Л. ПЕТРУШЕВ
ИВ. ПРОДАНОВ

ПЪРВИ СТЪПКИ В АНАЛИЗА

1975
СОФИЯ
ДИ „НАРОДНА ПРОСВЕТА“

Ако не познаваме Заблуждението,
не познаваме и Истината.

Рабиндранат Тагор

ПРЕДГОВОР

Учените от седемнадесетия век особено са се интересували от задачи, свързани с движенията на телата. Един от главните обекти на техните изследвания било движението на небесните светила. След революцията, която Коперник и Кеплер извършили в човешките представи за вселената, плеяда учени започнали интензивно да разкриват непознати дотогава закони. Движението на небесните тела, а също и на онези, близко до повърхността на Земята, се оказали доста по-сложни, отколкото се е мислело по-рано. По-специално терминът „равномерно движение" станал означение на една несъществуваща в природата фикция и се разбрало, че скоростите и ускоренията на телата се изменят с течение на времето. Това обстоятелство не позволявало използуването на известната дотогава математика за изучаване на движенията. Възникнала необходимост от нови математически методи и те били намерени.

Но потребностите от задълбочаване на познанията за движението не били единствен източник на идеи, предизвикал появата на тези методи. Въвеждайки координатите, Декарт показал как геометрични задачи могат да се решават с алгебрични методи. Разбрало се, че геометричният обект крива и алгебричният обект функция не са съществено различни. Задачата за намиране на тангентите на различните криви се превърнала в задача за намиране на производни на функции.

В резултат на всичко това се получила математическа теория, успяла да обедини изучаването на явления и процеси, които от пръв поглед изглеждали съвършено различни. Накъсо казано, появил се математическият анализ.

Както и повечето клонове на математиката, анализът е дело на много хора. От учените, които през седемнадесетия век са дали своя принос, ще споменем само Ферма, Декарт, Паскал, Кавалиери, Бароу, Хюйгенс, Нютон, Лайбниц. Последните двама най-често се споменават като създатели на анализа. С името на Нютон обикновено се свързват приложенията към механичните задачи, а с името на Лайбниц — приложенията към геометричните, като например задачата за тангентата към крива.

Анализът не бил завършен през седемнадесетия век. През следващото столетие той получил по-нататъшно развитие в работите на Бернули, Рол, Тейлър, Маклорен, Ойлер, Даламбер, Лагранж.

Основите на тази сграда били построени едва през деветнадесетия век в трудовете на Болцано, Коши, Вайерщрас. Критиката, която те отправили към предшествениците си, станала двигател за по-нататъшното развитие на тази дисциплина.

Първото запознаване с анализа не трябва да започва с изучаване на основите му. Много по-лесно това може да стане, ако се следват мотивите на неговите създатели, защото по този начин се получава възможност да се „види" анализът. Да се „види" анализът е главната цел на тази книга. Но това не е единствената ѝ цел.

Недостигът на подходяща популярна литература по математически анализ е една от главните причини за така наречената „пропаст" между средното и висшето образование по математика. Студентът от първи курс най-осезателно чувствува това. Довчерашният ученик обикновено не е в състояние да вникне така дълбоко в преподаването на математиката във висшето учебно заведение, както това е необходимо. Не са редки случаите, когато първокурсникът загубва вяра в силите си дори когато той е бил отличник в сред-

ното училище. Но съществуват и случаи, когато нещата протичат по друг начин, когато „висшата" математика не е създаваща само неприятни емоции бариера, а е удоволствие за онзи, който я изучава. Такъв е студентът, който като ученик не се е задоволявал само с преподаваното му в училище, а е търсил допълнителни източници. Съзнателно или не, по този начин той е изградил мост над пропастта, за която говорихме по-горе.

В какво в същност се състои тя? Широко е разпространено схващането, че съществуват „две математики": елементарна, която се изучава в средните училища, и висша, която се изучава след това. Този възглед е погрешен, защото и в двата случая се използува един и същ начин на мислене — математическият, и следователно не съществува разделителна линия между училищната и университетската математика. Ако все пак повечето първокурсници получават впечатлението, че такава разделителна линия има, то се дължи не на природата на науката математика, а на нейната многопластовост. Математиката е сложно явление. От една страна, тя е стройна логическа система от аксиоми, определения и теореми, която може да се изучава формално, т. е. без да се вниква в конкретното съдържание и практическата приложимост на разглежданите въпроси. Това е, така да се каже, последната степен в развитието на една математическа дисциплина. От друга страна, действителността на всяка крачка заставя човека да мисли математически. Това е необходимост, която не може да избегне никой. От най-ранна възраст всеки среща, макар и в първична форма, и множествата, и функциите, и непрекъснатостта, и производните, и всички основни понятия на анализа, както и фундаменталните им свойства. Така например на всеки е ясно, че ако една частица се движи по права линия, тя минава през всички точки, разположени между началното и крайното ѝ положение. Това очевидно за интуицията твърдение се появява в анализа като едно от главните свойства на непрекъснатите функции. Аналогично *явление имаме и при производните. Известното всекиму понятие скорост не е нищо друго, освен производна на функция. Основната теорема за производните, представляваща база на повечето от техните приложения, е математически аналог на простия факт, че ако скоростта на една частица е нула през цялото време, тази точка се намира в едно и също положение. И така нататък. Виждаме, че математиката има две страни — абстрактно-логическа и нагледно-интуитивна. Всеки ученик владее втората страна, но изглежда, че не всеки е в състояние сам да прозре, че зад строгите абстрактно-логически одежди, в които е облечена лекцията на професора, стои именно тя, тази втора страна. Вече е ясно къде е тази пропаст. Ясно е също така, че за преодоляването й слушателят от аудиторията трябва да умее да идентифицира абстрактните съждения, които лекторът му поднася, с придобитите вече интуитивни представи.*

София 21 юни 1974

УВОД

Основното понятие на анализа е понятието функция. Може да се твърди, че фундаменталната роля, която анализът играе в съвременното научно естествознание, се дължи именно на понятието функция. Всеки природен закон е връзка между различни величини или по-точно между числата, които изразяват количествената страна на тези величини. При изучаването на различните процеси в реалния свят често срещаме величини, които се изменят с течение на времето. Ако две величини участвуват в някакъв природен закон, те не се изменят независимо една от друга, защото законът представлява връзка между тях. Така например да разгледаме известно количество идеален газ, който се намира в цилиндър с бутало. Ако през цялото време температурата на газа остава постоянна, обемът V и налягането p на този газ се подчиняват на закона на Бойл — Мариот

$$p \, . \, V = \mathrm{const} = c. \tag{1}$$

Ако произволно изменяме обема (движим буталото по произволен начин), налягането p също се изменя и стойността му за произволна стойност V на обема се дава с формулата

$$p = \frac{c}{V}. \tag{2}$$

В този случай казваме, че налягането зависи от обема или че е функция на обема.

Природата дава огромно количество такива примери, много от които са вече известни на читателя. Понятието функция е отражение на общото, което се намира във всички такива примери.

Нека x и y са две променливи величини. *Променливата y се нарича функция на променливата x, ако на всяка стойност на величината x е съпоставена по някакъв закон (правило) по* *една строго определена стойност на величината* y. Величината x се нарича *независима променлива* или *аргумент* на функцията y. Да спрем вниманието си на един съществен момент на това определение: законът (правилото), по който на произволна стойност x на аргумента се съпоставя строго определена стойност на функцията, може да бъде съвършено произволен и всеки такъв закон (правило) дава по една функция. Така например ако на един произволен ъгъл се съпоставен неговият синус, с това е определена функцията

$$y=\sin x. \tag{3}$$

Най-просто и естествено този закон се дава с формула или аналитичен израз, както в случаите (2) и (3). Би било обаче неправилно да се мисли, че това е единственият начин за задаване на функция. Например, ако на произволно число x съпоставим най-голямото измежду целите числа, които не надминават x, получаваме функция на x, която не е зададена с формула. Въпреки това ние можем да пресметнем стойността ѝ за всяко зададено x: ако $x=1$, функцията има стойност 1, ако пък $x=2{,}5$, функцията има стойност 2 и т. н.

Функциите означаваме с букви като

$$f,\ \varphi,\ g,\ F,\ \Phi,\ G$$

и т. н., а стойността на произволна функция f за някаква стойност x на аргумента означаваме с $f(x)$.

Да отбележим още, че аргументът не винаги може да приема произволни реални стойности. Така например в (2) аргументът V приема само положителни стойности, които не надминават обема на цилиндъра. Ако аргументът x е дължина на променлива отсечка, той може да приеме само неотрицателни стойности. Множеството на всички стойности на аргумента, на които по дадено правило (закон) е съпоставена стойност на функцията, се нарича *дефиниционна област* на тази функция. Дефиниционната област на функцията (3) е цялата числова права. Когато x е от дефиниционната област на някоя функция f, казваме, че *функцията* f *е дефинирана* (има смисъл) за тази стойност на x, а в противен случай — че *функцията* f *не е дефинирана* (няма смисъл) за тази стойност на x. Функцията $\operatorname{tg} x$ е дефинирана само когато $x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$, $k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Функцията

$$y=\frac{x+1}{x^2-5x+6}$$

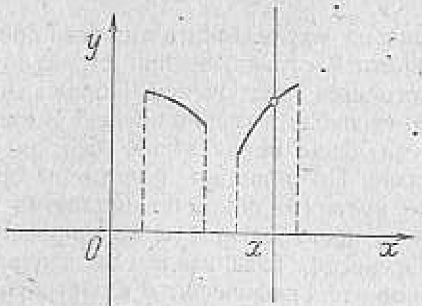
е дефинирана за всяко $x \neq 2, 3$, тъй като при $x=2$ и $x=3$ знаменателят става нула.

Абстрактно-логическата страна на математиката има това предимство пред нагледно-интуитивната ѝ страна, че при стриктното придържане към нея не дава погрешни заключения. Поради това обстоятелство при преподаването се набляга главно на нея. В същност цялата математика може да бъде представена, без да се прибягва до някакво онагледяване. По принцип ролята на зрението може да бъде сведено до нула. Но никой преподавател не прави така, защото не може да се пренебрегне такъв широк информационен канал, какъвто е зрението. Това важи и за централното понятие на анализа — функциите. Графическото илюстриране на функциите е почти винаги необходимо. Обозримостта и нагледността на графиката на една функция правят от нея незаменимо спомагателно средство при изследването и запомнянето на свойствата на функциите.

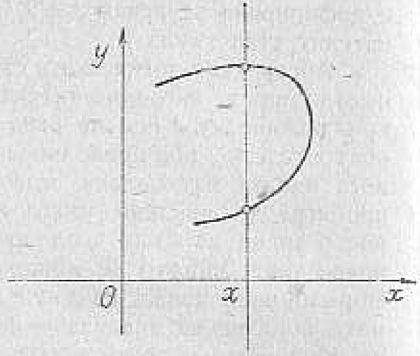
Що е графика на функция? Нека в равнината са зададени две взаимно перпендикулярни оси x и y, а f е някаква функция. *Под графика на функцията* f *разбираме множеството на всички точки в равнината с координати* $(x, f(x))$, *където* x *е произволно число от дефиниционната област на функцията* f. От това определение се вижда най-напред, че абсцисата на всяка точка от графиката на функцията f принадлежи на дефиниционната област на функцията. Ако си мислим, както това обикновено се прави, че дефиниционната област на функцията е изобразена върху оста x, това означава, че проекцията на графиката върху абсцисната ос съвпада с дефиниционната област на функцията. Тъй като функцията f за всяка точка x от дефиниционната си област *има една единствена стойност* $f(x)$, нейната графика притежава и следното свойство: върху всяка вертикална права, пресичаща абсцисната ос в точка от дефиниционната област на функцията, лежи една единствена точка от графика на функцията (черт. 1).

Поради тази причина кривата, изобразена на черт. 2, не е графика на функция.

Кога едно множество от точки в равнината е графика на функция? Очевидно това е така тогава и само тогава, когато всяка вертикална права, имаща обща точка с това множество, има само една обща точка с него. Да означим с Γ едно такова множество. Дефиниционната област на функцията f, чиято графика съвпада с Γ, не е нищо друго освен проекцията на Γ върху абсцисната ос. За произволно x от тази проекция стойността $f(x)$



Черт. 1



Черт. 2

на функцията f, чиято графика е Γ, с ординатата на единствената пресечна точка на Γ с вертикалната права през x. Може да се каже, че когато е описана точно, графиката на една функция съдържа цялата възможна информация за функцията.

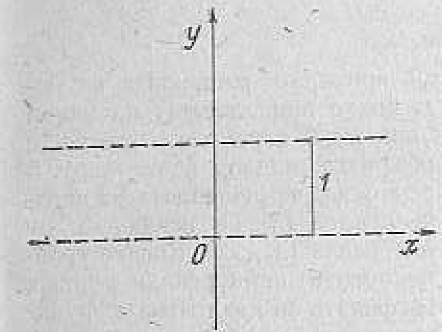
Да разгледаме сега множеството Γ от точки в равнината, дефинирано по следния начин: към Γ причисляваме точките с рационални абсциси и ордината единица, както и точките с ирационални абсциси и ордината нула. Очевидно всяка вертикална права пресича Γ в една единствена точка и следователно множеството Γ е графика на функция. Даже приблизителното изобразяване на тази графика на чертеж е трудно (черт. 3). Въпреки това множеството Γ е вече описано съвсем точно, поради което функцията f, чиято графика е Γ, е определена напълно. Нейната дефиниционна област съвпада с цялата числова права, а стойностите ѝ се дават с равенството

$$f(x)=\begin{cases}1, & \text{когато } x \text{ е рационално число,}\\ 0, & \text{когато } x \text{ е ирационално число.}\end{cases}$$

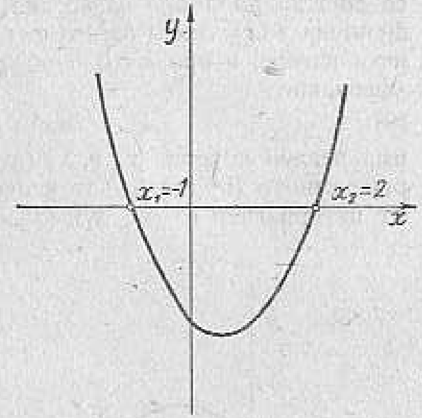
Този пример показва, че съществуват функции, чиито графики не могат да бъдат начертани, т. е. не са криви линии.

Особен интерес за математиката и нейните приложения представляват онези функции, чиито графики са криви линии. Такива са всички функции, които се изучават в средния курс и в началото на университетското обучение по математика. Тяхното изучаване е предмет и на тази книга.

Необходимо е за изучаващия анализ да умее „да чете" гра-



Черт. 3



Черт. 4

фиките на функциите, т. е. да вижда интересуващите го свойства на функцията от нейната графика.

Така например от графиката лесно се вижда къде една функция се анулира: това става в пресечните точки на графиката с абсцисната ос (черт. 4). Не по-трудно се вижда и къде функцията приема положителни или отрицателни стойности. Функцията, чиято графика е изобразена на черт. 4, се анулира при $x=x_1$ и при $x=x_2$, приема положителни стойности за всички x, които принадлежат на някой от интервалите $(-\infty, x_1)$, $(x_2\ \infty)$ и приема отрицателни стойности в интервала (x_1, x_2). Вижда се, че графиката на една функция f може да бъде полезна при решаване на някое от неравенствата $f(x)>0$ или $f(x)<0$. За да посочим конкретен пример, да разгледаме неравенството

$$x^2-x-2>0. \tag{4}$$

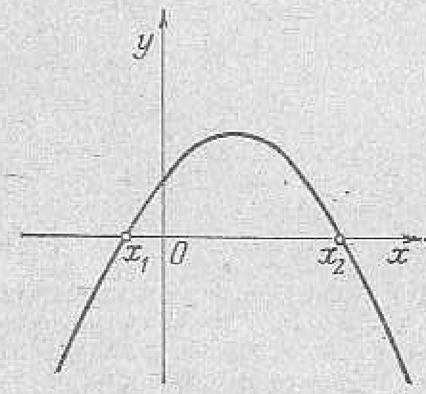
Тук $f(x)=x^2-x-2$, което е една квадратна функция. Тъй като коефициентът пред x^2 е положителен, както е известно на читателя, графиката е парабола, която е обърната нагоре (черт. 4). Точките, в които f се анулира, са решенията на уравнението $x^2-x-2=0$, т. е. $x_1=-1$, $x_2=2$. От графиката се вижда, че неравенството (4) е изпълнено, когато x принадлежи на някой от интервалите $(-\infty,-1)$, $(2,\infty)$. По-общо, изучаването на неравенството

$$ax^2+bx+c>0 \tag{5}$$

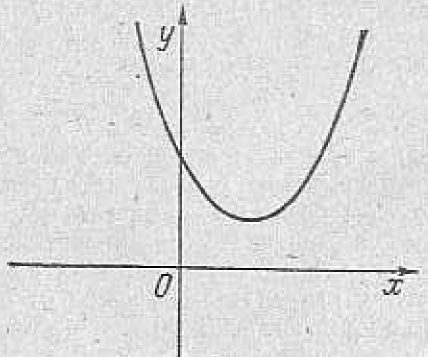
се свежда до добре известния факт, че графиката на квадратната функция $f(x)=ax^2+bx+c$ е парабола, която при $a>0$ е обърната нагоре, а при $a<0$ е обърната надолу. Когато квадратното уравнение

$$(6) \qquad ax^2+bx+c=0$$

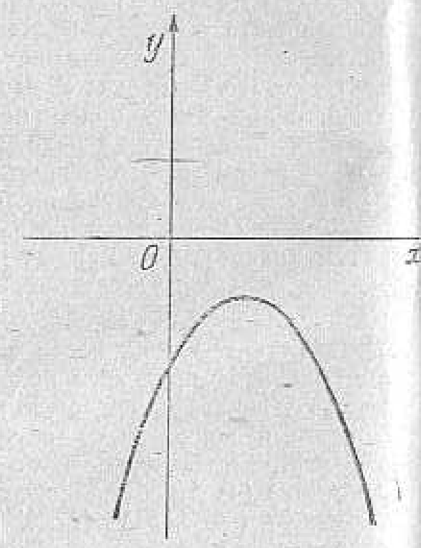
има реални корени x_1 и x_2 $(x_1 \leq x_2)$, при $a>0$ решенията на неравенството (5) ще бъдат всички x, които принадлежат на някой от интервалите $(-\infty, x_1)$, (x_2, ∞); при $a<0$ параболата ще бъде обърната надолу и от черт. 5 се вижда, че решенията на неравенството (5) са всички x от интервала (x_1, x_2). Когато уравнението (6) няма реални корени, графиката на квадратната функция е парабола, която не пресича абсцисната ос, следователно при $a>0$ решенията на неравенството (5) са всички реални числа, а при $a<0$ то няма решение (вж. черт. 6 и черт. 7).



Черт. 5



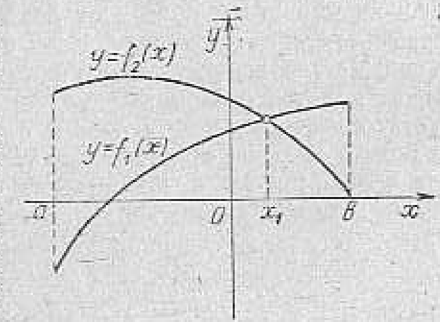
Черт. 6



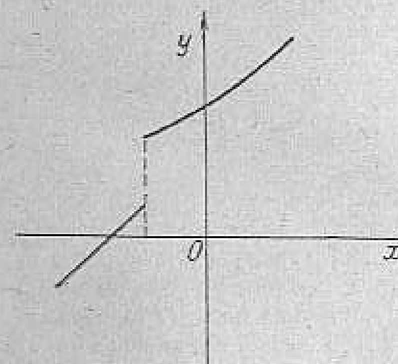
Черт. 7

Горните наблюдения могат да бъдат малко обобщени. Така например от графиките лесно се вижда къде две функции приемат еднакви стойности: това става в пресечните точки на графиките им (черт. 8). Също така лесно се вижда къде стойностите на функцията f_1 са по-големи от съответните стойности на функцията f_2: това е така, когато точката от графиката на функцията f_1 е над съответната точка от графиката на функцията f_2; от черт. 8 се вижда, че неравенството $f_1(x)>f_2(x)$ е изпълнено, когато x е от интервала (x_1, b).

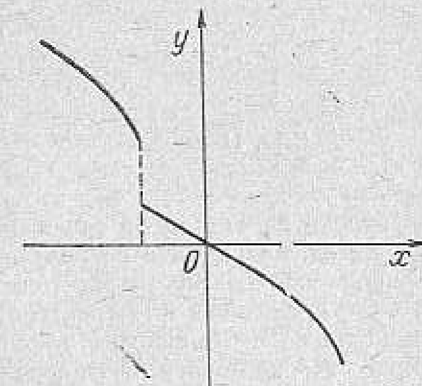
Монотонността на една функция също може лесно да се види от графиката ѝ. Една функция се нарича *растяща*, ако от неравенството $x_1<x_2$ винаги следва неравенството $f(x_1) \leq f(x_2)$. Ако пък от неравенството $x_1<x_2$ винаги следва, че $f(x_1) \geq f(x_2)$, функцията f се нарича *намаляваща*. Функциите от тези два типа имат общото название *монотонни функции*. На черт. 9 е изобразена графиката на растяща функция, а на черт. 10 — на намаляваща.



Черт. 8

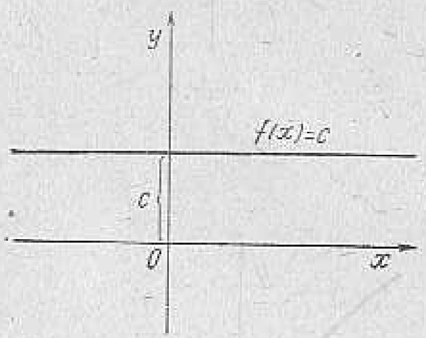


Черт. 9

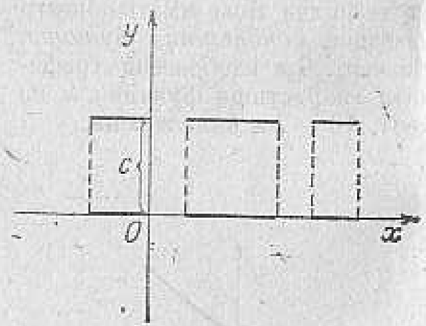


Черт. 10

Образно казано, една функция е растяща, когато при „пробягването" на дефиниционната ѝ област от ляво на дясно съответната точка от графиката ѝ се изкачва нагоре. Дадените дефиниции позволяват дефиниционната област на функцията да бъде такава, че при пробягването ѝ да се налагат „скокове", т. е. областта да не бъде интервал; в същото време, независимо от това, каква е дефиниционната област, при пробягването ѝ е възможно съответната точка от графиката на функцията също да прави скокове. Една функция е намаляваща, когато при пробягването на дефиниционната ѝ област от ляво на дясно съответната точка от графиката ѝ слиза надолу. Една функция е и растяща, и намаляваща, когато всичките ѝ стойности съвпадат. Тези функции се наричат константи. Константите ще означаваме a, b, c, const и т. н. Когато дефиниционната област на една такава функция съвпада с цялата числова права, графиката ѝ е една хоризонтална права. На черт. 11 и 12 е представена графиката на константата c. В първия случай дефиниционната област е цялата числова права, а



Черт. 11



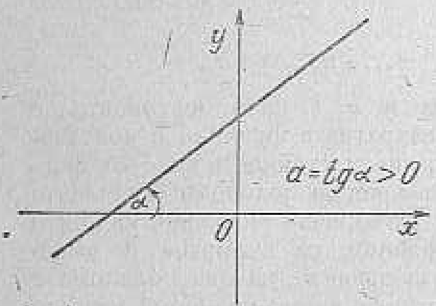
Черт. 12

във втория се състои от три интервала. Образно казано, графиката на една константа се получава, като „повдигнем" цялата ѝ дефиниционна област на разстояние, равно на тази константа. Когато f е произволна функция, графиката ѝ също се получава чрез повдигане на дефиниционната ѝ област, но това повдигане изобщо зависи от повдиганата точка, поради което дефиниционната област се „деформира". Тази деформация зависи от функцията и в същото време я определя напълно.

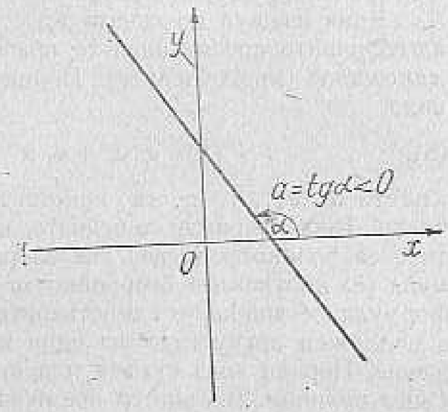
След константите най-простите функции са линейните, т. е. функциите от вида

$$f(x)=ax+b, \tag{7}$$

където a и b са дадени константи. Линейните функции са монотонни. По-точно, при $a>0$ функцията (7) е растяща, а при $a<0$ — намаляваща. Да покажем това, когато $a>0$. Нека $x_1<x_2$. Тогава, понеже $a>0$, ще имаме $ax_1<ax_2$ и като прибавим към двете страни на това неравенство числото b, ще получим $ax_1+b<ax_2+b$, което заедно със (7) дава $f(x_1)<f(x_2)$. С това е показано, че при $a>0$ функцията (7) е растяща. На читателя е известно, че графиката на линейната функция е права линия. На черт. 13 и черт. 14 е изобразена графиката на линейна функция съответно при $a>0$ и $a<0$. Когато изменяме a и b, функцията f, зададена с равенството (7), се мени и следователно правата, представляваща нейна графика, се движи. Геометричният смисъл на тези две константи е твърде прост и е известен на читателя: a е *ъгловият коефициент* на графиката, т. е. тангенсът на ъгъла, който тази права сключва с абсцисната ос; когато a расте, този ъгъл също расте, т. е. графиката става по-стръмна; b е ординатата на пресечната точка на графиката с ординатната ос; графиката минава през началото на координатната система тогава и само тогава, когато $b=0$. Тук следва да отбележим, че вертикалните прави не са гра-



Черт. 13



Черт. 14

фики на функции, тъй като не удовлетворяват изискването, едно множество да бъде графика на една функция, защото всяка вертикална права пресича себе си в безбройно много точки. Всички други прави са графики на функции, и то на линейните функции.

Горните бележки върху функциите и техните графики имат съществено значение за разбирането на онова, което е изложено в тази книга. Не по-малко съществено е и умението да се правят алгебрични пресмятания, което се предполага у читателя.

Една изящна по своята простота класа от функции, в която алгебричните пресмятания се правят особено леко, е тази на *полиномите* (многочлените). Полином се нарича всяка функция от вида

$$P(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n, \qquad (8)$$

където $a_0, a_1, \ldots, a_n$ са константи и n е цяло неотрицателно число. Така например линейната, квадратната функция и константите са полиноми. Освен тях за различни стойности на n от формула (8) получаваме безбройно много видове полиноми. От същата формула се вижда, че единствените алгебрични операции, на които е подложен аргументът на един полином, са събиране и умножение. Поради това сумата и произведението на два полинома е също полином. В същото време частното на два полинома изобщо не е полином.

