,$$

което показва, че $\dfrac{x_n}{y_n} \to l$.

4.15. Намерете границата на редицата с общ член

$$a_n = \frac{\dfrac{1}{n+k}+\dfrac{1}{n+k+1}+\ldots+\dfrac{1}{2n}-\ln 2}{\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\ldots+\dfrac{1}{2n}-\ln 2}, \quad k\in\mathbf{N}.$$

Упътване. Вж. зад. 2.1, г) и 2.14.

§5. Горна и долна точка на сгъстяване

Нека е дадена редицата $\{a_n\}$. От §1 знаем какво означава числото a да бъде точка на сгъстяване за редицата $\{a_n\}$. Знаем също, че всяка ограничена редица има точка на сгъстяване (теорема на Болцано—Вайерщрас). Но има редици — например 1, 2,

3, . . . , които нямат точка на сгъстяване в този смисъл. Сега ще разширим понятието точка на сгъстяване така, че всяка редица да има точка на сгъстяване в разширения смисъл. Към множеството на реалните числа $\mathbf{R}$ добавяме символите $+\infty$ и $-\infty$, които се наричат несобствени точки.

Казваме, че $+\infty$ е (несобствена) точка на сгъстяване за редицата $\{a_n\}$, ако всеки интервал от вида $(a, +\infty)$, $a\in\mathbf{R}$, съдържа безбройно много елементи на редицата.

5.1. Дайте съответна дефиниция за това $-\infty$ да бъде точка на сгъстяване на редица $\{a_n\}$. Докажете твърдението от зад. 1.3 за разширеното понятие точка на сгъстяване.

Точката $+\infty$ ще си представяме най-дясна върху числовата права (съответно $-\infty$ — най-лява), т.е. ако $x\in\mathbf{R}$, то $-\infty<x<+\infty$. Ще считаме, че $-\infty\leqq-\infty$ и $+\infty\leqq+\infty$.

5.2. Докажете, че всяка редица има поне една точка на сгъстяване.

Нека S е множеството от точки на сгъстяване на редицата $\{a_n\}$. Ако S е ограничено отгоре, то числото $\sup S$ ще наричаме горна точка на сгъстяване за $\{a_n\}$ и ще я означаваме с $\overline{\lim}\, a_n$. Ако S не е ограничено отгоре, то $\overline{\lim}\, a_n = +\infty$. Ако S съдържа само $-\infty$, то $\overline{\lim}\, a_n = -\infty$. Аналогично дефинираме долна точка на сгъстяване за $\{a_n\}$, $\underline{\lim}\, a_n$ като $\inf S$, ако S е ограничено отдолу; в противен случай това е някой от символите $+\infty$ или $-\infty$. Следващата задача показва, че горната и долната точка на сгъстяване са наистина точки на сгъстяване.

5.3. Докажете, че:

а) $\overline{\lim}\, a_n$ е точка на сгъстяване за $\{a_n\}$;
б) $\underline{\lim}\, a_n$ е точка на сгъстяване за $\{a_n\}$.

Решение. **а)** Ще разгледаме случая $\overline{\lim}\, a_n < \infty$. Нека ε е произволно положително число. Ще покажем, че в околността $(\overline{\lim}\, a_n-\varepsilon,\ \overline{\lim}\, a_n+\varepsilon)$ на точката $\overline{\lim}\, a_n$ има безбройно много елементи на редицата $\{a_n\}$. Тъй като $\overline{\lim}\, a_n-\varepsilon$ не е горна граница за точките на сгъстяване на редицата, то съществува точка на сгъстяване a на $\{a_n\}$, за която $\overline{\lim}\, a_n-\varepsilon<a$. Но $a \leqq \overline{\lim}\, a_n < \overline{\lim}\, a_n + \varepsilon$. Следователно

$$a \in (\overline{\lim}\, a_n - \varepsilon,\ \overline{\lim}\, a_n + \varepsilon)$$

и от дефиницията на точка на сгъстяване следва, че в околността се съдържат безбройно много елементи на редицата. С това е доказано, че $\overline{\lim}\, a_n$ е точка на сгъстяване за $\{a_n\}$. Разгледайте сами случая $\overline{\lim}\, a_n = \infty$.

5.4. Намерете $\overline{\lim}\, a_n$ и $\underline{\lim}\, a_n$ за редиците:

а) $a_n = (1+(-1)^n)\dfrac{n}{n+1}$;

б) $a_n = (-1)^n\left(\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\ldots+\dfrac{1}{2n}\right) + \sin\dfrac{n\pi}{2}\ln 2$;

в) $a_n = \frac{2n-1}{n} \cos^2 \frac{n\pi}{4}$;

г) $a_0 = 0, a_{2n} = \frac{a_{2n-1}}{2}$, $a_{2n+1} = \frac{1}{2} + a_{2n}$.

Упътване. Определете сходящите подредици и намерете всички точки на сгъстяване.

5.5 а) Нека $A > \overline{\lim}\, a_n$. Докажете, че най-много краен брой елементи на редицата удовлетворяват неравенството $a_n \geqq A$.

б) Нека $B < \underline{\lim}\, a_n$. Докажете, че най-много краен брой елементи на редицата удовлетворяват неравенството $a_n \leqq B$.

5.6. Нека $\overline{\lim}\, a_n = \underline{\lim}\, a_n = a$. Докажете, че $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

5.7. Докажете, че $\underline{\lim}\,(-a_n) = -\overline{\lim}\, a_n$.

5.8. Нека $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ са ограничени редици. Докажете, че:

а) $\underline{\lim}\, a_n + \underline{\lim}\, b_n \leqq \underline{\lim}\,(a_n + b_n) \leqq \underline{\lim}\, a_n + \overline{\lim}\, b_n$;

б) $\underline{\lim}\, a_n + \overline{\lim}\, b_n \leqq \overline{\lim}\,(a_n + b_n) \leqq \overline{\lim}\, a_n + \overline{\lim}\, b_n$.

Решение. **а)** Нека $\gamma = \underline{\lim}\,(a_n + b_n)$. Съществува подредица $\{a_{n_k} + b_{n_k}\}$ на $\{a_n + b_n\}$, клоняща към γ, тъй като γ е точка на сгъстяване за $\{a_n + b_n\}$. Нека $\{a_{n_{k_l}}\}$ е сходяща подредица на $\{a_{n_k}\}$ с граница a. Редицата $\{a_{n_{k_l}}\}$ е подредица и на редицата $\{a_n\}$ и a е точка на сгъстяване на $\{a_n\}$, следователно $a \geqq \underline{\lim}\, a_n$. Редицата $\{b_{n_{k_l}}\}$ също е сходяща, както се вижда от равенството $b_{n_{k_l}} = (a_{n_{k_l}} + b_{n_{k_l}}) - a_{n_{k_l}}$. Да означим границата ѝ с b. Имаме $b \geqq \underline{\lim}\, b_n$ и следователно

$$\underline{\lim}\,(a_n + b_n) = \gamma = a + b \geqq \underline{\lim}\, a_n + \underline{\lim}\, b_n ,$$

с което първото неравенство е доказано. Ще го използваме, за да докажем второто. За редицата $a_n = (a_n + b_n) + (-b_n)$ имаме

$$\underline{\lim}\, a_n \geqq \underline{\lim}\,(a_n + b_n) + \underline{\lim}\,(-b_n)$$
$$= \underline{\lim}\,(a_n + b_n) - \overline{\lim}\, b_n,$$

откъдето следва търсеното неравенство.

5.9. Нека $a_n > 0$. Докажете, че:

а) $\overline{\lim}\, a_n \geqq \overline{\lim}\, \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}$;

б) $\underline{\lim}\, a_n \leqq \underline{\lim}\, \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}$.

Решение. **а)** Ако $\overline{\lim}\, a_n = +\infty$, неравенството е изпълнено. От зад. 4.6 следва, че и при $\overline{\lim}\, a_n = 0$ неравенството също е вярно. Нека $\overline{\lim}\, a_n = a < \infty$ с ε е положително число. От зад 5.5 следва, че $a_n < a + \varepsilon$ за всички достатъчно големи n. Ще покажем, че $\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} < a + 2\varepsilon$ е изпълнено за всички n с изключение на краен брой. Нека k е такова естествено число, че при $n > k$ е изпълнено $a_n < a + \varepsilon$. Тогава

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} < \sqrt[n]{\frac{a_1 \ldots a_k}{(a+\varepsilon)^k}}\,(a+\varepsilon).$$

От зад. 1.23, а) имаме $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{a_1 \ldots a_k}{(a+\varepsilon)^k}} = 1$. Следователно съществува ν такова, че при $n > \nu$ е изпълнено $\sqrt[n]{\frac{a_1 \ldots a_k}{(a+\varepsilon)^k}} < 1 + \eta$, където η избираме така, че $(1+\eta)(a+\varepsilon) < a + 2\varepsilon$. Тогава за $n > \max(k, \nu)$ имаме $\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} < a + 2\varepsilon$ и тъй като ε е произволно, то

$$\overline{\lim}\, \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} \leqq a.$$

5.10. Нека $x_n > 0$. Докажете, че:

а) $\overline{\lim}\, \frac{x_{n+1}}{x_n} \geqq \overline{\lim}\, \sqrt[n]{x_n}$;

б) $\underline{\lim}\, \frac{x_{n+1}}{x_n} \leqq \underline{\lim}\, \sqrt[n]{x_n}$.

Упътване. Разгледайте редицата $a_1 = x_1$, $a_2 = \frac{x_2}{x_1}$ и т. н. и приложете зад. 5.9.

5.11. Нека $0 < s < t < 1$ и редицата $\{a_n\}$ е дефинирана така: $a_{2k+1} = s^{k+1}$, $a_{2k} = t^k$. Намерете $\overline{\lim}\, \frac{a_{n+1}}{a_n}$ и $\underline{\lim}\, \frac{a_{n+1}}{a_n}$ и ги сравнете с $\overline{\lim}\, \sqrt[n]{a_n}$ и $\underline{\lim}\, \sqrt[n]{a_n}$.

Глава 2

Граници и непрекъснатост на функции

§ 1. Основни дефиниции и някои техни приложения

Ще казваме, че точката x_0 е точка на сгъстяване на множеството D, ако във всяка околност на x_0 има точки $x\in D$, $x\neq x_0$. Ясно е, че точката x_0 е точка на сгъстяване на D тогава и само тогава, когато съществува редица от точки $x_n\in D$, $x_n\neq x_0$, която клони към x_0. Да отбележим, че самата точка x_0 може да не принадлежи на D.

Нека числовата функция $f(x)$ е дефинирана в D и x_0 е точка на сгъстяване на D.

Дефиниция 1 (Хайне). Ще казваме, че функцията $f(x)$ има граница A при x, клонящо към x_0, ако за всяка клоняща към x_0 редица от числа $x_n\in D$, $x_n\neq x_0$, съответната редица от функционални стойности $f(x_n)$ клони към A. Това ще отбелязваме така: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$.

Дефиниция 2 (Хайне). Ще казваме, че функцията $f(x)$ има лява граница A при x, клонящо към x_0, ако за всяка клоняща към x_0 редица от числа $x_n\in D$, $x_n<x_0$, съответната редица от функционални стойности $f(x_n)$ клони към A. Това ще отбелязваме така: $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ x<x_0}} f(x) = A$.

Дефиниция 3 (Хайне). Ще казваме, че функцията $f(x)$ има дясна граница A при x, клонящо към x_0, ако за всяка клоняща към x_0 редица от числа $x_n\in D$, $x_n>x_0$, съответната редица от функционални стойности $f(x_n)$ клони към A. Това ще отбелязваме така: $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x>x_0}} f(x) = A$.

Забележка. Ясно е, че при лява граница ще искаме да съществува редица от числа $x_n\in D$; $x_n<x_0$ и $x_n\to x_0$, т.е. точката x_0 да бъде лява точка на сгъстяване, а при дясна граница — точката x_0 да бъде дясна точка на сгъстяване на D.

Дефиниция 4 (Коши). Ще казваме, че функцията $f(x)$ има граница A при x, клонящо към x_0, ако за всяко положително число ε може да се намери положително число δ (евентуално зависещо от ε) такова, че за всяко число $x\in D$, удовлетворяващо неравенствата $0<|x-x_0|<\delta$, да бъде изпълнено $|f(x)-A|<\varepsilon$.

Дефиниция 5 (Коши). Ще казваме, че функцията $f(x)$ има лява граница A при x, клонящо към x_0, ако за всяко положително число ε може да се намери положително число δ такова, че за всяко число $x\in D$, удовлетворяващо неравенствата $x_0-\delta<x<x_0$, да бъде изпълнено $|f(x)-A|<\varepsilon$.

Дефиниция 6 (Коши). Ще казваме, че функцията $f(x)$ има дясна граница A при x, клонящо към x_0, ако за всяко положително число ε може да се намери положително число δ такова, че за всяко число $x\in D$, удовлетворяващо неравенствата $x_0<x<x_0+\delta$, да бъде изпълнено $|f(x)-A|<\varepsilon$.

Теорема 1. Дефиниции 1 и 4 (съответно дефиниции 2 и 5 и дефиниции 3 и 6) са еквивалентни.

Теорема 2. Ако функцията $f(x)$ притежава лява и дясна граница при x, клонящо към x_0, и тези две граници са равни, то функцията $f(x)$ притежава граница при x, клонящо към x_0, и $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x>x_0}} f(x)$.

Теорема 3. Функцията $f(x)$ притежава граница A при x, клонящо към x_0, тогава и само тогава, когато $\lim\limits_{x\to x_0} |f(x)-A|=0$.

Дефиниция 7 (Коши). Ще казваме, че функцията $f(x)$ има граница A при x, клонящо към $+\infty$ ($-\infty$), ако за всяко положително число ε може да се намери число N (евентуално зависещо от ε) такова, че за всяко $x\in D$ и $x>N$ ($x<N$) да бъде изпълнено $|f(x)-A|<\varepsilon$.

Дефиниция 8 (Коши). Ще казваме, че функцията $f(x)$ има граница $+\infty$ ($-\infty$) при x, клонящо към x_0, ако за всяко число N може да се намери положително число δ (евентуално зависещо от N) такова, че за всяко $x\in D$, удовлетворяващо неравенствата $0<|x-x_0|<\delta$, да бъде изпълнено $f(x)>N$ ($f(x)<N$).

Дефиниция 9 (Коши). Ще казваме, че функцията $f(x)$ има лява (дясна) граница $+\infty$ при x, клонящо към x_0, ако за всяко число N може да се намери положително число δ (евентуално зависещо от N) такова, че за всяко $x\in D$, удовлетворяващо неравенствата $x_0-\delta<x<x_0$ ($x_0<x<x_0+\delta$), да бъде изпълнено $f(x)>N$.

Дефиниция 10 (Коши). Ще казваме, че функцията $f(x)$ има лява (дясна) граница $-\infty$ при x, клонящо към x_0, ако за всяко число N може да се намери положително число δ (евентуално зависещо от N) такова, че за всяко $x\in D$, удовлетворяващо неравенствата $x_0-\delta<x<x_0(x_0<x<x_0+\delta)$, да бъде изпълнено $f(x)<N$.

Дефиниция 11 (Коши). Ще казваме, че функцията $f(x)$ има граница $+\infty$ ($-\infty$) при x, клонящо към $+\infty$, ако за всяко число N може да се намери число A (евентуално зависещо от N) такова, че за всяко $x\in D$ и $x>A$ да бъде изпълнено $f(x)>N(f(x)<N)$.

Забележка. При използване на дефиниции 8, 9, 10 и 11 за доказване, че $\lim f(x)=+\infty$ е достатъчно да се разглеждат само положителни числа N, а при доказване на $\lim f(x)=-\infty$ — само отрицателни.

Дефинициите на Хайне, съответни на дефиниции 7, 8, 9, 10 и 11, се получават от дефиниции 1, 2 и 3 чрез заместване на x_0 и A с $\pm\infty$.

Дефиниция 12. Ще казваме, че функцията $f(x)$ е непрекъсната в точката x_0, ако $x_0\in D$, съществува границата $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Забележка. Тъй като в дефиниция 12 се иска съществуване на $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, то x_0 трябва да бъде точка на сгъстяване на D. Ако точката x_0 не е точка на сгъстяване на D, то може да се намери околност на x_0, в която няма други точки от D с изключение на x_0. Такава точка се нарича изолирана точка на D. Ще смятаме, че ако x_0 е изолирана точка от дефиниционната област D на $f(x)$, то $f(x)$ е непрекъсната в x_0.

Дефиниция 13. Ще казваме, че функцията $f(x)$ е непрекъсната отляво (отдясно) в точката x_0, ако $x_0\in D$, съществува границата

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}} f(x) \quad \left(\lim_{\substack{x\to x_0\\ x>x_0}} f(x)\right) \text{ и } \lim_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}} f(x) = f(x_0) \quad \left(\lim_{\substack{x\to x_0\\ x>x_0}} f(x) = f(x_0)\right).$$

Теорема 4. Ако една функция е непрекъсната отляво и непрекъсната отдясно в точката x_0, то тя е непрекъсната в точката x_0.

Дефиниция 14. Ще казваме, че функцията $f(x)$ е прекъсната в точката x_0, ако $x_0 \in D$ и $f(x)$ не е непрекъсната в точката x_0.

1.1. Като използувате дефиницията на Хайне, докажете, че следните функции са непрекъснати във всяка точка от дефиниционната си област:

а) $f(x) = x^2$; **б)** $f(x) = \dfrac{x^2+1}{2x+1}$;

в) $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2-1}$; **г)** $f(x) = \sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$.

Решение. в) Нека x_0 принадлежи на дефиниционната област на функцията $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2-1}$, т. е. $x_0 \neq \pm 1$. Нека $\{x_n\}$ е произволна редица, клоняща към x_0, $x_n \neq \pm 1$, $x_n \neq x_0$. Разглеждаме редицата с общ член

$$f(x_n) = \frac{x_n+1}{x_n^2-1}.$$

Като приложим теоремите за действия със сходящи редици, виждаме, че тази редица е сходяща и границата ѝ е $\dfrac{x_0+1}{x_0^2-1}$, което е точно $f(x_0)$.

Съгласно дефиниции 1 и 12 това означава, че $f(x)$ е непрекъсната в x_0.

1.2. Намерете положително число δ такова, че за всяко x, за което е изпълнено $|x-2|<\delta$, да бъде в сила $|x^2-4|<0{,}1$.

Решение. От

$$|x^2-4| = |x-2|\,|x+2| \leqq |x-2|\,(|x|+2)$$

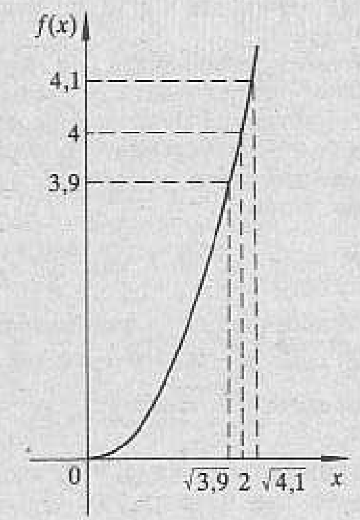
виждаме, че трябва да имаме ограничения за $|x|$ и затова ще разглеждаме числа x от отворения интервал с център точката 2 и радиус 1, т.е. ще търсим число $0<\delta\leqq 1$. Ясно е, че $1<x<3$, или

$|x|<3$. Оттук виждаме, че за да решим задачата, достатъчно е да изберем число δ такова, че $5\delta\leqq 0{,}1$. И наистина нека $\delta = \dfrac{1}{50}$.

Тогава за всяко x, удовлетворяващо неравенството $|x-2|<\dfrac{1}{50}$, е в сила

$$|x^2-4| \leqq |x-2|\,(|x|+2) < \frac{1}{50}\,(3+2) = 0{,}1.$$

Забележка. По този начин намерихме число δ с исканото свойство, но то не е възможно най-голямото. Лесно се съобразява (фиг. 4), че най-голямото такова число е $\delta_0 = \min\,(\sqrt{4{,}1}-2;$



Фиг. 4

$2-\sqrt{3{,}9}\,) = \sqrt{4{,}1}-2$, и всяко $0<\delta\leqq\delta_0$ е решение на задачата.

1.3. Намерете положително число δ такова, че за всяко число x, за което е изпълнено неравенството $|x-2|<\delta$, да бъде в сила $|x^3-8|<0{,}001$.

Упътване. С разсъждения, аналогични на разсъжденията при решението на зад. 1.2, покажете, че едно такова число е например $\delta=0{,}00005$.

1.4. Като използвате дефиницията на Коши, докажете, че функцията $f(x)=2x+5$ е непрекъсната в произволна точка x_0.

Решение. Нека ε е произволно положително число. Да разгледаме равенствата

$$|f(x)-f(x_0)| = |(2x+5) - (2x_0+5)| = 2|x-x_0|.$$

Ясно е, че ако изберем $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$, то за всяко число x, за което е изпълнено $|x-x_0| < \frac{\varepsilon}{2}$, ще бъде в сила

$$|f(x)-f(x_0)| < \varepsilon,$$

което означава според дефиниции 4 и 12, че функцията $f(x)=2x+5$ е непрекъсната в точката x_0.

1.5. Като използвате дефиницията на Коши, докажете, че функцията $f(x) = x^2$ е непрекъсната в произволна точка x_0.

Решение. Както в зад. 1.2 отначало ще разглеждаме число x от отворения интервал с център точката x_0 и радиус 1, т.е. числа, удовлетворяващи неравенството $|x-x_0| < 1$. Тогава от неравенството на триъгълника имаме

$$|x| - |x_0| < |x-x_0| < 1 \text{ или } |x| < |x_0|+1.$$

Нека ε е произволно положително число. От $|x^2-x_0^2| = |x-x_0|\,|x+x_0| \leqq |x-x_0|\,(|x|+|x_0|) < |x-x_0|\,(2|x_0|+1)$ виждаме, че ако изберем $\delta = \min\left(1, \frac{\varepsilon}{2|x_0|+1}\right)$, то за всяко x, удовлетворяващо неравенството $|x-x_0|<\delta$, ще бъдат изпълнени едновременно следните две неравенства:

$$|x-x_0| < 1 \text{ и } |x-x_0| < \frac{\varepsilon}{2|x_0|+1}.$$

Следователно

$$|x^2-x_0^2| \leqq |x-x_0|\,(2|x_0|+1) < \varepsilon,$$

а това съгласно дефиниции 3 и 12 означава, че x^2 е непрекъсната в точката x_0.