Функциите, които се представят като частно на два полинома, се наричат *рационални функции*. Общият вид на рационалните функции се дава с формулата

$$R(x)=\frac{a_0x^m+a_1x^{m-1}+\ldots+a_{m-1}x+a_m}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+\ldots+b_{n-1}x+b_n}. \qquad (9)$$

Така например функцията

$$R(x)=\frac{x+1}{x^2-5x+6} \qquad (x\neq 2,\ x\neq 3) \qquad (10)$$

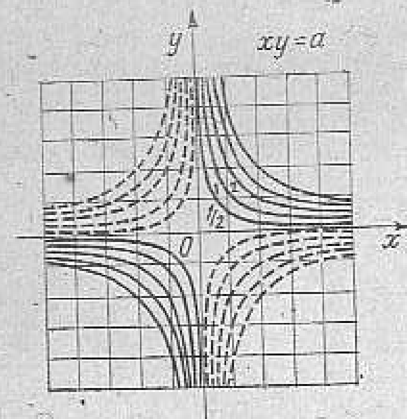
е рационална. Очевидно е, че всеки полином е същевременно и рационална функция. Наистина, ако знаменателят на (9) е константата единица, получаваме полинома $a_0x^m+a_1x^{m-1}+\ldots+a_{m-1}x+a_m$. Поради това полиномите често се наричат *цели рационални функции*. От (9) се вижда, че алгебричните операции, на които е подложен аргументът на една цяла рационална функция, са събиране, умножение и деление. Следователно сумата, произведението

и частното на две рационални функции е също рационална функция. Рационалните функции са дефинирани за всяко x, за което знаменателят не се анулира. Така например функцията (10) е дефинирана, когато $x\neq 2$ и $x\neq 3$.

Функцията

$$y=\frac{a}{x}, \qquad (11)$$

която изразява наличието на обратна пропорционалност между x и y, е също рационална. Дефиниционната ѝ област се състои от всички точки x, за които $x\neq 0$. При положително a аргументът и стойността на функцията имат винаги еднакъв знак, поради което графиката ѝ е разположена в първия и третия квадрант. При $a<0$ графиката на функцията (11) е разположена във втория и четвъртия квадрант. Когато x е „близко" до нулата, стойността на функцията е „голяма" по абсолютна стойност. Обратно, при големи по абсолютна стойност x стойността на функцията е близка до нулата. На черт. 15 са дадени графиките на функциите, които се получават от (11) при различни стойности на константата a. Всяка от така получените криви се нарича *равнораменна хипербола*. Всяка равнораменна хипербола се състои от два клона, които се приближават неограничено до абсцисната ос, когато x



Черт. 15

се отдалечава неограничено от началото, и се приближават неограничено до ординатната ос, когато x се приближава неограничено към началото. Координатните оси се наричат *асимптоти* на равнораменните хиперболи.

Функциите от вида

(12) $$y=x^{\alpha},$$

където α е произволна реална константа, се наричат *степенни*. Когато α е цяло, получаваме рационална функция. Така например при $\alpha=3$ получаваме функцията x^3, която очевидно е полином, а при $\alpha=-2$ — функцията $\frac{1}{x^2}$, която е от вида (9). Когато α е дробно рационално число, получаваме корен. Например при $\alpha=\frac{1}{2}$ (12) добива вида $y=x^{\frac{1}{2}}=\sqrt{x}$. По-общо, ако n е естествено число, при $\alpha=\frac{1}{n}$ получаваме $y=x^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{x}$. В този случай винаги се има пред вид аритметичната стойност на корена. Да припомним с няколко примера известното на читателя понятие за аритметичен корен:

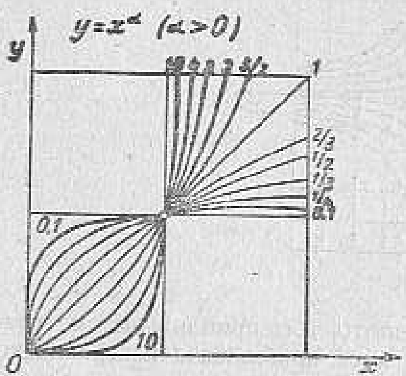
$$\sqrt[2n]{a^{2n}}=|a|,\quad \sqrt{(-5)^2}=|-5|=5,$$
$$\sqrt[2n+1]{a^{2n+1}}=a,\quad \sqrt[3]{(-5)^3}=-5.$$

Дефиниционната област на степенната функция зависи съществено от α. Когато α е някое от числата 1, 2, 3, ..., функцията (12) е дефинирана за всяко x. Когато α е някое от числата $0, -1, -2, \ldots$, тази функция е дефинирана за всяко x, различно от нула. Без да се впускаме в подробно обсъждане на всички случаи за α, ще отбележим още, че степенната функция е дефинирана за всяко $x>0$ независимо от степенния показател α. На черт. 16 и черт. 17 са изобразени графиките на степенната функция при различни α и при $x>0$. При положителни α при $x>1$ кривите се издигат нагоре толкова по-бързо, колкото е по-голямо α, при $0<x<1$ „прилепват" толкова по-плътно към абсцисната ос, колкото е по-голямо α. Функцията x^{α} е очевидно растяща, когато $x>0$ и $\alpha\geq0$. При отрицателно α тази функция може да се разглежда като дроб (така например вместо x^{-3} можем да пишем $\frac{1}{x^3}$); в този случай функцията x^{α} е намаляваща при $x>0$; също както и при равнораменната хипербола, абсцисната и ординатната оси са асимптоти на кривите $y=x^{\alpha}$ при $\alpha<0$.

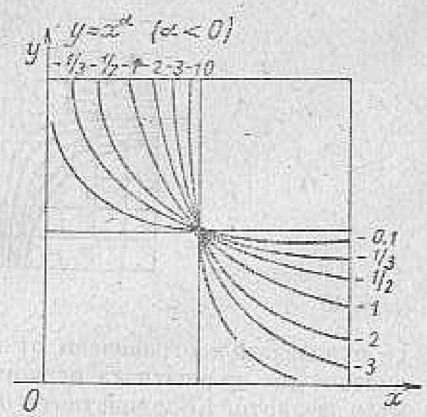
Функциите

(13) $$y=a^{x},$$

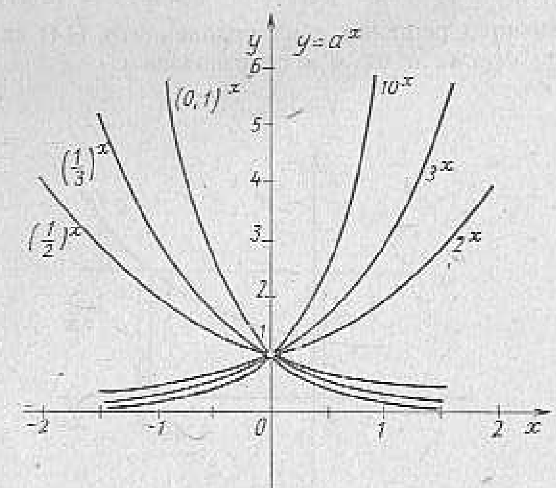
където a е произволна положителна константа, се наричат *експоненциални* или *показателни*. Стойностите на показателните функции са винаги положителни, а дефиниционната им област се състои от всички реални числа. При $a>1$ показателната функция е растяща,



Черт. 16



Черт. 17



Черт. 18

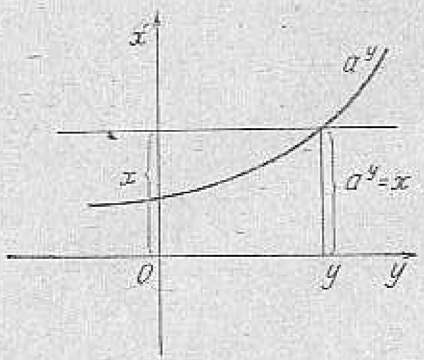
като при неограниченото отдалечаване на x надясно от началото a^x расте неограничено; при неограниченото отдалечаване на x наляво от началото a^x клони към нула, т. е. абсцисната ос е асимптота на кривата $y=a^x$. При $0<a<1$ имаме $a^x=\left(\frac{1}{a}\right)^{-x}$ и $\frac{1}{a}>1$ и направените бележки за $a>1$ се трансформират в нашия случай по следния начин: при $0<a<1$ показателната функция е намаляваща, като при неограниченото растене на x надясно клони към нула; при неограниченото отдалечаване на x наляво от началото a^x расте неограничено. При $a=1$ имаме $a^x=1^x=1$, т. е. функцията 1^x съвпада с константата единица. Графиките на показателните функции при различни стойности на a са дадени на черт. 18. Забележете, че кривите $y=10^x$ и $y=0{,}1^x$ са симетрични относно ординатната ос (защо?).

Нека a е някое различно от единицата положително число. Не е трудно да се види, че за всяко положително число x уравнението

(14) $$a^y=x$$

има едно единствено решение y (вж. черт. 19), т. е. за всяко положително число x съществува едно единствено реално число y, за което е в сила равенството (14). Така например, ако $a=10$ и $x=100$, решението y на (14) е числото 2, ако пък $a=\frac{1}{2}$ и $x=8$, въпросното решение е $y=-3$. Както читателят знае, единственото решение y на уравнението (14) се нарича *логаритъм при основа* a от x и се означава с

15) $$y=\log_a x.$$

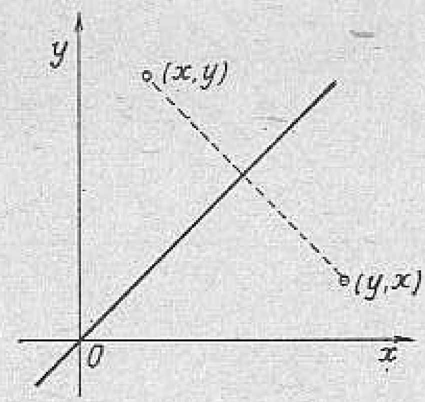


Черт. 19

Така дефинирахме една нова функция $\log_a x$. Тъй като уравнението (14) има решение само при положителни x, дефиниционната област на логаритмичната функция се състои от всички положителни числа; разбира се, решенията y на (14) могат (в зависимост от x) да приемат произволни реални стойности, така че стойностите на логаритмичната функция са произволни реални числа. По силата на определението на $\log_a x$ две числа x и y са свързани с равенството (15) тогава и само тогава, когато са свързани с равенството (14); да се докаже (15) е все едно да се докаже (14) и обратното. От тази бележка следва едно просто правило за построяване на графиката на логаритмичната функция: една точка с координати x и y се намира върху графиката на функцията $\log_a x$ (т. е. удовлетворява уравнението (15)) тогава и само тогава, когато е изпълнено (14); но множеството на точките (x, y), за които е в сила (14), е симетрично относно ъглополовящата на първи и трети квадрант на множеството на точките (x, y), за които е в сила

(16) $$y=a^x,$$

защото точката (x, y) удовлетворява (16), когато точката (y, x) удовлетворява (14), а тези две точки са симетрични относно ъглополовящата на първи и трети квадрант (черт. 20); множеството



Черт. 20

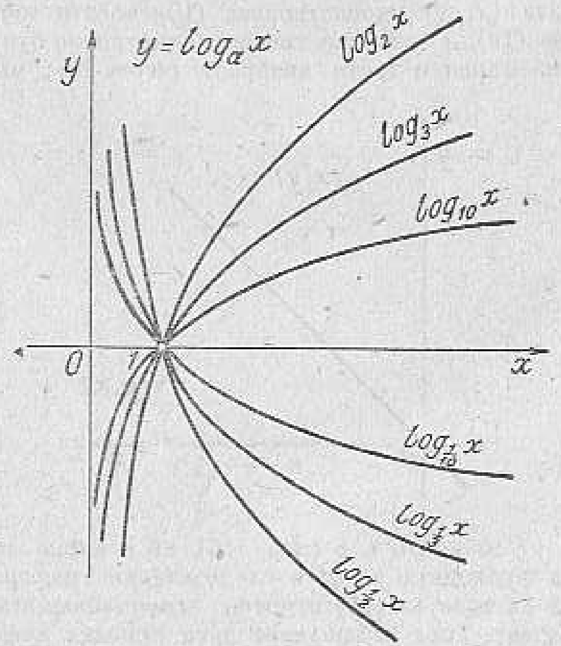
от точки (x, y), за които е в сила (16), не е нищо друго освен графиката на функцията $y=a^x$ и следователно графиката на (15) е симетрична на тази на (16) относно ъглополовящата на първи и трети квадрант. Това наблюдение дава немалка информация за логаритмичната функция (черт. 21). От този чертеж е видно, че дефиниционната област на $y=\log_a x$ се състои от всички положителни числа (ортогоналната проекция на графиката на $\log_a x$ върху абсцисната ос съвпада с множеството на положителните числа). При $a>1$ логаритмичната функция е растяща, а при $0<a<1$ е намаляваща; при $a>1$ тя е отрицателна, когато $0<x<1$, и положителна, когато $x>1$, а при $0<a<1$ картината се обръща.

Да се спрем сега на четирите основни тригонометрични функции:

$$y=\sin x, \qquad y=\operatorname{tg} x \qquad \left(x\neq(2k+1)\frac{\pi}{2}\right),$$

$$y=\cos x, \qquad y=\operatorname{ctg} x \qquad (x\neq k\pi).$$

За анализа е удобно аргументът x да се изразява в *радиани*, т. е. за единица при измерването на ъглите да се избере централният ъгъл, на който съответствува дъга от окръжността, чиято дължина е равна на тази на радиуса. Тъй като дължината на окръжността е $2\pi r$, радиусът се нанася върху нея 2π пъти, поради



Черт. 21

което ъгълът от 360° е равен на 2π радиана. На читателя е известно, че връзката между градусната и радианната мярка на един ъгъл се дава с формулата

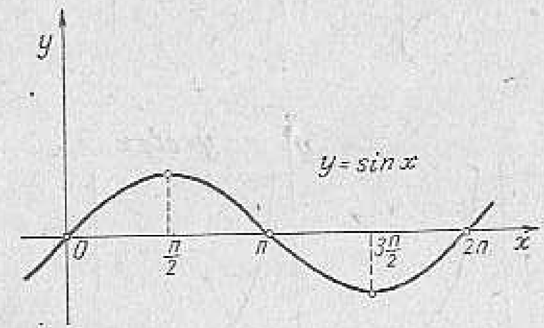
$$\alpha=\frac{2\pi}{360}n=\frac{\pi}{180}n,$$

където α е радианното мерно число на един ъгъл, а n е мерното му число в градуси. От тази формула в частност следва, че 180° са π радиана, 90° са $\frac{\pi}{2}$ радиана, 45° са $\frac{\pi}{4}$ радиана и т. н.

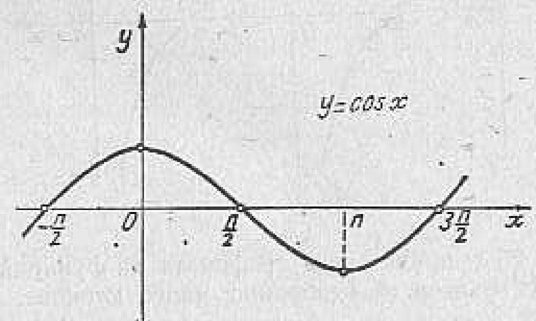
Графиката на функцията $y=\sin x$ е изобразена на черт. 22. Като си послужим с формулата

$$\cos x=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right),$$

не е трудно да се убедим, че графиката на функцията $y=\cos x$ (черт. 23) може да се получи от тази на функцията $y=\sin x$ чрез преместване наляво по абсцисната ос на разстояние $\frac{\pi}{2}$.

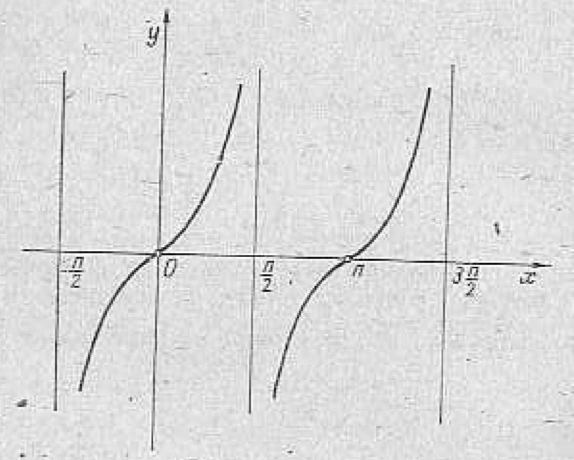


Черт. 22

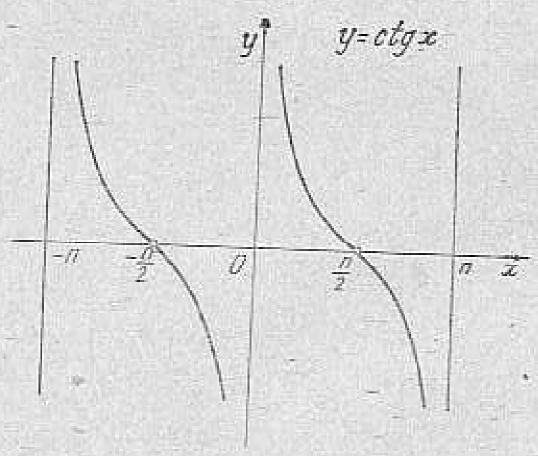


Черт. 23

На черт. 24 е представена графиката на функцията $y=\operatorname{tg} x$. Тя се състои от безбройно много еднакви помежду си клонове. Всеки от тях е разположен във вертикална лента с ширина π и е растяща функция на x, обаче в цялата си дефиниционна област тангенсът не е растяща функция.



Черт. 24



Черт. 25

На черт. 25 е представена графиката на функцията $y=\operatorname{ctg} x$, която също се състои от безбройно много клонове.

При преместването на графиките на функциите $y=\sin x$ и $y=\cos x$ наляво или надясно по оста x на разстояние 2π тези графики съвпадат със себе си, което изразява, че тези функции са *периодични* с период 2π, т. е.

$$\sin(x+2\pi)=\sin x, \quad \cos(x+2\pi)=\cos x$$

за всички x. Аналогично графиките на функциите $y=\operatorname{tg} x$ и $y=\operatorname{ctg} x$ съвпадат със себе си при преместване по абсцисната ос на разстояние π.

Графиките за функциите

(17) $$y=A\sin ax, \quad y=A\cos ax \quad (A>0, a>0)$$

приличат твърде много на графиките на функциите $y=\sin x$ и $y=\cos x$. За да получим например графиката на първата от функциите (17) от графиката на $y=\sin x$, трябва да умножим с A дължините на всичките ординати на последната графика и да променим мащаба върху абсцисната ос по такъв начин, че точката с абсциса x да се изобрази в точката с абсциса $\frac{x}{a}$. Функциите (17) са също периодични, но техният период е равен на $\frac{2\pi}{a}$.

Графиките на по-сложните функции

(18) $$y=A\sin(ax+b), \; y=A\cos(ax+b)$$

се наричат понякога *прости хармонични криви* и се получават от графиките на функциите (17) чрез преместване по абсцисната ос наляво на разстояние $\frac{b}{a}$. Функциите (18) също имат период $\frac{2\pi}{a}$.

Графиките на по-сложните функции, които са определени чрез равенството

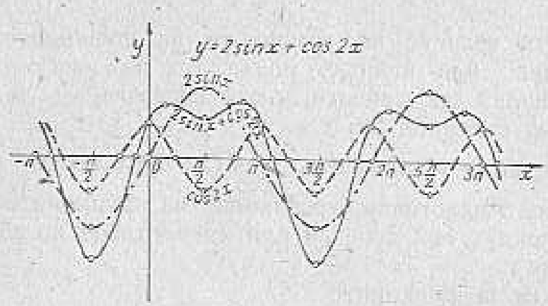
$$y=A_1\sin a_1x+B_1\cos a_1x+A_2\sin a_2x+B_2\cos a_2x$$

и са суми на няколко събираеми от вида (17), могат да се построят, като се събират ординатите на графиките на отделните събираеми. Получените по този начин криви се наричат *хармонични криви*. На черт. 26 е показано построението на графиката на функцията

$$y=2\sin x+\cos 2x.$$

Ще забележим по-нататък, че функцията

(19) $$y=A_1\sin a_1x+B_1\cos a_1x$$



Черт. 26

може да се представи във вида (18). Наистина, да положим

$$m=\frac{A_1}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}},$$

$$n=\frac{B_1}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}},$$

$$A=\sqrt{A_1^2+B_1^2}.$$

Очевидно

(20) $$A_1=mA,\quad B_1=nA$$

и освен това

$$m^2+n^2=1,$$

$$|m|\leq 1,\ |n|\leq 1.$$

Както е известно от тригонометрията, може да се намери такъв ъгъл b_1, че

(21) $$\cos b_1=m,\ \sin b_1=n.$$

Заместваме в (19) A_1 и B_1 с техните стойности от (20) и като използуваме (21), ще получим

$$y=A\,(\cos b_1 . \sin a_1 x+\sin b_1 . \cos a_1 x),$$

т. е.

$$y=A\sin(a_1 x+b_1).$$

Разгледаните дотук функции играят централна роля за това, което следва по-нататък. За читателя е необходимо не само да се ориентира във въпросите, свързани с графиките на тези функции, но и да умее да извършва онези елементарни пресмятания с тях, на които той се е учил в средния курс.

Главното понятие, което читателят ще срещне, е това за производна. Тя се появява като моментна скорост или като ъглов коефициент на тангента на крива и тези две нагледни представи за производната играят съществена роля. В основата на всички приложения на производните в реалната действителност и при изучаването на функциите, които могат да се намерят тук, лежи очевидното наблюдение, че ако скоростта на една, движеща се върху числовата права, точка е неотрицателна, точката се движи надясно. Това е „въздигнато" в принцип. Освен този принцип в посочените приложения по необходимост се появяват пресмятания, някои от които са по-дълги от онези, с които читателят вероятно е свикнал. Но всички те са подробно извършени, с изключение на случаите, когато са съвсем прости или пък читателят би могъл да ги направи сам по аналогия с изчисленията в някаква предшестваща проблема. Книгата не ще изпълни замисленото предназначение, ползата от четенето ѝ би се свела до минимум, ако учащият се не проследява с нужното внимание срещаните пресмятания и не извършва на свой ред онези, които са му предоставени.

Глава 1

ПОЛИНОМИ

В тази глава ще се запознаем с някои свойства на най-простите функции — полиномите. В §2, §6 и §7 са разгледани някои важни полиноми. На общи теореми, характерни за полиномите, са посветени §3, §4 и §9, а §5 и §8 съдържат някои приложения на тези теореми. В §1 се дава определение на понятието степен на полином.

§1. СТЕПЕН НА ПОЛИНОМ

Да напомним, че функциите от вида

$$P(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n \tag{1}$$

където $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n$, са константи и n е цяло неотрицателно число, се наричат полиноми. Така например функцията

$$P(x)=2x^3+x^2-x-3 \tag{2}$$

е полином. За полинома (1) казваме, че е *най-много от n-та степен* или че степента му не надминава n. Казваме, че този полином е от *степен n*, когато $a_0\neq0$. От тези дефиниции следва, че полиномът (2) е полином от трета степен, тъй като коефициентът пред третата степен на x е различен от нула. В същото време той е и полином най-много от n-та степен за $n\geq3$.

Да видим какво дават тези дефиниции за нулевия полином, т. е. за полинома, всичките коефициенти на който са нули. Той е най-много от n-та степен за всяко цяло неотрицателно число n. От друга страна, той не е от n-та степен за никое n, защото по определение полиномът (1) е от n-та степен, когато $a_0\neq0$.

Единствените полиноми от нулева степен са различните от нула константи.

Очевидно е, че сумата на два полинома е полином, чиято степен не надминава по-голямата от степените на събираемите. Произведението на два полинома е полином, чиято степен е равна на сбора от степените на събираемите.

§ 2. ГЕОМЕТРИЧНА ПРОГРЕСИЯ

Полиномът

$$P(x)=1+x+x^2+\ldots+x^n \tag{1}$$

се нарича *геометрична прогресия*.

Ако умножим двете страни на (1) с $1-x$, ще получим

$$\begin{aligned}(1-x)P(x)&=(1-x)(1+x+x^2+\ldots+x^n)\\&=1+x+x^2+\ldots+x^n\\&\quad-x-x^2-\ldots-x^n-x^{n+1}=1-x^{n+1}.\end{aligned}$$

Следователно

$$1-x^{n+1}=(1-x)(1+x+x^2+\cdots+x^n) \tag{2}$$

за всяко x и

$$1+x+x^2+\cdots+x^n=\frac{1-x^{n+1}}{1-x} \tag{3}$$

за всяко $x\neq1$.

Нека сега в (2) положим $x=\frac{b}{a}$:

$$1-\frac{b^{n+1}}{a^{n+1}}=\left(1-\frac{b}{a}\right)\left(1+\frac{b}{a}+\frac{b^2}{a^2}+\cdots+\frac{b^n}{a^n}\right).$$

Ако умножим двете страни на последното равенство с a^{n+1}, ще получим

$$a^{n+1}-b^{n+1}=(a-b)(a^n+a^{n-1}b+a^{n-2}b^2+\ldots+b^n).$$

Ако, ръководени от формални съображения, в последното равенство заместим n с $n-1$, ще получим

$$a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+\cdots+b^{n-1}). \tag{4}$$

При $n=2$, $n=3$ и $n=4$ равенството (4) се превръща съответно в

$$a^2-b^2=(a-b)(a+b),$$
$$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2),$$
$$a^4-b^4=(a-b)(a^3+a^2b+ab^2+b^3).$$

Читателят трябва да помни и да умее да прилага формулите (3) и (4). За по-лесното запомняне на формулата (3) ще отбележим, че числителят на дробта, стояща от дясната страна на равенството, е полином от степен с единица по-висока от степента на полинома, стоящ от лявата страна на същото равенство. За запомняне на формулата (4) е добре да забележим, че сборът от степенните показатели на всяко от събираемите във втория от множителите отдясно на (4) е винаги $n-1$.

§ 3. РАЗЛАГАНЕ НА ПОЛИНОМИТЕ НА МНОЖИТЕЛИ

Едно число x_1 се нарича *нула на полинома* $P(x)$, когато $P(x_1)=0$, т. е. когато полиномът приема стойност нула при $x=x_1$. Това означава още, че x_1 е корен на уравнението $P(x)=0$. Така например числата 1, -1, -2 са нули на полинома

$$x^3+2x^2-x-2.$$

Нулите на един полином са тясно свързани с разлагането му на множители. Да си припомним, че квадратният тричлен

$$a_0 x^2+a_1 x+a_2 \qquad (a_0\neq 0)$$

се разлага на множители по следния начин:

$$a_0 x^2+a_1 x+a_2=a_0 (x-x_1)(x-x_2),$$

където x_1 и x_2 са нулите му.

По-общо, в сила е следното твърдение.

Ако x_1 е нула на полинома

(1) $$P(x)=a_0 x^n+a_1 x^{n-1}+\ldots+a_n \qquad (a_0\neq 0),$$

последният се представя във вида

(2) $$P(x)=(x-x_1)\,Q(x),$$

където $Q(x)$ е полином от степен $n-1$.

За да избегнем при доказателството писането на дълги формули, ще се ограничим със случая $n=4$; общият случай се основава на същата идея, която се състои в използването на формула (2.4)*. Нека полиномът

$$P(x)=a_0 x^4+a_1 x^3+a_2 x^2+a_3 x+a_4 \quad (a_0\neq 0)$$

се анулира при $x=x_1$, т. е.

$$P(x_1)=a_0 x_1^4+a_1 x_1^3+a_2 x_1^2+a_3 x_1+a_4=0.$$

* Първата цифра означава номера на параграфа, а втората номера на формула в този параграф.