1.6. Като използувате дефиницията на Коши, докажете, че функцията $f(x) = x^n$ е непрекъсната във всяка точка x_0.

Упътване. С разсъждения, аналогични на разсъжденията при решението на зад. 1.5, покажете, че ако на произволно положително число ε съпоставим например числото $\delta = \min\left(1, \frac{\varepsilon}{n(|x_0|+1)^{n-1}}\right)$, то изискванията на дефиницията на Коши ще бъдат изпълнени.

1.7. Докажете, че ако n е естествено число и a е положително число, то съществува положително число l такова, че $a^n = l$ (теорема за съществуване на $\sqrt[n]{a}$ — вж. зад. 1.15 от гл. 1).

Решение. Нека M е множеството на всички положителни числа x такива, че $x^n>a$. Множеството M е ограничено отдолу и не е празно. Например от $(a+1)^n \geqq na+1 > a$ следва, че $a+1 \in M$. Според принципа за непрекъснатост множеството M притежава точна долна граница. Да я означим с l. И така, ако $x \in M$, то $x \geqq l$ и ако $m > l$, то съществува елемент x_m на M такъв, че $x_m < m$.

Да допуснем, че $l^n > a$. Тогава съгласно зад. 1.6 за положителното число $\varepsilon = l^n - a$ съществува положително число δ такова, че за всяко x, удовлетворяващо неравенството $|x-l| < \delta$, е в сила $|x^n - l^n| < \varepsilon = l^n - a$ или $a = l^n - (l^n - a) < x^n < l^n + (l^n + a)$. Оказа се, че всички числа $x \in (l-\delta, l+\delta)$ удовлетворяват неравенството $a < x^n$, т.е. принадлежат на множеството M. Това противоречи на факта, че наляво от l няма точки от M.

Да допуснем сега, че $l^n < a$. Тогава съгласно зад. 1.6 за положителното число $\varepsilon = a - l^n$ съществува положително число δ такова, че за всяко x, удовлетворяващо неравенството $|x-l| < \delta$, е в сила $|x^n - l^n| < \varepsilon = a - l^n$ и $l^n - (a - l^n) < x^n < l^n + (a - l^n) = a$. Така получихме, че в интервала $(l-\delta, l+\delta)$ е изпълнено неравенството $x^n < a$, т.е. в този интервал няма точки от M. Това противоречи на факта, че между l и $l+\delta$ трябва да има точки от M.

Получените противоречия показват, че $l^n = a$.

1.8. Като използвате дефиницията на Коши, докажете, че функцията $f(x) = \frac{x^2-2}{x^2-2x-3}$ е непрекъсната в точката 1.

Решение. Първо ще изберем един интервал около точката 1, в който знаменателят на разглежданата функция не се анулира — например интервал с център точката 1 и радиус 1, т.е. ще разглеждаме числа x, удовлетворяващи неравенството $|x-1| < 1$. За тези стойности на x знаменателят приема само отрицателни стойности (защо?). Сега да направим оценка отгоре на $|f(x) - f(1)|$:

$$|f(x) - f(1)| = \frac{x^2 - 2}{x^2 - 2x - 3} - \frac{1}{4} = \left|\frac{3x^2 + 2x - 5}{4(x^2 - 2x - 3)}\right|$$

$$= \frac{|x-1|\,|3x+5|}{4\,(4 - (x-1)^2)} \leqq \frac{11}{12}|x - 1|.$$

В последното неравенство използвахме, че $0 < x < 1$.

Нека ε е произволно положително число. Да му съпоставим числото $\delta = \min\,(1, \frac{12}{11}\varepsilon)$. Тогава за всяко x, удовлетворяващо неравенството $|x-1| < \delta$, са в сила $|x-1| < 1$ и $|x-1| < \frac{12}{11}\,\varepsilon$ и следователно

$$|f(x) - f(1)| \leqq \frac{11}{12}|x - 1| < \varepsilon\,,$$

което означава, че функцията $f(x) = \dfrac{x^2-2}{x^2-2x-3}$ е непрекъсната в точката 1.

1.9. Като използвате дефиницията на Коши, докажете, че следните функции са непрекъснати в посочените точки:

а) $f(x) = \dfrac{3x+1}{x^2 - 4x - 5}$ при $x = 1$;

б) $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{2x^2 - x + 1}$ при $x = 2$;

в) $f(x) = \dfrac{3x^2 - x + 1}{x^2 - x - 5}$ при $x = -1$.

1.10. Като използвате дефиницията на Коши, докажете, че функцията $f(x) = \sqrt[n]{x}$ е непрекъсната при всяко $x \geqq 0$.

Решение. а) Нека $x_0 = 0$. Избираме произволно положително число ε и му съпоставяме числото $\delta = \varepsilon^n$.

За всяко $x \geqq 0$, удовлетворяващо $|x - 0| = x < \varepsilon^n$, е изпълнено

$$\left|\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{0}\right| = \sqrt[n]{x} < \sqrt[n]{\varepsilon^n} = \varepsilon.$$

б) Нека $x_0 > 0$ и нека ε е произволно положително число. От

$$\left|\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{x_0}\right| =$$

$$\frac{\left|\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{x_0}\right|\left(\sqrt[n]{x^{n-1}} + \sqrt[n]{x^{n-2}}\sqrt[n]{x_0} + \ldots + \sqrt[n]{x_0^{n-1}}\right)}{\sqrt[n]{x^{n-1}} + \sqrt[n]{x^{n-2}}\sqrt[n]{x_0} + \ldots + \sqrt[n]{x_0^{n-1}}} < \frac{|x - x_0|}{\sqrt[n]{x_0^{n-1}}}$$

виждаме, че на числото ε можем да съпоставим числото $\delta = \sqrt[n]{x_0^{n-1}}\,\varepsilon$. Тогава за всяко $x \geqq 0$, удовлетворяващо неравенството $|x - x_0| < \delta$, е в сила $\left|\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{x_0}\right| < \varepsilon$.

С това показахме, че функцията $f(x) = \sqrt[n]{x}$ е непрекъсната във всяка точка $x_0 \geqq 0$.

1.11. Като използвате дефиницията на Коши, докажете, че

$$\lim_{x\to 2} \frac{3 - x}{(x-2)^2} = +\infty\,.$$

Решение. Нека N е произволно положително число (вж. забележката след дефиниция 11). Да разгледаме околност на точката 2 с радиус $\frac{1}{2}$, т.е. нека $\frac{3}{2} < x < \frac{5}{2}$. Тогава

$$\frac{3-x}{(x-2)^2} > \frac{3 - \frac{5}{2}}{(x-2)^2} = \frac{1}{2\,(x-2)^2}.$$

Сега на числото N да съпоставим числото $\delta = \min\left(\frac{1}{2}, \sqrt{\frac{1}{2N}}\right)$.

Нека x е произволно число, удовлетворяващо неравенствата

$0 < |x-2| < \delta$, т.е. $x > \frac{3}{2}$, $x \neq 2$ и $|x - 2| < \sqrt{\frac{1}{2N}}$. Тогава

$$\frac{3-x}{(x-2)^2} > \frac{1}{2\,(x-2)^2} > N\,.$$

Съгласно дефиниция 9 това означава, че $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{3-x}{(x-2)^2} = +\infty$.

1.12. Като използвате дефиницията на Коши, докажете, че

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2 - x - 2}{x - 1} = +\infty .$$

Решение. От равенствата

$$\frac{x^2 - x - 2}{x - 1} = \frac{\frac{x^2}{2} + \left(\frac{x^2}{4} - x\right) + \left(\frac{x^2}{4} - 2\right)}{x - 1}$$

$$= \frac{\frac{x^2}{2} + x\left(\frac{x}{4} - 1\right) + \frac{1}{4}(x^2 - 8)}{x - 1}$$

е ясно, че при $x > 4$ е в сила

$$\frac{x^2 - x - 2}{x - 1} > \frac{\frac{x^2}{2}}{x} = \frac{x}{2} .$$

Нека N е произволно число. Да му съпоставим числото $A = \max(4, 2N)$. Ясно е, че за всяко $x > A$ е изпълнено

неравенството $\frac{x^2 - x - 2}{x - 1} > N.$

1.13. Нека $P(x) = a_0 x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n,\ a_0 > 0$ е даден полином. Докажете, че:

а) Съществува такова число A, че за всяко $x > A$ е изпълнено $P(x) > 0$;

б) съществува число B такова, че за всяко $x > B$ е изпълнено

$P(x) > \frac{a_0}{2} x^n$;

в) съществува число C такова, че за всяко $x > C$ е изпълнено $P(x) < 2a_0x^n$;

г) $\lim\limits_{x\to+\infty} P(x) = +\infty$.

Решение. а) Твърдението следва веднага от равенството

$$P(x) = \left(\frac{a_0}{n} x^n + a_1x^{n-1}\right) + \left(\frac{a_0}{n} x^n + a_2x^{n-2}\right) + \ldots + \left(\frac{a_0}{n} x^n + a_n\right),$$

като вземем предвид, че за всяко от събираемите

$$B_i = \frac{a_0}{n} x^n + a_i x^{n-i} = \frac{a_0}{n} x^{n-i}\left(x^i + \frac{na_i}{a_0}\right), i = 1, 2, \ldots, n ,$$

съществува число A_i такова, че при $x > A_i$ е в сила $B_i > 0$. (Ако $B_i > 0$ за всяко x, можем да смятаме, че $A_i = 0$).

Тогава числото $A = \max A_i$ удовлетворява условието на задачата.

б) Да разгледаме полинома

$$Q(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n - \frac{a_0}{2} x^n .$$

Коефициентът пред x^n е $\frac{a_0}{2} > 0$ и следователно можем да приложим а).

в) Да разгледаме полинома

$$Q(x) = 2a_0x^n - (a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n).$$

Коефициентът пред x^n е $a_0>0$, следователно можем да приложим а).

г) Нека N е произволно число. Да разгледаме полинома

$$Q(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n - N .$$

Съгласно а) съществува число A такова, че за всяко $x > A$ е в сила $Q(x) > 0$ или $P(x) > N$, което означава съгласно дефиниция 11, че

$$\lim_{x\to+\infty} P(x) = +\infty .$$

1.14. Докажете, че

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3x^5 - 5x^4 + 2}{2x^2 - x - 15} = +\infty .$$

Решение. Ще приложим зад. 1.13. Съгласно б) съществува число A_1 такова, че за всяко $x > A_1$ е в сила $3x^5 - 5x^4 + 2 > \frac{3}{2} x^5 > 0.$

Съгласно а) и в) на зад. 1.13 съществува число A_2 такова, че за всяко $x > A_2$ е в сила

$$0 < 2x^2 - x - 15 < 4x^2.$$

Тогава за всяко $x > \max(A_1, A_2)$ ще бъде изпълнено

$$R(x) = \frac{3x^5 - 5x^4 + 2}{2x^2 - x - 15} > \frac{\frac{3}{2}x^5}{4x^2} = \frac{3}{8}x^3.$$

Нека сега N е произволно положително число. Да му съпоставим

числото $A = \max\left(A_1, A_2, \sqrt[3]{\frac{8}{3}N}\right)$. Ясно е, че за всяко

$x > N$ ще бъде изпълнено $R(x) > N$.

1.15. Докажете, че:

а) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2 - 3x + 2}{2x^2 - 2x - 5} = \dfrac{1}{2}$; б) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^3 - 2x + 1}{x^2 - x - 5} = +\infty$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2 - 2x - 1}{2x - 1} = +\infty$; г) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2 + x + 1}{3x^3 - 2x} = 0$;

д) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x - x^3}{2x^4 + x^2 + 1} = 0$; е) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^4 - x + 1}{1 - 2x - x^3} = -\infty$.

1.16.' Нека $R(x) = \dfrac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \ldots + b_m}$, $a_0 \neq 0, b_0 \neq 0$.

Докажете, че:

а) $\lim\limits_{x\to\infty} R(x) = +\infty$ при $n > m$ и $\dfrac{a_0}{b_0} > 0$,

$\lim\limits_{x\to+\infty} R(x) = -\infty$ при $n > m$ и $\dfrac{a_0}{b_0} < 0$;

б) $\lim\limits_{x\to+\infty} R(x) = 0$ при $n < m$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty} R(x) = \dfrac{a_0}{b_0}$ при $n = m$.

Решение. Ще разгледаме само случая $a_0 > 0$ и $b_0 > 0$. Останалите случаи се свеждат до този по очевиден начин с умножаване с -1.

а) Съгласно зад. 1.13 можем да намерим числото A_1 такова, че

за всяко $x > A_1$ е изпълнено $a_0x^n + a_1x^n + \ldots + a_n > \dfrac{a_0}{2}x^n > 0$,

и число A_2 такова, че за всяко $x > A_2$ е изпълнено

$$0 < b_0x^m + b_1x^{m-1} + \ldots + b_m < 2b_0x^m.$$

Тогава за всяко $x > \max(A_1, A_2)$ имаме

$$R(x) > \frac{\frac{a_0}{2}x^n}{2b_0x^m} = \frac{a_0}{4b_0}x^{n-m}, \text{ където } n - m > 0.$$

Нека N е произволно положително число. Да му съпоставим

числото $A = \max\left(A_1, A_2, \sqrt[n-m]{\frac{4b_0}{a_0}N}\right)$. Тогава при $x > A$ е в сила

$R(x) > N$, което означава $\lim\limits_{x\to+\infty} R(x) = +\infty$.

б) Съгласно зад. 1.13 намираме число A_1 такова, че за всяко $x > A_1$ е изпълнено $0 < a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n < 2a_0x^n$ и число A_2 такова, че за $x > A_2$ е изпълнено $b_0x^m + b_1x^{m-1} + \ldots + b_m > \dfrac{b_0}{2}x^m > 0$. Тогава за всяко $x > \max(A_1, A_2)$ имаме

$$0 < R(x) < \frac{2a_0x^n}{\frac{b_0}{2}x^m} = \frac{4a_0}{b_0\,x^{m-n}}, \text{ като } m - n > 0.$$

Нека ε е произволно положително число. Да му съпоставим числото $A = \max\left(A_1, A_2, \sqrt[m-n]{\frac{4a_0}{b_0\varepsilon}}\right)$. Ясно е, че за всяко $x > A$ е в сила

$$0 < R(x) < \frac{4a_0}{b_0x^{m-n}} < \varepsilon.$$

в) Съгласно б) за рационалната функция

$$Q(x) = \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n}{b_0x^n + b_1x^{n-1} + \ldots + b_n} - \frac{a_0}{b_0}$$

е изпълнено $\lim\limits_{x\to+\infty} Q(x) = 0$, тъй като числителят на дробта, която се получава след привеждане към общ знаменател, е полином най-много от $(n-1)$-ва степен.

1.17. Докажете, че:

а) ако $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ и $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = +\infty$, то $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x) + g(x)) = +\infty$ (накратко това ще означаваме така: $\infty + \infty = \infty$);

б) ако $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ и $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = A$, то $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x) + g(x)) = +\infty$ (накратко това ще означаваме така: $\infty + A = \infty$);

в) ако $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ и $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = +\infty$, то $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x) \times g(x)) = +\infty$ (накратко това ще означаваме така: $\infty . \infty = \infty$);

г) ако $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ и $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = A > 0$, то $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x) \times g(x)) = +\infty$ (накратко това ще означаваме така: $+\infty . A = +\infty$);

д) ако $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$ и $f(x) > 0$, то $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{1}{f(x)} = +\infty$ (накратко това ще означаваме така: $\frac{1}{+0} = +\infty$);

е) ако $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$ и $f(x) < 0$, то $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{1}{f(x)} = -\infty$ (накратко това ще означаваме така: $\frac{1}{-0} = -\infty$);

ж) ако $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty$, то $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{1}{f(x)} = 0$ (накратко това ще означаваме така: $\frac{1}{\infty} = 0$);

з) ако $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$, то $\lim\limits_{x\to x_0} (-f(x)) = -\infty$.

Решение. **а)** Нека N е произволно число. Да разгледаме ...то $\frac{N}{2}$. Понеже $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$, то съществува число ... 0 такова, че за всяко x, удовлетворяващо $|x - x_0| < \delta_1$, е в ... $f(x) > \frac{N}{2}$. Тъй като $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = +\infty$, то съществува число ...число $\delta_2 > 0$ такова, че за всяко x, удовлетворяващо $|x - x_0| < \delta_2$, е изпълнено $g(x) > \frac{N}{2}$. Нека сега на числото N да съпоставим числото $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$. Ясно е, че за всяко x, удовлетворяващо $|x - x_0| < \delta$, ще бъдат изпълнени и двете неравенства $f(x) > \frac{N}{2}$ и $g(x) > \frac{N}{2}$ и следователно $f(x) + g(x) > N$, а това означава $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x) + g(x)) = +\infty$.

г) Нека N е произволно положително число. Да разгледаме числото $\frac{2N}{A}$. Тъй като $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$, съществува число $\delta_1 > 0$ такова, че за всяко x, удовлетворяващо $|x - x_0| < \delta_1$, е в сила

$f(x) > \dfrac{2N}{A}$. Тъй като $A > 0$ и $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = A$, то съществува $\delta_2 > 0$ такова, че за всяко x, удовлетворяващо $|x - x_0| < \delta_2$, е в сила $\dfrac{A}{2} < g(x) < \dfrac{3A}{2}$. Нека сега на числото N съпоставим числото $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$. За всяко x, удовлетворяващо $|x - x_0| < \delta$, ще бъдат изпълнени и двете неравенства $f(x) > \dfrac{2N}{A} > 0$ и $g(x) > \dfrac{A}{2} > 0$ и следователно $f(x)g(x) > N$, а това означава, че $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x)g(x)) = +\infty$.

д) Нека N е произволно положително число. Да разгледаме положителното число $\varepsilon = \dfrac{1}{N}$. Тъй като $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$, то съществува положително число δ такова, че за всяко x, удовлетворяващо $|x - x_0| < \delta$, е изпълнено

$$0 < f(x) = |f(x) - 0| < \varepsilon = \frac{1}{N},$$

а оттук следва $\dfrac{1}{f(x)} > N$, т.е. $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{1}{f(x)} = +\infty$.

ж) Нека ε е произволно положително число. Да разгледаме числото $N = \dfrac{1}{\varepsilon}$. Тъй като $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$, съществува положително число δ такова, че за всяко x, удовлетворяващо $|x - x_0| < \delta$, е в сила

$$f(x) > N > \frac{1}{\varepsilon} > 0, \text{ т.е. } \left|\frac{1}{f(x)} - 0\right| = \frac{1}{f(x)} < \varepsilon$$

а това означава, че $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{1}{f(x)} = 0$.

1.18. Нека функциите $f(x)$, $g(x)$ и $h(x)$ удовлетворяват условията:

а) съществуват границите $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to x_0} hf(x)$;

б) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} h(x) = A$;

в) съществува положително число δ_1 такова, че за всяко x, удовлетворяващо $0 < |x - x_0| < \delta_1$, е в сила $f(x) \leqq g(x) \leqq h(x)$.

Докажете, че съществува границата $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ и

$$\lim_{x\to x_0} g(x) = A.$$

Решение. Нека ε е произволно положително число.

От $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$ следва, че съществува положително число δ_2 такова, че за всяко x, удовлетворяващо $0 < |x - x_0| < \delta_2$, е изпълнено $|h(x) - A| < \varepsilon$, т.е. $A - \varepsilon < h(x) < A + \varepsilon$.

От $\lim\limits_{x\to x_0} h(x) = A$ следва, че съществува положително число δ_3 такова, че за всяко x, удовлетворяващо $0 < |x - x_0| < \delta_3$, е изпълнено $|h(x) - A| < \varepsilon$, т.е. $A - \varepsilon < h(x) < A + \varepsilon$.

Сега на числото ε да съпоставим числото $\delta = \min(\delta_1, \delta_2, \delta_3)$. Тогава за всяко x, удовлетворяващо $0 < |x - x_0| < \delta$, ще бъдат изпълнени едновременно неравенствата:

$$A - \varepsilon < f(x),$$
$$f(x) < g(x) < h(x),$$
$$h(x) < A + \varepsilon.$$

Оттук следва, че при $0 < |x - x_0| < \delta$ ще бъде в сила $A - \varepsilon < g(x) < A + \varepsilon$, т.е. $|g(x) - A| < \varepsilon$. С това показахме, че $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = A$.

1.19. Нека функциите $f(x)$ и $g(x)$ удовлетворят условията а) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty$;

б) съществува число δ_1 такова, че за всяко x, удовлетворяващо $0 < |x - x_0| < \delta_1$, е в сила $f(x) \leqq g(x)$.

Докажете, че $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \infty$.

1.20. Нека функциите $f(x)$ и $g(x)$ удовлетворяват условията:

а) съществуват границите $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$;

б) съществува число δ_1 такова, че за всяко x, удовлетворяващо $0 < |x - x_0| < \delta_1$, е в сила $f(x) \leqq g(x)$.

Докажете, че $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \leqq \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$.

1.21. Нека функцията $f(x)$ е ограничена и нека $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0$.

Докажете, че съществува границата $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x)\, g(x))$ и

$$\lim_{x\to x_0} (f(x)\, g(x)) = 0.$$

Решение. Нека $|f(x)| \leqq A$ за всяко x от дефиниционната област. От

$$0 \leqq |f(x)\, g(x)| = |f(x)|\, |g(x)| \leqq A\, |g(x)|,$$

като приложим теорема 3 и зад. 1.18, получаваме, че твърдението е вярно.

1.22. Докажете, че функцията $f(x) = \cos\dfrac{1}{x}$ няма граница при $x \to 0$ и $x \neq 0$, а функцията $g(x) = x\cos\dfrac{1}{x}$ има граница при $x \to 0$ и $x \neq 0$.