Понеже $P(x_1)=0$, то

$$\begin{aligned}P(x)&=P(x)-P(x_1)\\&=a_0 x^4+a_1 x^3+a_2 x^2+a_3 x+a_4-(a_0 x_1^4+a_1 x_1^3+a_2 x_1^2+a_3 x_1+a_4)\\&=a_0 (x^4-x_1^4)+a_1 (x^3-x_1^3)+a_2 (x^2-x_1^2)+a_3 (x-x_1)\end{aligned}$$

и като използуваме формула (2.4), получаваме

$$\begin{aligned}P(x)&=(x-x_1)\,[a_0 (x^3+x^2x_1+xx_1^2+x_1^3)+a_1 (x^2+xx_1+x_1^2)\\&\qquad+a_2(x+x_1)+a_3]\\&=(x-x_1)\,[a_0 x^3+(a_0 x_1+a_1)\,x^2+(a_0 x_1^2+a_1 x_1+a_2)\,x\\&\qquad+(a_0 x_1^3+a_1 x_1^2+a_2 x_1+a_3)].\end{aligned}$$

С това всичко е доказано, тъй като по условие $a_0\neq 0$ и следователно полиномът в средните скоби е от трета степен.

Пример 1. Да разгледаме полинома

$$P(x)=x^3+x-2.$$

Очевидно $P(1)=0$ и следователно $P(x)$ се разлага на множители по следния начин

$$P(x)=(x-1)\,Q(x),$$

където $Q(x)$ е полином от втора степен. След като вече знаем, че можем да изнесем пред скоби множителя $x-1$, ще подредим с оглед на това членовете на полинома $P(x)$ по следния начин:

$$x^3+x-2=\underbrace{x^3-x^2}+\underbrace{x^2-x}+\underbrace{2x-2},$$

откъдето

$$x^3+x-2=(x-1)\,(x^2+x+2).$$

Пример 2. Да разгледаме полинома

$$P(x)=x^3-3abx-a^3-b^3.$$

Не е трудно да се забележи, че при $x=a+b$ този полином се анулира. Следователно той се разлага на множители по следния начин:

$$P(x)=(x-a-b)\,Q(x),$$

където $Q(x)$ е полином от втора степен. С оглед на изваждането на множителя $x-a-b$ пред скоби извършваме подреждането

$$\begin{aligned}P(x)&=\underbrace{x^3-(a+b)\,x^2}+\underbrace{(a+b)\,x^2-(a+b)^2\,x}+\underbrace{(a^2-ab+b^2)\,x-(a^3+b^3)}\\&=(x-a-b)\,x^2+(x-a-b)\,x\,(a+b)+(x-a-b)\,(a^2-ab+b^2),\end{aligned}$$

откъдето

$$P(x)=(x-a-b)\,(x^2+(a+b)\,x+a^2-ab+b^2).$$

Да отбележим на края и едно очевидно следствие от доказаното твърдение: ако $P(x)$ е полином и a е произволно число, функцията

$$\frac{P(x)-P(a)}{x-a} \qquad (a \neq x)$$

е полином на x. Наистина полиномът $P(x)-P(a)$ се анулира при $x=a$ и следователно имаме

$$P(x)-P(a)=(x-a)\,Q(x),$$

с което следствието е доказано.

§ 4. ПРИНЦИП ЗА СРАВНЯВАНЕ НА КОЕФИЦИЕНТИТЕ

Резултатите от предната точка могат да се използуват за доказване на следното твърдение.

Нека

(1) $$P(x)=a_0 x^n+a_1 x^{n-1}+\ldots+a_n \quad (a_0 \neq 0)$$

е полином от n-та степен. Тогава $P(x)$ не може да има повече от n различни нули.

Доказателството използува индукция по степента n на полинома $P(x)$.

При $n=1$ твърдението е почти очевидно. Наистина нека $P(x)=a_0 x+a_1$ е един полином от първа степен. Тогава $a_0 \neq 0$ и $P(x)$ се анулира само при $x=-\frac{a_1}{a_0}$ и следователно броят на нулите не превишава степента му.

Нека сега твърдението е вярно за някое n, т.е. нека всеки полином от n-та степен има най-много n нули. Ще докажем, че при това предположение твърдението е вярно и за $n+1$. Нека за тази цел

$$S(x)=b_0 x^{n+1}+b_1 x^n+\ldots+b_{n+1} \quad (b_0 \neq 0)$$

е произволен полином от $n+1$-ва степен. Да допуснем, че този полином има $n+2$ на брой различни нули

$$x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}, x_{n+2}.$$

Трябва да получим противоречие. Съгласно твърдението от предната точка $S(x)$ ще се представи във вида

(2) $$S(x)=(x-x_1)\,Q(x),$$

където $Q(x)$ е полином от n-та степен. Тъй като $x_i \neq x_1$ при $i=2, 3, \ldots, n+2$, от (2) следва, че всяко от числата $x_2, x_3, \ldots, x_{n+2}$ е нула на полинома $Q(x)$. Но тези числа са $n+1$ на брой и са различни, а полиномът $Q(x)$ е от n-та степен. Така получихме противоречие с индуктивното предположение. Полученото противоречие доказва, че $S(x)$ не може да има $n+2$ различни нули, т. е. доказана е верността на твърдението и за $n+1$. Съгласно принципа на математическата индукция твърдението е доказано за всяко n.

Като следствие от току-що доказаното твърдение ще получим следния **п р и н ц и п з а с р а в н я в а н е н а к о е ф и ц и е н т и т е**:

Ако два полинома най-много от n-та степен приемат равни стойности поне за $n+1$ различни значения на аргумента си, коефициентите на тези полиноми пред еднаквите степени на x са равни (и следователно полиномите приемат равни стойности за всяко x).

И наистина от равенството

(3) $$a_0 x^n+a_1 x^{n-1}+\ldots+a_n=b_0 x^n+b_1 x^{n-1}+\ldots+b_n$$

следва, че

(4) $$(a_0-b_0)\,x^n+(a_1-b_1)\,x^{n-1}+\ldots+a_n-b_n=0,$$

така че, ако (3) е изпълнено за $n+1$ различни стойности на x, същото ще бъде в сила и за (4). Но тогава полиномът (4) би се анулирал за $n+1$ различни стойности на аргумента си и съгласно доказаното не би могъл да бъде от n-та степен. Следователно

(5) $$a_0-b_0=0.$$

По този начин (4) добива вида

(6) $$(a_1-b_1)\,x^{n-1}+(a_2-b_2)\,x^{n-2}+\ldots+a_n-b_n=0,$$

което равенство трябва да бъде изпълнено при $n+1$ различни стойности на x. Съгласно доказаното полиномът (6) не би могъл да бъде от $n-1$-ва степен, защото се анулира за повече от $n-1$ различни стойности на аргумента си. Следователно

(7) $$a_1-b_1=0.$$

Като продължим тези разсъждения, ще се убедим, че всичките коефициенти на (4) са нули, т.е. че коефициентите пред еднаквите степени на x на полиномите (3) съвпадат. С това твърдението е доказано.

§ 5. НЯКОИ ПРИЛОЖЕНИЯ НА ПРИНЦИПА ЗА СРАВНЯВАНЕ НА КОЕФИЦИЕНТИТЕ

Доказаното в предната точка свойство на полиномите има разнообразни приложения, някои от които ще разгледаме тук.

Задача 1. Да се намерят всички константи A и B, за които

$$(1)\qquad \frac{x}{x^2-1}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}\qquad (x\neq\pm 1).$$

За да решим тази задача, ще се освободим от знаменателя:

$$x=A\,(x+1)+B\,(x-1)$$

или, което е все същото,

$$x=(A+B)\,x+A-B.$$

Следователно за всеки две константи A и B, за които е в сила (1), двата полинома от първа степен x и $(A+B)\,x+A-B$ приемат равни стойности за всички $x\neq\pm 1$, които са безбройно много. Следователно коефициентите пред еднаквите степени на x на тези полиноми трябва да съвпадат, т. е.

$$\left|\begin{array}{l}1=A+B\\ 0=A-B.\end{array}\right.$$

Като решим тази система, получаваме

$$(2)\qquad A=\frac{1}{2},\ B=\frac{1}{2},$$

с което е доказано, че за никои други константи, освен тези от (2), равенството (1) не може да бъде изпълнено; с това е доказано, че ако съществуват константи A и B, за които е в сила (1) за всички $x\neq\pm 1$, те са единствени. Непосредствена проверка ни убеждава, че равенството

$$\frac{x}{x^2-1}=\frac{1}{2}\,\frac{1}{x-1}+\frac{1}{2}\,\frac{1}{x+1},$$

което се получава от (1) чрез заместване на A и B със стойностите им от (2) е изпълнено за всяко $x\neq\pm 1$.

Задача 2. Да се намерят всички константи A и B, за които рационалната функция

$$(3)\qquad \frac{x^4+3x^2+Ax+B}{x^2-2Ax+2}$$

е полином.

Очевидно ако частното (3) е полином за някои стойности на A и B, той ще бъде полином от втора степен, т. е. ще имаме

$$\frac{x^4+3x^2+Ax+B}{x^2-2Ax+2}=ax^2+bx+c,$$

където a, b и c са константи. Като се освободим от знаменателя и подредим по степените на x, ще получим

$$x^4+3\,x^2+Ax+B$$
$$=ax^4+(b-2\,Aa)\,x^3+(c+2\,A\,b+2a)\,x^2+(2b-2Ac)\,x+2c,$$

което равенство трябва да бъде изпълнено за всички x, за които (3) има смисъл, които са безбройно много, тъй като знаменателят $x^2-2\,Ax+2$ на (3) може да се анулира най-много за две стойности на x. Съгласно принципа за сравняване на коефициентите полиномите от двете страни на последното равенство трябва да имат еднакви коефициенти пред съответните степени на x, т. е.

$$\left|\begin{array}{l}1=a,\\ 0=b-2\,Aa,\\ 3=c+2\,Ab+2\,a,\\ A=2\,b-2\,Ac,\\ B=2\,c.\end{array}\right.$$

Като решим тази система, получаваме:

1) $A=0,\ B=2,\ a=1,\ b=0,\ c=1;$

2) $A=\dfrac{1}{2\sqrt{2}},\ B=1,\ a=1,\ b=\dfrac{1}{\sqrt{2}},\ c=\dfrac{1}{2};$

3) $A=-\dfrac{1}{2\sqrt{2}},\ B=3,\ a=1,\ b=-\dfrac{1}{\sqrt{2}},\ c=\dfrac{3}{2}.$

Задача 3. Нека P е полином от втора степен, а a, b и c са три различни помежду си реални числа. Докажете, че при тези предположения за всяко x е в сила равенството

$$(4)\qquad P(a)\,\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}+P(b)\,\frac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)}+P(c)\,\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}=P(x).$$

Да забележим най-напред, че от двете страни на (4) са написани полиноми от втора степен на x. Ако покажем, че тези два полинома приемат равни стойности поне за три различни стойности на x, от принципа за сравняване на коефициентите ще следва, че коефициентите пред еднаквите степени на x на тези полиноми ще съвпадат; но тогава и полиномите ще съвпадат, с което задачата би била решена.

И така достатъчно е да се убедим, че полиномите от двете страни на равенство (4) съвпадат за три различни стойности на x. Да означим за тази цел с Q полинома, фигуриращ от лявата страна на (4). Тогава

$$Q(a)=P(a)\frac{(a-b)(a-c)}{(a-b)(a-c)}+P(b).0+P(c).0=P(a).$$

Аналогично

$$Q(b)=P(b), \quad Q(c)=P(c).$$

Последните три равенства показват, че полиномите Q и P действително приемат еднакви стойности за три различни значения на x и задачата е решена.

След като читателят вече познава свойствата на полиномите от § 4, вероятно е забелязал, че една рационална функция не е дефинирана най-много в краен брой точки.

§ 6. ПОЛИНОМИТЕ $\binom{x}{k}$

Полиномът

(1) $$\binom{x}{k}=\frac{x(x-1)(x-2)\dots(x-k+1)}{1.2.3\dots k},$$

където k е цяло положително число, играе важна роля в редица въпроси. Той се нарича *k-ти биномен коефициент*. Очевидно числителят на k-тия биномен коефициент съдържа k на брой множителя, във всеки от които x влиза с първа степен. Следователно полиномът (1) е от степен k. Така например

$$\binom{x}{1}=\frac{x}{1}=x,$$

$$\binom{x}{2}=\frac{x(x-1)}{1.2}=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x$$

и т. н. Оказва се удобно да дефинираме (1) и при $k=0$. Под $\binom{x}{0}$ ще разбираме константата 1, т. е. $\binom{x}{0}=1$. Тази допълнителна дефиниция естествено се съгласува с дефиницията (1), защото ако формално заместим в (1) k с нула, в числителя и в знаменателя на (1) ще получим произведения от нула на брой множители;

удобно е такива произведения да се приемат равни на единица, както читателят знае от степените с нулев показател.

В тази точка ще се ограничим с извеждането на едно важно равенство. Именно, ще докажем, че

(2) $$\binom{x}{k}+\binom{x}{k+1}=\binom{x+1}{k+1}$$

за всяко x и за всяко $k=0, 1, 2,\dots$

Съгласно дефиницията за лявата страна на (2) имаме

$$\binom{x}{k}+\binom{x}{k+1}=\frac{x(x-1)\dots(x-k+1)}{1.2.3\dots k}+\frac{x(x-1)\dots(x-k+1)(x-k)}{1.2.3\dots k.(k+1)}.$$

Ако изнесем пред скоби $\frac{x(x-1)\dots(x-k+1)}{1.2.3\dots k(k+1)}$, от първото събираемо в скобите ще остане $k+1$, а от второто $x-k$. Така че

$$\binom{x}{k}+\binom{x}{k+1}=\frac{x(x-1)\dots(x-k+1)}{1.2.3\dots k(k+1)}(k+1+x-k)$$

$$=\frac{(x+1)x\dots(x-k+1)}{1.2.3\dots(k+1)}=\binom{x+1}{k+1},$$

тъй като

$$\binom{x+1}{k+1}=\frac{(x+1)x(x-1)\dots[(x+1)-(k+1)+1]}{1.2.3\dots(k+1)}=\frac{(x+1)x(x-1)\dots(x-k+1)}{1.2.3\dots(k+1)}.$$

Читателят сигурно знае, че произведението 1. 2. 3… k обикновено се означава с $k!$ (и се произнася ка факториал). С помощта на този символ k-тия биномен коефициент може да се запише и така:

$$\binom{x}{k}=\frac{x(x-1)\dots(x-k+1)}{k!}.$$

§ 7. НЮТОНОВ БИНОМ

С името на Нютон е свързана формула, която дава възможност да повдигнем в степен n сумата на две произволни числа. Тук ще се занимаем със случая, когато n е цяло положително число.

Нека a и b са две произволни числа и $n>0$ е цяло. Ще докажем, че е в сила формулата

(1) $$(a+b)^n=\binom{n}{0}a^n+\binom{n}{1}a^{n-1}b+\binom{n}{2}a^{n-2}b^2+\dots+\binom{n}{n}b^n.$$

При доказателството на (1) ще използуваме индукция относно n.

При $n=1$ формула (1) добива вида

$$(a+b)^1=\binom{1}{0}a^1+\binom{1}{1}b^1=1.\,a+1.\,b=a+b$$

и очевидно е вярна.

Да допуснем сега, че формула (1) е вярна за някое n и да докажем, че тя е вярна и за $n+1$. По-точно, да се убедим, че ако (1) е в сила за някое n, то

$$(2)\quad (a+b)^{n+1}=\binom{n+1}{0}a^{n+1}+\binom{n+1}{1}a^nb+\ldots+\binom{n+1}{n}ab^n+\binom{n+1}{n+1}b^{n+1}.$$

Имаме

$$(a+b)^{n+1}=(a+b)(a+b)^n=(a+b)\left[\binom{n}{0}a^n+\binom{n}{1}a^{n-1}b+\right.$$

$$\left.+\binom{n}{2}a^{n-2}b^2+\ldots+\binom{n}{n}b^n\right]$$

$$=\binom{n}{0}a^{n+1}+\binom{n}{0}a^nb+\binom{n}{1}a^nb+\binom{n}{1}a^{n-1}b^2$$

$$+\binom{n}{2}a^{n-1}b^2+\ldots+\binom{n}{n-1}ab^n+\binom{n}{n}ab^n+\binom{n}{n}b^{n+1}.$$

Ако подредим от дясната страна на това равенство членовете по степените на a и b, ще получим

$$(3)\qquad (a+b)^{n+1}=\binom{n}{0}a^{n+1}+\left[\binom{n}{0}+\binom{n}{1}\right]a^nb+\left[\binom{n}{1}+\binom{n}{2}\right]a^{n-1}b^2+\ldots$$

$$+\left[\binom{n}{n-1}+\binom{n}{n}\right]ab^n+\binom{n}{n}b^{n+1}.$$

Коефициентите, стоящи в средните скобки, ще преобразуваме с помощта на формула (6.2):

$$\binom{n}{0}=1=\binom{n+1}{0},\quad \binom{n}{0}+\binom{n}{1}=\binom{n+1}{1},$$

$$\binom{n}{1}+\binom{n}{2}=\binom{n+1}{2},\ \ldots,\ \binom{n}{n-1}+\binom{n}{n}=\binom{n+1}{n},\quad \binom{n}{n}=1=\binom{n+1}{n+1}.$$

Като поставим така пресметнатите коефициенти в (3), получаваме равенство (2). С това е показано, че за всяко цяло положително n от (1) следва (2) и съгласно принципа на пълната математична индукция формула (1) е вярна за всяко цяло положително n.

Пример 1. Да се подреди по степените на x полиномът $(2+x)^4$. За да решим тази задача, ще използуваме формула (1) при $a=2$, $b=x$ и $n=4$. Имаме

$$(2+x)^4=\binom{4}{0}2^4+\binom{4}{1}2^3x+\binom{4}{2}2^2x^2+\binom{4}{3}2x^3+\binom{4}{4}x^4.$$

Да пресметнем биномните коефициенти:

$$\binom{4}{0}=1,\ \binom{4}{1}=4,\ \binom{4}{2}=\frac{4.3}{1.2}=6,\ \binom{4}{3}=\frac{4.3.2}{1.2.3}=4,\ \binom{4}{4}=1.$$

Ако сега заместим така получените биномни коефициенти в израза за $(2+x)^4$, след малки опростявания ще получим

$$(2+x)^4=16+32\,x+24\,x^2+8\,x^3+x^4.$$

Пример 2. Да се подреди по степените на x полиномът $(1-x)^5$. Тук $a=1$, $b=-x$ и $n=5$. Като приложим бинома на Нютон

$$\binom{5}{0}1^5+\binom{5}{1}1^4(-x)+\binom{5}{2}1^3(-x)^2+\binom{5}{3}1^2(-x)^3+\binom{5}{4}1.(-x)^4+\binom{5}{5}(-x)^5$$

и като пресметнем биномните коефициенти, ще получим

$$(1-x)^5=1-5x+10x^2-10x^3+5x^4-x^5.$$

§ 8. НЯКОИ ПРИЛОЖЕНИЯ НА БИНОМА НА НЮТОН

Начинът на записване (7.1) на бинома на Нютон създава неудобства, когато трябва да се извършват по-големи пресмятания. Обстоятелството, че отделните събираеми имат еднаква структура може да се използува за въвеждането на едно кратко и обозримо записване. Да отбележим най-напред, че всичките събираеми в (7.1) се получават от израза $\binom{n}{k}a^{n-k}\,b^k$, като даваме на k стойностите на $0, 1, 2,\ldots, n$: изразът от дясната страна на (7.1) не е нищо друго освен сумата на всички $\binom{n}{k}a^{n-k}\,b^k$, където $k=0, 1, 2,\ldots, n$. Това записваме накратко така:

$$(1)\qquad (a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k.$$

По-общо символът $\sum_{k=1}^{n} a_k$ е кратко означение на сумата $a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n$. Така например $\sum_{k=1}^{2} a_k=a_1+a_2$. Също така $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}=\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}$.

Полиномът

$$P(x)=a_0 x^n+a_1 x^{n-1}+\ldots+a_n$$

може по този начин да се запише кратко така:

$$P(x)=\sum_{k=0}^{n} a_k x^{n-k}$$

или пък, което е все същото,

$$P(x)=\sum_{k=0}^{n} a_{n-k} x^k.$$

Означението $\sum_{k=0}^{n} a_k$ (произнася се: сума от a_k k, се мени от нула до n) е удобно, но за използването му е необходимо да се придобие известен навик. Ако някой път се стори на читателя, че краткостта на това означение влиза в разрез с яснотата, той би могъл да се освободи от него, като напише съответните суми в разгънат вид.

Да положим в (1) $a=1$ и $b=x$. Тогава ще получим

$$(1+x)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} x^k. \tag{2}$$

Ако пък в (1) положим $a=1$ и $b=-x$, ще получим

$$(1-x)^n=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k} x^k. \tag{3}$$

Задача 1. Да се докаже формулата

$$\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k},$$

където $n=1, 2, 3, \ldots$ и $k=0, 1, 2, \ldots, n$.

Ще използуваме принципа за сравняване на коефициентите, (2) и формулата

$$(x+1)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} x^{n-k}, \tag{4}$$

която се получава от (1), като заместим a с x и b с единица. В левите страни на (2) и (4) стоят едни и същи полиноми и следователно това е така и за десните, поради което коефициентите пред еднаквите степени на x от десните страни на тези две формули ще съвпадат. Но коефициентът пред x^{n-k} в (4) е $\binom{n}{k}$, а коефициентът пред x^{n-k} в (2) очевидно е $\binom{n}{n-k}$, с което задачата е решена.

Задача 2. Да се докаже, че

$$\sum_{k=0}^{l}\binom{m}{k}\binom{n}{l-k}=\binom{m+n}{l}, \tag{5}$$

където m, n и l са произволни цели положителни числа.

Като използуваме (2), очевидното равенство

$$(1+x)^m (1+x)^n=(1+x)^{m+n}$$

може да се запише и така:

$$\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k} x^k \cdot \sum_{s=0}^{n}\binom{n}{s} x^s=\sum_{p=0}^{m+n}\binom{m+n}{p} x^p. \tag{6}$$

Очевидно коефициентът пред x^l в дясната страна на (6) е $\binom{m+n}{l}$. За да докажем (5), остава само да съобразим какъв е коефициентът пред x^l от лявата страна на (6). Да отбележим най-напред, че отляво на (6) стои сумата на всевъзможните произведения от вида

$$\binom{m}{k} x^k \cdot \binom{n}{s} x^s=\binom{m}{k} \cdot \binom{n}{s} x^{k+s}. \tag{7}$$

Едно такова събираемо има степен l тогава и само тогава, когато $k+s=l$, т. е. когато $s=l-k$. Следователно събираемите, които съдържат x^l, ще бъдат всевъзможните изрази от вида

$$(8)\qquad \binom{m}{k}\cdot\binom{n}{l-k}x^l,$$

поради което коефициентът пред x^l от лявата страна на (6) ще бъде $\sum_{k=0}^{l}\binom{m}{k}\cdot\binom{n}{l-k}$, с което задачата е решена.

Задача 3. Да се докаже, че

$$(10)\qquad \sum_{k=0}^{l}\binom{x}{k}\cdot\binom{y}{l-k}=\binom{x+y}{l}$$

за всяко $l=1, 2, 3,\ldots$ и за всички реални числа x и y.

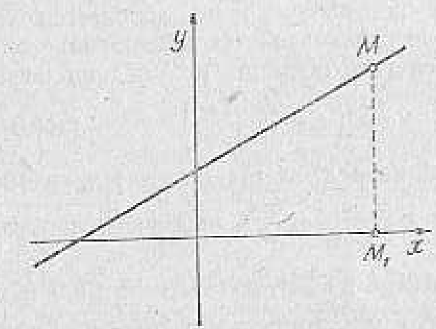
Тази задача е по-обща от задача 2, защото в (10) x и y са произволни. При решението ѝ ще използуваме (5). Да отбележим най-напред, че съгласно (5) равенството (10) е изпълнено за всички цели положителни x и y. Да изберем едно такова цяло положително y по произволен начин и да го фиксираме. Тогава от двете страни на (10) се получават полиноми на x. Съгласно (5) и начина, по който фиксирахме y, тези два полинома приемат равни стойности за всички цели положителни x, които са безбройно много. Съгласно принципа за сравняване на коефициентите тези полиноми ще приемат равни стойности за всички x. По този начин (10) е доказано за всяко x и за всяко цяло положително y. Да изберем сега по произволен начин реалното число x и да го фиксираме. Тогава двете страни на (10) стават полиноми на y. Съгласно току-що доказаното тези два полинома съвпадат за всички цели положителни y, които са безбройно много и следователно те ще съвпадат за всяко y. С това показваме, че (10) е вярно при така фиксираното x за всяко y. Но тъй като x беше фиксирано произволно, (10) е доказано за всички x и y.

§ 9. ПОВЕДЕНИЕ НА ПОЛИНОМИТЕ ПРИ НЕОГРАНИЧЕНО НАРАСТВАНЕ НА АРГУМЕНТА

Полиномът

$$(1)\qquad y=a_0x+a_1 \qquad (a_0\neq 0)$$

расте неограничено по абсолютна стойност, когато аргументът му расте неограничено по абсолютна стойност. Грубо казано, това означава, че при „големи" абсолютни стойности на x абсолютната стойност на полинома (1) е също така „голяма". На геометричен език това означава, че когато проекцията на една точка M от графиката на функцията (1) върху абсцисната ос се отдалечава неограничено от началото, точката M се отдалечава неограничено от абсцисната ос (черт. 27).



Черт. 27

За да се разбере по-добре това, ще разгледаме неравенството

$$(2)\qquad |2x-8|\geqq N,$$

където N е произволно положително число. Като използуваме неравенството $|a-b|\geqq|a|-|b|$, получаваме

$$(3)\qquad |2x-8|\geqq|2x|-|8|$$

за всяко x. Оттук следва, че (2) сигурно ще бъде изпълнено за всички x, за които

$$(4)\qquad 2|x|-8\geqq N.$$

Последното неравенство се преобразува така: $2|x|\geqq N+8$ и сигурно ще бъде изпълнено, когато

$$(5)\qquad |x|\geqq\frac{N}{2}+4.$$

Числата x, за които е изпълнено (5), са решенията на неравенството (4), а както вече видяхме, от (3) следва, че всяко решение на (4) е решение и на (2). Следователно неравенството (2) ще бъде изпълнено за всички x, които удовлетворяват (5).

Така се убедихме, че когато абсцисата на една точка M от графиката на функцията $y=2x-8$ се намира на разстояние, по-голямо или равно на $\frac{N}{2}+4$ от началото, точката M се намира на разстояние по-голямо или равно на *отнапред избраното* произволно положително число N от абсцисната ос.

Да спрем сега нашето внимание върху квадратната функция

$$y=a_0x^2+a_1x+a_2 \qquad (a_0\neq 0). \tag{6}$$

От графиката на тази функция (вж. черт. 4 и черт. 5) се вижда, че тя също расте неограничено по абсолютна стойност, когато аргументът расте неограничено по абсолютна стойност.

Да представим тази функция по следния начин

$$y=x^2\left(a_0+\frac{a_1}{x}+\frac{a_2}{x^2}\right) \qquad (x\neq 0). \tag{7}$$

Ще забележим най-напред, че при големи x голямо е и x^2 и следователно изразът $a_0+\frac{a_1}{x}+\frac{a_2}{x^2}$ е приблизително равен на a_0. Това е така, защото a_1 и a_2 са константи и $\frac{a_1}{x}$ и $\frac{a_2}{x^2}$ стават произволно малки, когато x е достатъчно голямо. Тъй като при неограниченото растене на x расте неограничено и x^2, от показаното следва, че функцията (7) също расте неограничено.

По същия начин може да се покаже, че *полиномът*

$$y=\sum_{k=0}^{n}a_k x^{n-k} \qquad (a_0\neq 0) \tag{8}$$

расте неограничено по абсолютна стойност, когато x расте неограничено по абсолютна стойност. Наистина, ако в (8) изнесем x^n пред скоби, ще получим

$$y=x^n\left(a_0+\frac{a_1}{x}+\frac{a_2}{x^2}+\dots+\frac{a_n}{x^n}\right) \qquad (x\neq 0). \tag{9}$$

Както и при квадратната функция се вижда, че изразът в скобите е приблизително равен на a_0, когато x расте неограничено и от (9) следва, че предложението е действително вярно.

Представянето (9) показва и нещо повече. При достатъчно големи положителни x стойностите на полинома (8) имат еднакъв знак с този на a_0. Когато x е отрицателно и достатъчно голямо по абсолютна стойност, картината е малко по-сложна: когато n е четно, x^n е положително и от (9) следва, че знакът на полинома (8) съвпада с този на a_0; когато n е нечетно, x^n е отрицателно и от (9) следва, че знакът на полинома (8) е обратен на този на a_0. С други думи, *полиномите от четна степен приемат стойности с еднакви знаци при големи по абсолютна стойност положителни или отрицателни x, като знакът на тези стойности е еднакъв с този на a_0; когато степента на един полином е нечетна при големи по абсолютна стойност отрицателни x, знакът на стойностите на този полином е противоположен на знака на a_0, а при големи положителни x — съвпада с този на a_0.*

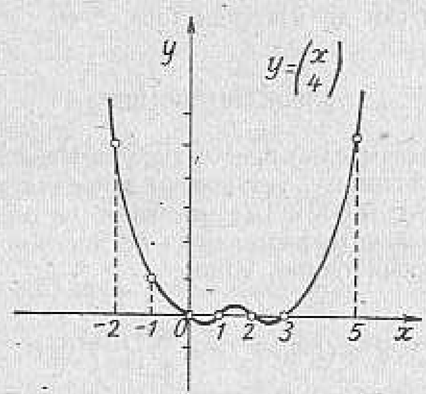
Така например полиномът

$$y=\binom{x}{4}=\frac{1}{24}x(x-1)(x-2)(x-3)$$

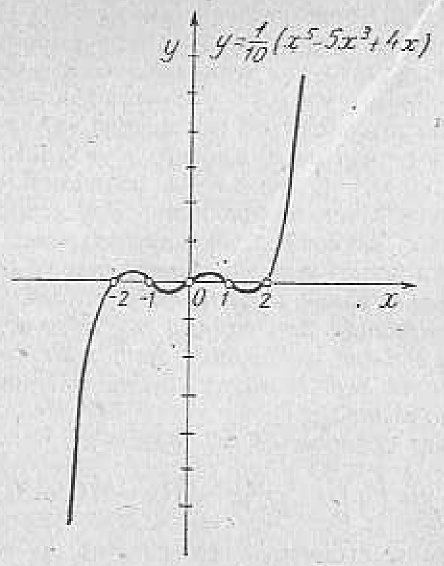
приема положителни стойности при големи по абсолютна стойност x (черт. 28), докато полиномът

$$y=\frac{1}{10}(x^5-5x^3+4x)$$

приема отрицателни стойности при големи по абсолютна стойност отрицателни x и стойностите му са положителни при големи положителни x (черт. 29).



Черт. 28



Черт. 29

Но какво в същност означава това, че една функция f расте *неограничено по абсолютна стойност, когато x расте неограничено по абсолютна стойност?* Това означава, че *за всяко положително N съществува такова α, че винаги когато $|x| \geq \alpha$ да имаме $|f(x)| \geq N$.*

При изучаването на полинома (1) ние следвахме тази точна дефиниция. При изучаването на полиномите (6) и (8) не се придържахме педантично към нея, за да дадем възможност на читателя да се опита сам да извърши това.

§ 10. ЕДИН ПРИМЕР

Тук ще направим едно приложение на Нютоновия бином и на свойствата на полиномите, установени в предната точка.

Да положим $q=1{,}0001$. Ще покажем, че q^n расте неограничено при неограниченото растене на n. За тази цел ще си послужим с Нютоновия бином. Имаме

(1)
$$q^n=(1+10^{-4})^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}10^{-4k}.$$

Всички събираеми от дясната страна на това равенство са положителни и следователно, ако запазим само онова, което се получава при $k=1$, ще получим следното неравенство

$$q^n > n\,.\,10^{-4},$$

откъдето твърдението следва веднага.

Убедихме се, че q^n расте неограничено. Но тъй като числото q е твърде близко до единицата, може да се остане с впечатлението, че това растене става твърде бавно. Без да се впускаме в обсъждане на последните думи, ще покажем, че $\frac{q^n}{n}$ също расте неограничено. Този път в дясната страна на (1) ще запазим само члена, който се получава при $k=2$, и ще получим неравенството $q^n > \frac{1}{2}n(n-1)\,10^{-8}$, което след разделяне с n-дава

$$\frac{q^n}{n} > \frac{1}{2}(n-1)\,.\,10^{-8}.$$

От това неравенство се вижда веднага, че $\frac{q^n}{n}$ действително расте неограничено при неограниченото растене на n.

Казаното дотук може значително да се обобщи. *Нека P е произволен полином и q е произволно число, за което $q>1$. Тогава $\frac{q^n}{|P(n)|}$ расте неограничено при неограниченото растене на n.*

За да докажем това твърдение, да положим $q=1+r$, където очевидно $r>0$. Тогава

(2)
$$q^n=(1+r)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}r^k.$$

Да означим с m степента на полинома P. Тази степен не зависи, разбира се, от n и когато n расте неограничено, тя остава фиксирана. По-нататък ще разглеждаме (2) само за стойности на n, за които $n>m+1$. Тъй като $r>0$, всичките събираеми от дясната страна на (2) са положителни и ако запазим само онова от тях, което се получава при $k=m+2$, ще получим $q^n > \binom{n}{m+2}r^{m+2}$. Без да ограничаваме общността, можем да считаме, че коефициентът пред m-тата степен на аргумента в P е положителен. Тогава за всички достатъчно големи n, ще имаме $P(n)>0$ и следователно $|P(n)|=P(n)$ за всички достатъчно големи n. Ако сега разделим двете страни на неравенството $q^n > \binom{n}{m+2} r^{m+2}$ с $P(n)$, ще получим

$$\frac{q^n}{P(n)} > \frac{\binom{n}{m+2} r^{m+2}}{P(n)}.$$

Следователно твърдението ще бъде доказано, ако се убедим, че

$$\frac{\binom{n}{m+2} r^{m+2}}{P(n)} > n$$

за всички достатъчно големи n. Но това неравенство очевидно е еквивалентно със следното

$$(3) \qquad \binom{n}{m+2} r^{m+2} - n\,P(n) > 0.$$

И така всичко ще бъде доказано, ако се убедим, че (3) е изпълнено за всички достатъчно големи n. Да напомним още веднаж, че степента m на полинома P не се изменя при изменението на n. Биномният коефициент $\binom{n}{m+2}$ е един полином от $m+2$ степен на n, а произведението $n\,P(n)$ е полином от $m+1$ степен на n, следователно разликата, която фигурира от лявата страна на (3) е полином от $m+2$ степен на n. За да решим задачата, остава да покажем само, че коефициентът пред $m+2$ степен на полинома (3) е положителен. Но този коефициент е очевидно равен на $\frac{r^{m+2}}{(m+2)!}$ и следователно е положителен, тъй като $r>0$.

Задачи към глава 1

1. Докажете, че

$$\sum_{k=0}^{n} (k+1)\, x^k = \frac{1-x^{n+1}}{(1-x)^2} - \frac{(n+1)\,x^{n+1}}{1-x} \qquad (x \neq 1).$$

2. Докажете, че

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k = \frac{1+(-1)^n x^{n+1}}{1+x} \qquad (x \neq -1).$$

3. Докажете, че

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \operatorname{tg}^{2k} t = \frac{1+(-1)^n \operatorname{tg}^{2n+2} t}{1+\operatorname{tg}^2 t} \qquad \left(-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}\right).$$

4. Разложете полинома x^3+2x-3 на множители.

Отг. $(x-1)(x^2+x+3)$.

5. Намерете всички константи A, B и C, за които

$$\frac{x^2+1}{x^3-x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+1}$$

за всички $x \neq 0, 1, -1$.

Отг. $A=-1$, $B=1$, $C=1$.

6. Докажете, че

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n.$$

7. Докажете, че

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0.$$

8. Докажете, че

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = 1.$$

9. Докажете, че

$$\sum_{k=0}^{l} (-1)^k \binom{n}{l-k} \binom{n-l+k}{k} = 0 \qquad (l=1, 2, \ldots).$$

Упътване: приравнете коефициентите пред x^l в задача 8.

10. Да се докаже, че

$$\sum_{k=0}^{l} (-1)^k \binom{x}{k} \binom{x-k}{l-k} = 0 \qquad (l=1, 2, \ldots).$$

Упътване: използувайте задача 9 и метода на задача (8.3)

11. Докажете, че за всички достатъчно големи n е в сила неравенството

$$\frac{n^4+n^2+1}{n^2+10} > n.$$

Упътване: използувайте резултатите от §9.

12. Докажете, че за всички достатъчно големи n е в сила неравенството

$$3 > \frac{2n^3-n^2+1}{n^3+100n+2} > 1.$$

13. Докажете, че за всички достатъчно големи n е в сила неравенството

$$\frac{1}{n} > \frac{n^2-20n}{2n^3+1} > \frac{1}{3n}.$$

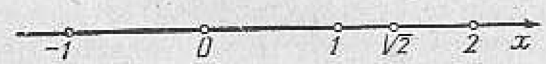
Глава 2

НЕПРЕКЪСНАТИ ФУНКЦИИ

Една важна за математиката и нейните приложения в другите науки класа от функции образуват непрекъснатите функции. В тази глава читателят ще се запознае с нагледно-интуитивния аспект на това понятие. В §1 на всяко движение на точка върху права е съпоставена по една функция — законът на това движение. На тази база в §2 се дава описание на понятието непрекъснатост на функция, след което в §3 са дадени различни примери на непрекъснати функции. На някои приложения на непрекъснатостта са посветени §4, §5 и §6. Най-простото от всички видове движения — равномерното, е въведено в §7, а в §8 е показана връзката между равномерните движения и линейните функции. На края, в §9 и §10 са разгледани известните функционални уравнения на показателната и логаритмичната функции.

§ 1. ДВИЖЕНИЯ И ФУНКЦИИ

Читателят знае как числата се изобразяват чрез точките на една права — числовата права (черт. 30). Тази нагледна представа за числата лежи в основата на връзката между анализа и геометрията и ще бъде използувана многократно по-нататък.

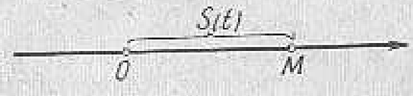


Черт. 30

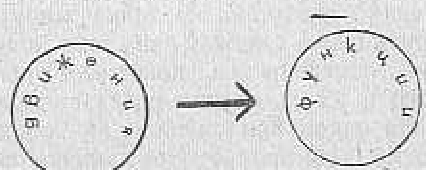
Нека точката M се движи върху някоя права. Не предполагаме, че движението е равномерно нито еднопосочно, а най-произволно. Във всеки момент t от времето движещата се точка съвпада с някаква точка $M(t)$ от числовата права. По този начин движението на M ни дава една функция, защото на всеки момент

t от времето можем да съпоставим числото $S(t)$, което съответствува на точката M при изобразяването на числата върху числовата права.

И така за произволно движение на точката M върху числовата права съществува такава функция S на времето, че за всеки момент t имаме $OM(t)=S(t)$ (черт. 31). Тази функция се нарича *закон на разглежданото движение*. Това е изобразено схематично на черт. 32.



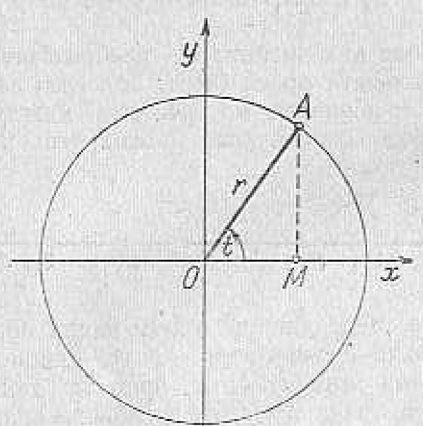
Черт. 31



Черт. 32

Пример 1. Автомобил се движи от точка A към точка B. Очевидно законът на движение на този автомобил е функцията, която в произволен момент t от времето приема стойност, равна на разстоянието между точката A и положението на автомобила в момента t.

Пример 2. Нека една точка A се движи по окръжност (черт. 33) по такъв начин, че в произволен момент t от времето да имаме $\sphericalangle xOA=t$. Да разгледаме



Черт. 33

движението на проекцията M на A върху абсцисната ос. Ясно е, че във всеки момент t от времето имаме $OM(t)=r\cos t$. Следователно в този случай законът на движението е $S(t)=r\cos t$.

Пример 3. Нека точката M пада свободно по (насочената вертикално надолу) числова права, като в началния момент се намира в нулата. От физиката е известно, че във всеки момент t от времето имаме $OM(t)=\frac{gt^2}{2}$, където g е земното ускорение. Следователно законът на движението в този случай е $S(t)=\frac{gt^2}{2}$.

Пример 4. Нека точката M през цялото време не изменя положението си, т. е. във всеки момент от времето съвпада с една и съща точка от числовата права. Както е известно, това движение се нарича покой. Ясно е, че законът на движението на всеки покой е константна функция, т. е. $S(t)=\mathrm{const}$.

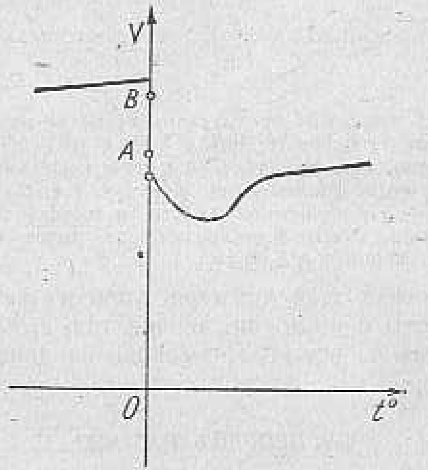
Пример 5. Нека a е произволно число и точката M се движи по такъв начин, че в произволен момент t от времето да имаме $OM(t)=a.t$. В този случай законът на движението е $S(t)=at$.

Разбира се, освен тези примери съществуват още безбройно много. Онова, което е общо за всички тях, е, че винаги получаваме една функция на времето — закона на движението.

§ 2. НЕПРЕКЪСНАТОСТ

В предната точка видяхме примери на функции, дадени, така да се каже, от природата. Ето още един такъв пример, добре известен на всички. Става дума за промяната на обема на дадено количество вода, когато температурата се изменя; очевидно този обем е функция на температурата. Една приблизителна графика на тази функция е показана на черт. 34. От тази графика виждаме, че около нулата функцията прави „скок" или, както се казва в математиката, че е *прекъсната* в нулата (тук приемаме, че при нула градуса обемът е напълно определен). Това означава, че около нулата съществуват произволно близки стойности на температурата, за които съответните обеми не са произволно близки. Например за близки до нулата отрицателна и положителна температура разликата между съответните обеми е по-голяма от отсечката AB. Както ще видим това по-подробно нататък, подобно нещо е невъзможно за функция, която е закон на някое движение.

Да разгледаме най-напред едно основно понятие в анализа. Става дума за нещо сродно с „близост на две точки" върху числовата права (или с „близост на два момента"). Казваме нещо сродно, защото терминът „близост" е неизползуваем в математиката в смисъла (ако въобще има такъв), в който той се употребява в говоримия език. От известно гледище Варна и Търново са близко (ако пътуваме например със самолет), а от друго — далече (ако вървим пеша). Малките разстояния между частиците



Черт. 34

на атомите са огромни в сравнение с размерите на тези частици. Ясно е, че понятия като „близко", „далече", „малко", „голямо" и т. н. са относителни и поради това неизползуваеми в математиката, защото там е нужна яснота. Вместо тях тя използува нещо по-просто — околност на точка.

Що е околност на точка? Това се вижда от черт. 35. Нека A е произволна точка от правата a. Да изберем по произволен начин точките X и Y от a, така че точката A да се намира между

Черт. 35

тях ($X \neq A$, $Y \neq A$). Отсечката XY се нарича *околност на точката* A. Поради произвола при избора на точките X и Y (спазва се само условието A да се намира между X и Y и да не съвпада с някоя от тях), можем да образуваме произволно много околности на точка A. Накратко под околност на точката A разбираме всяка отсечка, която съдържа A във вътрешността си.

Да отбележим, че в определението за околност на точка

въобще не става дума за разстояние. Същественият момент тук е в произвола при избора на точките X и Y. Той дава възможност отсечката XY да бъде избирана както „произволно голяма", така и „произволно малка". Именно свободата да избираме произволно малки околности е главното в това определение. Тя е математическо отражение на интуитивното понятие за близост.

Аналогично се въвежда и понятието околност на един момент t от времето: под околност на t разбираме всеки интервал от време, който съдържа t във вътрешността си.

Сега можем да преминем към едно от основните свойства на движението — неговата непрекъснатост. Да разгледаме отново една движеща се точка M. Нека в момента t_0 подвижната точка M заема положението M_0 и нека XY е произволна околност на M_0. Движението на M може да бъде извънредно сложно (и в частност произволно бързо), но въпреки това освен момента t_0 (в който точката M се намира в положението M_0) ще съществуват и други моменти t, в които M е в околността XY. Нещо повече: ще съществуват безбройно много моменти с това свойство. Но може да се твърди и повече: съществува околност $V-(t', t'')$ на момента t_0 такава, че докато времето пробягва тази околност, точката M да се намира в XY. Това свойство на движението се нарича *непрекъснатост*.

Нека например точката M е автомобил, който пътува по шосето от Търново за Варна. Ако в 13 часа автомобилът е бил в центъра на град Търговище, ясно е, че известно време преди указания час и известно време след това той е бил в града (разбира се, не непременно в центъра му). Интервалът от време между момента, в който автомобилът влиза в града, и момента, в който го напуска, представлява една околност на момента $t_0 = 13$ ч. Очевидно е, че във всеки момент, принадлежащ на тази околност, автомобилът се е намирал в град Търговище.

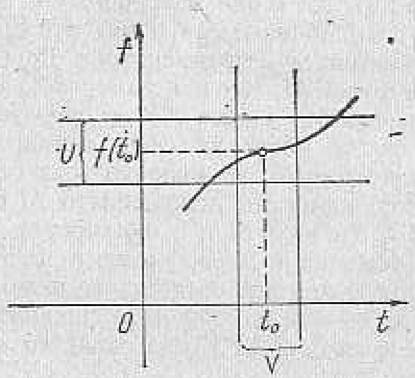
Да разгледаме една по-малка околност на центъра на Търговище — градския площад, през който трябва да мине колата. Всичко казано по-горе, отнасящо се за целия град, може да се пренесе и за неговия площад. Околността на момента $t_0 = 13$ ч, съответствуваща на преминаването на колата през площада, е вече един по-малък интервал.

Да се върнем отново на общия случай. Ако „свием" околността XY, съответно ще се свие и околността V, но твърдението си остава в сила, колкото и малка да е XY.

Нека функцията f е закон на някое движение. Изложеното дотук показва, че функцията f притежава следното свойство:

За всеки момент t_0 и за всяка околност U на $f(t_0)$ съществува такава околност V на t_0, че за всяко t от V функционалната стойност $f(t)$ да принадлежи на U.

Функции с горното свойство се наричат *непрекъснати*. Графиката на една непрекъсната функция не може да прави скок, както тази на черт. 34. Ако една функция е дефинирана в един интервал и е непрекъсната във всяка точка от този интервал, графи-



Черт. 36

ката ѝ прилича на (нескъсан) конец. Вече споменахме, че графиката на една произволна функция се получава от дефиниционната област чрез повдигане на тази област, при което са допустими и деформации. Използувайки отново образен език, можем да кажем, че когато функцията е непрекъсната, при тези деформации не се допуска разкъсване.

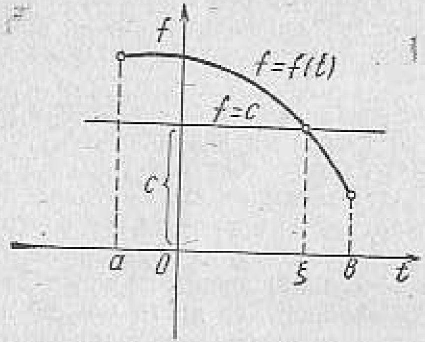
Да спрем сега нашето внимание на точния геометричен смисъл на дефиницията за непрекъснатост на функция. Да изберем една произволна околност U на $f(t_0)$ и да разгледаме хоризонталната лента, която отсича от ординатната ос околността U (черт. 36). Съгласно дефиницията за непрекъснатост съществува такава околност V на t_0, че винаги когато $t \in V$ да имаме $f(t) \in U$. Нека сега точката $(t, f(t))$ от графиката на f принадлежи на вертикалната лента; тогава $t \in V$ и следователно $f(t) \in U$, което означава, че точката $(t, f(t))$ принадлежи на хоризонталната лента. *И така функцията f е непрекъсната в точката t_0, когато за всяка хоризонтална лента, съдържаща точката $(t_0, f(t_0))$ от графиката на f във вътрешността си, съществува такава вертикална лента, че*

а) точката $(t_0, f(t_0))$ е от вътрешността ѝ и

б) всяка точка от графиката, която принадлежи на вертикалната лента, непременно се съдържа и в хоризонталната.

Вече видяхме, как може да се достигне до понятието непрекъснатост, като се тръгне от най-простите геометрични или механични задачи. На същото това понятие се натъкваме и когато разглеждаме задачата за пресмятане на стойностите на функциите. На практика стойността на аргумента, за която искаме да пресметнем съответната стойност на функцията, обикновено се измерва. Но при измерванията никога не може да се осигури абсолютна точност; най-доброто, на което можем да се надяваме, е при достатъчно щателни и продължителни измервания да си осигурим произволна отнапред зададена точност на стойността на аргумента, така че ако желаем да пресметнем $f(t_0)$, всъщност ще разполагаме със стойности от вида $f(t)$, където t може да се направи произволно близко до t_0. За да бъдем уверени, че при това $f(t)$ ще бъде произволно близко до $f(t_0)$, не остава нищо друго освен да поискаме функцията f да е непрекъсната в точката t_0. *И така функцията f е непрекъсната в точката t_0, когато можем да пресмятаме стойността $f(t_0)$ с произволна отнапред дадена точност, като си служим с достатъчно точни приближения t на аргумента t_0, т.е. когато за всяка отнапред дадена точност $\varepsilon > 0$ съществува такава точност $\delta > 0$, че винаги когато стойността t на аргумента е приближение с точност δ на t_0, функционалната стойност $f(t)$ да бъде приближение на $f(t_0)$ с точност ε.*

Много трудни на пръв поглед задачи можем да решаваме като използуваме непрекъснати функции. Такива примери ще разгледаме в § 4, § 5 и § 6. Трябва да отбележим обаче, че при решението на тези задачи се използува не дефиницията за непрекъснатост, а едно следствие от нея, което е почти очевидно. На механичен език то може да бъде формулирано така: ако една точка M се движи по права и заема положенията M_1 и M_2 съответно в моментите t_1 и t_2, в интервала (t_1, t_2) тя преминава поне по веднъж през всяка точка на отсечката $M_1 M_2$. На геометричен език това следствие се формулира така: ако една функция е дефинирана и непрекъсната в един интервал и две точки от графиката ѝ са от различни страни на някоя хоризонтална права c, графиката и правата имат обща точка (черт. 37). На аналитичен език въпросното следствие може да се формулира така: ако функцията f е дефинирана и непрекъсната в интервала $[a, b]$ и c



Черт. 37

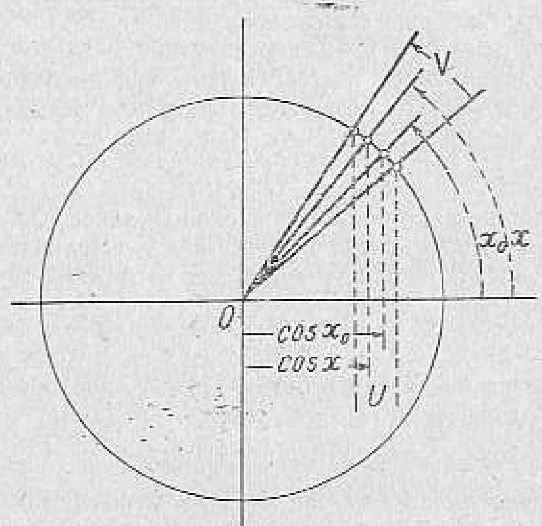
е число, за което $f(a)-c$ и $f(b)-c$ имат противни знаци, непременно съществува точка ξ от интервала $[a, b]$, за която $f(\xi)=c$.

§ 3. ПРИМЕРИ НА НЕПРЕКЪСНАТИ ФУНКЦИИ

Действията събиране, изваждане, умножение и деление притежават едно важно свойство, което лежи в основата на изчислителната техника. Всяко от числата x_0+y_0, x_0-y_0, $x_0 y_0$ и $\frac{x_0}{y_0}$ $(y_0\neq 0)$ може да бъде пресметнато с произволна отнапред дадена точност, стига вместо x_0 и y_0 да се вземат достатъчно точни техни приближения. Изчислителният опит, който читателят вече има, сигурно го е убедил в това. Интересно е, че от това елементарно наблюдение директно следва, че *всяка рационална функция е непрекъсната* навсякъде в дефиниционната си област. Както вече знаем, пресмятането на стойностите на една рационална функция изисква само горните четири действия, приложени краен брой пъти над определено число константи и над аргумента. Следователно стойността $R(x_0)$ на една рационална функция R в произволна точка x_0 от нейната дефиниционна област може да се пресмята с произволна отнапред дадена точност, стига да си служим с достатъчно точни приближения x на аргумента x_0, поради което рационалните функции са непрекъснати.

Функциите x^a, a^x *и* $\log_a x$ *са също непрекъснати* навсякъде в дефиниционната си област: читателят, разбира се, е правил достатъчно приблизителни пресмятания с тези функции, за да бъде убеден в това.

Непрекъснати са също и тригонометричните функции $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$ *и* $\operatorname{ctg} x$. Да се убедим в това за функцията $\cos x$. Нека x_0 е произволен ъгъл и U е произволна околност на $\cos x_0$ (черт. 38). Ясно е, че за всеки ъгъл x от околността V на x_0 $\cos x$ се намира в U. С това е доказана непрекъснатостта на $\cos x$. Аналогични разглеждания ни убеждават, че са непрекъснати и останалите три тригонометрични функции.



Черт. 38

Естествено горните примери далеч не изчерпват множеството на всички непрекъснати функции. Така *сумата, разликата, произведението и частното на две непрекъснати функции са също непрекъснати*; предоставяме на читателя сам да се убеди в това, като използува идеята, с която си послужихме при доказателството на непрекъснатостта на рационалните функции. Например функцията

$$2x\sin x+\frac{\cos x}{1+a^x}$$

е непрекъсната.