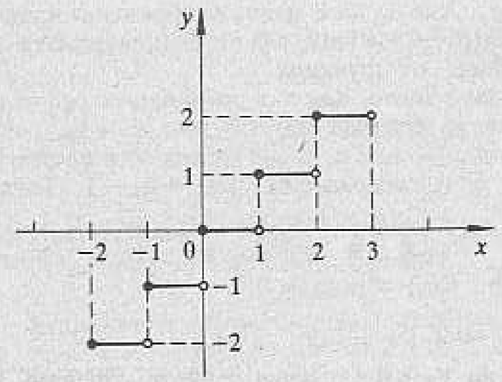
Решение. Да разгледаме редицата с общ член $x_n = \dfrac{1}{n\pi}$. Очевидно тази редица клони към нула, а редицата от функционалните стойности $f(x_n) = \cos n\pi = (-1)^n$ има две точки на сгъстяване и следователно е разходяща. Това показва, че функцията

$f(x) = \cos\dfrac{1}{x}$ не удовлетворява условието на дефиниция 1 (на Хайне) в точката 0 и следователно няма граница при $x \to 0$.

Тъй като $\left|\cos\dfrac{1}{x}\right| \leqq 1$ за всяко x, твърдението, че $g(x) = x\cos\dfrac{1}{x}$ има граница при $x \to 0$ следва от зад. 1.21. При това

$$\lim_{x\to 0} x\cos\frac{1}{x} = 0.$$

1.23. Нека $f(x) = [x]$ ($[x]$ се чете „скобка от x" и означава най-голямото цяло число, което е по-малко или равно на x). Докажете, че $[x]$ е прекъсната при всяко цяло число x и непрекъсната във всички останали точки (фиг. 5).



Фиг. 5

Решение. а) Нека x_0 е цяло число. Да разгледаме произволна редица $\{x_n\}$, клоняща към x_0 и такава, че $x_n < x_0$ за всяко естествено число n. Тъй като $x_0 - 1 < x_0$, то съществува число N такова, че при $n > N$ е изпълнено $x_0 - 1 < x_n < x_0$. Тогава за всяко $n > N$ имаме $f(x_n) = [x_n] = x_0 - 1$ и следователно редицата от функционалните стойности $\{f(x_n)\}$ е сходяща и клони към $x_0 - 1$. Това означава, че функцията $f(x) = [x]$ има лява граница при $x \to x_0$, $x < x_0$, която е различна от $f(x_0) = [x_0] = x_0$. Следователно тя е прекъсната отляво (а значи и прекъсната) за всяко цяло число.

Нека сега разгледаме произволна редица $\{x_n\}$, клоняща към x_0, като $x_n > x_0$. Тъй като $x_0 < x_0 + 1$, то от известно място нататък е изпълнено $x_0 < x_n < x_0 + 1$. Тогава за редицата от функционалните стойности имаме $f(x_n) = [x_n] = x_0$ от известно място нататък. Следователно $\{f(x_n)\}$ е сходяща и има граница $x_0 = [x_0] = f(x_0)$. С това показахме, че функцията $f(x) = [x]$ е непрекъсната отдясно за всяко цяло число.

б) Нека x_0 не е цяло число. Тогава $[x_0] < x_0 < [x_0] + 1$. Да вземем произволна редица $\{x_n\}$, клоняща към x_0. От известно място нататък ще бъдат изпълнени неравенствата $[x_0] < x_n < [x_0] + 1$. Тогава за редицата от функционалните стойности ще имаме $f(x_n) = [x_n] = [x_0]$ от известно място нататък. Следователно тя ще бъде сходяща и границата ѝ ще е $[x_0] = f(x_0)$. С това показахме, че функцията $f(x) = [x]$ е непрекъсната за всяко число x_0, което не е цяло.

1.24. Докажете, че функцията $f(x) = \sin\pi(x - [x])$ е непрекъсната за всяко x.

Решение. Ако x_0 не е цяло, непрекъснатостта на $f(x)$ следва от непрекъснатостта на $\sin x$, зад. 1.23 и теоремата за непрекъснатост на функция от функция.

Нека x_0 е цяло число. Както в предишната задача ще пресметнем лявата и дясната граница на $f(x)$ при $x \to x_0$.

И така нека $x_n \to x_0$ и $x_n < x_0$. Тогава от известно място нататък $x_0 - 1 < x_n < x_0$ и следователно $[x_n] = x_0 - 1$. Тогава от

$$f(x_n) = \sin\pi(x_n - [x_n]) = \sin\pi(x_n - x_0 + 1)$$

получаваме $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x_n) = \sin\pi = 0.$

Нека сега $x_n \to x_0$ и $x_n > x_0$. Тогава от известно място нататък имаме $x_0 < x_n < x_0 + 1$ и следователно $[x_n] = x_0$. Тогава от

$$f(x_n) = \sin\pi(x_n - [x_n]) = \sin\pi(x_n - x_0)$$

получаваме $\lim\limits_{\substack{x_n \to x_0 \\ x_n > x_0}} f(x_n) = \sin 0 = 0.$

Тъй като лявата и дясната граница съвпадат с функционалната стойност $f(x_0) = \sin\pi(x_0 - [x_0]) = \sin 0 = 0$, функцията $f(x)$ е непрекъсната в точката x_0.

1.25. Докажете, че функциите са непрекъснати за всяко x:

а) $f(x) = [x]\sin\pi x$;

б) $f(x) = [x]^2 - 2x[x] + [x]$.

1.26. Докажете, че функцията

$$D(x) = \lim_{m\to\infty}\left(\lim_{n\to\infty}\cos^{2n}(m!x\pi)\right)$$

е прекъсната навсякъде (функция на Дирихле).

Решение. Нека x_0 е ирационално число. Тогава при всяко фиксирано m числото $m!x_0$ не е цяло и следователно

$$0 < \cos^2(m!x_0\pi) < 1.$$

Така за всяко m имаме $\lim\limits_{n\to\infty}\cos^{2n}(m!x_0\pi) = 0$, а оттук получаваме $D(x_0) = 0$.

Нека $x_0 = \dfrac{p}{q}$, където p и $q > 0$ са цели числа. Тогава при $m \geqq q$ числото $m!x_0$ е цяло и следователно $\cos^2(m!x_0\pi) = 1$. От това следва, че при $m \geqq q$ е в сила $\lim\limits_{n\to\infty}\cos^2(m!x_0\pi) = 1$ и след граничен преход получаваме, че $D(x_0) = 1$.

И така

$$D(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \text{ ирационално число,} \\ 1 & \text{при } x \text{ рационално число.} \end{cases}$$

(Много често фукцията на Дирихле се задава по този начин).

Нека x_0 е произволна точка. Да конструираме редица $\{x_n\}$, клоняща към нула със стойности, различни от x_0, и такава, че членовете ѝ, стоящи на четни места, са рационални числа, а на нечетни — ирационални. Тогава редицата $D(x_n) = \dfrac{1+(-1)^n}{2}$ има две точки на сгъстяване и следователно не е сходяща. С това показахме, че функцията $D(x)$ не удовлетворява условието на дефиниция 1 (Хайне) и следователно в никоя точка x_0 не притежава граница. Оттук следва, че във всяка точка $D(x)$ е прекъсната.

1.27. Изследвайте за непрекъснатост следните функции:

а) $f(x) = xD(x)$; **б)** $f(x) = D(x) \,.\, \sin\pi x$;

в) $f(x) = \sin(\pi D(x))$.

Навсякъде $D(x)$ е функцията на Дирихле от зад. 1.26.

1.28. Нека x_0 е ирационално число и нека редицата с общ член $x_n = \dfrac{p_n}{q_n}$, където p_n и $q_n > 0$ са цели числа, да клони към x_0. Докажете, че $\lim\limits_{n\to\infty} q_n = +\infty$.

Решение. Нека m е произволно естествено число. Нека да означим $k_m = [mx_0]$, т.е. k_m е цяло число, за което е изпълнено $k_m < mx_0 < k_m + 1$. Тогава интервалът $\left(\dfrac{k_m}{m}, \dfrac{k_m+1}{m}\right)$ е околност на точката x_0, в която няма рационални числа от вида $\dfrac{n}{m}$, където n е цяло число.

Нека A е произволно положително число. Съществуват краен брой естествени числа $i = 1, 2, \ldots, m_A$, по-малки или равни на A. За всяко от тях построяваме отворения интервал U_i, съдържащ точката x_0 и несъдържащ точки от вида $\dfrac{n}{i}$, където n е цяло число. Нека $U = \bigcap\limits_{i=1}^{m_A} U_i$. Ясно е, че това е отворен интервал, съдържащ точката x_0 и несъдържащ дроби $\dfrac{n}{m}$ със знаменател m, $0 < m \leqq A$.

Но редицата $x_n = \dfrac{p_n}{q_n}$ клони към x_0 и следователно съществува число N такова, че при $n > N$ имаме $\dfrac{p_n}{q_n} \in U$, а от това следва, че при $n > N$ е в сила $q_n > A$. Тъй като числото A беше избрано произволно, това означава, че $\lim\limits_{n\to\infty} q_n = +\infty$.

1.29. Функцията на Риман е дефинирана при $x \neq 0$ по следния начин:

$$R(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{q}, \text{ ако } x = \dfrac{p}{q} \left(\dfrac{p}{q} \text{ е несъкратима дроб, } q > 0\right), \\ 0, \text{ ако } x \text{ е ирационално число.} \end{cases}$$

Докажете, че функцията $R(x)$ е непрекъсната за всяко ирационално число и прекъсната за всяко рационално число.

Решение. Нека x_0 е ирационално число. Да разгледаме произволна редица от рационални числа $x_n = \dfrac{p_n}{q_n}$, $q_n > 0$, която клони към x_0. Тогава, съгласно зад. 1.28, $q_n \to \infty$ и следователно $R(x_n) = \dfrac{1}{q_n} \to 0$. Като вземем предвид, че в ирационалните точки $R(x) = 0$, то от направените разсъждения лесно следва, че за произволна редица $\{x_n\}$, клоняща към x_0 със стойности различни от x_0, съответната редица $\{R(x_n)\}$ клони към $0 = R(x_0)$, т.е. $R(x)$ е непрекъсната в ирационалните точки.

Нека x_0 е рационално число, различно от нула. Да разгледаме произволна редица $\{x_n\}$ от рационални числа, която клони към x_0. Тогава $R(x_n)=0$ за всяко n и следователно $\lim\limits_{n\to\infty} R(x_n) = 0$. Тъй като $R(x_0) = \dfrac{1}{q}$, то $R(x)$ не е непрекъсната в рационалните точки.

1.30. Изследвайте относно непрекъснатост функцията, дефинирана по следния начин:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{p}{q+1}, \text{ ако } x = \dfrac{p}{q} \left(\dfrac{p}{q} \text{ е несъкратима дроб, } q > 0\right), \\ |x|, \text{ ако } x \text{ е ирационално число.} \end{cases}$$

1.31. Нека функцията $f(x)$ е дефинирана при $x \neq 0$ по следния начин:

$$f(x) = \begin{cases} q, \text{ ако } x = \dfrac{p}{q} \left(\dfrac{p}{q} \text{ е несъкратима дроб, } q>0\right), \\ 0, \text{ ако } x \text{ е ирационално число.} \end{cases}$$

Докажете, че функцията $f(x)$ е неограничена във всеки интервал.

1.32. Нека функцията $f(x)$, дефинирана в интервала (a, b), е монотонно растяща. Докажете, че:

а) ако $f(x)$ е ограничена отгоре, то $f(x)$ притежава лява граница при $x \to b$ и

$$\lim_{\substack{x \to b \\ x<b}} f(x) = \sup_{x \in (a,\, b)} f(x);$$

б) ако $f(x)$ е неограничена, то $\lim\limits_{\substack{x \to b \\ x<b}} f(x) = +\infty$.

Решение. **а)** Нека функцията $f(x)$ е ограничена в интервала (a, b). Да означим $l = \sup\limits_{x \in (a,b)} f(x)$. Нека ε е произволно положително число.

Понеже числото l е горна граница на множеството от функционалните стойности на $f(x)$, то $f(x) \leqq l$ за всяко $x \in (a,b)$. Тъй като l е най-малката горна граница, то $l - \varepsilon$ не е горна граница и следователно съществува число x_ε такова, че $a < x_\varepsilon < b$ и $l - \varepsilon < f(x_\varepsilon)$.

Да вземем произволно число x от отворения интервал (x_ε, b). Тъй като $f(x)$ е растяща, то от $x_\varepsilon < x$ следва

$$l - \varepsilon < f(x_\varepsilon) \leqq f(x) \leqq l < l + \varepsilon,$$

т.е. построихме лява околност на точката b, за всяко x от която $|f(x) - l| < \varepsilon$, а това означава, че числото l е лява граница на $f(x)$ в точката b.

б) Нека $f(x)$ е неограничена в интервала (a,b). Да вземем произволно число A. От неограничеността на $f(x)$ следва, че съществува число $x_A \in (a,b)$ такова, че $f(x_A) > A$. Тогава от монотонността на $f(x)$ имаме, че за всяко x, удовлетворяващо $x_A < x < b$, е изпълнено $A < f(x_A) \leqq f(x)$, а това означава, че

$$\lim_{\substack{x \to b \\ x<b}} f(x) = +\infty.$$

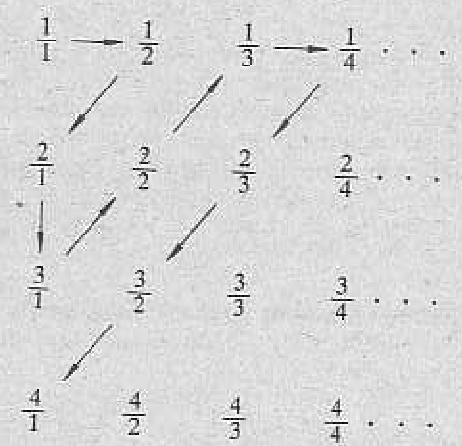
Забележка. От тази задача следва, че ако функцията $f(x)$, дефинирана в интервала (a,b), е монотонно растяща, то във всяка точка $x_0 \in (a,b)$ съществуват лява и дясна граница и

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x>x_0}} f(x) \leqq f(x_0) \leqq \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x>x_0}} f(x).$$

1.33. Постройте пример на монотонно растяща функция, дефинирана при $x > 0$, която е прекъсната в точките $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$ и непрекъсната във всички останали точки.

1.34. Постройте пример на монотонно растяща функция, дефинирана при $x > 0$, която е прекъсната за всяко рационално число и непрекъсната за всяко ирационално число.

Решение. Множеството от положителните рационални числа може да се нареди в редица $r_1, r_2, r_3, \ldots$ например по начина, посочен на фиг. 6.



Фиг. 6

След като едно число се срещне веднаж, по-нататък ще го изпускаме. Така числото 1 се среща на първо място и следователно $r_1 = 1$, а числата $\frac{2}{2}, \frac{3}{3}, \frac{4}{4}, \ldots$ ще изпускаме. Второто число е $\frac{1}{2}$, т.е. $r_2 = \frac{1}{2}$, $r_3 = \frac{2}{1} = 2$, $r_4 = \frac{1}{3}$ и т.н. Така всяко положително рационално число ще се среща в редицата точно един път.

Нека $\{n_i\}$ е една редица от естествени числа такива, че $1 \leqq n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$. Тогава $n_i \geqq n_1 + i - 1$. Да разгледаме редицата с общ член

$$S_k = \frac{1}{2^{n_1}} + \frac{1}{2^{n_2}} + \ldots + \frac{1}{2^{n_k}}.$$

Ясно е, че тази редица е монотонно растяща. От

$$\frac{1}{2^{n_1}} \leqq S_k = \frac{1}{2^{n_1}} + \frac{1}{2^{n_2}} + \ldots + \frac{1}{2^{n_k}} \leqq \frac{1}{2^{n_1}} + \frac{1}{2^{n_1+1}} + \ldots + \frac{1}{2^{n_1+k-1}}$$

$$= \frac{1}{2^{n_1}}\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2^{k-1}}\right) \leqq \frac{1 - \dfrac{1}{2^k}}{2^{n_1}\left(1 - \dfrac{1}{2}\right)} < \frac{1}{2^{n_1-1}}$$

виждаме, че тя е ограничена. Следователно редицата $\{S_k\}$ е сходяща при всеки избор на редицата $\{n_k\}$.

Нека x е произволно положително число и $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$ са номерата на всички положителни рационални числа, по-малки от x. С $f(x)$ ще означим границата на редицата

$$S_k(x) = \frac{1}{2^{n_1}} + \frac{1}{2^{n_2}} + \ldots + \frac{1}{2^{n_k}}.$$

Да вземем две произволни положителни числа x и y такива, че $x < y$. Нека $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$ са номерата на рационалните числа от интервала $[x, y)$. От

$$\frac{1}{2^{n_1}} \leqq S_k(y) - S_k(x) = \frac{1}{2^{n_1}} + \frac{1}{2^{n_2}} + \ldots + \frac{1}{2^{n_k}} < \frac{1}{2^{n_1-1}}$$

с граничен преход получаваме

$$0 < \frac{1}{2^{n_1}} \leqq f(y) - f(x) \leqq \frac{1}{2^{n_1-1}}.$$

Оттук следва, че функцията $f(x)$ е строго растяща. Според забележката към зад. 1.32 функцията $f(x)$ има лява и дясна граница във всяка точка от интервала $[0, +\infty)$.

Нека x_0 е ирационално число. Да разгледаме редици $\{x_k\}$ и $\{y_k\}$ такива, че $0 < x_k < x_0 < y_k$ за всяко $k \in N$ и $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = \lim\limits_{k\to\infty} y_k = x_0$. С r_k да означим рационалното число от интервала $[x_k, y_k]$ с възможно най-малък номер n_k. Ясно е, че $\lim\limits_{k\to\infty} r_k = x_0$ и според зад. 1.28 редицата от знаменателите на r_k дивергира към $+\infty$, а оттам очевидно и $n_k \to +\infty$. И от неравенството

$$\frac{1}{2^{n_k}} \leqq f(y_k) - f(x_k) \leqq \frac{1}{2^{n_k-1}}$$

след граничен преход получаваме

$$0 \leqq \lim_{\substack{x\to x_0\\ x>x_0}} f(x) - \lim_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}} f(x) \leqq 0,$$

а това означава, че функцията $f(x)$ е непрекъсната в точката x_0.

Нека сега x_0 е рационално число и нека неговият номер е n_0. Да разгледаме две редици $\{x_k\}$ и $\{y_k\}$ такива, че $0 < x_k < x_0 < y_k$ за всяко $k \in N$ и $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = \lim\limits_{k\to\infty} y_k = x_0$. С r_k отново ще означим рационалното число с възможно най-малък номер n_k, лежащо в интервала $[x_k, y_k)$. Тъй като $x_0 \in [x_k, y_k)$, то $n_0 \geqq n_k$ и след граничен преход в неравенството

$$\frac{1}{2^{n_0}} \leqq \frac{1}{2^{n_k}} \leqq f(y_k) - f(x_k)$$

получаваме

$$0 < \frac{1}{2^{330}} \lim_{\substack{x\to x_0\\ x>x_0}} f(x) - \lim_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}} f(x),$$

т.е. лявата и дясната граница на $f(x)$ в точката x_0 са различни. Това означава, че функцията $f(x)$ е прекъсната в точката x_0.

1.35. Докажете, че множеството M от точки, в които е прекъсната монотонната функция $f(x)$, е най-много изброимо, т.е. че, ако то е безкрайно, точките му могат да се наредят в редица.

Упътване. На всяка точка на прекъсване x_0 съпоставете отворения интервал $\left(\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}} f(x), \lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x>x_0}} f(x)\right)$. Покажете, че така построените интервали нямат общи точки и са непразни. След това във всеки интервал изберете по едно рационално число и използвайте, че рационалните числа могат да се номерират.

1.36. Докажете, че функцията $f(x) = a^x$, $a > 0$, е непрекъсната за всяко x.

Решение. Ще разгледаме само случая $a > 1$. Тогава функцията $f(x) = a^x$ е растяща и съгласно зад. 1.32 съществуват границите

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} a^x \quad \text{и} \quad \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} a^x .$$

Според зад. 1.20 от гл. 1 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} a^x = \lim\limits_{n\to\infty} a^{\frac{1}{n}} = 1 = a^0$.

С това показахме, че функцията a^x е непрекъсната отдясно в точката 0.

Нека сега редицата $\{x_n\}$ клони към 0 със стойности, по-малки от 0. Тогава $-x_n > 0$ и съгласно доказаното

$$\lim_{n\to\infty} a^{x_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{a^{-x_n}} = 1 = a^0,$$

което показва, че функцията a^x е непрекъсната отляво в точката 0.

Тъй като функцията a^x е непрекъсната от ляво и непрекъсната отдясно в точката 0, то тя е непрекъсната в точката 0.

Нека x_0 е произволно реално число. Да разгледаме произволна редица $\{x_n\}$, клоняща към x_0. От равенството

$$a^{x_n} - a^{x_0} = a^{x_0}\,(a^{x_n - x_0} - 1)$$

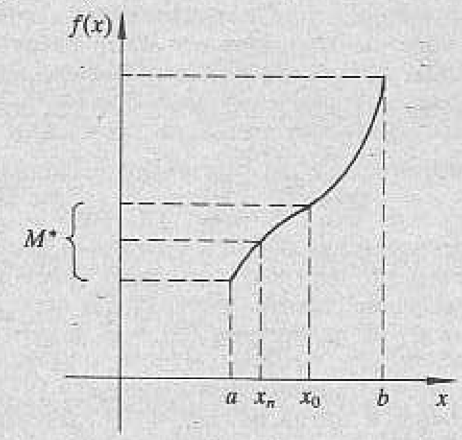
и от непрекъснатостта на a^x при $x = 0$ следва $\lim\limits_{n\to\infty} a^{x_n} = a^{x_0}$.

1.37. Нека функцията $f(x)$ удовлетворява следните условия:

а) дефинирана е в интервала $[a, b]$ и множеството от функционалните ѝ стойности е M;

б) $f(x)$ е строго растяща.