Съществува още едно общо правило, което позволява по дадени непрекъснати функции да построяваме нови. Това е правилото за непрекъснатост на функция от функция. Нека всички стойности на функцията f принадлежат на дефиниционната област на функцията F. Тогава можем да образуваме функцията Φ, дефинирана с

(1) $$\Phi(x)=F(f(x)).$$

Тя има същата дефиниционна област както f и се нарича *функция от функция или съставна функция. Да предположим, че f е непрекъсната в точката x_0 и че F е непрекъсната в точката $f(x_0)$. При тези предположения се твърди, че функцията Φ е също непрекъсната в точката x_0.*

Наистина нека U е произволна околност на $\Phi(x_0)$. Съгласно (1) U ще бъде околност на $F(f(x_0))$ и тъй като функцията F е непрекъсната в точката $f(x_0)$, ще съществува такава околност V на $f(x_0)$, че за всяка точка v от V ще имаме

(2) $$F(v)\in U.$$

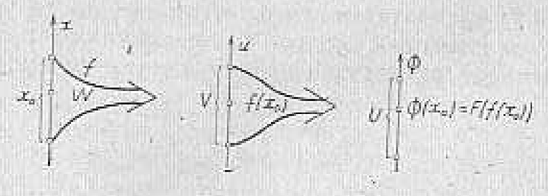
По този начин вече разполагаме с една околност V на $f(x_0)$. Но функцията f е непрекъсната в точката x_0. Следователно ще съществува такава околност W на x_0, че за всяко $x\in W$ да имаме $f(x)\in V$. Нека сега

(3) $$x\in W.$$

Съгласно избора на W ще имаме $f(x)\in V$, което заедно с (2) и избора на V дава

(4) $$\Phi(x)=F(f(x))\in U.$$

И така за всяка околност U на $\Phi(x_0)$ намерихме такава околност W на x_0, че за всяко x, за което е изпълнено (3), да е в сила (4). Съгласно дефиницията за непрекъсната функция това означава, че Φ е непрекъсната в точката x_0. Схематично горното доказателство е представено на черт. 39.



Черт. 39

От доказаното предложение най-напред следва, че ако функциите f и F са непрекъснати навсякъде в дефиниционните си области, функцията Φ е също непрекъсната навсякъде в дефиниционната си област. Понякога това се формулира накратко с думите: *непрекъсната функция от непрекъсната функция е също непрекъсната.*

Да положим сега $f(x)=x^2$, $F(u)=\sin u$. Тогава $\Phi(x)=\sin x^2$ и следователно функцията $\sin x^2$ е непрекъсната. Аналогично се вижда, че функциите $a^{\sin x}$ (където $f(x)=\sin x$ и $F(u)=a^u$), $\sqrt{\operatorname{tg} x}$, (където $f(x)=\operatorname{tg} x$ и $F(u)=\sqrt{u}$), $\frac{1}{\cos^2 x}$ и т. н. са непрекъснати.

Да резюмираме. Функциите x^α, a^x, $\log_a x$, $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$ и рационалните функции са непрекъснати. Освен това сума разлика, произведение и частно на непрекъснати функции, а също така непрекъсната функция от непрекъсната функция, са непрекъснати.

Всевъзможните функции, които се получават от функциите

$$x^\alpha,\ a^x,\ \log_a x,\ \sin x,\ \cos x,\ \operatorname{tg} x,\ \operatorname{ctg} x,$$

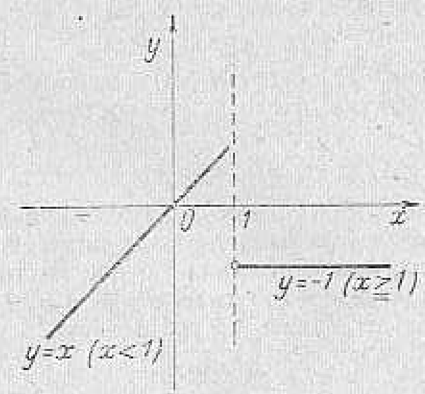
след като върху тях се приложат краен брой пъти действията събиране, изваждане, умножение, деление и образуване на функция от функция, се наричат *елементарни.*

Елементарните функции са непрекъснати. Така например функцията

$$\frac{\cos^3 x}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{a^{\operatorname{tg} x}}{1+(\log_a x)^2}\cdot\frac{x^3+2}{x^2+x+\sin x}$$

е елементарна и следователно е непрекъсната. Един от главните обекти на вниманието ни в тази книга е класата на елементарните функции.

След като се запознахме с толкова много непрекъснати функ-



Черт. 40

ции, да разгледаме и един пример на прекъсната. Такава е функцията

$$f(x)=\begin{cases} x & (x<1) \\ -1 & (x\geq 1) \end{cases}$$

Графиката на тази функция е представена на черт. 40. Функцията f е дефинирана за всяко x и е очевидно прекъсната при $x=1$.

§ 4. НЯКОИ ПРИЛОЖЕНИЯ НА НЕПРЕКЪСНАТОСТТА В АЛГЕБРАТА

Задача 1. Нека тричленът

(1) $$P(x)=ax^2+bx+c$$

приема цели стойности само когато x е цяло число. Да се докаже, че при тези предположения имаме $a=0$.

Да допуснем противното, т. е., че $a\neq 0$. Без да ограничаваме общността можем да предполагаме, че $a>0$. Да образуваме разликата $P(n+1)-P(n)$, където n е произволно естествено число. Очевидно

$$P(n+1)-P(n)=a(n+1)^2+b(n+1)+c-(an^2+bn+c)$$
$$=2an+a+b$$

и следователно за всички n, за които

$$2an+a+b>1,$$

ще имаме

$$P(n+1)-P(n)>1.$$

Последното неравенство ни учи, че за всички достатъчно големи n ще съществуват цели числа m, за които

$$P(n+1)>m>P(n).$$

Тъй като функцията P е непрекъсната, от последното неравенство следва, че съществува число ξ, за което са изпълнени неравенствата

(2) $$n<\xi<n+1$$

и в същото време $P(\xi)=m$, което показва, че $P(\xi)$ е цяло. Съгласно условието ξ би трябвало да бъде цяло, което противоречи на (2). С това задачата е решена. На кое място в горните разсъждения бе използувано допускането, че $a\neq 0$?

Задача 2. Да се докаже, че уравнението

(3) $$\operatorname{tg} x=x$$

притежава решение във всеки от интервалите $\delta_k=\left(\frac{\pi}{2}+k\pi,\frac{\pi}{2}+(k+1)\pi\right)$, $k=0,\pm 1,\pm 2,\ldots$

Да напомним, че функцията $\operatorname{tg} x$ е дефинирана и непрекъсната във всеки от интервалите δ_k. Нейната графика е представена на черт. 24, от който се вижда, че когато x се приближава към някоя от точките $\frac{\pi}{2}+k\pi$ отляво, $\operatorname{tg} x$ расте неограничено чрез положителни стойности, а когато x се приближава към $\frac{\pi}{2}+k\pi$ отдясно — функцията $\operatorname{tg} x$ расте неограничено чрез отрицателни стойности. По-подробно в това можем да се убедим така

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{2}+k\pi\right)=\cos(x+k\pi)=\cos x\cos k\pi-\sin x\sin k\pi=(-1)^k\cos x,$$

$$\cos\left(x+\frac{\pi}{2}+k\pi\right)=-\sin(x+k\pi)=-\sin x\cos k\pi-\cos x\sin k\pi$$
$$=(-1)^{k+1}\sin x,$$

където е взето пред вид, че $\cos k\pi=(-1)^k$ и $\sin k\pi=0$; тогава

(4) $$\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{2}+k\pi\right)=-\frac{\cos x}{\sin x};$$

ако сега x се приближава към нулата чрез отрицателни стойности, $x+\frac{\pi}{2}+k\pi$ ще се приближава към $\frac{\pi}{2}+k\pi$ отляво и в същото време (4) показва, че действително $\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{2}+k\pi\right)$ расте неограничено чрез положителни стойности, защото поради непрекъснатостта $\cos x$ ще се приближава към $\cos 0=1$, а $\sin x$ ще се приближава към $\sin 0=0$, при което $\sin x<0$; аналогично се вижда, че когато x се приближава към нулата чрез положителни стойности, $x+\frac{\pi}{2}+k\pi$ ще се приближава към $\frac{\pi}{2}+k\pi$ отдясно, а $\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{2}+k\pi\right)$ ще расте неограничено чрез отрицателни стойности.

Сега да разгледаме функцията

(5) $$f(x)=\operatorname{tg} x-x$$

в някой от интервалите δ_k. Тъй като $\frac{\pi}{2}+k\pi<x<\frac{\pi}{2}+(k+1)\pi$, то

(6) $$\operatorname{tg} x-\left(\frac{\pi}{2}+(k+1)\pi\right)<f(x)<\operatorname{tg} x-\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right).$$

Да оставим сега x да се приближава към $\frac{\pi}{2}+k\pi$ отдясно. Тогава $\operatorname{tg} x$ ще расте неограничено чрез отрицателни стойности и второто от неравенствата (6) показва, че ще съществува $x_1 \in \delta_k$, за което

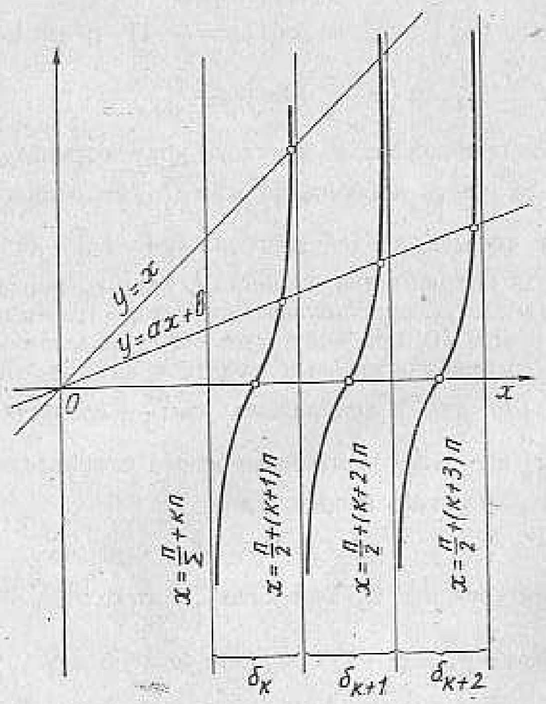
$$f(x_1)<0. \tag{7}$$

Като използуваме първото от неравенствата (6), аналогично се убеждаваме, че съществува такава точка $x_2 \in \delta_k$, за която

$$f(x_2)>0. \tag{8}$$

Тъй като функцията f е непрекъсната в δ_k, от (7) и (8) следва, че съществува такава точка $\xi \in (x_1, x_2)$, за която $f(\xi)=0$, което съгласно (5) показва, че $\operatorname{tg}\xi=\xi$, т. е. че ξ е решение на уравнението (3). За да решим задачата, остава да отбележим, че интервалът (x_1, x_2) се съдържа изцяло в интервала $\left(\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+(k+1)\pi\right)$ и следователно $\xi \in \delta_k$.

Полученият резултат е илюстриран на черт. 41. Този чертеж



Черт. 4

показва и нещо повече: тангенсоидата пресича всяка не вертикална права над кой да е от интервалите δ_k, т. е. уравнението

$$\operatorname{tg} x=ax+b$$

притежава решение във всеки от интервалите δ_k.

Задача 3. Нека P е произволен полином от нечетна степен. Да се докаже, че уравнението

$$P(x)=\sum_{k=0}^{n} a_{n-k}\, x^k=0 \quad (n\text{-нечетно}) \tag{9}$$

има поне един корен.

Да напомним, че в §9 видяхме, че полиномите от нечетна степен приемат, при големи по абсолютна стойност отрицателни x, стойности със знак противоположен на този на a_0, а при големи по абсолютна стойност положителни x знакът на $P(x)$ съвпада с този на a_0. Без да ограничаваме общността можем да предполагаме, че $a_0>0$. Тогава от казаното следва, че ако x_1 е достатъчно голямо по абсолютна стойност отрицателно число, то

$$P(x_1)<0, \tag{10}$$

а ако x_2 е достатъчно голямо по абсолютна стойност положително число, то

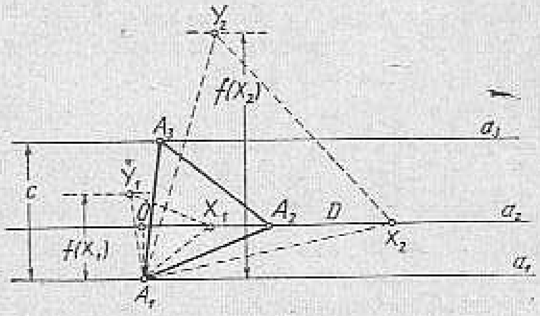
$$P(x_2)>0. \tag{11}$$

Тъй като полиномите са непрекъснати функции, твърдението следва от (10) и (11).

§ 5. НЯКОИ ПРИЛОЖЕНИЯ НА НЕПРЕКЪСНАТОСТТА В ГЕОМЕТРИЯТА

Задача 1. За всеки три успоредни прави a_1, a_2, a_3 съществува равностранен триъгълник $A_1A_2A_3$, за който A_i лежи върху a_i $(i=1, 2, 3)$.

Тук ще изложим решение, в което се използуват съображения за непрекъснатост. Да изберем по произволен начин точката A_1 върху правата a_1 (черт. 42). Това дава възможност на произволна точка X от правата a_2 да съпоставим по един равностранен триъгълник по следния начин: нека O е петата на перпендикуляра, спуснат от точката A_1 към правата a_2, и D е един от лъчите с начало O, лежащ върху правата a_2 (например този, който е насочен надясно); на произволна точка X от D съпоставяме равностранния триъгълник A_1XY, чийто връх Y лежи от същата страна на правата A_1X, от която лежи точката O. Очевидно разстоянието $f(X)$ от върха Y до правата a_1 е една непрекъснатa функция на X (направете сами необходимите разсъж-



Черт. 42

дения с околности, за да се убедите в това). Да означим с c разстоянието между правите a_1 и a_3. Ясно е, че когато X_1 е достатъчно близко до O, то

(1) $$f(X_1) < c,$$

а когато X_2 е достатъчно далече от O, то

(2) $$f(X_2) > c.$$

Непрекъснатостта на f заедно с неравенствата (1) и (2) показва, че съществува точка A_2 между X_1 и X_2, за която $f(A_2)=c$. Съответният триъгълник $A_1A_2A_3$ е решение на задачата.

Задача 2. В пространството са дадени три прави l, m и n, които не лежат в една равнина и минават през една точка O. Нека P е произволна точка, която не лежи в никоя от равнините, определени от коя да е двойка от тези три прави, и правата OP не е перпендикулярна на никоя от правите l, m и n. Да се докаже, че при тези предположения съществува равнина Π през P със следните две свойства:

а) равнината Π пресича правите l, m, n съответно в точки X, Y и Z, различни от O;

б) в сила е равенството

$$PX = PY = PZ.$$

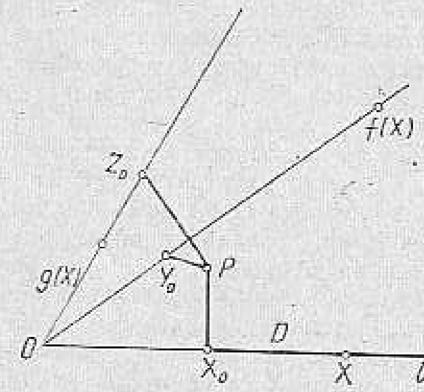
Нека PX_0, PY_0 и PZ_0 са перпендикулярите от P съответно към l, m и n. От условието веднага следва, че

(3) $$X_0 \neq 0,\ Y_0 \neq 0,\ Z_0 \neq 0.$$

Без да ограничаваме общността, можем да предполагаме, че

(4) $$PY_0 \leqq PX_0 \leqq PZ_0.$$

Да означим с D онзи лъч с начало X_0 върху правата l, който не съдържа точката O, а с E — лъча с начало Y_0 върху правата m, който не съдържа точката O.



Черт. 43

Нека сега X е произволна точка от лъча D. Сферата с център P и радиус PX пресича правата m, защото съгласно (4) и дефиницията на X_0 имаме

$$PY_0 \leqq PX_0 \leqq PX.$$

Ясно е, че за всяко $X \in D$ разглежданата сфера пресича лъча E в една единствена точка $f(X)$. Така получаваме една функция f, дефинирана върху лъча D и приемаща стойности върху лъча E. Не е трудно да се види, че тази функция е непрекъсната (направете сами необходимите за това разсъждения). Освен това съгласно дефиницията на f за всяко $X \in D$ имаме

(5) $$PX = Pf(X).$$

Сега ще покажем, че точките X, $f(X)$ и P никога не лежат на една права. Тъй като лъчите D и E не съдържат точката O, за всяко $X \in D$ имаме очевидно

$$X \neq O,\ f(X) \neq O.$$

Но тъй като правите l и m са различни, от последните две неравенства следва, че $X \neq f(X)$ и следователно X и $f(X)$ определят една единствена права, лежаща в равнината на правите l и m; точката P не може да лежи върху тази права, тъй като не лежи в равнината, определена от l и m. С това е доказано, че за всяко $X \in D$ точките X, $f(X)$ и P определят една равнина $\Pi(X)$.

В зависимост от X равнината $\Pi(X)$ ще пресича или пък няма да пресича правата n. Да означим с D' множеството на онези точки $X \in D$, за които $\Pi(X)$ пресича n. Ще дефинираме функция g, която на всяка точка $X \in D'$ съпоставя по една точка $g(X)$ от правата n по следния начин: съгласно дефиницията на D' за всяко $X \in D'$ равнината $\Pi(X)$ има общи точки с правата n; да покажем, че в същност за всяко такова X равнината $\Pi(X)$ и правата n имат само една обща точка; за целта е достатъчно да се убедим, че n не лежи в $\Pi(X)$, което действително е невъзможно, защото в противен случай и точката O би лежала в $\Pi(X)$ и следователно $\Pi(X)$ би съвпадала с равнината, определена от правите l и m, което противоречи на условието, че P не лежи в тази равнина; за произволно $X \in D'$ с $g(X)$ означаваме единствената обща точка на $\Pi(X)$ и n. С това функцията g е дефинирана. Понеже $f(X)$ зависи по непрекъснат начин от X, равнината $\Pi(X)$ също ще се изменя малко, когато X се премества малко, и следователно пресечната точка $g(X)$ на $\Pi(X)$ с n ще бъде непрекъсната функция на X.

Когато точката X се отдалечава неограничено от X_0, движейки се върху лъча D, PX ще расте неограничено и съгласно (5) $Pf(X)$ също ще расте неограничено, поради което $f(X)$ ще се отдалечава неограничено от Y_0, оставайки върху лъча E. Не е трудно да се забележи, че при това положение равнината $\Pi(X)$ ще се стреми да се слее с равнината Π_0, която минава през P и е успоредна на правите l и m. Очевидно правата n пресича Π_0 и следователно n ще пресича $\Pi(X)$ за всички X, които са достатъчно далече от X_0, т. е. всички такива X принадлежат на дефиниционната област D' на функцията g. Освен това когато X е достатъчно далече от X_0, пресечната точка $g(X)$ на $\Pi(X)$ с n ще се намира около пресечната точка Z_1 на Π_0 с n и следователно разстоянието $Pg(X)$ ще остава ограничено. Тъй като в същото време PX може да се направи произволно голямо, ще съществува такава точка $X_1 \in D'$, че

(6) $$PX_1 > Pg(X_1).$$

Твърдим, че в D' съществува и такава точка X_2, че

(7) $$PX_2 \leqq Pg(X_2).$$

За да се убедим в това, необходимо е да разгледаме два случая.

Случай а). Нека D' съвпада с D, т. е. за всяко X от лъча D равнината $\Pi(X)$ пресича правата n. Тогава можем да положим $X_2 = X_0$. Тъй като $g(X_0)$ лежи върху n, съгласно дефиницията на Z_0 и второто от неравенствата (4) ще имаме

$$PX_0 \leq PZ_0 \leq Pg(X_0),$$

което показва, че (7) действително е изпълнено при $X_2 = X_0$.

Случай б). Нека D' не съвпада с D, т. е. нека съществуват точки $X \in D$, за които $\Pi(X)$ не пресича n. Да означим с X_3 онази от тях, която е най-близко до X_1. Нека оставим сега точката X да се движи от X_1 към X_3, като ѝ позволим да се приближава неограничено към X_3. Тогава $\Pi(X)$ ще се стреми да се слее с $\Pi(X_3)$, която равнина съгласно избора на X_3 не пресича n. Следователно пресечната точка $g(X)$ на $\Pi(X)$ с n ще се отдалечава неограничено от Z_0, а в същото време X ще се намира около X_3. Ясно е тогава, че PX остава ограничено, докато $Pg(X)$ расте неограничено, поради което ще съществува точка X_2 между X_1 и X_3, за която е в сила (7).

По този начин и в двата случая а) и б) успяхме да посочим точка $X_2 \in D'$, за която е в сила (7). Но ако се вгледаме внимателно в разсъжденията, които направихме, ще се убедим, че и цялата отсечка X_1X_2 се съдържа в D'. И така в интервала $[X_1, X_2]$ имаме две непрекъснати функции PX и $Pg(X)$, за които в краищата на този интервал са изпълнени неравенствата (6) и (7). Тогава разликата

$$H(X) = PX - Pg(X)$$

на тези две функции ще бъде непрекъсната и в краищата на интервала $[X_1, X_2]$ ще приема стойности с противни знаци, което, както знаем, е достатъчно, за да можем да твърдим, че съществува точка $X \in [X_1, X_2]$, за която

$$PX - Pg(X) = 0.$$

Последното равенство и равенството (5) показват, че разстоянията

$$PX,\ Pf(X),\ Pg(X)$$

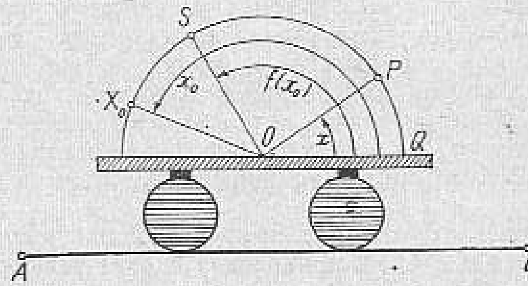
са равни. Освен това всяка от точките X, $f(X)$, $g(X)$ и P лежи в равнината П (X), поради което, за да решим задачата, остава само да положим $Y=f(X)$, $Z=g(X)$.

§ 6. НЯКОИ ПРИЛОЖЕНИЯ НА НЕПРЕКЪСНАТОСТТА ВЪВ ФИЗИКАТА

Задача 1 (Уитни). Да си мислим един прът OP, закачен шарнирно в точка O от платформата на един вагон, който се движи по хоризонталната ж. п. линия от гара A към гара B. За шарнира O се предполага, че той не позволява на пръта OP да напуска една неподвижно свързана с вагона вертикална равнина през O (равнинен шарнир). Никакви други предположения за шарнира O, и в частност предположение, за отсъствие на триене, не се правят. Краят на пръта P ще се движи въху една полуокръжност с център O и радиус OP. Иска се да се докаже, че за всяка точка X_0 от полуокръжността и за всеки закон на движение на вагона от A до B съществува такова начално положение OP_0 на пръта, че в момента, в който вагонът пристигне в точка B, прътът OP да се намира в положението OX_0.

Да отбележим, че ако по време на движението прътът падне върху платформата, инерциялните сили няма да са в състояние да го повдигнат от нея, понеже по предположение ж. п. линията е хоризонтална; така че ако това се случи, прътът ще остане в положението, в което е паднал, до края на движението; оттук в частност следва, че ако X_0 не лежи върху платформата на вагона, през цялото движение от A до B прътът няма да падне и, разбира се, в последния момент ще съвпадне с OX_0. Даже самият факт, че съществува движение на платформата от A до B и начално положение на пръта, за които е в сила твърдението, е интересен; но тук се твърди значително повече, а именно че не само крайното положение OX_0 на пръта се задава произволно, но движението на вагона от A към B е също съвсем произволно (в частност позволени са спирания за известно време, връщания назад и т. н.).

За да докажем верността на твърдението, ще използуваме само съображения за непрекъснатост. Да разгледаме едно произволно движение на влака от A до B. Във всички по-нататъшни разсъждения това движение ще остава фиксирано. Обстоятелството, че вече сме фиксирали движението на вагона, позволява да дефинираме една функция f в интервала $[0,\pi]$, която също приема стойности от нула до π. Нека x е произволен ъгъл, $0 \leq x \leq \pi$. Разглеждаме такова начално положение на пръта, за което $\sphericalangle Q\,OP=x$. След това заставяме вагона да извърши фиксираното движение от A до B. Прътът, който в началото на това движение е сключвал ъгъл x с правата OQ, също ще се движи при това движение на вагона (черт. 44) и при пристигането на влака в B ще заеме някакво крайно положение OS. Това крайно поло-



ерт. 44

жение зависи само от началното положение OP. Ако сега положим $f(x)=\sphericalangle QOS$, получаваме една функция f, която е дефинирана в интервала $[0,\pi]$ и приема стойности в същия интервал. От физически съображения следва, че функцията f е непрекъсната.

Да пресметнем сега $f(0)$. Когато $x=0$, началното положение OP сключва ъгъл нула с платформата, поради което прътът ще остане неподвижен през време на цялото движение; следователно в този случай ще имаме $OS=OP=OQ$ и

(1) $$f(0)=0$$

Аналогично се вижда, че

(2) $$f(\pi)=\pi.$$

Нека сега

$$\sphericalangle QOX_0=x_0.$$

Тогава по силата на (1) и (2) ще имаме

$$f(0)=0 \leq x_0 \leq \pi=f(\pi)$$

и тъй като функцията f е непрекъсната в интервала $[0,\pi]$ ще съществува такава точка ξ_0, че

(3) $$f(\xi_0)=x_0.$$

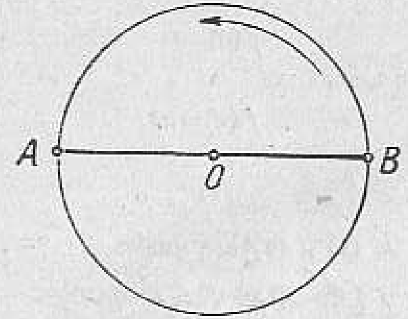
2

Нека P_0 е такава точка от полуокръжността, че $\sphericalangle QOP_0 = \xi_0$. Съгласно дефиницията на f равенство (3) означава, че ако в началото на движението прътът заема положението OP_0, в края му той ще заеме положението OX_0. С това задачата е решена.

Задача 2. Да се докаже, че във всеки момент върху земното кълбо има две противоположни точки с еднакви температури.

За да докажем това, ще използваме съображения за непрекъснатост и два идеални термометъра. *Идеален термометър* ще наричаме термометър, който моментално отчита температурата; ако движим такъв термометър в някаква среда (например във въздушна) с различни температури в различните точки, върхът на живачния стълб ще се движи, като във всеки момент ще показва точната температура на точката, в която термометърът се намира. Движението на този връх е всъщност движение на точка върху права.

При доказателството ще използваме един мислен експеримент. Да пресечем земната повърхнина с една равнина, която минава през центъра ѝ. Така получаваме една окръжност. Да изберем две противоположни точки от тази окръжност и да поставим във всяка от тях по един идеален термометър. Ако температурите в тях се окажат еднакви — добре. Ако се окажат различни, единият от термометрите, например A ще показва по-малка температура от другия. Да съединим двете точки с един прът, който е диаметър на окръжността (черт. 45). Нека завъртим пръта на 180° около центъра му, докато краищата му разменят местата



Черт. 45

си (въртене на 180°). При това движение върховете на живачните стълбове на двата термометъра също ще се движат. В края на това движение термометърът A ще показва вече по-висока температура от термометъра B (A ще показва точно онази температура, която B е показвал в началото на движението). Тъй като в началото на движението температурите на термометрите бяха свързани с противоположното неравенство, ще има момент от движението, в който те показват еднакви температури. С това задачата е решена, понеже точките A и B оставаха противоположни по време на цялото движение на пръта.