Докажете, че обратната ѝ функция $\varphi(y)$ е непрекъсната във всяка точка от M (фиг. 7).



Фиг. 7

Решение. Ако точката y_0 е изолирана точка на M, то $\varphi(y)$ е непрекъсната в точката y_0 по дефиниция.

Нека y_0 е лява точка на сгъстяване на M. Да разгледаме произволна редица от точки $y_n \in M$, $y_n < y_0$, клоняща към y_0.

Да въведем следните означения: $x_n = \varphi(y_n)$, $x_0 = \varphi(y_0)$ и $M^* = \{y : y \in M$ и $y \leqq y_0\}$. Ясно е, че $y_n = f(x_n)$ и $y_0 = f(x_0)$.

Тъй като $\varphi(y)$ е обратна на растяща функция, тя е също растяща. Сега ще приложим зад. 1.32. Да отбележим, че при доказателството в зад. 1.32 не беше съществено, че разглеждаме интервала $[a, b]$, а само че точката b е лява точка на сгъстяване за дефиниционната област на разглежданата там функция. За всяко $y \in M^*$ имаме $y \leqq y_0$ и следователно $\varphi(y) \leqq \varphi(y_0)$. Това означава, че в M^* функцията $\varphi(y)$ е ограничена отгоре и според зад. 1.32 тя притежава лява граница в точката y_0 и

$$x_n = \varphi(y_n) \leqq B = \lim_{\substack{y\to y_0\\ y<y_0}} \varphi(y) = \sup_{y<y_0} \varphi(y) \leqq \varphi(y_0) = x_0 .$$

От $x_n \leqq B \leqq x_0$ следва, че $B \in [a, b]$ и тогава можем да пресметнем $f(B)$. Да отбележим изрично, че на това място използваме, че $f(x)$ е дефинирана в интервал. Понеже $f(x)$ е растяща, то

$$y_n = f(x_n) \leqq f(B) \leqq f(x_0) = y_0.$$

След граничен преход получаваме

$$y_0 \leqq f(B) \leqq y_0, \text{ т.е. } f(B) = y_0 ,$$

а оттук имаме

$$\lim_{\substack{y\to y_0\\ y<y_0}} \varphi(y) = B = \varphi(f(B)) = \varphi(y_0) .$$

С това показахме, че $\varphi(y)$ е непрекъсната отляво в точката y_0. Аналогично се доказва, че ако y_0 е дясна точка на сгъстяване на M, то $\varphi(y)$ е непрекъсната отдясно.

1.38. Докажете, че функциите $\sqrt[n]{x}$, $\operatorname{arc\,tg} x$, $\arcsin x$, $\arccos x$, $\ln x$ и $\operatorname{arc\,cotg} x$ са непрекъснати във всяка точка на дефиниционната си област.

Упътване. Използвайте, че тези функции са обратни на монотонни функции, и приложете зад. 1.37.

1.39. Нека $a > 1$ и $n \in N$. Докажете, че съществува число A такова, че за всяко $x > A$ е в сила $a^x > x^n$.

Решение. Нека x е произволно число, по-голямо от $n + 1$. Да означим $k = [x]$, т.е. $k \leqq x < k + 1$ и $k \in N$. Тогава $k \geqq n + 1$. Ако $\alpha = a - 1$, то $\alpha > 0$ и

$$a^x \geqq a^k = (1+\alpha)^k = \binom{k}{0} + \ldots + \binom{k}{n+1}\alpha^{n+1} + \ldots + \binom{k}{k}\alpha^k$$

$$\geqq \binom{k}{n+1}\alpha^{n+1}, x^n \leqq (k+1)^n.$$

Тъй като $\binom{k}{n+1}\alpha^{n+1} - (k+1)^n$ е полином на k от $(n+1)$-ва степен с коефициент пред k^{n+1}, равен на $\frac{\alpha^{n+1}}{(n+1)!}$, то съгласно зад. 1.13 съществува число B такова, че за всяко $k > B$ е изпълнено

$$\binom{k}{n+1}\alpha^{n+1} \geqq (k+1)^n.$$

Нека $A = \max(n+1, B)$. Тогава за всяко $x > A$ ще бъдат изпълнени неравенствата

$$a^x \geqq \binom{k}{n+1}\alpha^{n+1} \geqq (k+1)^n \geqq x^n.$$

1.40. Докажете, че ако $a > 1$ и $\alpha > 0$, то:

а) $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x = +\infty$; **б)** $\lim\limits_{x\to+\infty} \log_a x = +\infty$;

в) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^\alpha = +\infty$; **г)** $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{a^x}{x^\alpha} = +\infty$;

д) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^\alpha}{\log_a x} = +\infty$; **е)** $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x = 0$;

ж) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} \log_a x = -\infty$; **з)** $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} x^\alpha \log_a x = 0$.

Решение. **а)** Съгласно зад. 1.39 съществува число A такова, че при $x > A$ е изпълнено $a^x > x$.

Нека B е произволно число. Да означим $C = \max(A, B)$. Тогава за всяко $x > C$ ще бъде в сила $a^x > x > B$. С това показахме, че $\lim\limits_{x\to\infty} a^x = +\infty$.

б) Да разгледаме редицата $\log_a a^n = n$. Тя е неограничена и следователно функцията $\log_a x$ е неограничена отгоре. Тъй като при $a > 1$ функцията $\log_a x$ е монотонно растяща, то от зад. 1.32 следва $\lim\limits_{x\to\infty} \log_a x = \infty$.

в) Следва от а), б) и от равенството $x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$.

г) Нека $k = [\alpha]$. Съгласно зад. 1.39 съществува число A такова, че при $x > A$ е изпълнено $a^x > x^{k+2}$.

Нека B е произволно число. Да означим $C = \max(A, B)$. Тогава за всяко $x > C$ ще бъде в сила

$$a^x \geqq x^{k+2} = x^{k+1}x \geqq x^\alpha B.$$

Така получихме, че за всяко $x > C$ ще е изпълнено $\frac{a^x}{x^\alpha} \geqq B$, а това означава, че $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{a^x}{x^\alpha} = +\infty$.

д) Да положим $\log_a x = t$, т.е. $x = a^t$. От б) имаме

$$\lim_{x\to\infty} t = \lim_{x\to\infty} \log_a x = +\infty.$$

Тогава

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^\alpha}{\log_a x} = \lim_{x\to\infty} \frac{(a^t)^\alpha}{t} = \lim_{t\to\infty} \left(\frac{a^t}{t^{1/\alpha}}\right)^\alpha = \infty.$$

Последното равенство следва от в) и г).

ж) и **з)** Положете $t = \frac{1}{x}$.

§ 2. Пресмятане на някои граници

От дефиницията на Хайне (§ 1) и теоремите за граници на редиците следват теоремите.

Теорема 1. Ако функциите $f(x)$ и $g(x)$ притежават граници при x, клонящо към x_0, то функциите $f(x) + g(x)$, $f(x) - g(x)$ и $f(x)\,g(x)$ притежават граници при x, клонящо към x_0, и са в сила равенствата:

$$\lim_{x\to x_0} (f(x) + g(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x) + \lim_{x\to x_0} g(x),$$

$$\lim_{x\to x_0} (f(x)-g(x))=\lim_{x\to x_0} f(x)-\lim_{x\to x_0} g(x),$$

$$\lim_{x\to x_0} f(x)\,g(x) = \lim_{x\to x_0} f(x) \lim_{x\to x_0} g(x).$$

Теорема 2. Ако функциите $f(x)$ и $g(x)$ притежават граници при x, клонящо към x_0, и $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) \neq 0$, то функцията $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ притежава граница при x, клонящо към x_0, и е в сила равенството

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}.$$

Теорема 3. Ако съществуват границите $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=a$ и $\lim\limits_{x\to a} F(x)$, то функцията $\varphi(x) = F(f(x))$ притежава граница при x, клонящо към x_0, и е в сила равенството

$$\lim_{x\to x_0} \varphi(x) = \lim_{x\to a} F(x).$$

Понякога за удобство ще използваме следните понятия:

Дефиниция 1. Ще казваме, че функцията $f(x)$ е безкрайно малка в точката x_0, ако $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$.

Дефиниция 2. Ще казваме, че функцията $g(x)$ е безкрайно малка в точката x_0 от по-висок ред, отколкото функцията $f(x)$, ако $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{g(x)}{f(x)}=0$. Това ще отбелязваме така: $g(x)=o(f(x))$ $(x\to x_0)$.

Непосредствено от теорема 1 следва, че ако $h(x)$ и $g(x)$ са безкрайно малки в точката x_0 от по-висок ред, отколкото функцията $f(x)$, то и функциите $h(x) \pm g(x)$, $Ag(x)$ и $f(x)g(x)$ са безкрайно малки от по-висок ред в точката x_0, отколкото функцията $f(x)$. Накратко това ще отбелязваме по следния начин:

$$o(f) + o(f) = o(f)\ (x \to x_0),$$

$$Ao(f) = o(f)\ (x \to x_0),$$

$$o(f)\,o(f) = o(f)\ (x \to x_0).$$

Понякога, когато е ясно в коя точка се извършват пресмятанията, ще пишем само $o(f)$ вместо $o(f)\,(x \to x_0)$.

При нашите разсъждения често ще използваме зад. 1.16 и 1.17.

2.1. Пресметнете следните граници:

а) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2+x-1}{2x-5}$; **б)** $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2+x+5}{x^2-5}$;

в) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{3x^2-2x-1}{x^3-1}$; **г)** $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-5x+6}{x^2-12x+20}$;

д) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^2-3x-10}{3x^2+5x-2}$; **е)** $\lim\limits_{y\to -2} \dfrac{y^3+3y^2+2y}{y^2-y-6}$;

ж) $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(x+h)^3-x^3}{h}$; **з)** $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^n-1}{x-1}$, $n \in \mathbf{N}$;

и) $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{1}{1-x} - \dfrac{3}{1-x^3}\right)$; **к)** $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-5x+6}{x^3-2x^2-x+2}$.

Решение. **а)** Като вземем предвид теоремите за граници на функции, получаваме:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2+x-1}{2x+5} = \frac{\lim\limits_{x\to 1} (x^2+x-1)}{\lim\limits_{x\to 1} (2x+5)}$$

$$= \frac{\lim\limits_{x\to 1} x^2 + \lim\limits_{x\to 1} x - \lim\limits_{x\to 1} 1}{\lim\limits_{x\to 1} 2x + \lim\limits_{x\to 1} 5} = \frac{\left(\lim\limits_{x\to 1} x\right)^2 + 1 - 1}{\lim\limits_{x\to 1} 2 \,.\, \lim\limits_{x\to 1} x + \lim\limits_{x\to 1} 5}$$

$$= \frac{1}{2+5} = \frac{1}{7}.$$

в) Сега не можем да приложим директно теорема 2 за граница на частно на функции, тъй като $\lim\limits_{x\to 1} (x^3-1)=0$. Предварително разлагаме на множители и съкращаваме множителите, които клонят към нула:

$$\lim_{x\to1}\frac{3x^2-2x-1}{x^3-1}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(3x+1)}{(x-1)(x^2+x+1)}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{3x+1}{x^2+x+1}=\frac{4}{3}.$$

з) В тази задача ще използваме формулата

(1) $$a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+\dots+ab^{n-2}+b^{n-1}).$$

Изразът $a^{n-1}+a^{n-2}b+\dots+b^{n-1}$ се нарича *спрегнат израз* на израза $a-b$.

И така:

$$\lim_{x\to1}\frac{x^n-1}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+\dots+1)}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to1}(x^{n-1}+x^{n-2}+\dots+1)=n.$$

и) Предварително трябва да приведем двете дроби към общ знаменател и да извършим необходимите съкращения:

$$\lim_{x\to1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^3}\right)=\lim_{x\to1}\frac{1+x+x^2-3}{(1-x)(1+x+x^2)}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x+2)}{(1-x)(x^2+x+1)}=-\lim_{x\to1}\frac{x+2}{x^2+x+1}=-1.$$

2.2. Пресметнете следните граници:

а) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1+x)^5-(1+5x)}{x^2}$;

б) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1+x)^n-(1+nx)}{x^2}$, $n\in\mathbf{N}$;

в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1+mx)^n-(1+nx)^m}{x^2}$, $n,m\in\mathbf{N}$;

г) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1+x+x^2+\dots+x^n-(n+1)}{x-1}$, $n\in\mathbf{N}$;

д) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^{n+1}-(n+1)x+n}{(x-1)^2}$, $n\in\mathbf{N}$;

е) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^{n+1}-x^{k+1}+x^k-nx+n-1}{(x-1)^2}$, $n,k\in\mathbf{N}$;

ж) $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{n}{1-x^n}-\dfrac{m}{1-x^m}\right)$, $n,m\in\mathbf{N}$.

Решение. **а)** От равенството

$$(1+x)^5=\binom{5}{0}+\binom{5}{1}x+\binom{5}{2}x^2+\binom{5}{3}x^3+\binom{5}{4}x^4+\binom{5}{5}x^5$$

$$=1+5x+10x^2+o(x^2)$$

(с $o(x^2)$ означихме $\varphi(x)=\binom{5}{3}x^3+\binom{5}{4}x^4+\binom{5}{5}x^5$, тъй като в точката 0 имаме $\lim\limits_{x\to0}x^2=0$, $\lim\limits_{x\to0}\varphi(x)=0$ и $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\varphi(x)}{x^2}=0$)

получаваме

$$\lim_{x\to0}\frac{(1+x)^5-(1+5x)}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{10x^2+o(x^2)}{x^2}=10.$$

в) аналогично на пресмятанията в пример а) имаме

$$\lim_{x\to0}\frac{(1+mx)^n-(1+nx)^m}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\left[1+nmx+\frac{n(n-1)}{2}m^2x^2+o(x^2)\right]-\left[1+mnx+\frac{m(m-1)}{2}n^2x^2+o(x^2)\right]}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{[n(n-1)m^2-m(m-1)n^2]x^2+o(x^2)}{2x^2}=\frac{nm(n-m)}{2}.$$

г) Ще използваме резултата от зад. 2.1, з):

$$\lim_{x\to1}\frac{1+x+x^2+\ldots+x^n-(n+1)}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)+(x^2-1)+\ldots+(x^n-1)}{x-1}$$

$$=1+2+3+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}.$$

д) От равенства

$$\frac{x^{n+1}-(n+1)x+n}{(x-1)^2}=\frac{x^{n+1}-x-n(x-1)}{(x-1)^2}$$

$$=\frac{x(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+\ldots+1)-n(x-1)}{(x-1)^2}$$

$$=\frac{x^n+x^{n-1}+\ldots+1-(n+1)}{x-1},$$

като приложим резултата от г), получаваме

$$\lim_{x\to1}\frac{x^{n+1}-(n+1)x+n}{(x-1)^2}=\frac{n(n+1)}{2}.$$

ж) Първи начин. С елементарни преобразувания тази задача се свежда до г):

$$\lim_{x\to1}\left(\frac{n}{1-x^n}-\frac{m}{1-x^m}\right)=\lim_{x\to1}\frac{n(1-x^m)-m(1-x^n)}{(1-x^n)(1-x^m)}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{n(1-x)(1+x+x^2+\ldots+x^{m-1})-m(1-x)(1+x+x^2+\ldots+x^{n-1})}{(1-x)^2(1+x+x^2+\ldots+x^{n-1})(1+x+x^2+\ldots+x^{m-1})}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{n(1+x+x^2+\ldots+x^{m-1})-m(1+x+x^2+\ldots+x^n)}{1-x}$$

$$\times\lim_{x\to1}\frac{1}{(1+x+x^2+\ldots+x^{n-1})(1+x+x^2+\ldots+x^{m-1})}$$

$$=\frac{1}{nm}\lim_{x\to1}\frac{n(1+x+x^2+\ldots+x^{m-1})-m-m(1+x+x^2+\ldots+x^{n-1}-n)}{1-x}$$

$$=\frac{1}{nm}\left(\frac{-nm(m-1)}{2}-\frac{-mn(n-1)}{2}\right)=\frac{n-m}{2}.$$

Втори начин. В много случаи е удобно вместо да търсим граница при $x\to x_0$, $x_0\neq0$, да положим $t=x-x_0$ и да търсим граница при $t\to0$. И така, полагаме $t=x-1$. От равенствата

$$x^n=(1+t)^n=\binom{n}{0}+\binom{n}{1}t+\binom{n}{2}t^2+\binom{n}{3}t^3+\ldots+\binom{n}{n}t^n$$

$$=1+nt+o(t)=1+nt+\frac{n(n-1)}{2}t^2+o(t^2),$$

$$x^m=(1+t)^m=\binom{m}{0}+\binom{m}{1}t+\binom{m}{2}t^2+\binom{m}{3}t^3+\ldots+\binom{m}{m}t^m$$

$$=1+mt+o(t)=1+mt+\frac{m(m-1)}{2}t^2+o(t^2)$$

получаваме

$$\frac{n}{1-x^n}-\frac{m}{1-x^m}=\frac{n(1-x^m)-m(1-x^n)}{(1-x^n)(1-x^m)}$$

$$=\frac{n\left[-mt-\frac{m(m-1)}{2}+o(t^2)\right]-m\left[-nt-\frac{n(n-1)}{2}+o(t^2)\right]}{[-nt+o(t)][-mt+o(t)]}$$

$$=\frac{\frac{-nm(m-1)}{2}+\frac{mn(n-1)}{2}+\frac{o(t^2)}{t^2}}{\left(-n+\frac{o(t)}{t}\right)\left(-m+\frac{o(t)}{t}\right)},$$

откъдето след граничен преход имаме

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{n}{1-x^n}-\frac{m}{1-x^m}\right)=\frac{-\dfrac{nm(m-1)}{2}+\dfrac{mn(n-1)}{2}}{(-n)\,(-m)}=\frac{n-m}{2}.$$

2.3. Пресметнете границите:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2}{x}$; **б)** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-x+1}{2x^2+x}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3-x+1}{3x^3+x^2-x}$; **г)** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+2}{x^2-3x-1}$;

д) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x-1}{x^3+x^2-2}$; **е)** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4-1}{x^3-x^2+x+2}$;

ж) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-x^3+2x+1}{x^2-1}$; **з)** $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^4-x^3+1}{x^3-1}$;

и) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1-x+x^2-x^4}{x^2+1}$;

к) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+1)^2(x^2+1)^2(x^3+1)^2\ldots(x^n+1)^2}{(x^n+1)^{n+1}}$, $n\in\mathbf{N}$.

Решение. **а)** Непосредствено от зад. 1.17, ж) следва

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2}{x}=2\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0.$$

б) Първи начин. Да изнесем пред скоби от числителя и от знаменателя най-високите степени на x и да приложим а):

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-x+1}{2x^2+x}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}{2+\dfrac{1}{x}}=\frac{1}{2}.$$

Втори начин. Да използваме резултата от зад. 1.16. Числителят и знаменателят са полиноми от една и съща степен — втора, и следователно търсената граница е равна на частното от коефициентите пред вторите степени:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1.x^2-x+1}{2.x^2+x}=\frac{1}{2}.$$

г) Знаменателят е от по-висока степен, отколкото числителя. Следователно съгласно зад. 1.16, б) имаме

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+2}{x^2-3x-1}=0.$$

е) Числителят е от по-висока степен, отколкото знаменателя, и частното от коефициентите пред най-високите степени е положително число. Следователно

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^4-1}{x^3-x^2+x+2}=+\infty.$$

ж) Отново числителят е от по-висока степен, отколкото знаменателя, но сега частното от коефициентите пред най-високите степени е отрицателно число. Следователно

$$\lim_{x\to\infty}\frac{-x^3+2x+1}{x^2-1}=-\infty.$$

з) Първи начин. Да изнесем пред скоби от числителя и от знаменателя най-високите степени. Тогава

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^4-x^3+1}{x^3-1}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}x\lim_{x\to-\infty}\frac{2-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^4}}{1-\dfrac{1}{x^3}}=-\infty.2=-\infty.$$

Втори начин. Отново числителят на дробта е от по-висока степен, отколкото знаменателя, и следователно границата ще бъде $+\infty$ или $-\infty$, но понеже $x \to -\infty$, сега не е достатъчно да съобразим какъв е знакът на частното от коефициентите пред най-високите степени. В този случай трябва да разберем дали разликата от степенните показатели е четно или нечетно число: ако тази разлика е четна, знакът пред безкрайността ще бъде еднакъв със знака на частното от коефициентите пред най-високите степени, а ако разликата е нечетно число, ще трябва да вземем противоположния знак (докажете това твърдение!). Тъй като в нашия случай въпросната разлика е 1, т.е. нечетно число, а частното от коефициентите е 2, т.е. е положително число, то

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{2x^4 - x^3 + 1}{x^3 - 1} = -\infty .$$

к) Числителят е от степен $2(1 + 2 + 3 + \ldots + n) = n(n+1)$. Следователно числителят и знаменателят имат равни степени, а и в числителя, и в знаменателя коефициентът пред най-високата степен е равен на 1. Следователно

$$\lim_{x \to \infty} \frac{(x+1)^2 (x^2+1)^2 \ldots (x^n+1)^2}{(x^n+1)^{n+1}} = 1.$$

2.4. Пресметнете границите:

а) $\lim\limits_{\substack{t\to 1\\ t<1}} \dfrac{2t}{1-t^2}$; **б)** $\lim\limits_{t\to 1} \dfrac{2t}{(1-t^2)^2}$;

в) $\lim\limits_{\substack{t\to 1\\ t<1}} \dfrac{2t^2+2}{t^2-3t+2}$; **г)** $\lim\limits_{\substack{t\to 1\\ t>1}} \dfrac{t^2-1}{t^3-4t^2+5t^2-2}$;

д) $\lim\limits_{\substack{t\to -1\\ t>-1}} \dfrac{3t+2}{t^2+3t+2}$; **е)** $\lim\limits_{\substack{t\to 4\\ t<4}} \dfrac{t^2-5t+4}{(t-4)^2}$;

ж) $\lim\limits_{t\to 2} \dfrac{t^2+1}{t^3-5t^2+8t-4}$; **з)** $\lim\limits_{\substack{t\to 2\\ t<2}} \dfrac{t^2-4}{t^3-5t+8t-4}$.

Решение. **а)** Имаме

$$\lim_{\substack{t\to 1\\ t<1}} \frac{2t}{1-t^2} = \lim_{\substack{t\to 1\\ t<1}} \frac{2t}{1+t} \lim_{\substack{t\to 1\\ t<1}} \frac{1}{1-t} = 1.(+\infty) = +\infty .$$

При намирането на границата използвахме, че $1 - t \to 0$ с положителни стойности и съгласно зад. 1.17, д)

$$\lim_{\substack{t\to 1\\ t<1}} \frac{1}{1-t} = +\infty .$$

б) В този случай знаменателят е винаги положително число и затова лявата и дясната граница на частното са равни на $+\infty$. Оттук, като вземем предвид, че числителят има положителна граница, съгласно зад. 1.17, г) получаваме

$$\lim_{t\to 1} \frac{2t}{(1-t^2)^2} = +\infty .$$

в) От равенството

$$\frac{2t^2+2}{(t-1)(t-2)} = \frac{2t^2+2}{t-2} \cdot \frac{1}{t-1},$$

като вземем предвид, че $t - 1 > 0$ и $\lim\limits_{t\to 1} (t-1) = 0$, получаваме $\lim\limits_{\substack{t\to 1\\ t<1}} \dfrac{2t^2+2}{t^2-3t+2} = \lim\limits_{\substack{t\to 1\\ t<1}} \dfrac{2t^2+2}{t-2} \cdot \lim\limits_{\substack{t\to 1\\ t<1}} \dfrac{1}{t-1} = (-4) \cdot (-\infty) = +\infty$.

г) От равенството

$$\frac{t^2-1}{t^3-4t^2+5t-2} = \frac{(t+1)(t-1)}{(t-1)^2(t-2)} = \frac{t+1}{t-2} \cdot \frac{1}{t-1},$$

като вземем предвид, че $t - 1 > 0$ и $\lim\limits_{t\to 1} (t-1) = 0$, получаваме

$$\lim_{\substack{t\to 1\\ t>1}} \frac{t^2-1}{t^3-4t^2+5t-2} = \lim_{\substack{t\to 1\\ t>1}} \frac{t+1}{t-2} \cdot \lim_{\substack{t\to 1\\ t>1}} \frac{1}{t-1} = (-2)(+\infty) = -\infty .$$

2.5. Пресметнете границите:

а) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x^2}$; б) $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}$;

в) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1}$; г) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{x^2+p^2}-p}{\sqrt{x^2+q^2}-q}$, $p, q>0$;

д) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}{x}$; е) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[3]{1+x^2}-\sqrt[4]{1-2x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}$;

ж) $\lim\limits_{x\to8}\dfrac{\sqrt{9+2x}-5}{\sqrt[3]{x}-2}$; з) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt[3]{7+x^2}-\sqrt{3+x}}{x-1}$;

и) $\lim\limits_{x\to7}\dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt[3]{x+20}}{\sqrt[4]{x+9}-2}$;

к) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{a}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}}$, $a>0$; л) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}$

м) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[n]{1+ax}-1}{x}$, $n\in\mathbf{N}$; н) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1-\frac{x}{2}}{x^2}$;

о) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[n]{1+x}-1-\frac{x}{n}}{x^2}$, $n\in\mathbf{N}$;

п) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{8}}{x^3}$;

р) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[n]{1+\alpha x}\,\sqrt[m]{1+\beta x}-1}{x}$, $n\in\mathbf{N}$;

Решение. При решаването на тези задачи ще използваме, че функцията $\sqrt[n]{x}$ е непрекъсната за всяко $x\geqq 0$ (зад. 1.10). Един от стандартните методи за решаване на такива задачи е използване на формула (1) за премахване на радикалите.

а) След умножаване на числителя и знаменателя със спрегнатия израз на числителя получаваме

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{(\sqrt{1+x^2}-1)(\sqrt{1+x^2}+1)}{x^2(\sqrt{1+x^2}+1)}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}+1}=\frac{1}{2}.$$

в) Първи начин. Умножаваме и разделяме на спрегнатите изрази на числителя и знаменателя:

$$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1}=\lim_{x\to1}\frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)}{(\sqrt[3]{x}-1)(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)(\sqrt{x}+1)}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1}{\sqrt{x}+1}=\frac{3}{2}.$$

Втори начин. Полагаме $\sqrt[6]{x}=t$. Очевидно $t\to1$ и следователно

$$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1}=\lim_{t\to1}\frac{t^3-1}{t^2-1}=\lim_{t\to1}\frac{t^2+t+1}{t+1}=\frac{3}{2}.$$

е) За да премахнем радикалите в числителя, ще използваме формула (1) при $n=12$, а за знаменателя — при $n=6$. За да опростим пресмятанията, ще въведем следните означения: $a=\sqrt[3]{1+x^2}$, $b=\sqrt[4]{1-2x}$, $c=\sqrt{1+x}$ и $d=\sqrt[3]{1-x}$.

Тогава спрегнатите изрази на числителя и знаменателя ще бъдат съответно

$$A=a^{11}+a^{10}b+a^9b^2+\ldots+ab^{10}+b^{11},$$

$$B=c^5+c^4d+c^3d^2+c^2d^3+cd^4+d^5.$$

От $x\to0$ следва, че $a\to1$, $b\to1$, $c\to1$, $d\to1$, $A\to12$ и $B\to6$. Тогава

$$\frac{\sqrt[3]{1+x^2}-\sqrt[4]{1-2x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}=\frac{(a-b)\,AB}{(c-d)\,BA}=\frac{(a^{12}-b^{12})\,B}{(c^6-d^6)\,A}$$

$$=\frac{[(1+x^2)^4-(1-2x)^3]\,B}{[(1+x)^3-(1-x)^2]\,A}=\frac{[(1+o(x))-(1-3.2x+o(x))]B}{[(1+3x+o(x))-(1-2x+o(x))]A}$$

$$=\frac{[6x+o(x)]\,B}{[5x+o(x)]\,A}.$$

Да отбележим, че с $o(x)$ означихме събираеми, които съдържат x на степен, по-голяма или равна на 2. Ясно е, че те са безкрайно малки от ред, по-висок, отколкото x. Сега имаме

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt[3]{1+x^2}-\sqrt[4]{1-2x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}=\lim_{x\to0}\frac{(6x+o(x))\,B}{(5x+o(x))\,A}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\left(6+\frac{o(x)}{x}\right)B}{\left(5+\frac{o(x)}{x}\right)A}=\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{12}=\frac{3}{5}.$$

Втори начин. Нека a, b, c и d са функциите от първи начин. Ще пресметнем четири помощни граници:

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt[3]{1+x^2}-1}{x}=\lim_{x\to0}\frac{x^2}{x(a^2+a+1)}=0,$$

$$\lim_{x\to0}\frac{1-\sqrt[4]{1-2x}}{x}=\lim_{x\to0}\frac{2x}{x(b^3+b^2+b+1)}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2},$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}=\lim_{x\to0}\frac{x}{x(c+1)}=\frac{1}{2},$$

$$\lim_{x\to0}\frac{1-\sqrt[3]{1-x}}{x}=\lim_{x\to0}\frac{x}{x(d^2+d+1)}=\frac{1}{3}.$$

Оттук получаваме

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt[3]{1+x^2}-\sqrt[4]{1-2x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}=\lim_{x\to0}\frac{\sqrt[3]{1+x^2}-1+1-\sqrt[4]{1-2x}}{\sqrt{1+x}-1+1-\sqrt[3]{1-x}}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\frac{\sqrt[3]{1+x^2}-1}{x}+\frac{1-\sqrt[4]{1-2x}}{x}}{\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}+\frac{1-\sqrt[3]{1-x}}{x}}=\frac{0+\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}=\frac{3}{5}.$$

м) Да положим $\sqrt[n]{1+ax}=t$. Тогава $t\to1$, $x=\dfrac{t^n-1}{a}$ и

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt[n]{1+ax}-1}{x}=\lim_{t\to1}\frac{(t-1)a}{t^n-1}$$

$$=\lim_{t\to1}\frac{a}{t^{n-1}+t^{n-2}+\ldots+1}=\frac{a}{n}.$$

р) Първи начин. Ще използваме резултата от м). За целта правим следните преобразувания:

$$\frac{\sqrt[n]{1+\alpha x}\,\sqrt[m]{1+\beta x}-1}{x}=\frac{(\sqrt[n]{1+\alpha x}-1+1)\,\sqrt[m]{1+\beta x}-1}{x}$$

$$=\frac{(\sqrt[n]{1+\alpha x}-1)\,\sqrt[m]{1+\beta x}+\sqrt[m]{1+\beta x}-1}{x}$$

$$=\frac{\sqrt[n]{1+\alpha x}-1}{x}\sqrt[m]{1+\beta x}+\frac{\sqrt[m]{1+\beta x}-1}{x}.$$

Оттук получаваме

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt[n]{1+\alpha x}\,\sqrt[m]{1+\beta x}-1}{x}=\frac{\alpha}{n}+\frac{\beta}{m}.$$

Втори начин. Да означим $\sqrt[nm]{(1+\alpha x)^m(1+\beta x)^n}=t$. Очевидно $t\to1$ при $x\to0$.

Да направим следните преобразувания:

$$\frac{\sqrt[n]{1+\alpha x}\,\sqrt[m]{1+\beta x}-1}{x}=\frac{\sqrt[nm]{(1+\alpha x)^m(1+\beta x)^n}-1}{x}$$

$$= \frac{[1 + m\alpha x + o(x)]\,[1 + \beta x + o(x)] - 1}{x(1 + t + t^2 + \ldots + t^{nm-1})}$$

$$= \frac{(m\alpha + n\beta)x + o(x)}{x(1 + t + t^2 + \ldots + t^{nm-1})} = \frac{m\alpha + n\beta + \dfrac{o(x)}{x}}{1 + t + t^2 + \ldots + t^{nm-1}}.$$

Оттук следва

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[n]{1 + \alpha x}\,\sqrt[m]{1 + \beta x} - 1}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{m\alpha + n\beta + \dfrac{o(x)}{x}}{1 + t + t^2 + \ldots + t^{nm-1}} = \frac{m\alpha + n\beta}{mn}.$$

2.6. Пресметнете следните граници:

а) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{x^2 + 3}}{\sqrt[3]{x^3 + 1}}$; **б)** $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\sqrt{x^2 + 3}}{\sqrt[3]{x^3 + 1}}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty} (\sqrt{x + 1} - \sqrt{x})$; **г)** $\lim\limits_{x\to\infty} (\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - 1})$;

д) $\lim\limits_{x\to-\infty} (\sqrt{x^2 + 1} + x)$; **е)** $\lim\limits_{x\to\infty} (\sqrt[3]{x^3 + 3x^2} - \sqrt{x^2 + 2x})$;

ж) $\lim\limits_{x\to-\infty} (\sqrt[3]{x^3 + 3x^2} + \sqrt{x^2 + 2x})$;

з) $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$; **и)** $\lim\limits_{x\to-\infty} x(\sqrt{x^3 + 1} + x)$.

к) $\lim\limits_{x\to\infty} x(\sqrt{x^2 + 2x} - 2\sqrt{x^2 + x} + x)$.

Решение. **а)** Задачата ще решим, като изнесем най-високите степени на x пред радикалите:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 3}}{\sqrt[3]{x^3 + 1}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-x\sqrt{1 + \dfrac{3}{x^2}}}{x\sqrt[3]{1 + \dfrac{1}{x^3}}} = -1.$$

При изнасянето на x от $\sqrt{x^2 + 3}$ използвахме, че $x \to \infty$ и следователно можем да смятаме, че $x>0$, откъдето имаме $\sqrt{x^2} = x$.

б) Аналогично на пример а)

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 3}}{\sqrt[3]{x^3 + 1}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-x\sqrt{1 + \dfrac{3}{x^2}}}{x\sqrt[3]{1 + \dfrac{1}{x^3}}} = -1.$$

Сега от $x \to -\infty$ следва, че можем да смятаме, че $x < 0$ и тогава $\sqrt{x^2} = -x$.

в) Като умножим и разделим със спрегнатия израз, получаваме

$$\lim_{x\to\infty} (\sqrt{x + 1} - \sqrt{x}) = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{x + 1} + \sqrt{x}} = 0.$$

д) Като изнесем x пред корена и положим $t = \dfrac{1}{x}$, ще сведем решението до зад. 2.5, а). Тогава

$$\lim_{x\to-\infty} (\sqrt{x^2 + 1} + x) = \lim_{x\to-\infty} \left(-x\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} + x\right)$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{-\sqrt{1 + t^2} + 1}{t}\,\frac{t}{t} = \frac{1}{2}\,.\,0 = 0.$$

Използвахме, че $x\to-\infty$ и следователно можем да смятаме, че $x<0$, откъдето $\sqrt{x^2} = -x$.

к) Да положим $t = \dfrac{1}{x}$. Тогава $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x} = \lim\limits_{t\to 0} t = 0$. Да направим преобразуванията

$$x(\sqrt{x^2+2x}-2\sqrt{x^2+x}+x)$$

$$= x^2\left(\sqrt{1+\frac{2}{x}}-2\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1\right) = \frac{\sqrt{1+2t}-2\sqrt{1+t}+1}{t^2}.$$

Границата $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sqrt{1+2t}-2\sqrt{1+t}+1}{t^2}$ можем да намерим по два начина.

Първи начин.

$$\lim_{t\to 0}\frac{\sqrt{1+2t}-2\sqrt{1+t}+1}{t^2} = \lim_{t\to 0}\frac{(\sqrt{1+2t}+1)^2-4(1+t)}{t^2(\sqrt{1+2t}+1+2\sqrt{1+t})}$$

$$= \frac{1}{4}\lim_{t\to 0}\frac{2\sqrt{1+2t}-2-2t}{t^2} = \frac{1}{2}\lim_{t\to 0}\frac{(1+2t)-(1+t)^2}{t^2(\sqrt{1+2t}+1+t)} = -\frac{1}{4}.$$

Втори начин. Ще използваме резултата от зад. 2.5, п):

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1-\dfrac{x}{2}+\dfrac{x^2}{8}}{x^3} = \frac{1}{16}.$$

Нека $\varphi(x) = \dfrac{\sqrt{1+x}-1-\dfrac{x}{2}+\dfrac{x^2}{8}}{x^3}$. Тогава от $\lim\limits_{x\to 0}\varphi(x) = \dfrac{1}{16}$

имаме $x^3\varphi(x) = o(x^2)$. Така получихме

$$\sqrt{1+x} = 1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+o(x^2).$$

Да приложим този резултат в нашия случай:

$$\lim_{t\to 0}\frac{\sqrt{1+2t}-2\sqrt{1+t}+1}{t^2}$$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{\left[1+\frac{2t}{t}-\frac{4t^2}{8}+o(t^2)\right]-2\left[1+\frac{t}{2}-\frac{t^2}{8}+o(t^2)\right]+1}{t^2}$$

$$= \lim_{t\to 0}\left(-\frac{1}{4}+\frac{o(t^2)}{t^2}\right) = -\frac{1}{4}.$$

2.7. Пресметнете следните граници:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{x}$; **б)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin ax}{x}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x}{\sin 5x}$; **г)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin nx}{\sin mx}$, $m\neq 0$;

д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}x}{x}$; **е)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(a+x)-\sin(a-x)}{x}$.

Решение. При решаването на тези задачи ще използваме непрекъснатостта на тригонометричните функции и основната граница $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1$. Да отбележим изрично, че съгласно теорема 3 от $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$ следва $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\sin(f(x))}{f(x)} = 1$.

а) За да използваме основната граница, аргументът на синуса и знаменателят трябва да бъдат равни на една и съща функция, клоняща към нула. За това ще умножим и разделим с 2:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x} = \lim_{x\to 0} 2\,\frac{\sin 2x}{2x} = 2.$$

в) За да сведем до основната граница, ще умножим и разделим на x:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{\sin 5x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{4x}\cdot\frac{5x}{\sin 5x}\cdot\frac{4}{5} = \frac{4}{5}.$$

д) От непрекъснатостта на $\cos x$ и основната граница получаваме

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{\cos x}=1.$$

е) След елементарни тригонометрични преобразувания имаме

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(a+x)-\sin(a-x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\cos a\,\sin x}{x}=2\cos a\,.$$

2.8. Пресметнете следните граници:

а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin \pi x}{x-1}$; **б)** $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos x}{\frac{\pi}{2}-k}$;

в) $\lim\limits_{x\to \frac{3\pi}{2}}\dfrac{\cos x}{\frac{3\pi}{2}-x}$; **г)** $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{3}}\dfrac{1-2\cos x}{x-\frac{\pi}{3}}$;

д) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\dfrac{\cos x-\sin x}{\frac{\pi}{4}-x}$; **е)** $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{3}}\dfrac{\operatorname{tg}^3 x-3\operatorname{tg}x}{\frac{\pi}{3}-x}$;

Решение. **а)** Полагаме $x-1=t$. Тогава $t\to 0$ и

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sin\pi x}{x-1}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin\pi(t+1)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{-\sin\pi t}{t}=-\pi.$$

в) Полагаме $\frac{3\pi}{2}-x=t$. Тогава $t\to 0$ и

$$\lim_{x\to \frac{3\pi}{2}}\frac{\cos x}{\frac{3\pi}{2}-x}=\lim_{t\to 0}\frac{\cos\left(\frac{3\pi}{2}-t\right)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{-\sin t}{t}=-1$$

г) Като използваме равенството $\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$, получаваме

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{3}}\frac{1-2\cos x}{x-\frac{\pi}{3}}=2\lim_{x\to \frac{\pi}{3}}\frac{\cos\frac{\pi}{3}-\cos x}{x-\frac{\pi}{3}}$$

$$=2\lim_{x\to \frac{\pi}{3}}\frac{\sin\frac{x-\frac{\pi}{3}}{2}\sin\frac{x+\frac{\pi}{3}}{2}}{\frac{x-\frac{\pi}{3}}{2}}=\sqrt{3}\,.$$

2.9. Пресметнете границите:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos ax}{x^2}$; **б)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{\cos x}-1}{x^2}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{1-\cos\sqrt{x}}$; **г)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos ax-\cos bx}{x^2}$;

д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x\cos 2x}{x^2}$;

е) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos a_1x\,\cos a_2x\,\ldots\,\cos a_nx}{x^2}$;

ж) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x\sqrt{\cos 2x}}{x^2}$; **з)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x\sin x}-\sqrt{\cos x}}{x^2}$

Решение. **а)** Като използваме формулата $1-\cos\alpha=2\sin^2\frac{\alpha}{2}$, получаваме

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos ax}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{ax}{2}}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{a^2 2\sin^2\frac{ax}{2}}{4\left(\frac{ax}{2}\right)^2}=\frac{a^2}{2}.$$

Да отбележим, че тези разсъждения могат да се направят при $a \neq 0$, тъй като делихме на числото a. При $a = 0$ функцията е тъждествено равна на нула и тогава очевидно имаме

$$\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos 0}{x^2} = \lim_{x\to 0} 0 = 0 = \frac{0^2}{2}.$$

С това показахме, че при всяко a е в сила

$$\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos ax}{x^2} = \frac{a^2}{2}.$$

г) Задачата може да се реши, като в числителя се приложи формулата за разлика от косинуси и след това се използва основната граница. Друг възможен начин е тази задача да се сведе до а):

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos ax - \cos bx}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos ax - 1 + 1 - \cos bx}{x^2} = -\frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}.$$

д) Ще сведем до зад. а):

$$\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x \cos 2x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x + \cos x - \cos x \cos 2x}{x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} + \lim_{x\to 0} \cos x \,.\, \lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos 2x}{x^2} = \frac{1^2}{2} + \frac{2^2}{2} = \frac{5}{2}.$$

е) като имаме предвид а) и д), ще докажем с принципа на математическата индукция, че за всяко естествено число n е в сила

$$\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos a_1x \cos a_2x \ldots \cos a_nx}{x^2} = \frac{a_1^2}{2} + \frac{a_2^2}{2} + \ldots + \frac{a_n^2}{2}.$$

При $n = 1$ равенството е вярно — това е точно а). Нека при $n = k$ е в сила

$$\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos a_1x \cos a_2x \ldots \cos a_kx}{x^2} = \frac{a_1^2}{2} + \frac{a_2^2}{2} + \ldots + \frac{a_k^2}{2}.$$

Тогава

$$\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos a_1x \cos a_2x \ldots \cos a_kx \,.\, \cos a_{k+1}x}{x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos a_1x \,.\, \cos a_2x \ldots \cos a_kx}{x^2} \cos a_{k+1}x + \frac{1 - \cos a_{k+1}x}{x^2}$$

$$= \left(\frac{a_1^2}{2} + \frac{a_2^2}{2} + \ldots + \frac{a_k^2}{2}\right) + \frac{a_{k+1}^2}{2},$$

което трябваше да се докаже.

2.10. Пресметнете следните граници:

а) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x - \sin x}{\sin^3 x}$; **б)** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1 + \sin x} - \sqrt{1 - \sin x}}{\operatorname{tg} x}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{2} - \sqrt{1 + \cos x}}{\sin^2 x}$; **г)** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{\cos x} - \sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}$;

д) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{3}} \dfrac{1 - 2\cos x}{\sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right)}$; **е)** $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{3}} \dfrac{\operatorname{tg}^3 x - 3\operatorname{tg} x}{\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)}$;

ж) $\lim\limits_{x\to \infty} (\sin\sqrt{x+1} - \sin\sqrt{x})$; **з)** $\lim\limits_{x\to \infty} (\cos\sqrt{x+1} - \cos\sqrt{x})$.