Понеже равнината, с която пресякохме Земята, беше произволно избрана, вярно е повече от формулираното. Именно върху всяка голяма окръжност от земната сфера във всеки момент съществуват две противоположни точки с еднакви температури. Следователно във всеки момент двойките противоположни точки върху земната повърхнина с еднакви температури са безбройно много.

Съвсем аналогични разсъждения показват, че във всеки момент върху Земята има безбройно много двойки противоположни точки с еднакви барометрични налягания (за да се покаже това, е достатъчно в горните разсъждения термометрите да се заменят с барометри).

И така оказа се, че съществуват, от една страна, безбройно много двойки противоположни точки с еднакви температури и безбройно много такива двойки с еднакви налягания. Като се използуват по-дълбоки от приведените по-горе съображения за непрекъснатост, може да се докаже, че тези две множества имат общи елементи, т. е. че във всеки момент върху земната повърхнина съществуват две противоположни точки, които имат както еднакви температури, така и еднакви налягания.

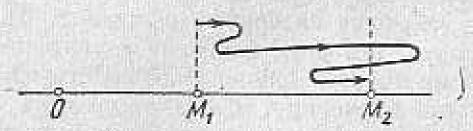
§ 7. РАВНОМЕРНО ДВИЖЕНИЕ

Най-простото от всички движения е равномерното. Всеки е наблюдавал движения на различни обекти, които повече или по-малко се приближават до него. Обикновено равномерното движение се схваща като такова, при което една точка изминава равни пътища за равни интервали от време. Последната фраза съдържа неяснота, тъй като в нея не е указано за кои равни интервали от време точката изминава равни пътища.

Ето точната дефиниция. Казваме, че една точка се движи равномерно, когато за *всеки* два равни интервала от време изминава равни пътища. „Всеки два равни интервала от време" означава в частност, че тези интервали могат да бъдат и *произволно малки*. Всъщност това е най-важният пункт от дефиницията. Ако един автомобил се движи и в първия час от своето движение е изминал 50 км, във втория час — също 50 км и т. н., съгласно дефиницията това още не означава, че той се движи равномерно, защото например в първите 30 мин. може да е изминал 20 км, а в следващите 30 мин. — 30 км.

Но какво да разбираме под път? Нека в моментите t_1 и t_2 точката M се е намирала съответно в положенията M_1 и M_2 върху числовата права. Пътят, който е изминала точката M в интервала от време $[t_1, t_2]$, е дължината на насочената отсечка $\overline{M_1M_2}$. Следователно той е положителен, ако M_2 е вдясно от M_1 и е отрицателен в противния случай (ако M_1 и M_2 съвпадат, т. е. ако в момента t_2 точката M се е върнала отново в положението, в което е била в момента t_1, изминатият път е нула). От черт. 46 се вижда, че пътят, който точката M е изминала в интервала от време $[t_1, t_2]$, е равен на разликата $\overline{OM_2}-\overline{OM_1}$ на насочените отсечки $\overline{OM_2}$ и $\overline{OM_1}$. Да отбележим, че ако M е автомобил, съгласно дефиницията пътят, който той е изминал в интервала от време $[t_1, t_2]$, е равен на разликата между показанията на километража в моментите t_2 и t_1. Ако по време на движението автомобилът се е движил и на заден ход и впоследствие е продължил движението си напред, горното твърдение продължава да запазва валидността си, тъй като при движение на заден ход километражът „връща“, т. е. измерва отрицателен път. По-общо, ако точката се е движила, както това е показано на черт. 47, пътят, който тя изминава съгласно дефиницията, е равен на дължината на насочената отсечка $\overline{M_1M_2}$, а не на реално изминатия път (изминатите в противоположни посоки пътища се унищожават).

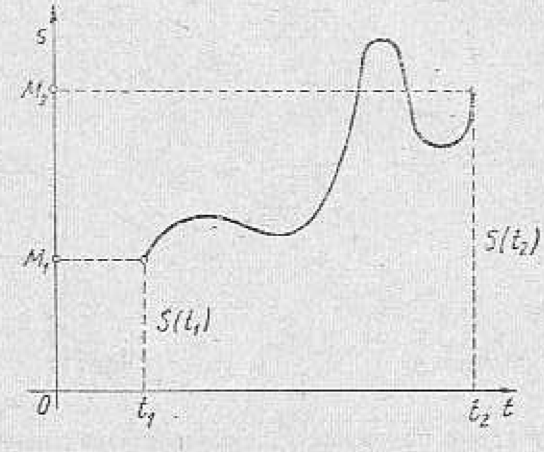
Черт. 46



Черт. 47

Ако законът на движението на M е $S=S(t)$, пътят, който тази точка е изминала в интервала от време $[t_1, t_2]$, е $S(t_2)-S(t_1)$.

Понякога движенията се онагледяват по един удобен начин чрез графиките си. Под *графика на едно движение* се разбира графиката на закона на това движение. Графиката на движението, изобразено на черт. 47, е показана на черт. 48.



Черт. 48

Ще разгледаме още един пример на движение, при което за всеки два интервала от време с дължина 2π подвижната точка изминава равни пътища и движението въпреки това не е равномерно. Такова е движението, чийто закон се дава с формулата

(1) $$S(t)=t+\sin t.$$

Наистина ако $[t_1, t_2]$ е произволен интервал с дължина 2π, т. е.

(2) $$t_2=t_1+2\pi,$$

за пътя, който точката M изминава в интервала от време $[t_1, t_2]$, съгласно (1) ще имаме

$$S(t_2)-S(t_1)=t_2-t_1+\sin t_2-\sin t_1.$$

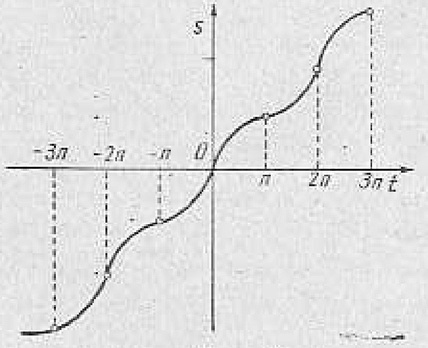
Ако сега използуваме това равенство и (2), ще получим

$$S(t_2)-S(t_1)=2\pi+\sin(t_1+2\pi)-\sin t_1=2\pi,$$

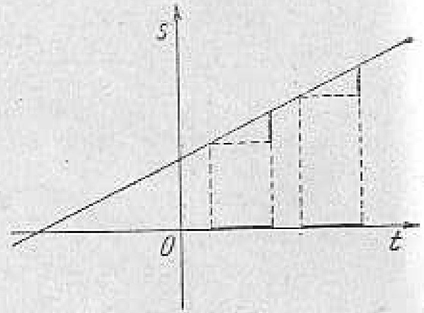
т. е. за всеки интервал от време с дължина 2π подвижната точка изминава път с дължина 2π. Предоставяме на читателя да се убеди, че това движение не е равномерно, като за целта посочи два равни интервала от време (например с дължини π), през които точката изминава различни пътища.

Графиката на това движение, от която директно могат да се видят така изброените особености, е изобразена на черт. 49.

Ако графиката на едно движение е права линия, движението е равномерно. Наистина черт. 50 показва, че за всеки два равни



Черт. 49



Черт. 50

интервала от време подвижната точка изминава равни пътища. Не по-трудно това се вижда и от закона на движението, който в този случай е

$$S(t) = a\,t + b,$$

където a и b са произволни константи.

§ 8. ЕДНА ХАРАКТЕРИСТИКА НА ЛИНЕЙНИТЕ ФУНКЦИИ

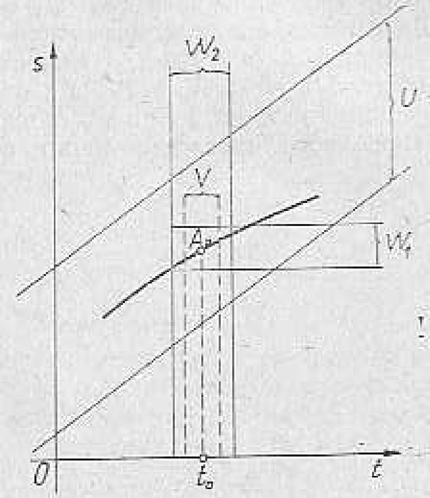
Вече видяхме, че ако графиката на едно движение е права линия, движението е равномерно. Тук ще докажем, че е вярно и обратното, т. е. че графиката на всяко равномерно движение е права линия.

Да отбележим най-напред някои свойства на графиката на равномерното движение.

Свойство 1. Нека A_0 е произволна точка от графиката на едно равномерно движение, t_0 е съответният момент от времето и U е произволна, съдържаща A_0 във вътрешността си, ивица от равнината, определена от две успоредни прави (черт. 51). При тези предположения съществува такава околност V на момента t_0,

че за всеки момент t от околността V съответната точка от графиката се намира в U.

Това свойство е просто следствие от непрекъснатостта на движението. За да се убедим във верността му, е достатъчно



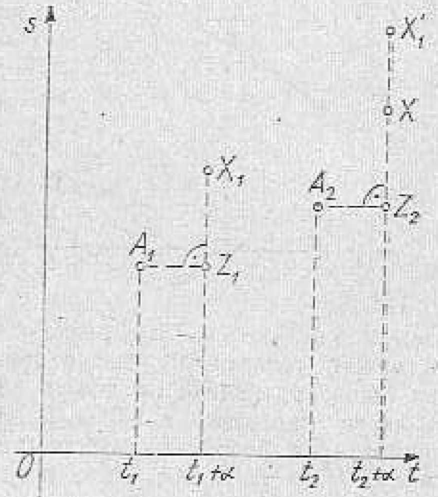
Черт. 51

най-напред да вземем хоризонтална и вертикална ленти, които, от една страна, съдържат точката A_0 във вътрешността си, а от друга, са толкова тесни, че общите им точки се съдържат в U; означаваме тези ленти съответно с W_1 и W_2. От геометричния смисъл на дефиницията на непрекъснатостта (вж. §2) следва, че съществува околност V на t_0 такава, че за всяко t от тази околност съответната точка от графиката да принадлежи на W_1. Ако сега се погрижим да изберем околността V на t_0 така, че да се съдържа и в W_2, ясно е, че за всяко t от V съответната точка от графиката ще се съдържа не само в W_1, а и в W_2, с което това свойство е доказано.

Да отбележим изрично, че при доказателството на това свойство предположението, че имаме работа с графика на равномерно движение далеч не бе използувано в цялата му пълнота. Единственото, което използвахме, беше, че работим с графика на непрекъсната функция.

Свойство 2. Нека A_1 и A_2 са две произволни точки от графиката на едно равномерно движение. Ако извършим успоредно пренасяне по правата $A_1 A_2$, така че A_1 да съвпадне с A_2, цялата графика на движението ще съвпадне със себе си.

При доказателството на това свойство ще използуваме твърде съществено равномерността на движението. Да означим с X_1 произволна точка от графиката на движението. Ще докажем само, че при разглежданото успоредно пренасяне X_1 се пренася в точка от графиката. Да означим с t_1 и t_2 моментите от времето, които съответствуват на A_1 и A_2, а с $t_1+\alpha$, — момента, съответствуващ на точката X_1 (черт. 52). Нека X_2 е точката от графиката, която съответствува на момента $t_2+\alpha$, а Z_1 и Z_2 са определени както на чертежа. При успоредното пренасяне A_1 ще отиде в A_2, Z_1 ще



Черт. 52

отиде в Z_2, а X_1 в някаква точка X_1', лежаща върху вертикалната права през Z_2. Имаме да докажем, че

(1) $$X_1'=X_2,$$

за което е достатъчно да се убедим, че насочените отсечки $\overline{Z_2X_2}$ и $\overline{Z_2X_1'}$ са равни. За тази цел да отбележим най-напред, че

(2) $$\overline{Z_2X_2}=S(t_2+\alpha)-S(t_2),$$

където S е законът на движението; наистина и двете страни на

това равенство представляват пътя, който подвижната точка изминава, докато t пробягва интервала $(t_2, t_2+\alpha)$. Освен това имаме

(3) $$S(t_2+\alpha)-S(t_2)=S(t_1+\alpha)-S(t_1),$$

понеже двете страни на това равенство представляват пътищата, които подвижната точка изминава през равните интервали от време $(t_2, t_2+\alpha)$ и $(t_1, t_1+\alpha)$ и движението е равномерно. От друга страна, очевидно имаме

(4) $$S(t_1+\alpha)-S(t_1)=\overline{Z_1X_1}.$$

Да напомним още, че при успоредното пренасяне Z_1 отива в Z_2, а X_1 — в X_1', поради което

(5) $$\overline{Z_1X_1}=\overline{Z_2X_1'}.$$

От равенствата (2), (3), (4) и (5) получаваме

$$\overline{Z_2X_2}=\overline{Z_2X_1'},$$

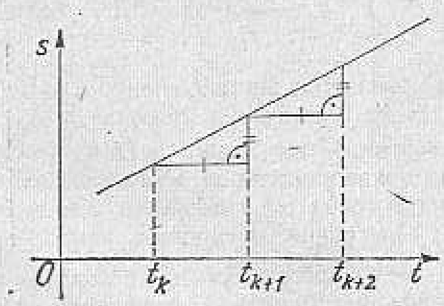
откъдето, както знаем, следва (1) и свойство 2 е доказано.

Свойство 3. Нека t_0 е произволен момент от времето и α е реално число. Тогава точките от графиката на произволно равномерно движение, съответствуващи на моментите

$$t_k=t_0+k\alpha \qquad (k=0, \pm1, \pm2, \ldots),$$

където k е произволно цяло число, лежат на една права.

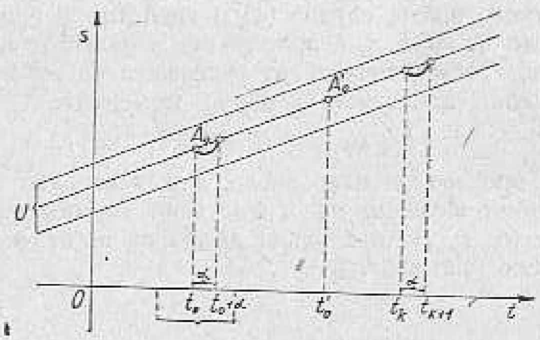
Твърдението следва непосредствено от обстоятелството, че интервалите (t_k, t_{k+1}) имат равни дължини, и от равномерността на движението (вж. черт. 53).



Черт. 53

Да обърнем внимание, че в това свойство не се поставя ограничение за числото α и следователно то може да бъде избирано съвършено произволно. Колкото и да е малко α и както и да е избран моментът t_0, винаги получаваме безбройно много точки от графиката, които лежат на една права. За сметка на произвола на избора на α тези безбройно много, лежащи върху една права, точки от графиката могат да се направят колкото си искаме гъсто в нея. Но това все още не е доказателство, че *всичките* точки от графиката лежат върху една права. Нещо повече, може да се докаже, че не е възможно да се даде доказателство на линейността на графиката на равномерното движение, без да се използува непрекъснатостта.

Сега вече сме в състояние да докажем, че графиката на всяко равномерно движение е права линия. Да зафиксираме два момента t_0 и t_0' $(t_0 \neq t_0')$ и да означим с A_0 и A_0' съответните им точки от графиката. Ще докажем, че графиката на разглежданото равномерно движение съвпада с правата A_0A_0'. За тази цел да изберем най-напред произволна ивица U, която е определена от две прави успоредни на A_0A_0', и съдържа правата A_0A_0' във вътрешността си. Тогава точката A_0 ще лежи в U и съгласно свойство 1 ще съществува такава околност V на момента t_0, че за всяко t от V съответната точка от графиката да лежи в U. Разделяме интервала (t_0, t_0') на равни интервали, чиято обща дължина α е толкова малка, че първият от тях да се съдържа изцяло във V. От свойство 3 следва, че точките от графиката, съответствуващи на моментите



Черт. 54

$$t_k = t_0 + k\alpha \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots),$$

ще лежат върху правата A_0A_0'. От друга страна, съгласно избора на V всички точки от графиката, които са над V, ще лежат в лентата U (черт. 54). Следователно и всички точки от графиката, които лежат над интервала $(t_0, t_0+\alpha)$, ще лежат в U. Съгласно свойство 2 частта от графиката на движението, която лежи над интервала

$$(t_k, t_{k+1}) \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots),$$

ще се получи от тази над $(t_0, t_0+\alpha)$ чрез успоредно пренасяне по правата A_0A_0' и следователно също ще лежи в U. Понеже k е произволно естествено число, оттук следва, че цялата графика на движението ще лежи в U. Но ивицата U е с произволна ширина (и следователно може да бъде избрана произволно тясна), а това е възможно само когато графиката съвпада с правата A_0A_0'. С това е доказано, че графиката на всяко равномерно движение е права линия.

Преведено на аналитичен език, последното твърдение дава една характеристика на линейните функции. При преводи от механичен на аналитичен език терминът път се замества с термина *нарастване*. Така под нарастване на една функция f в интервала $[x_1, x_2]$ разбираме разликата

$$f(x_2) - f(x_1).$$

Доказаното по-горе може да се формулира и така.

Ако една функция е дефинирана и непрекъсната върху цялата права и за всеки два интервала с равни дължини има еднакви нараствания, тя е линейна.

И наистина при доказателството, че графиката на равномерното движение е права линия, използувахме само неговата непрекъснатост и обстоятелството, че за равни интервали от време точката изминава равни пътища.

Да разгледаме сега една функция f, която е дефинирана и непрекъсната върху цялата числова права и удовлетворява функционалното уравнение

$$f(x_1+x_2) = f(x_1) + f(x_2) \tag{6}$$

при всеки избор на числата x_1 и x_2. Ще докажем най-напред, че за всеки два интервала $[x_1, x_2]$ и $[x_1', x_2']$ с равни дължини функцията f има еднакви нараствания. Наистина равенството на дължините на дадените интервали означава, че $x_2 - x_1 = x_2' - x_1'$, т. е.

$x_2+x_1'=x_2'+x_1$. Последното равенство заедно с (6) дава $f(x_2)+f(x_1')-f(x_2')+f(x_1)$, т. е. $f(x_2)-f(x_1)=f(x_2')-f(x_1')$, което показва действително, че f има еднакви нараствания в интервали с еднакви дължини. Следователно функцията f е линейна, т. е. съществуват две такива константи a и b, че за всяко реално число x да е изпълнено равенството

$$f(x)=ax+b. \tag{7}$$

Тъй като равенството (6) е изпълнено при произволни x_1 и x_2, ще имаме $f(0)=f(0)+f(0)$, т. е. $f(0)=0$. Ако сега заместим в (7) x с нула, ще получим $f(0)=b$, което заедно с последното равенство дава $b=0$, което пък от своя страна заедно със (7) дава

$$f(x)=ax \tag{8}$$

за всяко x.

Така се убедихме, че *всяка функция f, която е дефинирана и непрекъсната върху цялата числова права и удовлетворява функционалното уравнение* (6), *има вида* (8). Тъй като всяка функция от вида (8) очевидно удовлетворява уравнението (6), това функционално уравнение е една характеристика на функциите от вида (8). В следващите два параграфа ще използваме (6), за да намерим аналогични функционални уравнения за показателната и логаритмичната функции.

§ 9. ФУНКЦИОНАЛНО УРАВНЕНИЕ НА ПОКАЗАТЕЛНАТА ФУНКЦИЯ

В този параграф ще покажем, че *всяка функция f, която е дефинирана и непрекъсната върху цялата числова права, не е тъждествено нула и удовлетворява функционалното уравнение*

$$f(x_1+x_2)=f(x_1)\,f(x_2) \tag{1}$$

при всеки избор на x_1 и x_2, е показателна, т. е. съществува такава константа $a>0$, че

$$f(x)=a^x \tag{2}$$

за всяко x.

Чрез логаритмуване уравнението (1) ще сведем към (8.6), но преди това трябва да „узаконим“ логаритмуването. Тъй като дефиниционната област на логаритмичната функция се състои от положителните числа, за тази цел ще покажем, че всяка функция f с предположените свойства е положителна за всяко x. За тази цел да се убедим най-напред, че f не може да се анулира за никое x. Съгласно условието f не е тъждествено нула и следователно съществува число x_0, за което

$$f(x_0)\neq 0. \tag{3}$$

За да покажем, че $f(x)\neq 0$ за всяко x, да положим в (1) $x_1=x$, $x_2=x_0-x$. Ще получим

$$f(x+x_0-x)=f(x)\,.\,f(x_0-x),$$

или, което е все същото,

$$f(x)\,f(x_0-x)=f(x_0) \tag{4}$$

за всяко x, което заедно с (3) дава

$$f(x)\neq 0 \tag{5}$$

за всяко x.

За да докажем, че f е положителна за всяка стойност на аргумента си, е достатъчно да покажем, че f не може да приеме отрицателна стойност за никое x. Наистина

$$f(x)=f\left(\frac{x}{2}+\frac{x}{2}\right)=f\left(\frac{x}{2}\right)f\left(\frac{x}{2}\right)=\left[f\left(\frac{x}{2}\right)\right]^2\geqq 0.$$

Последното неравенство заедно с (5) дава

$$f(x)>0, \tag{6}$$

което е изпълнено за всяко x. Следователно функцията φ, определена с

$$\varphi(x)=\lg f(x), \tag{7}$$

е дефинирана върху цялата числова права. Лесно се вижда, че φ удовлетворява функционалното уравнение (8.6). Наистина за всеки избор на x_1 и x_2 имаме

$$\varphi(x_1+x_2)-\lg f(x_1+x_2)=\lg f(x_1)\,f(x_2)=\lg f(x_1)+\lg f(x_2)$$
$$=\varphi(x_1)+\varphi(x_2).$$

От друга страна, тъй като логаритмичната функция е непрекъсната и f по условие е също непрекъсната, от (3.1) следва, че $\lg f(x)$ е непрекъсната. Следователно φ има вида (8.8), т. е. съществува константа p такава, че $\varphi(x)-px$ за всяко x. Последното равенство заедно със (7) дава $\lg f(x)=px$ или като антилогаритмуваме

$$f(x)=10^{xp}. \tag{8}$$

Ако в (8) положим $10^p = a > 0$, ще получим (2), с което предложението е доказано.

Обратно, ако $f(x) = a^x$, очевидно

$$f(x_1 + x_2) = a^{x_1 + x_2} = a^{x_1} a^{x_2} = f(x_1) f(x_2).$$

Ако f е тъждествено нула, тя удовлетворява (1), но не може да бъде представена във вида (2), понеже $a^x > 0$.

Да резюмираме: *като изключим тривиалния случай $f=0$, няма други непрекъснати функции освен показателната, които да удовлетворяват уравнението (1)*, поради което то се нарича функционално уравнение на показателната функция.

§ 10. ФУНКЦИОНАЛНО УРАВНЕНИЕ НА ЛОГАРИТМИЧНАТА ФУНКЦИЯ

В предния параграф видяхме, че показателната функция се характеризира с уравнението (9.1), което всъщност е правилото за умножение на степени с еднакви основи. При логаритмите такова основно правило е правилото за логаритмуване на произведение. Тук ще покажем, че това правило характеризира логаритмичната функция. По-точно ще покажем, че всяка функция f, дефинирана и непрекъсната в $(0, \infty)$, която не е тъждествено нула и удовлетворява функционалното уравнение

(1) $$f(x_1 x_2) = f(x_1) + f(x_2)$$

за всеки избор на положителните числа x_1 и x_2, е логаритмична, т. е. съществува положителна константа a, такава, че

(2) $$f(x) = \log_a x \qquad (x > 0).$$

За да докажем, че всяка функция f с предположените свойства има вида (2), ще използуваме резултатите от § 8, както направихме при показателната функция. За тази цел ще дефинираме функцията φ посредством равенството

(3) $$\varphi(x) = f(10^x).$$

Ще покажем, че φ е дефинирана и непрекъсната върху цялата числова права и удовлетворява условието за линейност (8.6); от това ще следва, че φ има вида (8.8). Наистина тъй като $10^x > 0$ за всяко x и f е дефинирана за всяка положителна стойност на аргумента си, следва, че $f(10^x) = \varphi(x)$ е дефинирана за всяко x. Понеже 10^x е непрекъсната, f по условие е непрекъсната, съгласно (3.1) φ също е непрекъсната функция. С това е показано, че φ е дефинирана и непрекъсната върху цялата числова права.

За да докажем линейността на φ, да изберем две произволни числа x_1 и x_2 и да образуваме $\varphi(x_1 + x_2)$. Имаме

$$\varphi(x_1 + x_2) = f(10^{x_1 + x_2}) = f(10^{x_1} 10^{x_2}).$$

Съгласно (1) $f(10^{x_1} 10^{x_2}) = f(10^{x_1}) + f(10^{x_2})$. Съгласно (3) $f(10^{x_1}) = \varphi(x_1)$, $f(10^{x_2}) = \varphi(x_2)$. Следователно

$$\varphi(x_1 + x_2) = \varphi(x_1) + \varphi(x_2)$$

при всеки избор на x_1 и x_2. Така установихме, че φ има вида

(4) $$\varphi(\xi) = p\,\xi,$$

където p е константа. Като се вземе пред вид (3), равенството (4) добива вида

(5) $$f(10^\xi) = p\xi.$$

Ако сега в (5) положим $10^\xi = x$, или, което е все същото, $\xi = \lg x$, ще получим

(6) $$f(x) = p \lg x,$$

където $p \neq 0$, тъй като по предположение f не е тъждествено нула.

Читателят отлично знае, че всяко реално число, различно от нула, е десетичен логаритъм на едно единствено положително число, различно от единица. Следователно чрез равенството

(7) $$\frac{1}{p} = \lg a$$

на всяко $p \neq 0$ се съпоставя по единствен начин едно положително число $a \neq 1$ (т. е. $\lg a \neq 0$). Като вземем пред вид полагането (7), равенството (6) добива вида

(8) $$f(x) = \frac{\lg x}{\lg a} \qquad (a > 0,\ a \neq 1).$$

Последното равенство е всъщност равенството (2), което се вижда лесно с помощта на формулата

$$\log_a N = \frac{\log_b N}{\log_b a}$$

при $b = 10$ и $N = x$. С това предложението е доказано.

Непосредствено се вижда, че логаритмичната функция удовлетворява (1), т. е. че съществува решение на това функционално уравнение.

Да резюмираме: *общото решение на функционалното уравнение (1) в множеството на непрекъснатите реални функции (като се изключва тривиалният случай $f=0$) е логаритмичната функция.*

Задачи към глава 2

1. Нека $f(x)=\frac{x}{x+1}$. Да се докаже, че ако положителното число x е приближение на числото 1 с точност 0,2, то $f(x)$ е приближение на $f(1)$ с точност 0,1.

2. Нека $f(x)=\frac{x-1}{x+1}$ и ε е произволно положително число. Да се докаже, че ако положителното число x е приближение на числото 2 с точност $\frac{3}{2}\varepsilon$, то $f(x)$ е приближение на $f(2)$ с точност ε.

3. Нека $f(x)=x^2$ и ε е число, за което $0<\varepsilon<9$. Да се намерят всички положителни числа δ със следното свойство: за всяко положително число x, което е приближение на числото 3 с точност δ, $f(x)$ е приближение на $f(3)$ с точност ε.

Отг. $0<\delta\leq\sqrt{9+\varepsilon}-3$

4. Нека

$$f(x)=\begin{cases}1, & \text{когато } x \text{ е рационално число,}\\ 0, & \text{когато } x \text{ е ирационално число.}\end{cases}$$

Да се докаже, че функцията f е прекъсната за всяко x.

5. Нека

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{1-x^3}-\frac{1}{3(1-x)}, & x\neq 1,\\ \frac{1}{3} & x=1.\end{cases}$$

Да се докаже, че функцията f е непрекъсната за всяко x.