Решение. **г)** Да положим $\cos x = t^6$. От $x \to 0$ следва $t \to 1$ и

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{\cos x} - \sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x} = \lim_{t\to 1} \frac{t^3 - t^2}{1 - t^{12}}$$

$$= \lim_{t\to 1} \frac{-t^2}{1 + t + t^2 + \ldots + t^{11}} = -\frac{1}{12}.$$

е) От равенствата

$$\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=\cos x\cos\frac{\pi}{6}-\sin x\sin\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x-\frac{1}{2}\sin x$$

$$=\frac{\cos x}{2}\left(\sqrt{3}-\operatorname{tg}x\right)$$

получаваме

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{\operatorname{tg}^3x-3\operatorname{tg}x}{\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)}=\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{\operatorname{tg}x\,(\operatorname{tg}x-\sqrt{3})\,(\operatorname{tg}x+\sqrt{3})}{\frac{\cos x}{2}(\sqrt{3}-\operatorname{tg}x)}$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{2\operatorname{tg}x\,(\operatorname{tg}x+\sqrt{3})}{\cos x}=\frac{2\sqrt{3}\,.\,2\sqrt{3}}{\frac{1}{2}}=24.$$

ж) От равенството

$$\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x}=2\sin\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2}\cos\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2},$$

като приложим зад. 2.6, в) и 1.21., получаваме

$$\lim_{x\to0}(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x})=0.$$

2.11. Пресметнете следните граници:

а) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\arcsin x}{x}$; **б)** $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\arcsin 3x}{x}$;

в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\operatorname{arc\,tg} x}{x}$; **г)** $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\operatorname{arc\,tg} x-\operatorname{arc\,tg} x_0}{x-x_0}$;

д) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\arcsin x-\arcsin x_0}{x-x_0}$, $-1<x_0<1$;

е) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\arccos x-\arccos x_0}{x-x_0}$, $-1<x_0<1$;

ж) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\arcsin x-\operatorname{arc\,tg} x}{x^3}$; **з)** $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x>-1}}\dfrac{\sqrt{\pi}-\sqrt{\arccos x}}{\sqrt{x+1}}$;

и) $\lim\limits_{x\to\infty}x\left(\operatorname{arc\,tg}\dfrac{x+1}{x+2}-\dfrac{\pi}{4}\right)$;

к) $\lim\limits_{x\to\infty}x\left(\operatorname{arc\,tg}\dfrac{x+1}{x+2}-\operatorname{arc\,tg}\dfrac{x}{x+2}\right)$.

Решение. **а)** Да положим $t=\arcsin x$, т.е. $x=\sin t$. От непрекъснатостта на функцията $\arcsin x$ (зад. 1.38) следва, че при $x\to0$ имаме $t\to0$. Тогава

$$\lim_{x\to0}\frac{\arcsin x}{x}=\lim_{t\to0}\frac{t}{\sin t}=1.$$

г) Да положим $t=\operatorname{arc\,tg}x$, т.е. $x=\operatorname{tg}t$. От непрекъснатостта на функцията $\operatorname{arc\,tg}x$ (зад. 1.38) следва, че при $x\to0$ имаме $t\to0$. Тогава

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\operatorname{arc\,tg}x-\operatorname{arc\,tg}x_0}{x-x_0}=\lim_{t\to t_0}\frac{t-t_0}{\operatorname{tg}t-\operatorname{tg}t_0}$$

$$=\lim_{t\to t_0}\frac{(t-t_0)\cos t\,.\,\cos t_0}{\sin(t-t_0)}=\cos^2t_0=\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2t_0}=\frac{1}{1+x_0^2}.$$

ж) От $\lim\limits_{x\to0}(\arcsin x-\operatorname{arc\,tg}x)=0$ и от основната граница

имаме

$$\lim_{x\to0}\frac{\arcsin x-\operatorname{arc\,tg}x}{\sin(\arcsin x-\operatorname{arc\,tg}x)}=1.$$

Тогава

$$\lim_{x\to0}\frac{\arcsin x-\operatorname{arc\,tg}x}{x^3}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{(\text{arc}\sin x - \text{arc tg}x)}{\sin(\text{arc}\sin x - \text{arc tg}x)} \; \frac{\sin(\text{arc}\sin x - \text{arc tg}x)}{x^3}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\text{arc}\sin x - \text{arc tg}x}{\sin(\text{arc}\sin x - \text{arc tg}x)} \; \lim_{x\to 0} \frac{\sin(\text{arc}\sin x - \text{arc tg}x)}{x^3}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sin(\text{arc}\sin x)\cos(\text{arc tg}x) - \cos(\text{arc}\sin x)\sin(\text{arc tg}x)}{x^3}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x\dfrac{1}{1+x^2} - \dfrac{x}{1+x^2}\sqrt{1-x^2}}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2} = \frac{1}{2}.$$

2.12. Докажете, че:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = e;$ **б)** $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = e;$

в) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+x\right)^{\frac{1}{x}} = e.$

Решение. **а)** Нека ε е произволно положително число. От

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = e$$

следва, че съществува число n_0 такова, че при $n > n_0$ са изпълнени неравенствата

$$e - \varepsilon < \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} < e + \varepsilon.$$

Нека $A = n_0 + 1$ и нека x е произволно число, по-голямо от A. Да означим с n числото $[x]$, т.е. n е естествено число, за което $n \leqq x < n+1$. Оттук следва, че $n_0 < n$ и следователно са в сила неравенствата

$$e - \varepsilon < \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n < \left(1+\frac{1}{x}\right)^x < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} < e + \varepsilon,$$

или

$$\left|\left(1+\frac{1}{x}\right)^x - e\right| < \varepsilon \text{ за всяко } x > A.$$

б) Да положим $-x = t$. Понеже $x \to -\infty$, то $t \to \infty$. Тогава

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{t\to\infty}\left(1-\frac{1}{t}\right)^{-t} = \lim_{t\to\infty}\left(\frac{t}{t-1}\right)^t$$

$$= \lim_{t\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{t-1}\right)^{t-1}\left(1+\frac{1}{t-1}\right)\right] = e.\,1 = e.$$

в) Ако положим $t = \dfrac{1}{x}$ и приложим резултата от а) и б), ще се окаже, че съществуват лявата и дясната граница при $x\to 0$, и че тези две граници са равни на e, а това означава, че границата при $x \to 0$ съществува и

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e.$$

2.13. Да се докаже, че ако $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = b$, $a > 0$ и $f(x) > 0$, то

$$\lim_{x\to x_0}(f(x))^{g(x)} = a^b.$$

Решение. Верността на твърдението следва от непрекъснатостта на e^x, $\ln x$ и равенството $a^x = e^{x\ln a}$:

$$\lim_{x\to x_0}(f(x))^{g(x)} = \lim_{x\to x_0} e^{g(x)\ln f(x)} = e^{b\ln a} = a^b.$$

2.14. Да се докаже, че ако $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = a$, то

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{f(x)}{x}\right)^x = e^a.$$

Решение. От $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = a$ следва $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$. Тогава според зад. 2.12

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{f(x)}{x}\right)^{\frac{x}{f(x)}} = e.$$

Сега от равенството

$$\left(1+\frac{f(x)}{x}\right)^{x} = \left[\left(1+\frac{f(x)}{x}\right)^{\frac{x}{f(x)}}\right]^{f(x)}$$

и зад. 2.13 получаваме

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{f(x)}{x}\right)^{x} = e^{a}.$$

2.15. Докажете следните основни равенства:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = \lim\limits_{y\to 1}\frac{\ln y}{y-1} = 1;$

б) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 1;$ **в)** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} = \ln a,\ a>0.$

Решение. **а)** От непрекъснатостта на функцията $\ln x$ и равенството $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$ получаваме

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}} = \ln e = 1$$

б) Да положим $t = e^x$. От $x\to 0$ и непрекъснатостта на e^x следва $t = e^x \to e^0 = 1$. Сега да заместим x с $\ln t$ и приложим а):

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = \lim_{t\to 1}\frac{t-1}{\ln t} = 1.$$

в) Следва непосредствено от б) и формулата $a^x = e^{x\ln a}$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{e^{x\ln a}-1}{x\ln a}\ln a = \ln a.$$

2.16. Нека функциите $f(x)$ и $g(x)$ удовлетворяват условията:

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 1,\ \lim\limits_{x\to x_0}|g(x)| = \infty$ и $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)-1)\,g(x) = a$. Докажете, че

$$\lim_{x\to x_0} f(x)^{g(x)} = e^{a}.$$

Решение. От равенството

$$f(x)^{g(x)} = \left[\left(1+(f(x)-1)\right)^{\frac{1}{f(x)-1}}\right]^{(f(x)-1)g(x)},$$

като използваме условията на задачата, зад. 2.12. и 2.13, получаваме исканото равенство.

2.17. Пресметнете следните граници:

а) $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\ln x-\ln x_0}{x-x_0},\ x_0>0;$ **б)** $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{e^x-e^{x_0}}{x-x_0};$

в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x\cos x-1}{x};$ **г)** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos^n x}{x^2};$

д) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^{\cos x}-a}{x^2},\ a>0;$ **е)** $\lim\limits_{x\to a}\frac{x\ln a-a\ln x}{x-a},\ a>0;$

ж) $\lim\limits_{x\to a}\frac{a^x-x^a}{x-a},\ a>0;$ **з)** $\lim\limits_{x\to\infty}x^2\left(a^{\frac{1}{x}}-a^{\frac{1}{x+1}}\right),\ a>0;$

и) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\cos ax}{\ln\cos bx},\ b\neq 0;$

к) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{\sqrt{1+x}}-e^{1+\frac{x}{2}}}{x^2}.$

Решение. С елементарни преобразувания решението на тези задачи се свежда до основните граници, намерени в зад. 2.15.

а) От равенството

$$\frac{\ln x - \ln x_0}{x - x_0} = \frac{1}{x_0} \cdot \frac{\ln \dfrac{x}{x_0}}{\dfrac{x}{x_0} - 1} = \frac{1}{x_0} \cdot \frac{\ln t}{t - 1},$$

като вземем предвид, че $t = \dfrac{x}{x_0} \to 1$ при $x \to x_0$, получаваме

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\ln x - \ln x_0}{x - x_0} = \frac{1}{x_0}.$$

б) От равенството

$$\frac{e^x - e^{x_0}}{x - x_0} = e^{x_0} \frac{e^{x - x_0} - 1}{x - x_0} = e^{x_0} \frac{e^t - 1}{t},$$

като вземем предвид, че $t = x - x_0 \to 0$ при $x \to x_0$, получаваме

$$\lim_{x \to x_0} \frac{e^x - e^{x_0}}{x - x_0} = e^{x_0}.$$

в) От равенството

$$\frac{e^x \cos x - 1}{x} = \frac{(e^x - 1 + 1)\cos x - 1}{x} = \frac{e^x - 1}{x} \cos x + \frac{\cos x - 1}{x^2} x,$$

като вземем предвид, че $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x}{x^2} = \dfrac{1}{2}$ (зад. 2.9,а), получаваме

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x \cos x - 1}{x} = 1.$$

г) Да направим следните преобразувания при $\alpha \neq 0$:

$$\frac{1 - \cos^\alpha x}{x^2} = \frac{1 - e^{\alpha \ln \cos x}}{x^2}$$

$$= -\frac{e^{\alpha \ln \cos x} - 1}{\alpha \ln \cos x} \cdot \frac{\alpha \ln \cos x}{\cos x - 1} \cdot \frac{\cos x - 1}{x^2}.$$

От това равенство, като вземем предвид, че $\lim\limits_{x \to 0} \cos x = 1$ и $\lim\limits_{x \to 0} (\alpha \ln \cos x) = 0$, получаваме

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos^\alpha x}{x^2} = \frac{\alpha}{2}.$$

Очевидно този резултат е верен и при $\alpha = 0$.

и) От равенството (при $a \neq 0$)

$$\frac{\ln \cos ax}{\ln \cos bx} = \frac{\ln \cos ax}{\cos ax - 1} \; \frac{\cos ax - 1}{x^2} \; \frac{x^2}{\cos bx - 1} \; \frac{\cos bx - 1}{\ln \cos bx},$$

като вземем предвид, че $\lim\limits_{x \to 0} \cos ax = \lim\limits_{x \to 0} \cos bx = 1$,

получаваме $\quad \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln \cos ax}{\ln \cos bx} = \dfrac{a^2}{b^2}.$

Очевидно този резултат е верен и при $a = 0$.

к) От равенството

$$\frac{e^{\sqrt{1+x}} - e^{1+\frac{x}{2}}}{x^2} = e^{1+\frac{x}{2}} \frac{e^{\sqrt{1+x} - 1 - \frac{x}{2}} - 1}{\sqrt{1+x} - 1 - \frac{x}{2}} \cdot \frac{\sqrt{1+x} - 1 - \frac{x}{2}}{x^2},$$

като вземем предвид, че $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1+x} - 1 - \frac{x}{2}}{x^2} = -\dfrac{1}{8}$ (зад. 2.5, н), получаваме

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{\sqrt{1+x}}-e^{1+\frac{x}{2}}}{x^2}=-\frac{e}{8}.$$

2.18. Пресметнете следните граници:

а) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-2}\right)^{2x-1}$; б) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-2x+1}{x^2-4x+2}\right)^{x}$;

в) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x+4}{2x+2}\right)^{x}$; г) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(1+\sin\pi x\right)^{\operatorname{cotg}\pi x}$;

д) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{1+\operatorname{tg}x}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{\sin^3 x}}$; е) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(1+\operatorname{tg}\sqrt[2]{3x}\right)^{\frac{1}{2x}}$;

ж) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\cos x+\sin x\right)^{\frac{1}{x}}$; з) $\displaystyle\lim_{x\to a}\left(2-\frac{x}{a}\right)^{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2a}}$, $a\neq 0$;

и) $\displaystyle\lim_{x\to 0}(1+2\sin x)^{\operatorname{cotg}2x}$; к) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{1+\sin x\,\cos\alpha x}{1+\sin x\,\cos\beta x}\right)^{\operatorname{cotg}^3 x}$;

л) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{a^{x^2}+b^{x^2}}{a^x+b^x}\right)^{\frac{1}{x}}$, $a>0$, $b>0$; м) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(2e^{\frac{x}{x+1}}-1\right)^{\frac{x^2-1}{x}}$;

н) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{xe^x+1}{x\pi^x+1}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

Решение. Решението на тези задачи се основава на зад. 2.16.

а) Тъй като $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x+1}{x-2}=1$, $\displaystyle\lim_{x\to\infty}|2x-1|=+\infty$ и

$$\lim_{x\to\infty}\left[\left(\frac{x+1}{x-2}-1\right)(2x-1)\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{3(2x-1)}{x-2}=6,$$

то

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-2}\right)^{2x-1}=e^6.$$

в) В този случай не може да се приложи зад. 2.16, тъй като $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{3x+4}{2x+2}=\frac{3}{2}$. От равенството

$$\left(\frac{3x+4}{2x+2}\right)^{x}=e^{x\ln\frac{3x+4}{2x+2}},$$

като използваме непрекъснатостта на $\ln x$ и $\displaystyle\lim_{x\to\infty}e^x=\infty$, получаваме

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x+4}{2x+2}\right)^{x}=\infty.$$

г) Тъй като

$$\left(1+\sin\pi x\right)^{\operatorname{cotg}\pi x}=\left[(1+\sin\pi x)^{\frac{1}{\sin\pi x}}\right]^{\cos\pi x},$$

съгласно зад. 2.12 и зад. 2.13 получаваме

$$\lim_{x\to 0}(1+\sin\pi x)^{\operatorname{cotg}\pi x}=e^1=e.$$

л) Тъй като $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{a^{x^2}+b^{x^2}}{a^x+b^x}=1$, $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left|\frac{1}{x}\right|=\infty$,

то трябва да намерим границата

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{a^{x^2}-b^{x^2}}{a^x-b^x}-1\right)\cdot\frac{1}{x}.$$

От равенството

$$\left(\frac{a^{x^2}+b^{x^2}}{a^x+b^x}-1\right)\frac{1}{x}=\frac{1}{a^x+b^x}\cdot\frac{a^{x^2}-a^x+b^{x^2}-b^x}{x}$$

$$= \frac{1}{a^x+b^x}\left(a^x \cdot \frac{a^{x^2-x}-1}{x^2-x} \cdot \frac{x^2-x}{x} + b^x \cdot \frac{b^{x^2-x}-1}{x^2-x}\ \frac{x^2-x}{x}\right)$$

след граничен преход получаваме

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{a^{x^2}+b^{x^2}}{a^x+b^x}-1\right)\frac{1}{x} = \frac{1}{2}\Big(1.\ \ln a.\ (-1)+1.\ \ln b.\ (-1)\Big)$$

$$= \ln\frac{1}{\sqrt{ab}}\ .$$

Тогава

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{a^{x^2}+b^{x^2}}{a^x+b^x}\right)^{\frac{1}{x}} = e^{\ln\frac{1}{\sqrt{ab}}} = \frac{1}{\sqrt{ab}}\ .$$

2.19. Пресметнете следните граници:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\cos\frac{x}{n} + a\sin\frac{x}{n}\right)^n,\ n\in\mathbf{N};$

б) $\lim\limits_{n\to\infty}\cos^n\frac{x}{\sqrt{n}}\ ,\ n\in\mathbf{N};$

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2}\right)^n,\ n\in\mathbf{N},\ a,b\geqq 0;$

г) $\lim\limits_{n\to\infty} n^2\left(\sqrt[n]{x} - \sqrt[n-1]{x}\right),\ n\in\mathbf{N},\ x>0;$

д) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1^\alpha+2^\alpha+\ldots+n^\alpha}{n^{\alpha+1}},\ n\in\mathbf{N},\ \alpha>0;$

е) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{n}\left(\sin\frac{\pi}{n} + \sin\frac{2\pi}{n} + \sin\frac{3\pi}{n} + \ldots + \sin\frac{n\pi}{n}\right),\ n\in\mathbf{N};$

ж) $\lim\limits_{x\to\infty}\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\cos\frac{x}{2^3}\ldots\cos\frac{x}{2^n}\ .$

Решение. При решението на тези задачи ще използваме факта, че ако е известна границата $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ и е дадена конкретна редица $x_n\to x_0$, то $f(x_n)\to A$.

а) Да разгледаме функцията

$$\varphi(t) = \left(\cos\frac{x}{t} + a\sin\frac{x}{t}\right)^t.$$

Имаме $\lim\limits_{t\to\infty}\left(\cos\frac{x}{t} + a\sin\frac{x}{t}\right) = 1$. От равенството

$$\left(\cos\frac{x}{t} + a\sin\frac{x}{t} - 1\right)t = \frac{\cos\frac{x}{t}-1}{\frac{1}{t}} + a\frac{\sin\frac{x}{t}}{\frac{x}{t}}x,$$

като използваме зад. 2.9, а), получаваме

$$\lim_{t\to\infty}\left(\cos\frac{x}{t} + a\sin\frac{x}{t} - 1\right)t = 0 + ax = ax.$$

Тогава $\lim\limits_{t\to\infty}\varphi(t) = e^{ax}$.

Да разгледаме редицата с общ член $t_n = n$. От $n\to\infty$ следва

$$\lim_{n\to\infty}\varphi(t_n) = \lim_{n\to\infty}\left(\cos\frac{x}{n} + a\sin\frac{x}{n}\right)^n = e^{ax}.$$

б) Да разгледаме функцията

$$\varphi(t) = (\cos tx)^{\frac{1}{t^2}}\cdot$$

Тъй като $\lim\limits_{t\to 0}\cos tx = 1$ и съгласно зад. 2.9, а)

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\cos tx-1}{t^2} = -\frac{x^2}{2}\ ,$$

то

$$\lim_{n\to\infty} \varphi(t) = e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Да разгледаме редицата $t_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$. От $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$

следва $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \varphi(t_n) = \lim_{n\to\infty}\left(\cos\frac{x}{\sqrt{n}}\right)^n = e^{-\frac{x^2}{2}}.$

д) Съгласно първата теорема на Щолц (зад. 1.4 от гл. 1), за да докажем, че разглежданата редица е сходяща, е достатъчно да покажем, че редицата $\dfrac{n^\alpha}{n^{\alpha+1}-(n-1)^{\alpha+1}}$ е сходяща и да намерим нейната граница. За целта ще разгледаме функцията $\varphi(t) = \dfrac{t^{\alpha+1}-(t-1)^{\alpha+1}}{t^\alpha}$.

Да отбележим изрично, че понеже не искаме числото α непременно да е естествено, не можем да разложим числителя на множители.

От равенството

$$\frac{t^{\alpha+1}-(t-1)^{\alpha+1}}{t^\alpha} = \frac{(t-1)^{\alpha+1}\left[\left(\frac{t}{t-1}\right)^{\alpha+1}-1\right]}{t^\alpha} = \frac{(t-1)^{\alpha+1}\left[e^{(\alpha+1)\ln\frac{t}{t-1}}-1\right]}{t^{\alpha+1}\cdot\frac{1}{t}}$$

$$= \left(\frac{t-1}{t}\right)^{\alpha+1}\frac{(\alpha+1)\left[e^{(\alpha+1)\ln\frac{t}{t-1}}-1\right]}{(\alpha+1)\ \ln\frac{t}{t-1}}\cdot\frac{\ln\frac{t}{t-1}}{\frac{t}{t-1}-1}\cdot\frac{t}{t-1}$$

получаваме, че $\displaystyle\lim_{t\to\infty}\varphi(t) = 1.(\alpha+1).1.1=\alpha+1.$

Тогава

$$\lim_{n\to\infty}\varphi(n) = \lim_{n\to\infty}\frac{n^\alpha}{n^{\alpha+1}-(n-1)^{\alpha+1}} = \frac{1}{\alpha+1}.$$

е) От равенството (зад. 3.16 от гл. 0)

$$\frac{1}{n}\left(\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+\sin\frac{3\pi}{n}+\ldots+\sin\frac{n\pi}{n}\right) =$$

$$= \frac{\sin\frac{n\pi}{2n}\ \sin\frac{n+1}{2n}\pi}{n\sin\frac{\pi}{2n}}$$

следва, че трябва да пресметнем границата

$\displaystyle\lim_{n\to\infty} n\sin\frac{\pi}{2n}$. Но от

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{2n} = 0$ и $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$ виждаме, че

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{\pi}{2n}}{\frac{\pi}{2\pi}}\ \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$. Тогава търсената граница е $\dfrac{2}{\pi}$.

з) От равенството

$$\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\ldots\cos\frac{x}{2^n} = \frac{1}{2^n}\,.\,2^n\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\ldots\cos\frac{x}{2^n}\ \frac{\sin\frac{x}{2^n}}{\sin\frac{x}{2^n}}$$

$$= \frac{\frac{x}{2^n}\,.\sin x}{\sin\frac{x}{2^n}\ .\,x}$$

следва, че трябва да пресметнем границата

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{x}{2^n}}{\sin\frac{x}{2^n}}$. Но от $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{x}{2^n} = 0$

и $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\sin x}{x} = 1$ виждаме, че $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{x}{2^n\sin\frac{x}{2^n}} = 1.$

Тогава търсената граница е $\dfrac{\sin x}{x}$.

§ 3. Глобални свойства на непрекъснатите функции

Дефиниция 1. Ще казваме, че функцията $f(x)$ е непрекъсната в множеството D, ако $f(x)$ е непрекъсната във всяка точка от множеството D.

Дефиниция 2. Ще казваме, че множеството F е затворено, ако границата на всяка сходяща редица от точки, принадлежащи на F, също принадлежи на F.

Дефиниция 3. Ще казваме, че множеството K е компактно, ако то е затворено и ако от всяка редица от точки $x_n \in K$, може да се избере сходяща поредица. (Това всъщност означава, че множеството K е ограничено и затворено.)

Дефиниция 4. Ще казваме, че функцията $f(x)$ удовлетворява условието на Липшиц в множеството D, ако съществува число $k>0$ такова, че за всеки две числа x и y, принадлежащи на D, е изпълнено неравенството

$$|f(x)-f(y)| \leqq k|x-y|.$$

3.1. Докажете, че ако функцията $f(x)$ удовлетворява условието на Липшиц в множеството D, то тя е непрекъсната.

Решение. Нека x_0 е произволна точка от D. Да разгледаме произволна редица $\{x_n\}$, $x_n \in D$, клоняща към x_0. Тогава $\lim\limits_{n\to\infty} |x-x_0| = 0$ и от неравенството

$$|f(x_n)-f(x_0)| \leqq k|x_n-x_0|$$

след граничен преход получаваме

$$\lim_{n\to\infty} |f(x_n)-f(x_0)| = 0, \text{ т.е. } \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0),$$

което означава, че $f(x)$ е непрекъсната в точката x_0.

3.2. Нека F е затворено множество и нека функцията $f(x)$ удовлетворява следните условия:

а) дефинирана е в F и приема стойности в F;

б) удовлетворява условието на Липшиц в множеството F с константа $k \in (0,1)$.

Докажете, че уравнението $f(x) = x$ има точно едно решение.

Решение. Да разгледаме редицата $\{x_n\}$, дефинирана по следния начин: x_1 е произволно число от F и за всяко естествено число n е изпълнено $x_{n+1} = f(x_n)$.

От условие б) имаме

$$|x_{n+2}-x_{n+1}| = |f(x_{n+1})-f(x_n)| \leqq k\,|x_{n+1}-x_n|$$

за всяко $n \in \mathbf{N}$. Тогава от неравенствата

$$|x_3-x_2| \leqq k|x_2-x_1|,$$

$$|x_4-x_3| \leqq k|x_3-x_2|,$$

. . . .

$$|x_{n+1}-x_n| \leqq k|x_n-x_{n-1}|$$

чрез заместване получаваме, че за всяко $n \in \mathbf{N}$ е изпълнено

$$|x_{n+1}-x_n| \leqq k^{n-1}\,|x_2-x_1|.$$

От неравенството на триъгълника следва

$$|x_n-x_{n+p}| = |x_n - x_{n+1} + x_{n+1} - x_{n+2} + x_{n+2} - \ldots + x_{n+p-1} - x_{n+p}|$$

$$\leqq |x_n-x_{n+1}| + |x_{n+1}-x_{n+2}| + \ldots + |x_{n+p-1}-x_{n+p}|$$

$$\leqq (k^{n-1} + k^n + k^{n+1} + \ldots + k^{n+p-2})\,|x_2-x_1|$$

$$= k^{n-1}\,\frac{1-k^p}{1-k}|x_2-x_1| \leqq \frac{k^{n-1}\,|x_2-x_1|}{1-k}.$$

Нека ε е произволно положително число. От $0<k<1$ следва $\lim\limits_{n\to\infty} k^{n-1} = 0$. Тогава съществува число n_0 такова, че за всяко $n>n_0$, $n \in \mathbf{N}$, е в сила

$k^{n-1} < \dfrac{\varepsilon(1-k)}{|x_2-x_1|}$. (Ако $x_2 = x_1$, ясно е, че $x_n = x_1$ за всяко $n \in \mathbf{N}$ и редицата $\{x_n\}$ е сходяща.)

Така получихме, че за всяко естествено число $n>n_0$ и за произволно естествено число p е изпълнено

$$|x_n-x_{n+p}| < \frac{k^{n-1}|x_2-x_1|}{1-k} > \varepsilon.$$

Съгласно теоремата на Коши редицата $\{x_n\}$ е сходяща. Нека $x_0 = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Тъй като множеството F е затворено, то $x_0 \in F$.

От условието на Липшиц

$$|f(x_n)-f(x_0)| < k|x_n-x_0|$$

получаваме, че $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$, а оттук след граничен преход в равенството $x_{n+1} = f(x_n)$ следва, че $x_0=f(x_0)$. Така показахме, че числото x_0 е исканото решение.

Съществуването на две различни решения x' и x'' на уравнението $x = f(x)$ противоречи на условието на Липшиц:

$$|x'-x''| = |f(x')-f(x'')| \leqq k|x'-x''| < |x'-x''|.$$

3.3. Нека $0<a<1$ и b е произволно реално число. Докажете, че уравнението на Кеплер $x-a\sin x=b$ има едно единствено решение.

Решение. Да разгледаме функцията $f(x) = a\sin x + b$. Тя е дефинирана в затворено множество — множеството на всички реални числа, и удовлетворява условието на Липшиц — ако x и y са произволни реални числа, то

$$|(a\sin x+b) - (a\sin y+b)| = a|\sin x-\sin y|$$

$$= 2a\left|\sin\frac{x-y}{2}\cos\frac{x+y}{2}\right| < a|x-y|.$$

Тъй като $0<a<1$, можем да приложим зад. 3.2.

3.4. Нека множеството K е компактно и нека функцията $f(x)$ удовлетворява условията:

а) дефинирана е в множеството K и функционалните ѝ стойности принадлежат на K;

б) за всеки две числа x и y от K е изпълнено

$$|f(x) - f(y)| \leqq |x-y|.$$

Докажете, че уравнението $x=f(x)$ има точно едно решение.

Решение. Нека $\{b_n\}$ е редица от числа $0<b_n<1$ и нека $\lim_{n\to\infty} b_n = 1$. Да разгледаме функциите $g_n(x) = b_n f(x)$. От условие б) следва

$$|g_n(x)-g_n(y)| = b_n|f(x)-f(y)| \leqq b_n|x-y|,$$

т. е. функциите $g_n(x)$ удовлетворяват условието на Липшиц с константи, по-малки от 1. Тъй като множеството K е компактно, то е затворено. С това показахме, че условията на зад. 3.2 са изпълнени, и следователно за всяко естествено число n съществува $x_n\in K$ такова, че $x_n=b_n f(x_n)$.

Тъй като $x_n\in K$, а K е компактно множество, можем да изберем

сходяща подредица $\{x_{n_k}\}$ на редицата $\{x_n\}$. Нека $x_0=\lim_{k\to\infty} x_{n_k}$. Множеството K е затворено. Следователно $x_0\in K$.

Очевидно $b_{n_k}\to 1$. Функцията $f(x)$ удовлетворява условието на Липшиц в множеството K и следователно (зад. 3.1) тя е непрекъсната в K. Като вземем предвид това, след граничен преход в равенството $x_{n_k}=b_{n_k}f(x_{n_k})$ получаваме $x_0=f(x_0)$.

Единствеността на решението следва от условието на Липшиц както в зад. 3.2.

В следващите задачи ще използваме следната

Теорема 1 (за междинните стойности). Нека функцията $f(x)$ е дефинирана и непрекъсната в интервала $[a, b]$ и нека $f(a).f(b)<0$. Тогава съществува точка $\xi\in(a,b)$, за която $f(\xi) = 0$

3.5. Нека функцията $f(x)$ е дефинирана и непрекъсната в затворения интервал $[a, b]$ и приема стойности в същия интервал. Докажете, че уравнението $x = f(x)$ има поне едно решение.

Упътване. Разгледайте функцията $\varphi(x)=f(x)-x$, покажете, че $\varphi(a)\varphi(b)\leqq 0$ и приложете теорема 1.

3.6. Нека функцията $f(x)$ е дефинирана и непрекъсната в интервала $[a,b]$. Докажете, че необходимо и достатъчно условие $f(x)$ да бъде обратима е тя да бъде строго монотонна.

Решение. Достатъчността на условието е очевидна.

Необходимост. Нека $f(x)$ е обратима, т. е. нека от $x_1\neq x_2$ следва $f(x_1) \neq f(x_2)$. Ще разгледаме случая, когато $f(a)<f(b)$ и ще докажем, че функцията $f(x)$ е строго растяща. Да допуснем, че съществуват две числа x_1 и x_2 от $[a, b]$ такива, че $x_1<x_2$ и $f(x_1) \geqq f(x_2)$. От обратимостта на $f(x)$ следва, че $f(x_1) \neq f(x_2)$, т.е. $f(x_1)>f(x_2)$. Ясно е, че поне една от точките x_1 и x_2 е вътрешна на интервала $[a, b]$.

Съществуват няколко възможности: x_1 съвпада с a, x_2 съвпада с b; $x_1\neq a$ и $x_2\neq b$, като $f(x_1)<f(a)$ или $f(x_1)>f(a)$. Ще разгледаме една от тях, а всички останали се разглеждат аналогично. Нека например

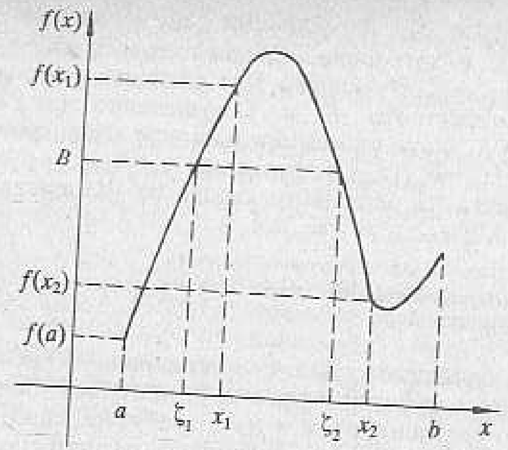
$$a<x_1<x_2<b \text{ и } f(x_1)>f(a) \text{ (фиг 8).}$$

Да изберем число B такова, че $\max f(a), f(x_2))<B<f(x_1)$. Такива числа има, тъй като $f(a)<f(x_1)$ и $f(x_2)<f(x_1)$. Да разгледаме функцията $\varphi(x) = f(x) - B$. Тя е непрекъсната в интервала $[a, b]$.

От $\varphi(x_1)\,\varphi(a) = (f(x_1) - B)\,(f(a) - B) < 0$ съгласно теорема 1 следва, че съществува точка $\zeta_1 \in (a,x_1)$ такава, че $\varphi(\zeta_1) = 0$, т.е.

$$f(\zeta_1)=B.$$

От $\varphi(x_1)\,\varphi(x_2) = (f(x_1) - B)\,(f(x_2) - B) < 0$ съгласно теорема 1 съществува точка $\zeta_2\in(x_1, x_2)$ такава, че $\varphi(\zeta_2) = 0$, т.е. $f(\zeta_2) = B$.



Фиг. 8

Ясно е, че $\zeta_1 \neq \zeta_2$ и $f(\zeta_1) = f(\zeta_2) = B$, което противоречи на обратимостта на $f(x)$.

3.7. Нека функцията $f(x)$ е дефинирана и непрекъсната в интервала $[0,1]$ и нека $f(x) \in [0,1]$ за всяко $x \in [0,1]$. С $f^{[k]}(x)$ да означим $f(f(f(\ldots f(x))\ldots)$ (k пъти). Нека за всяко $x_0 \in [0,1]$ съществува естествено число $k(x_0)$ такова, че $f^{[k(x_0)]}(x_0) = x_0$. Докажете, че или $f(x) = x$, или $f^{[2]}(x) = x$.

Упътване. Нека x_1 и x_2 са две произволни числа от интервала $[0,1]$, за които $f(x_1) = f(x_2)$. Ясно е, че $f^{[k]}(x_1) = f^{[k]}(x_2)$ за всяко $k \in \mathbf{N}$. Да означим $k_1 = k(x_1)$ и $k_2 = k(x_2)$. Тогава

$$f^{[k_1+k_2]}(x_1) = \underbrace{f(f\ldots f}_{k_2 \text{ пъти}}\ \underbrace{(f(f}_{k_1 \text{ пъти}}\ldots f(x_1)) = f^{[k_2]}(x_1) = f^{[k_2]}(x_2) = x_2,$$

$$f^{[k_2+k_1]}(x_2) = \underbrace{f(f\ldots f}_{k_1 \text{ пъти}}\ \underbrace{(f(f}_{k_2 \text{ пъти}}\ldots f(x_2)) = f^{[k_1]}(x_2) = f^{[k_1]}(x_1) = x_1.$$

Оттук получаваме

$$x_1 = f^{[k_1+k_2]}(x_1) = f^{[k_1+k_2]}(x_2) = x_2.$$

С това показахме, че от равенството $f(x_1) = f(x_2)$ следва $x_1 = x_2$, т.е. функцията $f(x)$ е обратима.

За да докажете твърдението на задачата, приложете зад. 3.6.

3.8. Докажете, че уравнението $x^n = a$, където n е естествено, а a — положително число, има точно едно положително решение (вж. зад. 1.7).

Упътване. Приложете теоремата за междинните стойности за функцията $\varphi(x) = x^n - a$.

3.9. Докажете, че ако $P(x)$ е полином от нечетна степен, то уравнението $P(x)=0$ има поне едно реално решение.

Упътване. Разгледайте например случая, когато коефициентът пред най-високата степен е положителен. Като използвате, че $\lim\limits_{x\to-\infty} P(x) = -\infty$ и $\lim\limits_{x\to+\infty} P(x) = +\infty$, постройте интервал, в краищата на който $P(x)$ приема стойности с различни знаци и приложете теоремата за междинните стойности.

3.10. Намерете всички функции $f(x)$, които удовлетворяват следните условия:

а) $f(x)$ е дефинирана за всяко x;
б) $f(x)$ е непрекъсната в точката 0;
в) $f(x+y) = f(x)+f(y)$ за всеки две числа x и y.

Решение. Нека функцията $f(x)$ удовлетворява условието на задачата. От условие в), като положим $x=y=0$, получаваме $2f(0)=f(0)$, откъдето $f(0)=0$. Сега, като положим $y=-x$, имаме $f(x)+f(-x)=f(0)=0$, т.е. $f(x)$ е нечетна функция.

От принципа на математическата индукция следва, че за всеки n реални числа е изпълнено

$$f(x_1+x_2+\ldots+x_n) = f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_n).$$

Оттук, като положим $x_i=x$, $i=1, 2, \ldots, n$, виждаме, че равенството $f(nx) = nf(x)$ е изпълнено за всяко реално число x и за всяко естествено число n.

Да положим сега $x = \dfrac{1}{n}$. Получаваме $nf\left(\dfrac{1}{n}\right) = f(1)$ или

$$f\left(\frac{1}{n}\right) = f(1)\,\frac{1}{n} = a\,\frac{1}{n}, \text{ където } a = f\left(\frac{1}{n}\right).$$

Да разгледаме произволно положително рационално число $r = \dfrac{n}{m}$. Имаме

$$f\left(\frac{n}{m}\right) = n\,f\left(\frac{1}{m}\right) = n\frac{1}{m}\,a = \frac{n}{m}\,a = r\,a.$$

От нечетността на $f(x)$ следва, че полученото равенство е вярно за всяко рационално число.

Да отбележим, че в разсъжденията дотук не използвахме условие б) — непрекъснатостта на $f(x)$ в точката 0.

Сега ще докажем, че функцията $f(x)$ е непрекъсната във всяка точка. Нека x_0 е произволно число и нека $x_n \to x_0$. Тогава $x_n - x_0 \to 0$ и от условие б) следва, че $f(x_n - x_0) \to f(0) = 0$. От равенството

$$f(x_n) = f(x_n - x_0 + x_0) = f(x_n - x_0) + f(x_0)$$

получаваме

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0),$$

което според дефиницията на Хайне означава, че $f(x)$ е непрекъсната в точката x_0.

Нека x_0 е произволно число и нека $\{r_n\}$ е редица от рационални числа, клоняща към x_0. От една страна, имаме

$$\lim_{n\to\infty} f(r_n) = \lim_{n\to\infty} a\, r_n = a\, x_0,$$

а, от друга, поради непрекъснатостта на $f(x)$ е изпълнено

$$\lim_{n\to\infty} f(r_n) = f(x_0).$$ Следователно $f(x_0) = ax_0$.

С това показахме, че ако $f(x)$ удовлетворява условията на задачата, то $f(x) = ax$. С непосредствена проверка се вижда, че за всяко a функцията $f(x)=ax$ е решение на задачата.

Забележка. Вместо условие в) може да се поиска функцията да бъде монотонна или ограничена в някой отворен краен интервал, съдържащ точката 0. Може да се докаже, че съществуват прекъснати, немонотонни и неограничени около нулата функции $f(x)$, които удовлетворяват в).

3.11. Намерете всички функции $f(x)$, които удовлетворяват следните условия:

а) $f(x)$ е дефинирана за всяко x;

б) $f(x)$ е непрекъсната в точката 0;

в) $f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x)+f(y)}{2}$ за всеки две числа x и y.

Упътване. Нека функцията $f(x)$ удовлетворява условието на задачата. Положете $f(0)=b$, $f(1)=a$.

а) Покажете, че $2f\left(\frac{x}{2}\right) = f(x) + b$;

б) Положете $g(x) = f(x) - b$ и покажете, че $g(x+y) = g(x) + g(y)$ за всеки две реални числа x и y;

в) Приложете зад. 3.10 и покажете, че $f(x) = ax+b$.

3.12. Намерете всички функции $f(x)$, които удовлетворяват следните условия:

а) $f(x)$ е дефинирана за всяко x;

б) $f(x)$ е непрекъсната в точката 0;

в) $f(x+y)=f(x)\,f(y)$ за всеки две числа x и y.

Упътване. Разгледайте случая, когато $f(x)$ не е тъждествено равна на нула. Покажете, че $f(x)>0$ за всяко x. Положете $\varphi(x)=\ln f(x)$ и за функцията $\varphi(x)$ приложете зад. 3.10 и покажете, че $f(x)=a^x$ където $a=f(1)$.

3.13. Намерете всички функции $f(x)$, които удовлетворяват следните условия:

а) $f(x)$ е дефинирана при $x>0$;

б) $f(x)$ е непрекъсната в точката 1;

в) $f(xy) = f(x)+f(y)$ за всеки две положителни числа x и y.

Упътване. Разгледайте функцията $\varphi(x)=f(e^x)$, приложете зад. 3.10 и покажете, че ако $f(x)$ не е константа, съществува положително число $a\neq 1$ такова, че $f(x)=\log_a x$.

3.14. Намерете всички функции $f(x)$, които удовлетворяват следните условия:

а) $f(x)$ е дефинирана за всяко $x>0$;

б) $f(x)$ е непрекъсната в точката 1;

в) $f(xy) = f(x)\,f(y)$ за всеки две положителни числа x и y.

Упътване. Покажете, че или $f(x)$ е тъждествено равна на нула, или $f(x)>0$ за всяко $x>0$. Във втория случай положете $\varphi(x)=\ln f(x)$ и за функцията $\varphi(x)$ приложете зад. 3.13. Означете $\alpha=\ln f(e)$ и покажете, че $f(x)=x^\alpha$.

3.15. Намерете всички функции $f(x)$, които удовлетворяват следните условия:

а) $f(x)$ е дефинирана за всяко x;

б) съществува положително число a такова, че $f(a) = 0$;

в) $f(x)$ е непрекъсната навсякъде;

г) $f(x)>0$ за всяко $0\leq x<a$;

д) $f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)\,f(y)$ за всеки две реални числа x и y.

Упътване. Покажете, че

а) $f(0)=1$;

б) $f(x)=f(-x)$ за всяко x;

в) $f\left(\frac{a}{2}\right) = \cos\frac{\pi}{4}$;

г) $f\left(\frac{a}{2^n}\right) = \cos\frac{\pi}{2^{n+1}}$ за всяко естествено число n;

д) $f\left(\frac{ma}{2^n}\right) = \cos\frac{m\pi}{2^{n+1}}$ за всеки две естествени числа n и m;

е) Ако x_0 е произволно положително число, то съществува редица от числа $\left\{\frac{m_k a}{2^{n_k}}\right\}$, която клони към x_0;

ж) $f(x)=\cos\left(\frac{\pi x}{2a}\right)$.

3.16. Намерете всички функции $f(x)$, които удовлетворяват следните условия:

а) $f(x)$ е дефинирана за всяко x;
б) $f(x)$ е непрекъсната в точката 0;

в) $f(x) = \cos\frac{x}{2} f\left(\frac{x}{2}\right)$ за всяко x.

Упътване. Докажете, че за всяко x и за всяко n е в сила:

$$f(x) = \cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\cos\frac{x}{2^3}\dots\cos\frac{x}{2^n} f\left(\frac{x}{2^n}\right).$$

След това, като приложите зад. 2.19. ж, покажете, че при $x \neq 0$ е в сила

$$f(x) = f(0)\frac{\sin x}{x}.$$

3.17. Намерете всички функции $f(x)$, които удовлетворяват следните условия:

а) $f(x)$ е дефинирана за всяко x;
б) $f(x)$ е непрекъсната в точката 0;

в) $f(x) = e^{\frac{x}{2}} f\left(\frac{x}{2}\right)$ за всяко x.