Упътване. Докажете, че $f(x)=\frac{x+2}{3(x^2+x+1)}$ за всяко x.

6. Нека многочленът $P(x)=\sum_{k=0}^{n} a_k x^{n-k}$ приема цели стойности само когато x е цяло число. Да се докаже, че при тези предположения имаме $a_i=0$ $(i=0, 1, \ldots, n-2)$.

7. Нека P е произволен полином. Докажете, че уравнението

$$P(x)=\operatorname{ctg} x$$

притежава поне по едно решение във всеки от интервалите $(k\pi, (k+1)\pi)$ $(k=0, \pm1, \pm2, \ldots)$.

8. В равнината е зададена отсечка CC_1 и точка H от вътрешността ѝ. Да се докаже, че съществува равнобедрен триъгълник ABC, за който CC_1 е височина към основата AB и H е пресечна точка на височините му.

9. Да се докаже, че за всеки четири успоредни равнини $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ съществува правилен тетраедър $A_1A_2A_3A_4$, за който A_i лежи върху α_i $(i=1, 2, 3, 4)$.

10. Да се докаже, че единствените функции f, които са дефинирани и непрекъснати за всички положителни x, не са тъждествено нула и удовлетворяват функционалното уравнение

$$f(xy)=f(x)f(y)$$

са степенните, т. е. функциите от вида x^α, където α е произволна константа.

11. Да се намерят всички двойки от функции S и C, които са дефинирани и непрекъснати върху цялата права и удовлетворяват функционалните уравнения

$$S(x+y)=S(x)C(y)+S(y)C(x),$$
$$C(x+y)=C(x)C(y)+S(x)S(y).$$

Отг.

а) $S(x)=0,\quad C(x)=0;$

б) $S(x)=\frac{a^x}{2},\quad C(x)=\frac{a^x}{2};$

в) $S(x)=-\frac{b^x}{2},\quad C(x)=\frac{b^x}{2};$

г) $S(x)=\frac{a^x-b^x}{2},\quad C(x)=\frac{a^x+b^x}{2}$

Упътване. Докажете, че сумата $C+S$ и разликата $C-S$ удовлетворяват уравнението (9.1).

Глава 3

ПРОИЗВОДНА НА ФУНКЦИЯ

Вече видяхме, че когато една функция е закон на някакво движение, тя е непрекъсната. Но свойството непрекъснатост не характеризира напълно тази класа функции. Наистина освен че е непрекъснато, всяко движение притежава и скорост във всеки момент от времето. На аналитичен език казваме, че функциите, които са закони на движения, притежават производни. Въвеждането на производните, правилата за пресмятането им, както и изучаването на техния механичен и геометричен смисъл са предмета на тази глава. В §1, §2 и §3 е разгледан механичният аспект на понятието производна, а в §4 — геометричния. В §5 и §6 се прави подготовка, необходима за §7, §8 и §9, където са въведени производните, посочени са основните правила за пресмятането им и са намерени производните на някои елементарни функции. Връзката между производна и монотонност на функция е разгледана в §10. С числото на Непер са свързани §11 и §16. В §12 е изучен един аналог на тригонометричните функции. Производните на показателната и логаритмичната функция са пресметнати съответно в §13 и §14, а §15 съдържа таблицата на производните.

§ 1. СКОРОСТ НА РАВНОМЕРНОТО ДВИЖЕНИЕ

Скоростта на едно равномерно движение се дефинира като отношение на пътя към дължината на интервала от време, за който движещата се точка е изминала този път. Лесно се вижда, че тя е постоянна, т. е. не зависи от интервала от време. Наистина от глава 2, §8 знаем, че графиката на всяко равномерно движение е права линия. Следователно законът на произволно равномерно движение има вида

$$S(t)=vt+a, \tag{1}$$

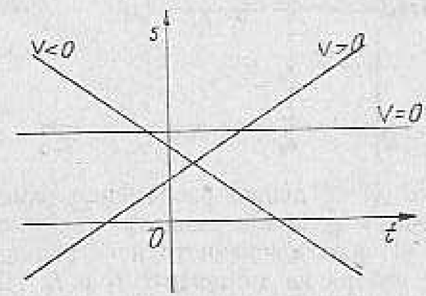
където v и a са константи. Нека t_1 и t_2 са два различни момента от времето. Тогава пътят, изминат в интервала (t_1, t_2), е

$$S(t_2)-S(t_1)=(vt_2+a)-(vt_1+a)=v(t_2-t_1),$$

а дължината на този интервал е t_2-t_1. Тогава съгласно дефиницията скоростта ще бъде

$$\frac{S(t_2)-S(t_1)}{t_2-t_1}=\frac{v(t_2-t_1)}{t_2-t_1}=v, \tag{2}$$

което е действително постоянна величина.



Черт. 55

Горните разсъждения показват също така, че скоростта съвпада с ъгловия коефициент на графиката на движението; скоростта е толкова по-голяма, колкото графиката е по-стръмна. Графиките на праволинейни равномерни движения с положителна, отрицателна и нулева скорост са изобразени на черт. 55.

§ 2. СРЕДНА СКОРОСТ

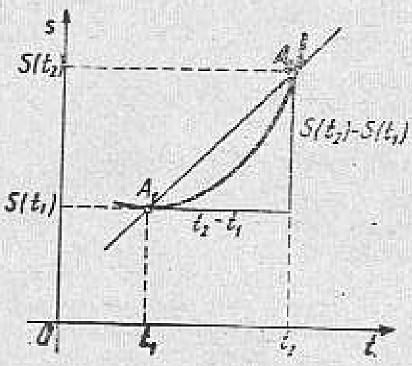
Нека точката M извършва произволно (не непременно равномерно) движение по оста S. Ако законът на движението е $S=S(t)$, а t_1 и t_2 са два различни момента от времето, изминатият път в интервала (t_1, t_2) е

$$S(t_2)-S(t_1).$$

Под *средна скорост* $v_{ср}$ на M в интервала (t_1, t_2) разбираме скоростта, с която една равномерно движеща се точка би изминала същия път в интервала от време (t_1, t_2). Тогава

$$v_{ср}=\frac{S(t_2)-S(t_1)}{t_2-t_1}. \tag{1}$$

Това е изобразено на черт. 56. От него се вижда, че средната скорост в интервала (t_1, t_2) съвпада с ъгловия коефициент на секущата A_1A_2.



Черт. 56

Когато точката M се движи равномерно, средната ѝ скорост в произволен интервал от време съвпада със скоростта ѝ, както тя бе въведена в §1. Ако движението не е равномерно, средната скорост зависи от избора на моментите t_1 и t_2. Нещо повече: даже ако при едно неравномерно движение фиксираме момента t_1, средната скорост ще се променя при изменението на t_2. За да се убедим в това, ще покажем, че ако средните скорости във всички интервали (t_1, t) съвпадат, то M се движи равномерно. Наистина да означим с v общата стойност на всички така споменати средни скорости. Тогава

$$\frac{S(t)-S(t_1)}{t-t_1}=v,$$

т. е. $S(t)-S(t_1)=v(t-t_1)$ и следователно

$$S(t)=vt+a,$$

където v и $a=S(t_1)-vt_1$ са константи, поради което движението е равномерно.

Пример 1. Автомобил се движи по шосето от Търново за Варна и изминава 100-те километра от Търново до Търговище за 2 часа, а 130-те километра от Търговище до Варна — също за 2 часа. Тогава средната скорост в първия участък от пътя е $\frac{100}{2}=50$ км/ч, а в целия път $\frac{230}{4}=57{,}5$ км/ч.

Пример 2. Нека законът на движение на точката M е $S(t)=r\cos t$ (гл. 2, §1, пример 2). Тогава средната скорост в произволен интервал от време (t_1, t_2) $(t_1 \neq t_2)$ ще бъде

$$\frac{S(t_2)-S(t_1)}{t_2-t_1}=r\,\frac{\cos t_2-\cos t_1}{t_2-t_1}=-2r\frac{\sin\frac{t_2+t_1}{2}\sin\frac{t_2-t_1}{2}}{t_2-t_1}.$$

Пример 3. Ако точката M пада свободно, законът на движението ѝ е $S(t)=\frac{g\,t^2}{2}$, където g е земното ускорение. В този случай средната скорост се пресмята така

$$S(t_2)-S(t_1)=\frac{g}{2}\left(t_2^2-t_1^2\right)=\frac{g}{2}\,(t_2-t_1)(t_2+t_1),$$

поради което

$$v_{cp}=\frac{S(t_2)-S(t_1)}{t_2-t_1}=g\,\frac{t_2+t_1}{2}.$$

Пример 4. Нека $S(t)=t^n$, където n е някое от числата 1, 2, 3, … . В този случай

$$S(t_2)-S(t_1)=t_2^n-t_1^n=(t_2-t_1)\left(t_2^{n-1}+t_2^{n-2}t_1+\dots+t_1^{n-1}\right)$$

съгласно гл. 1, § 2, (4), поради което за средната скорост получаваме

$$v_{cp}=t_2^{n-1}+t_2^{n-2}t_1+\dots+t_1^{n-1}.$$

§ 3. МОМЕНТНА СКОРОСТ

Нека точката M се движи със закон на движение $S=S(t)$ и t_0 е произволен момент от времето. За произволен момент t, $t \neq t_0$, средната скорост на движението в интервала (t_0, t) се дава от формулата

$$v_{cp}=\frac{S(t)-S(t_0)}{t-t_0}. \tag{1}$$

Можем да скъсяваме интервала (t_0, t), като приближаваме t неограничено към дадения момент t_0 отляво или отдясно (при това изминатият път $S(t)-S(t_0)$ ще става произволно малък). В общия случай средната скорост ще се променя, понеже тя зависи от избора на t. Но колкото е по-къс интервалът (t_0, t), толкова повече движението на M в този интервал ще наподобява равномерното, защото в колкото по-малка околност на t_0 се изменя t, толкова по-малко ще се изменя средната скорост (1). Така се убеждаваме, че когато t се приближава неограничено до t_0 (чрез стойности, различни от t_0), средната скорост се приближава неограничено към едно, зависещо само от t_0 число V_0. Това число се нарича *скорост на точката M в момента t_0 (моментна скорост)*.

Пример 1. Нека $S(t)=vt+a$, т. е. движението е равномерно. Както знаем средната скорост v_{cp} в произволен интервал (t_0, t), $t_0 \neq t$ се дава с формулата

$$v_{cp}=v,$$

т. е. не зависи от t. Следователно при неограниченото приближаване на t към t_0 тя ще приема постоянно стойност v, поради което скоростта в момента t_0 съвпада с v. Както трябваше и да се очаква, оказа се, че равномерното движение има една и съща скорост във всеки момент и тя съвпада със скоростта, която бе дефинирана в §1.

Пример 2. Да намерим скоростта при свободното падане. От § 2, пример 3 знаем, че средната скорост в интервала (t_0, t), $t_0 \neq t$ е

$$v_{cp}=g\,\frac{t+t_0}{2}.$$

Ако сега оставим t да се приближава неограничено към t_0, v_{cp} ще се приближава неограничено към $g\frac{t_0+t_0}{2}=g\,t_0$, т. е. скоростта на свободно падащо тяло в произволен момент t_0 е

$$v_0=g\,t_0.$$

Пример 3. Да намерим скоростта на движението със закона $S(t)=t^n$. От §2, пример 4 знаем, че средната скорост в интервала (t_0, t) е

$$v_{cp}=t^{n-1}+t^{n-2}t_0+\cdots+t\,t_0^{n-2}+t_0^{n-1}.$$

Тъй като полиномът $P(t)=t^{n-1}+t^{n-2}t_0+\cdots+t_0^{n-1}$ е непрекъсната функция на t, при неограниченото приближаване на t към t_0 $P(t)$ ще се приближава неограничено към

$$P(t_0)=t_0^{n-1}+t_0^{n-2}\,t_0+\cdots+t_0^{n-1}=n\,t_0^{n-1}$$

и следователно скоростта в момента t_0 е

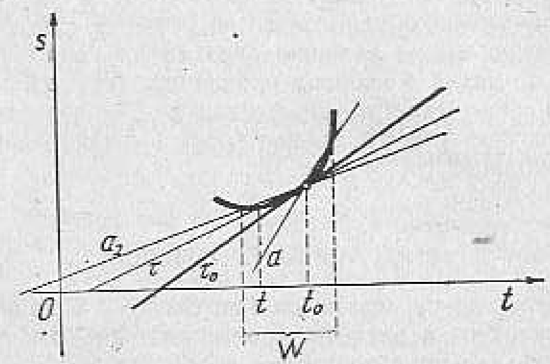
$$v_0=n\,t_0^{n-1}.$$

§ 4. ТАНГЕНТА КЪМ КРИВА

В този параграф ще изясним геометричната природа на предните разглеждания. Задачата за скоростите е тясно свързана със задачата за тангентите. Да разгледаме черт. 57. На него е изобразена графиката на движението със закон

$$S=S(t), \tag{1}$$

т. е. графиката на функцията (1). От §2 знаем, че средната скорост на движението в интервала (t_o, t) не е нищо друго освен ъгловия коефициент на секущата τ. Когато t се приближава неограничено към t_o, секущата τ се приближава неограничено към *допирателната (тангента)* τ_o към графиката в точката $(t_o, S(t_o))$.



Черт. 57

Поради това ъгловият коефициент на секущата ще се приближава неограничено към ъгловия коефициент на тангентата. Това означава, че при неограниченото приближаване на t към t_o средната скорост в интервала (t_o, t) ще се приближава неограничено към ъгловия коефициент на тангентата τ_o. Следователно скоростта в момента t_o съвпада с ъгловия коефициент на тангентата τ_o.

Тази геометрична интерпретация на скоростта е обобщение на това, което знаем за равномерното движение. Наистина графиката на равномерното движение е права линия и скоростта му съвпада с ъгловия коефициент на тази права; графиките на по-сложните движения са криви и скоростта на едно такова движение в даден момент t_o съвпада с ъгловия коефициент на тангентата в съответната точка от графиката.

Така посоченият геометричен еквивалент на скоростта дава възможност за по-дълбоко вникване в смисъла на думите: „средната скорост се приближава неограничено до скоростта в момента t_o, когато t се приближава неограничено към t_o". Да означим с v_o ъгловия коефициент на тангентата τ_o и да разгледаме произволна околност (v_1, v_2) на v_o. Нека a_1 и a_2 са правите, които минават през точката $(t_o, S(t_o))$ и имат ъглови коефициенти съответно v_1 и v_2. От черт. 57 се вижда, че съществува такава околност w на момента t_o, че за всяко t от тази околност секущата τ през съответната точка от графиката да лежи в ъгъла, заграден от правите a_1 и a_2. Това означава, че ъгловият коефициент на τ се намира между ъгловите коефициенти на a_1 и a_2, т. е.

$$(2) \qquad v_1 < \frac{S(t)-S(t_0)}{t-t_0} < v_2 .$$

И така за произволна околност (v_1, v_2) на v_0 съществува такава околност w на t_0, че за всяко $t \in w$ да е в сила неравенството (2). Колкото по-малка е избрана околността (v_1, v_2), толкова по-малка изобщо ще бъде и околността w с горното свойство. Същественото тук е, че такава околност w на t_0 съществува за произволна околност (v_1, v_2) на v_0.

§ 5. ГРАНИЦИ НА ФУНКЦИИ

В предните два параграфа се запознахме с механичния и геометричния аналог на понятието производна: избързвайки, можем да кажем грубо, че производната е скоростта, а също така, че тя е ъгловият коефициент на тангентата. При въвеждането на последните две понятия често използувахме думи като: „Стойностите на функцията f се приближават неограничено към числото l, когато аргументът x се приближава неограничено към числото a". Когато това е така, обикновено пишем

$$(1) \qquad \lim_{x \to a} f(x) = l$$

(чете се: лимес $f(x)$, когато x клони към a, е равно на l) и казваме, че функцията f има граница l, когато x клони към a.

Понятието граница е фундаментално. Целият математически анализ се основава върху него. То е необходимо за въвеждането на основното понятие на диференциалното смятане — производната.

Думите „стойностите на функцията f се приближават неограничено към числото l, когато аргументът x се приближава неограничено към числото a" съдържат неяснота. За да разберем това, ще разгледаме един пример. Да изберем няколко стойности на x, по-големи от 2, и да пресметнем съответните стойности на x^2:

x	3	2,5	2,4	2,3	2,2	2,1	2,05	2,04	2,03	2,02
x^2	9	6,25	5,76	5,29	4,84	4,41	4,2025	4,1616	4,1209	4,0804

От тази таблица се вижда, че когато x се приближава към 2, оставайки по-голямо от 2, съответните стойности на x^2 се приближават все повече и повече към 4. Но те се приближават все повече и повече и към 3. При това положение кое от двете числа 3 и 4 следва да бъде наречено граница на x^2, когато x клони към 2?

Интуитивно ясните неща се оказват понякога трудно уловими. И този път яснотата се внася с помощта на понятието околност. Последният абзац на предния параграф показва как може да се направи това.

Казваме, че функцията f има граница l, когато аргументът x клони към a, ако за всяка околност U на l съществува такава околност V на a, че за всяко $x \in V$ да имаме $f(x) \in U$.

В това определение на граница на функция терминът „неограничено приближаване" не фигурира. Въпреки това (а може би тъкмо поради това) то съдържа цялата истина.

Границите са тясно свързани с непрекъснатостта. Да сравним току-що дадената дефиниция за граница на функция с тази за непрекъснатост от стр. 58. Виждаме, че ако функцията f е непрекъсната в някоя точка a, то

$$(2) \qquad \lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

Както вече знаем, всички елементарни функции са непрекъснати, поради което за всяка от тях ще бъде в сила равенството (2). Така например

$$\lim_{x \to 2} x^2 = 2^2 = 4,$$

$$\lim_{x \to a} \sin x = \sin a,$$

$$\lim_{x \to a} \operatorname{ctg} x = \operatorname{ctg} a \quad (a + k\pi),$$

$$\lim_{x \to a} P(x) = P(a),$$

където P е произволен полином и т. н.

По този начин намирането на границата на функция f, която е непрекъсната в точката a, се свежда до равенство (2). Когато функцията f е прекъсната в точката a, границата $\lim_{x \to a} f(x)$ може и да не съществува, но в случай че тя съществува, сигурно е различна от $f(a)$. Наистина, ако в дефиницията на граница положим $l = f(a)$, тя се превръща в тази за непрекъснатост и следователпо винаги когато е налице (2), функцията f е непрекъсната в точката a.

За разлика от непрекъснатостта въпросът за съществуване на граница на функция може да се поставя и когато функцията не е дефинирана в точката a. Така например да разгледаме функцията

(3) $$f(x)=\frac{1}{x^2-1}-\frac{1}{2(x-1)}.$$

Тя не е дефинирана за $x=1$. Ако преобразуваме израза за $f(x)$, ще получим

$$f(x)=-\frac{x-1}{2(x-1)(x+1)}=-\frac{1}{2(x+1)}.$$

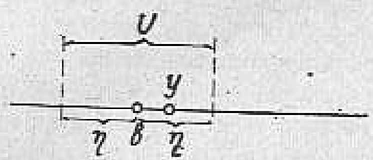
Така се убедихме, че функцията $f(x)$ съвпада с функцията $-\frac{1}{2(x+1)}$. За разлика от f последната е дефинирана и непрекъсната и при $x=1$, поради което

$$\lim_{x\to 1}\left[-\frac{1}{2(x+1)}\right]=-\frac{1}{4}.$$

Оттук следва, че и

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{x^2-1}-\frac{1}{2(x-1)}\right)=-\frac{1}{4}.$$

Да се върнем отново към дефиницията на граница. Очевидно всяка околност на b съдържа околност на b с център точката b (черт. 58). Всяка такава околност се нарича *симетрична околност* на b. Тези бележки показват, че в дефиницията на граница вместо с произволни околности можехме да си служим



Черт. 58

само със симетрични. Това е удобно, понеже симетричните околности се записват лесно с помощта на неравенства. Да разгледаме произволна симетрична околност w на b и да означим с η

половината от дължината ѝ. Ясно е, че $\eta>0$ и че условието $y\in W$ е еквивалентно с неравенството $|y-b|<\eta$. От всичко това се вижда, че дефиницията на граница на функция може да се прередактира така.

Казваме, че функцията f има граница l, когато аргументът x клони към a, ако за всяко положително число ε съществува такова положително число δ, че за всяко x от дефиниционната област на f, за което е изпълнено неравенството

(4) $$|x-a|<\delta,$$

да имаме

(5) $$|f(x)-l|<\varepsilon.$$

Да обърнем внимание върху обстоятелството, че горното прередактиране може да се извърши, като в дефиницията на граница на функция се направят следните замени:

„околност U на l“ $\Rightarrow$ „положително число ε“,
„околност на a“ $\Rightarrow$ „положително число δ“,
„$x\in V$ “ $\Rightarrow$ „x за което $|x-a|<\delta$“,
„$f(x)\in U$ “ $\Rightarrow$ „$|f(x)-l|<\varepsilon$“ “.

Последната дефиниция за граница на функция се нарича понякога ε—дефиниция.

За да илюстрираме ε-дефиницията да докажем, че

(6) $$\lim_{x\to 2} x^3=8.$$

Очевидно

$$|x^3-8|=|x-2|\,.\,|x^2+2x+4|.$$

Да се ограничим със стойности на x, за които

(7) $$1<x<3.$$

Тогава

$$|x^2+2x+4|<19$$

и следователно за всяко x, за което са изпълнени неравенствата (7), ще имаме

$$|x^3-8|\leq 19\,|x-2|.$$

Нека сега ε е произволно положително число. Да изберем положителното число δ по такъв начин, че

(8) $$\delta<1 \quad \text{и} \quad \delta<\frac{\varepsilon}{19}.$$

Да разгледаме сега произволно x, за което

(9) $$|x-2|<\delta.$$

От (9) и (8) следва (7), поради което ще имаме

$$|x^3-8|\leq 19\,|x-2|$$

и като използуваме отново (8) и (9), получаваме

(10) $$|x^3-8|<\varepsilon.$$

И така за всяко положително число ε успяхме да намерим такова положително число δ, че винаги когато е изпълнено неравенството (9), да е изпълнено и неравенството (10). Съгласно ε-дефиницията на граница на функция с това е доказано равенство (6).

По-долу ще дадем три правила за пресмятане на граници, които ще бъдат използувани по-нататък.

Нека функциите f_1 и f_2 имат граници, когато x клони към a и

$$\lim_{x\to a} f_1(x)=l_1, \qquad \lim_{x\to a} f_2(x)=l_2.$$

Тогава

(11) $$\lim_{x\to a}[f_1(x)\pm f_2(x)]=l_1\pm l_2,$$

(12) $$\lim_{x\to a} f_1(x)f_2(x)=l_1l_2$$

и ако $l_2\neq 0$, то

(13) $$\lim_{x\to a}\frac{f_1(x)}{f_2(x)}=\frac{l_1}{l_2}.$$

Формулите (11), (12) и (13) се свеждат до добре утвърдената вече представа, че $l_1\pm l_2$, l_1l_2 и $\frac{l_1}{l_2}$, $l_2\neq 0$ могат да се пресметнат с произволна отнапред зададена точност, стига вместо l_1 и l_2 да се вземат достатъчно точни приближения и на факта, че $f_1(x)$ и $f_2(x)$ могат да се направят произволно близки съответно до l_1 и l_2, когато x е достатъчно близко до a.

§ 6. НЯКОИ ОСНОВНИ ГРАНИЦИ

В този параграф ще намерим някои граници, които ще използуваме по-късно. Най-напред ще докажем, че

(1) $$\lim_{x\to a}\frac{x^n-a^n}{x-a}=na^{n-1} \qquad (n=1, 2, 3, \ldots).$$

За тази цел ще напомним, че

(2) $$\frac{x^n-a^n}{x-a}=x^{n-1}+x^{n-2}a+\cdots+a^{n-1}.$$

От друга страна, полиномът

$$P(x)=x^{n-1}+x^{n-2}a+\cdots+a^{n-1}$$

е непрекъснатата функция на x и следователно

$$\lim_{x\to a} P(x)=P(a),$$

т. е.

$$\lim_{x\to a}(x^{n-1}+x^{n-2}a+\cdots+a^{n-1})=na^{n-1}.$$

Последното равенство и (2) доказват (1).

Като използуваме (1), ще докажем следното равенство:

(3) $$\lim_{x\to a}\frac{\sqrt[n]{x}-\sqrt[n]{a}}{x-a}=\frac{1}{n\sqrt[n]{a^{n-1}}} \qquad (n=1, 2, 3, \ldots).$$

За целта да положим

(4) $$y=\sqrt[n]{x}, \qquad \alpha=\sqrt[n]{a}.$$

Тогава ще имаме

(5) $$\frac{\sqrt[n]{x}-\sqrt[n]{a}}{x-a}=\frac{y-\alpha}{y^n-\alpha^n}.$$

От друга страна, $\sqrt[n]{x}$ е непрекъсната функция на x и от (4) следва, че y клони към α, когато x клони към a. При това положение (5) дава

(6) $$\lim_{x\to a}\frac{\sqrt[n]{x}-\sqrt[n]{a}}{x-a}=\lim_{y\to\alpha}\frac{y-\alpha}{y^n-\alpha^n}.$$

Като приложим (1) и (5.13), получаваме

(7) $$\lim_{y\to\alpha}\frac{y-\alpha}{y^n-\alpha^n}=\lim_{y\to\alpha}\frac{1}{\left(\frac{y^n-\alpha^n}{y-\alpha}\right)}=\frac{1}{n\alpha^{n-1}},$$

което заедно с (4) дава

(8) $$\lim_{y\to\alpha}\frac{y-\alpha}{y^n-\alpha^n}=\frac{1}{n\sqrt[n]{a^{n-1}}}$$

и (3) следва от (6) и (8).

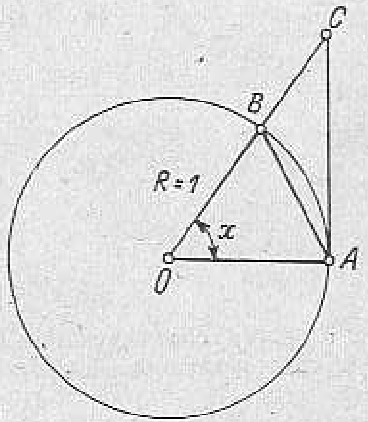
Сега ще спрем нашето внимание на следната формула:

(9) $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

За да докажем (9), ще имаме нужда от неравенствата

(10) $$\sin x<x<\operatorname{tg} x \qquad \left(0<x<\frac{\pi}{2}\right).$$

В кръг с радиус 1 да разгледаме острия ъгъл $\sphericalangle AOB$, хордата AB и тангентата AC към окръжността в точката A (черт. 59). Тогава очевидно лицето на сектора AOB е заключено между лицето на триъгълника AOB и лицето на триъгълника AOC. Да



Черт. 59

означим с x—мерното число на $\sphericalangle AOB$ в радиани. Тогава дъгата $\widehat{AB}$ ще бъде равна на x и нерваенствата между лицата могат да се запишат така:

$$\frac{1}{2}\sin x<\frac{1}{2}\, x<\frac{1}{2}\operatorname{tg} x,$$

откъдето след съкращаване на $\frac{1}{2}$ получаваме (10).

Ако $0<x<\frac{\pi}{2}$, то $\sin x>0$ и (10) след делене на $\sin x$ дава

$$1>\frac{\sin x}{x}>\cos x,$$

откъдето

$$0<1-\frac{\sin x}{x}<1-\cos x.$$

Но

$$1-\cos x=2\sin^2\frac{x}{2}<2\sin\frac{x}{2}<2\cdot\frac{x}{2}=x$$

(съгласно (10)), така че

$$0<1-\frac{\sin x}{x}<x,$$

откъдето получаваме неравенството

(11) $$\left|\frac{\sin x}{x}-1\right|<x,$$

което очевидно запазва валидността си и след като сменим знака на x, т. е. ще бъде изпълнено за всички $x\neq 0$, за които $|x|<\frac{\pi}{2}$.