Дефиниция 5. Ще казваме, че функцията $f(x)$, дефинирана в D_f, е равномерно непрекъсната в множеството $D \subset D_f$, ако за всяко положително число ε може да се намери положително число δ такова, че за всеки две числа x и y от D, удовлетворяващи неравенството $|x-y| < \delta$, е изпълнено $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

Дефиниция 6. Функцията

$$\omega(\delta, f, D) = \sup_{\substack{|x-y|<\delta \\ x\in D,\, y\in D}} |f(x) - f(y)|$$

се нарича модул на непрекъснатост на функцията $f(x)$ в множеството D.

Теорема 2 (Кантор). Ако функцията $f(x)$ е дефинирана и непрекъсната в компактното множество K, то тя е равномерно непрекъсната в K.

В частност всяка непрекъсната функция е равномерно непрекъсната във всеки краен и затворен интервал, съдържащ се в дефиниционната ѝ област.

Теорема 3. Необходимо и достатъчно условие за равномерна непрекъснатост на функцията $f(x)$ в множеството D е

$$\lim_{\delta\to 0} \omega(\delta, f, D) = 0.$$

От тази теорема непосредствено следва, че ако съществуват положително число ε_0 и две редици $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ такива, че $x_n \in D$, $y_n \in D$, $\lim\limits_{n\to\infty} |x_n - y_n| = 0$ и $|f(x_n) - f(y_n)| \geqq \varepsilon_0$, то функцията $f(x)$ не е равномерно непрекъсната в D.

3.18. Докажете, че ако функцията $f(x)$, дефинирана в D_f, удовлетворява условието на Липшиц в множеството $D \subset D_f$, тя е равномерно непрекъсната в D.

Решение. Съгласно условието на задачата съществува константа $K_D > 0$ такава, че за всеки две числа x и y от D е в сила неравенството

$$|f(x) - f(y)| \leqq K_D |x - y|.$$

Нека ε е произволно положително число. Да му съпоставим числото $\delta = \frac{\varepsilon}{K_D}$. Тогава за всеки две числа x и y от D, удовлетворяващи $|x - y| < \delta$, е изпълнено

$$|f(x) - f(y)| \leqq K_D |x - y| < K_D\,\delta = \varepsilon.$$

3.19. Докажете, че ако функцията $f(x)$ е непрекъсната в интервала $[a, \infty)$ и съществува границата $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = B$, то $f(x)$ е равномерно непрекъсната в $D = [a, \infty)$.

Решение. Нека ε е произволно положително число. От $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = B$ следва, че съществува число $A > a$ такова, че за всяко $x \geqq A$ е изпълнено $|f(x) - B| < \frac{\varepsilon}{3}$.

Да разгледаме крайния и затворен интервал $[a, A]$. Съгласно теоремата на Кантор $f(x)$ е равномерно непрекъсната в него, т. е. съществува положително число δ такова, че за всеки две числа x и y, удовлетворяващи неравенствата $a \leqq x \leqq A$, $a \leqq y \leqq A$ и

$|x-y|<\delta$, е изпълнено $|f(x)-f(y)|<\frac{\varepsilon}{3}$.

Сега ще покажем, че за всеки две числа x и y от интервала $[a,\infty)$, удовлетворяващи неравенството $|x-y|<\delta$, е изпълнено

$$|f(x)-f(y)|<\varepsilon.$$

Възможни са три случая:

а) Нека $a \leqq x \leqq A$, $a \leqq y \leqq A$ и $|x-y|<\delta$. Тогава съгласно избора на числото δ

$$|f(x)-f(y)|<\frac{\varepsilon}{3}<\varepsilon.$$

б) Нека $x \geqq A$ и $y \geqq B$. Тогава съгласно избора на числото A е изпълнено

$$|f(x)-f(y)|=|(f(x)-B)+(B-f(y))|$$

$$\leqq |f(x)-B|+|B-f(y)|<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}<\varepsilon.$$

в) Нека $a \leqq x \leqq A \leqq y$ и $|x-y|<\delta$. Тогава $|x-A|<\delta$ и съгласно избора на числата δ и A имаме

$$|f(x)-f(y)|=|(f(x)-f(A))+(f(A)-B)+(B-f(y))|$$

$$\leqq |f(x)-f(A)|+|f(A)-B|+|B-f(y)|<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon.$$

3.20. Докажете, че ако функцията $f(x)$ е дефинирана и непрекъсната в отворения интервал (a,b) и съществуват границите $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$ и $\lim\limits_{x\to b} f(x)=B$, то функцията $f(x)$ е равномерно непрекъсната в (a,b).

Упътване. Разгледайте функцията

$$g(x)=\begin{cases} A & \text{при} \quad x=a, \\ f(x) & \text{при} \quad a<x<b, \\ B & \text{при} \quad x=b. \end{cases}$$

Покажете, че тя е равномерно непрекъсната в $[a,b]$ и след това използвайте очевидния факт, че ако една функция е равномерно непрекъсната в дадено множество, то тя е равномерно непрекъсната и във всяко негово подмножество.

3.21. Докажете, че ако функцията $f(x)$ е равномерно непрекъсната в крайния отворен интервал (a,b), то съществуват границите:

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x) \quad \text{и} \quad \lim_{\substack{x\to b\\ x<b}} f(x).$$

Решение. Нека ε е произволно положително число. Тъй като $f(x)$ е равномерно непрекъсната, то съществува число δ такова, че за всеки две числа x и y от (a,b), удовлетворяващи неравенството $|x-y|<\delta$, е изпълнено $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$.

Нека $\{x_n\}$ е произволна редица от числа $x_n \in (a,b)$, клоняща към a. Съгласно теоремата на Коши съществува число n_0 такова, че при $n>n_0$ за всяко p е изпълнено $|x_{n+p}-x_n|<\delta$. Тогава според избора на числото δ имаме $|f(x_{n+p})-f(x_n)|<\varepsilon$ при $n>n_0$ и произволно естествено число p, т. е. редицата $\{f(x_n)\}$ удовлетворява условието на Коши и следователно е сходяща. С това показахме, че съществува границата $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x)$. Аналогично се доказва, че съществува и другата граница.

3.22. Докажете, че всяка функция, която е ограничена, монотонна и непрекъсната в даден краен или безкраен интервал, е равномерно непрекъсната.

Упътване. Приложете зад. 1.32 и 3.19 или 3.20.

3.23. Докажете, че следващите функции са равномерно непрекъснати в посочените множества:

а) $f(x)=x^2$ в $[a,b]$; **б)** $f(x)=x^3$ в $[a,b]$;

в) $f(x)=\sqrt{x}$ в $[1,\infty)$; **г)** $f(x)=\sqrt{x}$ в $[0,\infty)$;

д) $f(x)=\sin x^2$ в $[-3,3]$; **е)** $f(x)=\sin\sqrt{x}$ в $[0,\infty)$;

ж) $f(x)=\frac{1}{x}$ в $\left[\frac{1}{2},\infty\right)$; **з)** $f(x)=\sqrt[3]{x}$ в $[0,\infty)$;

и) $f(x)=x\cos\frac{1}{x^2}$ в $(0,\infty)$; **к)** $f(x)=e^{-x^2}$ в $(-\infty,\infty)$;

л) $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$ в $(0, \infty)$.

Решение. **а)** Първи начин. Функцията $f(x) = x^2$ е непрекъсната в крайния и затворен интервал $[a, b]$ и съгласно теоремата на Кантор е равномерно непрекъсната.

Втори начин. Да означим $c = \max(|a|, |b|)$. Ясно е, че от $x \in [a, b]$ следва $|x| \leqq c$. Тогава

$$|x^2 - y^2| = |x - y|\,|x + y| \leqq |x - y|\,(|x| + |y|) \leqq 2c\,|x - y|$$

и следователно $f(x) = x^2$ удовлетворява условието на Липшиц (константата $k = 2c$ зависи само от интервала $[a, b]$). Като приложим зад. 3.18, получаваме, че x^2 е равномерно непрекъсната в $[a, b]$.

в) Равномерната непрекъснатост на функцията $\sqrt{x}$ в интервала $[1, \infty)$ следва от неравенството

$$\left|\sqrt{x} - \sqrt{y}\right| = \frac{|x - y|}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \leqq \frac{|x - y|}{2}$$

и зад. 3.18.

г) Нека $a \geqq 0$ и $b \geqq 0$. От неравенството

$$|a - b| \leqq |a| + |b| = a + b = |a + b|$$

след умножаване с $|a - b|$ получаваме

$$|a - b|^2 \leqq |a - b|\,|a + b| = |a^2 - b^2|$$

или

$$|a - b| \leqq \sqrt{a^2 - b^2}.$$

Ако в това неравенство положим $a = \sqrt{x}$ и $b = \sqrt{y}$, виждаме, че при $x \geqq 0$ и $y \geqq 0$ е в сила

$$|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leqq \sqrt{|x - y|}.$$

Нека ε е произволно положително число. Да му съпоставим числото $\delta = \varepsilon^2$. Тогава за всеки две числа $x \geqq 0$ и $y \geqq 0$, които удовлетворяват неравенството $|x - y| < \delta$, е изпълнено

$$|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leqq \sqrt{|x - y|} \leqq \sqrt{\varepsilon^2} = \varepsilon.$$

ж) Първи начин. От

$$\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right| = \left|\frac{y - x}{xy}\right| < 4\,|y - x| \text{ при } x \geqq \frac{1}{2}$$

съгласно зад. 3.18 следва равномерната непрекъснатост на функцията $\frac{1}{x}$ в интервала $\left[\frac{1}{2}, \infty\right)$.

Втори начин. Като вземем предвид, че $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$, съгласно зад. 3.19 получаваме, че $\frac{1}{x}$ е равномерно непрекъсната в интервала $\left[\frac{1}{2}, \infty\right)$.

и) Ще използваме следната

Лема. Ако функцията $f(x)$ е равномерно непрекъсната в интервалите (a, b) и (b, c) и ако съществува $\lim\limits_{x \to b} f(x) = B$, то $f(x)$ е равномерно непрекъсната в $(a, b) \cup (b, c)$.

Доказателство. Нека ε е произволно положително число. Тогава:

а) от равномерната непрекъснатост на $f(x)$ в интервала (a, b) (съответно в (b, c)) следва, че съществува число $\delta_1 > 0$ ($\delta_2 > 0$) такова, че за всеки две числа x и y, удовлетворяващи неравенствата $a < x < b$, $a < y < b$ и $|x - y| < \delta_1$ (съответно $b < x < c$, $b < y < c$ и $|x - y| < \delta_2$), е изпълнено $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$;

б) от $\lim\limits_{x \to b} f(x) = B$ следва, че съществува число δ_3 такова,че за всяко $x \in (a, b) \cup (b, c)$, удовлетворяващо неравенството $|x - b| < \delta_3$, е изпълнено $|f(x) - B| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Сега на числото ε да съпоставим числото $\delta = \min(\delta_1, \delta_2, \delta_3)$. Да разгледаме две произволни числа x и y от $(a, b) \cup (b, c)$ такива, че $|x - y| < \delta$. От избора на числото δ е ясно, че ако и двете числа x и y лежат в един и същ интервал (a, b) или (b, c), то $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

Да разгледаме случая, когато x и y са в различни интервали. Нека например $x \in (a, b)$, а $y \in (b, c)$. От неравенствата $x < b < y$ и $|x - y| < \delta$ следва, че $|x - b| < \delta$ и $|b - y| < \delta$. Тогава

$$|f(x) - f(y)| = |(f(x) - B) + (B - f(y))| \leqq |f(x) - B| + |B - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Забележка. Условието за съществуване на $\lim\limits_{x \to b} f(x) = B$ съществено. В зад. 3.24. г) е посочен пример на функция, която е равномерно непрекъсната във всеки един от два отворени интервала с общ край, а не е равномерно непрекъсната в тяхното обединение. Очевидно това условие е изпълнено, ако функцията $f(x)$ е непрекъсната в (a, c).

За да докажем, че функцията $x\cos\frac{1}{x^2}$ е равномерно непрекъсната в интервала $(0, \infty)$, ще покажем, че тя е равномерно непрекъсната в интервалите $(0, 1]$ и $[1, \infty)$ и тъй като $x\cos\frac{1}{x^2}$ е непрекъсната, твърдението ще следва от лемата.

Равномерната непрекъснатост на $x\cos\frac{1}{x^2}$ в интервала $(0, 1]$ следва от равенството $\lim\limits_{x\to 0} x\cos\frac{1}{x^2} = 0$ и зад. 3.20.

Като използваме неравенството

$$|\cos\alpha - \cos\beta| = \left|2\sin\frac{\beta-\alpha}{2}\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\right| \leqq |\alpha-\beta|,$$

получаваме при $x \geqq 1$ и $y \geqq 1$

$$\left|x\cos\frac{1}{x^2} - y\cos\frac{1}{y^2}\right|$$

$$= \left|x\cos\frac{1}{x^2} - x\cos\frac{1}{y^2} + x\cos\frac{1}{y^2} - y\cos\frac{1}{y^2}\right|$$

$$\leqq x\left|\cos\frac{1}{x^2} - \cos\frac{1}{y^2}\right| + |x-y|\left|\cos\frac{1}{y^2}\right|$$

$$\leqq x\left|\frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2}\right| + |x-y| \leqq \frac{x\,|x+y|}{x^2y^2}|x-y| + |x-y|$$

$$\leqq \left(\frac{1}{y^2} + \frac{1}{xy} + 1\right)|x-y| \leqq 3\,|x-y|.$$

От зад. 3.18 следва, че $f(x) = x\cos\frac{1}{x^2}$ е равномерно непрекъсната в интервала $[1, \infty)$.

3.24. Докажете, че следните функции не са равномерно непрекъснати в посочените множества:

а) $f(x) = x^2$ в $[0, \infty)$; б) $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ в $(0, \infty)$;

в) $f(x) = \ln x$ в $(0, 1]$; г) $f(x) = \frac{|\sin x|}{x}$ в $(-1, 0) \cup (0, 1)$.

Решение. а) Да разгледаме редиците $x_n = \sqrt{n+1}$ и $y_n = \sqrt{n}$.

Имаме

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}} = 0$$

и $|f(x_n) - f(y_n)| = 1$, което според следствието на теорема 3 означава, че $f(x) = x^2$ не е равномерно непрекъсната в интервала $[0, \infty)$.

б) да разгледаме редиците $x_n = \frac{2}{\pi(4n+1)}$ и $y_n = \frac{2}{\pi(4n+3)}$. Ясно е, че

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{\pi(4n+1)} - \frac{2}{\pi(4n+3)}\right) = 0 \quad \text{и} \quad |f(x_n) - f(y_n)| = 2.$$

в) Да разгледаме редиците $x_n = e^{-n}$ и $y_n = e^{-(n+1)}$. Имаме

$$\lim_{n\to\infty}(e^{-n} - e^{-n-1}) = 0 \quad \text{и} \quad |f(x_n) - f(y_n)| = |\ln e^{-n} - \ln e^{-n-1}| = 1.$$

г) Нека $x_n > 0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$. Тогава, ако $y_n = -x_n$, то

$$\lim_{n\to\infty}|x_n - y_n| = 0 \quad \text{и} \quad \lim_{n\to\infty}\left|\frac{|\sin x_n|}{x_n} - \frac{|\sin y_n|}{y_n}\right|$$

$$= \lim_{n\to\infty} 2\frac{\sin x_n}{x_n} = 2,$$

от което следва, че функцията $f(x) = \frac{|\sin x|}{x}$ не е равномерно непрекъсната в $(-1, 0) \cup (0, 1)$. Да обърнем внимание на това, че от съществуването на $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \dfrac{|\sin x|}{x} = -1$ и $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{|\sin x|}{x} = 1$ следна равномерната непрекъснатост на функцията $f(x)=\dfrac{|\sin x|}{x}$ във всеки един от интервалите $(-1, 0)$ и $(0, 1)$.

3.25. Изследвайте относно равномерна непрекъснатост в посочените множества следните функции:

а) $f(x) = \sin\dfrac{\pi}{x}$ в $(0, 1)$; **б)** $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ в $(-1, 0) \cup (0, 1)$;

в) $f(x) = \operatorname{arctg} x$ в $(-\infty\ \infty)$; **г)** $f(x) = e^x \cos\dfrac{1}{x}$ в $(0, 1)$;

д) $f(x) = x + \sin x$ в $(0, \infty)$; **е)** $f(x) = \sin x^2$ в $(0, \infty)$.

3. 26. Пресметнете модула на непрекъснатост в посочените интервали на следните функции:

а) $f(x) = x^2$ в $[0, 1]$; **б)** $f(x) = x^2$ в $[0, \infty)$;

в) $f(x) = \dfrac{1}{x}$ в $\left[\dfrac{1}{2}, \infty\right)$; **г)** $f(x) = \dfrac{1}{x}$ в $(0, \infty)$;

д) $f(x) = \sqrt{x}$ в $[0, \infty)$; **е)** $f(x) = \ln x$ в $[1, \infty)$;

ж) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ в $(0, \infty)$; **з)** $f(x) = \sin\dfrac{1}{x}$ в $(0, \infty)$.

Решение. **а)** Да означим $D = [0, 1]$.

Нека $0 \leqq x < y = x + h \leqq 1$, където $0 < h \leqq \delta \leqq 1$. Тогава

$$|f(y) - f(x)| = |(x + h)^2 - x^2| = 2hx + h^2 \leqq 2(1 - h)\,h + h^2$$
$$\leqq 2h - h^2 \leqq 2\delta - \delta^2.$$

Последното неравенство следва от това, че квадратният тричлен $2h - h^2$ при $0 < h \leqq 1$ е монотонно растяща функция. Така получихме, че $2\delta - \delta^2$ е една горна граница на множеството от стойностите на $|f(y) - f(x)|$ при $|x - y| \leqq \delta \leqq 1$ и следователно

$$\sup_{\substack{|x-y|\leqq\delta\\ x\in D,\, y\in D}} |f(x) - f(y)| \leqq 2\delta - \delta^2,$$

тъй като $\sup|f(x) - f(y)|$ е най-малката горна граница.

От друга страна, ако $x = 1 - \delta$ и $y = 1$, имаме

$$|f(y) - f(x)| = |1-(1-\delta)^2| = 2\delta-\delta^2 \leqq \sup_{\substack{|x-y|\leqq\delta\\ x\in D,\, y\in D}} |f(x) - f(y)|,$$

откъдето получаваме

$$\omega(\delta, x^2, D) = \sup_{\substack{|x-y|\leqq\delta\\ x\in D,\, y\in D}} |f(x) - f(y)| = 2\delta - \delta^2 \quad \text{при } \delta \leqq 1.$$

Очевидно $\omega(\delta, x^2, D) = 1$ при $\delta > 1$.

б) Нека $D = [0, \infty)$. Да разгледаме редиците $x_n = n$ и $y_n = n + \delta$. Имаме

$$|f(y_n) - f(x_n)| = 2n\delta + \delta^2 \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty,$$

откъдето

$$\omega(\delta, x^2, D) = \infty.$$

д) Да означим $D = [0, \infty)$. Нека x и y са произволни числа от D такива, че $|x - y| \leqq \delta$. От неравенството (вж. зад. 3.23, г))

$$|\sqrt{y} - \sqrt{x}| \leqq \sqrt{|x - y|} \leqq \sqrt{\delta}$$

получаваме, че $\sqrt{\delta}$ е една горна граница на множеството от стойностите на $|\sqrt{y} - \sqrt{x}|$ при $|x - y| \leqq \delta$, $x \in D$, $y \in D$. Следователно

$$\sup_{\substack{|x-y|\leqq\delta\\ x\in D,\, y\in D}} |\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leqq \sqrt{\delta}.$$

От друга страна, нека $y = \delta$ и $x = 0$. Тогава

$$\sup_{\substack{|x-y| \leqq \delta \\ x \in D,\, y \in D}} |\sqrt{x} - \sqrt{y}| \geqq |\sqrt{\delta} - \sqrt{0}| = \sqrt{\delta}.$$

С това показахме, че $\omega(\delta, \sqrt{x}, D) = \sqrt{\delta}$.

з) Да означим $D = (0, \infty)$.
От неравенството

$$\left|\sin\frac{1}{x} - \sin\frac{1}{y}\right| \leqq \left|\sin\frac{1}{x}\right| + \left|\sin\frac{1}{y}\right| \leqq 2,$$

което е изпълнено за произволни две числа от D, следва

$$\sup_{\substack{|x-y| \leqq \delta \\ x \in D,\, y \in D}} \left|\sin\frac{1}{x} - \sin\frac{1}{y}\right| \leqq 2.$$

От друга страна, нека n е толкова голямо, че да е изпълнено неравенството

$$\left|\frac{2}{\pi(4n+1)} - \frac{2}{\pi(4n+3)}\right| < \delta.$$

Тогава

$$\sup_{\substack{|x-y| \leqq \delta \\ x \in D,\, y \in D}} \left|\sin\frac{1}{x} - \sin\frac{1}{y}\right|$$

$$\geqq \left|\sin\frac{\pi(4n+1)}{2} - \sin\frac{\pi(4n+3)}{2}\right| = 2.$$

С това показахме, че

$$\omega\left(\delta, \sin\frac{1}{x}, D\right) = 2.$$

3.27. Като използвате пресметнатите в предишната задача модули на непрекъснатост, изследвайте относно равномерна

непрекъснатост съответните функции с помощта на теорема 3.

Например от $\omega(\delta, x^2, D) = 2\delta - \delta^2$, където $D = [0, 1]$ и $\lim\limits_{\delta \to 0} (2\delta - \delta^2) = 0$, следва равномерната непрекъснатост на x^2 в $[0, 1]$, а от $\omega\left(\delta, \sin\frac{1}{x}, D\right) = 2$, където $D = (0, \infty)$ и $\lim\limits_{\delta \to 0} 2 = 2$, следва, че $\sin\frac{1}{x}$ не е равномерно непрекъсната в $(0, \infty)$.