Неравенството (11) решава въпроса. Наистина нека ε е произволно положително число, а δ е по-малкото от числата ε и $\frac{\pi}{2}$. Когато

(12) $$|x-0|<\delta,$$

т. е. $|x|<\delta$, можем най-напред да приложим неравенството (11) $\left(\text{понеже } \delta\leqq\frac{\pi}{2}\right)$, а от него следва, че

(13) $$\left|\frac{\sin x}{x}-1\right|<\varepsilon,$$

тъй като $\delta\leqq\varepsilon$.

И така за всяко положително число ε намерихме такова положително число δ, че винаги когато е изпълнено неравенството (12), да е изпълнено и неравенството (13). Съгласно ε-дефиницията на граница на функция това означава, че е в сила формула (9).

§ 7. ПРОИЗВОДНИ

Нека функцията f е дефинирана в някаква околност на точката a. *Под производна на функцията f в точката a разбираме границата*

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a},$$

когато тя съществува. Производната на функцията f в точката a се означава със символа $f'(a)$, т. е. по определение имаме

(1) $$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}.$$

Да разгледаме няколко примера, в които се използува непосредствено горната дефиниция.

Пример 1. Нека

$$f(x)=x^2+px+q.$$

За нарастването на f имаме

$$f(x)-f(a)=x^2+px+q-(a^2+pa+q)=x^2-a^2+p(x-a)$$
$$=(x-a)(x+a+p).$$

Следователно

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{(x-a)(x+a+p)}{x-a}=\lim_{x\to a}(x+a+p)=2a+p,$$

тъй като $x+a+p$ е непрекъсната функция на x.

Пример 2. Нека

$$f(x)=\frac{1}{x}.$$

За нарастването на f имаме

$$f(x)-f(a)=\frac{1}{x}-\frac{1}{a}=\frac{a-x}{ax}\qquad (a\neq 0).$$

Следователно

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{a-x}{ax(x-a)}=\lim_{x\to a}\left[-\frac{1}{ax}\right]=-\frac{1}{a^2},$$

тъй като $-\frac{1}{ax}$ е непрекъсната функция на x.

Пример 3. Нека

$$f(x)=\sqrt{x}.$$

За нарастването имаме

$$f(x)-f(a)=\sqrt{x}-\sqrt{a}=\frac{x-a}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}.$$

Следователно

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{(x-a)}{(\sqrt{x}+\sqrt{a})(x-a)}=\frac{1}{2\sqrt{a}}\qquad (a\neq 0),$$

тъй като $\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}$ е непрекъсната функция на x.

Точките, в които една функция f има производна, образуват едно множество от числа, което представлява дефиниционна област на една нова функция. Наистина на всяка точка x, в която функцията f има производна, можем да съпоставим стойността $f'(x)$ на производната на f в точката x. Така получената функция се нарича производна на f и се означава с f'.

Да поясним това върху горните примери. Да видим как изглежда горното съпоставяне в пример 1. Вече видяхме, че за всяко a имаме $f'(a)=2a+p$, или, което е все същото, $f'(x)=2x+p$ за всяко x. Това често се записва и така:

$$(x^2+px+q)'=2x+p.$$

Аналогично производните от следващите два примера се записват съответно

$$\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}\qquad (x\neq 0),$$
$$(\sqrt{x})'=\frac{1}{2\sqrt{x}}\qquad (x\neq 0).$$

Не винаги една функция притежава производна във всяка точка от дефиниционната си област. Така например функцията $\sqrt{x}$ не притежава производна при $x=0$. Наистина изразът

$$\frac{\sqrt{x}-\sqrt{0}}{x-0}=\frac{\sqrt{x}}{x}=\frac{1}{\sqrt{x}}$$

не притежава граница, когато x клони към нула, защото знаменателят клони към нула, поради което $\frac{1}{\sqrt{x}}$ расте неограничено. Да отбележим, че числото 0 е от дефиниционната област на $\sqrt{x}$.

Ако сравним дефиницията на производна с тази на моментна скорост, ще забележим, че *моментната скорост в някой момент t_0 не е нищо друго освен производната на закона на движението в този момент.* Ако си припомним, че скоростта в момента t_0 съвпада с ъгловия коефициент на тангентата, става ясно, че *производната на една функция f в някоя точка a от дефиниционната ѝ област е равна на ъгловия коефициент на тангентата към графиката на функцията f в точката $(a, f(a))$.*

Когато функцията f притежава производна в някоя точка a, казваме, че функцията f е *диференцируема* в тази точка. Поради това търсенето на производните се нарича *диференциране*, а частта от анализа, посветена на този кръг въпроси — *диференциално смятане.*

Почти очевидно е, че ако една функция е диференцируема в някоя точка a, тя е и непрекъсната в тази точка. Наистина, щом отношението (1) притежава граница и знаменателят му $x-a$ клони към нула, числителят $f(x)-f(a)$ също ще клони към нула, когато x клони към a. Тогава ще имаме

$$\lim_{x\to a} f(x)=f(a),$$

което, както знаем от §5, е достатъчно, за да твърдим, че функцията f е непрекъсната в точката a.

И така видяхме, че всяка диференцируема функция е непрекъсната. Обратното изобщо не е вярно. Например функцията $\sqrt{x}$ е непрекъсната при $x=0$, но както вече се убедихме, не е диференцируема в тази точка. В края на миналия век немският математик Вайерщрас посочи пример на функция, която е дефинирана и непрекъсната върху цялата числова права, но не е диференцируема в никоя точка. Графиката на една такава функция не притежава тангента в никоя своя точка.

§ 8. ПРАВИЛА ЗА ПРЕСМЯТАНЕ НА ПРОИЗВОДНИ

В този параграф ще докажем някои прости правила за пресмятане на производни, които значително улесняват намирането на производните на елементарните функции.

Производната на произведение от константа и функция е равна на произведението на константата и производната на функцията, т. е.

(1) $$(cf)'=cf',$$

където c е константа, а f е функция.

За да докажем формула (1), ще положим

$$\varphi(x)=c\,f(x).$$

За нарастването на φ имаме

$$\varphi(x)-\varphi(a)=c\,(f(x)-f(a)).$$

Следователно

$$\varphi'(a)=\lim_{x\to a}\frac{\varphi(x)-\varphi(a)}{x-a}=c\,\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{f(x)-f(a)}=c\,f'(a),$$

с което формула (1) е доказана.

Пример. Вече знаем, че $(\sqrt{x})'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$. Следователно

$$(2\sqrt{x})'=2(\sqrt{x})'=\frac{1}{\sqrt{x}}.$$

Производната на сума на две функции е равна на сумата от производните на функциите, т. е.

(2) $$(f+g)'=f'+g'.$$

За да докажем формула (2), ще положим

$$\varphi(x)=f(x)+g(x).$$

За нарастването на φ имаме

$$\varphi(x)-\varphi(a)=f(x)+g(x)-(f(a)+g(a))=f(x)-f(a)+g(x)-g(a).$$

Следователно

$$\varphi'(a)=\lim_{x\to a}\frac{\varphi(x)-\varphi(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)+g(x)-g(a)}{x-a}$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}+\lim_{x\to a}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}=f'(a)+g'(a),$$

с което формула (2) е доказана.

Пример. Като приложим доказаните две правила, можем да получим

$$\left(\sqrt{x}-\frac{1}{x}\right)'=(\sqrt{x})'+\left(-\frac{1}{x}\right)'=(\sqrt{x})'-\left(\frac{1}{x}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{x^2}.$$

Производната на произведението на две функции f и g се дава с формулата

(3) $$(fg)'=f'g+fg'.$$

За да докажем формула (3), ще положим

$$\varphi(x)=f(x)\,g(x).$$

За нарастването на φ имаме

$$\varphi(x)-\varphi(a)=f(x)\,g(x)-f(a)\,g(a)$$

$$=f(x)\,g(x)-f(a)\,g(x)+f(a)\,g(x)-f(a)\,g(a)$$

$$=(f(x)-f(a))\,g(x)+f(a)\,(g(x)-g(a)).$$

Следователно

$$\varphi'(a)=\lim_{x\to a}\frac{\varphi(x)-\varphi(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{(f(x)-f(a))\,g(x)+f(a)\,(g(x)-g(a))}{x-a},$$

поради което

(4) $$\varphi'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\lim_{x\to a}g(x)+f(a)\lim_{x\to a}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}.$$

Тъй като функцията g е диференцируема в точката a, тя е непрекъсната в тази точка и следователно $\lim_{x\to a}g(x)=g(a)$, което заедно с (4) дава

$$\varphi'(a)=f'(a)\,g(a)+f(a)\,g'(a)$$

и формула (3) е доказана.

Пример. Като използуваме пример 1 и пример 3 от §7 и приложим правилото за диференциране на произведение, можем да получим

$$((x^2+px+q)\sqrt{x})'=(x^2+px+q)'\sqrt{x}+(x^2+px+q)(\sqrt{x})'$$

$$=(2x+p)\sqrt{x}+(x^2+px+q)\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$=\frac{5}{2}x\sqrt{x}+\frac{3}{2}p\sqrt{x}+\frac{q}{2\sqrt{x}}.$$

Производната на частното на две функции f и g (в точка, в която знаменателят е различен от нула) *се дава с формулата*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'=\frac{f'g-fg'}{g^2} \tag{5}$$

За да докажем формула (5), ще положим

$$\varphi(x)=\frac{f(x)}{g(x)}.$$

За нарастването на φ имаме

$$\varphi(x)-\varphi(a)=\frac{f(x)}{g(x)}-\frac{f(a)}{g(a)}=\frac{f(x)g(a)-f(a)g(x)}{g(x)g(a)}$$

$$=\frac{f(x)g(a)-f(a)g(a)+f(a)g(a)-f(a)g(x)}{g(x)g(a)}$$

$$=\frac{(f(x)-f(a))g(a)-f(a)(g(x)-g(a))}{g(x)g(a)}.$$

Следователно

$$\varphi'(a)=\lim_{x\to a}\frac{\varphi(x)-\varphi(a)}{x-a}=\frac{\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}g(a)-f(a)\lim\limits_{x\to a}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}}{\lim\limits_{x\to a}g(x)g(a)}$$

$$=\frac{f'(a)g(a)-f(a)g'(a)}{(g(a))^2},$$

с което формула (5) е доказана.

Пример.

$$\left(\frac{\sqrt{x}}{x^2+px+q}\right)'=\frac{(\sqrt{x})'(x^2+px+q)-\sqrt{x}(x^2+px+q)'}{(x^2+px+q)^2}$$

$$=\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(x^2+px+q)-\sqrt{x}(2x+p)}{(x^2+px+q)^2}$$

$$=\frac{q-px-3x^2}{2\sqrt{x}(x^2+px+q)^2}.$$

Производната на съставната функция

$$\Phi(x)=F(f(x)) \tag{6}$$

се дава с формулата

$$(F(f))'=F'(f).f'. \tag{7}$$

За нарастването на функцията (6) имаме

$$\Phi(x)-\Phi(a)=F(f(x))-F(f(a))$$

$$=\frac{F(f(x))-F(f(a))}{f(x)-f(a)}(f(x)-f(a)).$$

Да намерим най-напред

$$\lim_{x\to a}\frac{F(f(x))-F(f(a))}{f(x)-f(a)}.$$

За тази цел да отбележим, че функцията f е диференцируема в точката a и следователно е непрекъсната в тази точка, поради което

$$\lim_{x\to a}f(x)=f(a). \tag{8}$$

Следователно, ако положим $f(x)=u$, ще имаме

$$\lim_{x\to a}\frac{F(f(x))-F(f(a))}{f(x)-f(a)}=\lim_{u\to f(a)}\frac{F(u)-F(f(a))}{u-f(a)},$$

поради което

$$\lim_{x\to a}\frac{F(f(x))-F(f(a))}{f(x)-f(a)}=F'(f(a)). \tag{9}$$

Следователно

$$\Phi'(a)=\lim_{x\to a}\frac{\Phi(x)-\Phi(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{F(f(x))-F(f(a))}{f(x)-f(a)}\cdot\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$
$$=F'(f(a)).f'(a),$$

с което формула (7) е доказана.

Пример. Да положим $F(u)=\sqrt{u}$ и $f(x)=x^2+px+q$. Тогава $\Phi(x)=\sqrt{x^2+px+q}$ и следователно

$$(\sqrt{x^2+px+q})'=\frac{1}{2\sqrt{x^2+px+q}}\,(x^2+px+q)'$$
$$=\frac{2x+p}{2\sqrt{x^2+px+q}}.$$

§ 9. ПРОИЗВОДНИ НА НЯКОИ ЕЛЕМЕНТАРНИ ФУНКЦИИ

В този параграф ще намерим производните на някои функции, необходими за намирането на производните на голям брой елементарни функции.

Производната на константа е нула, т. е.

(1) $$(c)'=0.$$

Наистина твърдението следва непосредствено от обстоятелството, че нарастването на тази функция е нула.

Производната на функцията x^α, където α е константа, се дава с формулата

(2) $$(x^\alpha)'=\alpha x^{\alpha-1},$$

където α е произволно реално число.

Ще разгледаме най-напред случая, когато показателят е цяло неотрицателно число. При $\alpha=0$ формула (2) е очевидна. Наистина от лявата ѝ страна фигурира производната на константата 1, а от дясната — числото нула. При $\alpha=n$ $(n=1, 2, 3,\ldots)$ производната намираме така. За нарастването на $f(x)=x^n$ имаме

$f(x)-f(a)=x^n-a^n.$

Следователно

(3) $$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{x^n-a^n}{x-a}=na^{n-1}.$$

Тук използувахме основната граница (6.1). По този начин формула (2) е доказана за $\alpha=0, 1, 2,\ldots, n,\ldots$

Нека сега показателят α е цяло отрицателно число, т. е. $\alpha=-n$, където $n=1, 2, 3,\ldots$ Тогава

$$x^\alpha=x^{-n}=\frac{1}{x^n}$$

и като си послужим с формулата за диференциране на частно (8.5) и с доказаната вече за цели положителни стойности на α формула (2), получаваме

$$(x^{-n})'=\left(\frac{1}{x^n}\right)'=\frac{(1)'x^n-1.(x^n)'}{(x^n)^2}=\frac{-nx^{n-1}}{x^{2n}}=-nx^{-n-1},$$

с което формула (2) е доказана и за цели отрицателни стойности на α.

Сега ще докажем валидността на тази формула, когато α е произволно рационално число. За тази цел да се убедим най-напред в това, когато $\alpha=\frac{1}{m}$ $(m=1, 2, 3,\ldots)$. За нарастването на функцията $f(x)=x^{\frac{1}{m}}$ имаме

$$f(x)-f(a)=\sqrt[m]{x}-\sqrt[m]{a}.$$

Следователно

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\frac{1}{m\sqrt[m]{a^{m-1}}}=\frac{1}{m}a^{\frac{1}{m}-1}.$$

Тук използувахме основната граница (6.3). По този начин формула (2) е доказана и за $\alpha=\frac{1}{2}, \frac{1}{3},\ldots$

Нека сега показателят α е произволно рационално число, т. е. $\alpha=\frac{m}{n}$, където m и n са цели и $n>0$. Ще си послужим с правилото (8.7) за диференциране на съставни функции. Нека

(4) $$F(u)=u^{\frac{1}{n}} \text{ и } f(x)=x^m.$$

Тогава

$$\Phi(x)=F(f(x))=\sqrt[n]{x^m}=x^{\frac{m}{n}}$$

и правилото (8.7) дава

(5) $$\left(x^{\frac{m}{n}}\right)'=\Phi'(x)=F'(f(x)).f'(x).$$

Формула (2) е вече доказана при $\alpha=m$ и при $\alpha=\frac{1}{n}$. Като приложим тази формула към функциите (4), ще получим

$$(6)\qquad F'(u)=\frac{1}{n}\,u^{\frac{1}{n}-1}\quad \text{и } f'(x)=mx^{m-1}.$$

Ако заместим в първото от равенствата (6) u с $f(x)=x^m$, ще получим

$$F'(f(x))=\frac{1}{n}(x^m)^{\frac{1}{n}-1}=\frac{1}{n}\,x^{\frac{m}{n}-m},$$

което заедно с второто от равенствата (6) и равенство (5) дава

$$\left(x^{\frac{m}{n}}\right)'=\frac{1}{n}\,x^{\frac{m}{n}-m}\cdot mx^{m-1}=\frac{m}{n}\,x^{\frac{m}{n}-1},$$

с което е доказана верността на формула (2), когато α е произволно рационално число.

Ще отбележим само, че формула (2) остава в сила и когато α е произволно реално число.

Производната на функцията $\sin x$ е функцията $\cos x$, т. е.

$$(7)\qquad (\sin x)'=\cos x.$$

Наистина производната на $\sin x$ в произволно фиксирана точка a се дава с формулата

$$(8)\qquad \lim_{x\to a}\frac{\sin x-\sin a}{x-a}.$$

Да положим $x-a=h$, т. е. $x-a+h$. Ясно е, че когато x клони към a, числото h клони към нула, поради което границата (8) се преобразува така:

$$\lim_{x\to a}\frac{\sin x-\sin a}{x-a}=\lim_{h\to 0}\frac{\sin(a+h)-\sin a}{h}.$$

Ако сега си послужим с формулата

$$\sin\alpha-\sin\beta=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha+\beta}{2},$$

получаваме

$$\lim_{x\to a}\frac{\sin x-\sin a}{x-a}=\lim_{h\to 0}\cos\frac{2a+h}{2}\cdot\lim_{h\to 0}\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}.$$

Тъй като $\cos x$ е непрекъсната функция, $\lim\limits_{h\to 0}\cos\frac{2a+h}{2}=\cos a$. От друга страна, съгласно (6.9) втората граница е единица и следователно

$$\lim_{x\to a}\frac{\sin x-\sin a}{x-a}=\cos a$$

за всяко a, с което формула (7) е доказана.

Производната на функцията $\cos x$ *е функцията* $-\sin x$, *т. е.*

$$(9)\qquad (\cos x)'=-\sin x.$$

Доказателството на (9) е аналогично на това на (7), поради което ще го предоставим на читателя.

Производната на функцията $\operatorname{tg} x$ *е функцията* $\frac{1}{\cos^2 x}$, *т. е.*

$$(10)\qquad (\operatorname{tg} x)'=\frac{1}{\cos^2 x},\quad x\neq(2k+1)\frac{\pi}{2}\quad (k=0,\pm 1,\pm 2,\ldots).$$

Наистина, като използуваме (7), (9) и правилото за диференциране на частно, намираме

$$(\operatorname{tg} x)'=\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)'=\frac{(\sin x)'\cos x-(\cos x)'\sin x}{\cos^2 x}=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x},$$

с което формула (10) е доказана.

Производната на функцията $\operatorname{ctg} x$ *е функцията* $-\frac{1}{\sin^2 x}$, *т. е.*

$$(11)\qquad (\operatorname{ctg} x)'=-\frac{1}{\sin^2 x},\quad x\neq k\pi\quad (k=0,\pm 1,\pm 2,\ldots).$$

Доказателството на (11) е аналогично на това на (10), поради което го представяме на читателя.

напомним, че ъгълът x се измерва в радиани. Именно на това се дължи простотата на формулите (7), (9), (10) и (11). В противен случай границата (6.9), която лежи в основата на пресмятането на производните на тригонометричните функции, няма да бъде единица; така например, ако x се измерва в градуси, тази граница ще бъде $\frac{\pi}{180}$ (докажете това) и следователно формула (7) ще добие вида

$$(\sin x)'=\frac{\pi}{180}\cdot\cos x.$$

Аналогични изменения ще претърпят и формулите за производните на останалите тригонометрични функции.

Пример 1. Да се намери производната на функцията

(12) $$f(x)=\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}\,.$$

За да пресметнем $f'(x)$, ще представим (12) във вида

$$f(x)=\left(x\left(x^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}=x^{\frac{7}{8}},$$

която е степенна функция, и съгласно (2) при $\alpha=\frac{7}{8}$, имаме

$$f'(x)=\frac{7}{8}\,x^{-\frac{1}{8}}.$$

Пример 2. Да се намери производната на функцията

(13) $$f(x)=x^{\sqrt{2}}\sin x.$$

За пресмятането на $f'(x)$ ще използуваме правилото за диференциране на произведение, както и формулите (2) и (7). Имаме

$$f'(x)=\left(x^{\sqrt{2}}\right)'\sin x+x^{\sqrt{2}}\left(\sin x\right)'=\sqrt{2}\,x^{\sqrt{2}-1}\sin x+x^{\sqrt{2}}\cos x.$$

Пример 3. Да се намери производната на функцията

(14) $$f(x)=\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}^3x+\frac{3}{5}\operatorname{tg}^5x+\frac{1}{7}\operatorname{tg}^7x.$$

За пресмятането на $f'(x)$ ще използуваме правилото за диференциране на съставна функция, както и формулите (2), (10). Имаме

$$f'(x)=\frac{1}{\cos^2x}+3\operatorname{tg}^2x\cdot\frac{1}{\cos^2x}+\frac{3}{5}\cdot5\operatorname{tg}^4x\cdot\frac{1}{\cos^2x}+\frac{1}{7}\cdot7\operatorname{tg}^6x\cdot\frac{1}{\cos^2x}$$

и след леки преобразувания получаваме окончателно

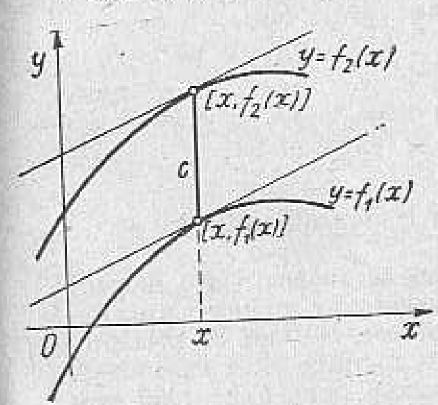
$$f'(x)=\frac{1}{\cos^8x}.$$

§ 10. ФУНДАМЕНТАЛНО СВОЙСТВО НА ПРОИЗВОДНИТЕ

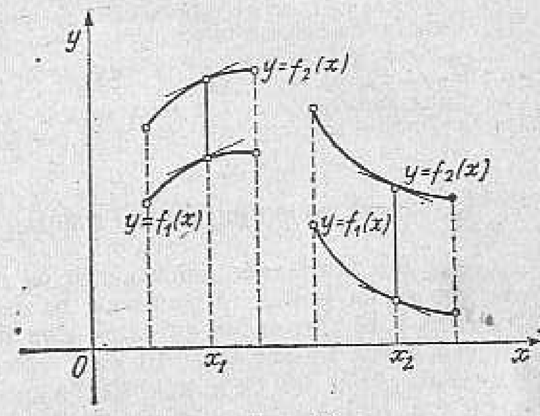
Тази точка е посветена на един общ принцип, част от многобройните приложения на който ще разгледаме по-нататък. Когато е известна скоростта, положението на подвижната точка е до голяма степен определено. Така например, ако два автомобила

се движат по един и същи път и скоростите им във всеки момент съвпадат, разстоянието между тях е постоянна величина, т. е. не се мени с времето; тук се има пред вид най-произволно движение и в частност такова, при което скоростта се мени с времето. Ако в някой момент автомобилите „съвпадат", при направеното предположение за еднаквост на скоростите през време на цялото движение автомобилите ще „съвпадат" през цялото време. Разбира се, тук третираме автомобилите като подвижни точки.

Нека графиките на функциите $y=f_1(x)$ и $y=f_2(x)$ са такива, че за всяко x тангентите към тях съответно в точките $(x, f_1(x))$ и $(x, f_2(x))$ са успоредни (или съвпадат). Какво можем да кажем



Черт. 60



Черт. 61

тогава за тези графики? Естествено е да предположим, че „успоредността" ще бъде налице и при кривите (черт. 60), т. е., че

(1) $$f_2(x)-f_1(x)=c,$$

където c е константа. Но това не винаги е така. Да разгледаме функциите, чиито графики са изобразени на черт. 61. Тези две функции имат обща дефиниционна област, която не е интервал, а се състои от два непресичащи се интервала. От чертежа се вижда, че разликата $f_2(x)-f_1(x)$ не е константа. Но тази разлика е константа в кой да е от двата дефиниционни интервала.

Горните наблюдения се формулират с помощта на производни така: *Ако функциите f_1 и f_2 са дефинирани и диференци-*

руеми в един интервал Δ и ако производните им съвпадат във всяка точка от интервала Δ, т. е.

(2) $$f_1'(x)=f_2'(x),$$

то функциите се различават с константа, т. е. изпълнено е равенство (1) *за всяко* x *от дефиниционния интервал* Δ.

Пример. Ще докажем известното на читателя тъждество

$$\sin^2 x+\cos^2 x=1,$$

като си послужим с производни. За тази цел ще разгледаме функциите $f_1(x)=0$ и $f_2(x)=\sin^2 x+\cos^2 x$. За производните очевидно имаме $f_1'(x)=0$ и $f_2'(x)=0$ $2\sin x\cos x-2\sin x\cos x=0$, което показва, че $f_2-f_1=c$, където c е константа. По-подробно последното равенство се записва така:

$$\sin^2 x+\cos^2 x=c.$$

За да докажем, че $c=1$, е достатъчно да пресметнем стойността на лявата част на горното равенство при $x=0$ (или, разбира се, при кое да е x).

§ 11. ФУНКЦИИ, КОИТО СЪВПАДАТ С ПРОИЗВОДНАТА СИ

Да разгледаме движението на един автомобил, чиято скорост във всеки момент е равна на разстоянието му от началото. Когато този автомобил се намира на разстояние 10 км от началото, скоростта му ще бъде 10 км/ч, когато достигне 65-я километър, тя ще бъде 65 км/ч, при 1000-я километър тя ще бъде 1000 км/ч и т. н. Какъв е законът на движение на този автомобил?

И така, да си мислим една функция, която е дефинирана и диференцируема за всяко реално число x и удовлетворява уравнението

(1) $$f'(x)=f(x).$$

Ще докажем, че при това предположение функцията f удовлетворява функционалното уравнение на показателната функция (гл. 2, §9). Да изберем по произволен начин числата x_1 и x_2, да ги фиксираме и да разгледаме функцията

(2) $$f_1(x)=f(x).f(x_1+x_2-x).$$

Като приложим правилото за диференциране на произведение, за производната на f_1 намираме

$$f_1'(x)=f'(x).f(x_1+x_2-x)+f(x)(f(x_1+x_2-x))'.$$

Ако приложим правилото за диференциране на съставна функция и вземем пред вид, че x_1 и x_2 са константи, ще получим

$$(f(x_1+x_2-x))'=f'(x_1+x_2-x).(x_1+x_2-x)'=-f'(x_1+x_2-x),$$

откъдето, като вземем пред вид (1), намираме

$$f_1'(x)=f(x)f(x_1+x_2-x)-f(x)f(x_1+x_2-x)=0,$$

което показва, че производната на f_1 е нула за всяко x. Тъй като производната на константата нула е също нула, то $f_1'(x)=(0)'$ и съгласно фундаменталното свойство на производните ще имаме

(3) $$f_1(x)=c,$$

където c е константа. Тъй като диференцирахме относно x, твърдението, че c е константа, означава, че c не зависи от x, но, разбира се, c може да зависи от избора на x_1 и x_2. Ако запишем равенство (3) по-подробно, ще получим

(4) $$f(x)f(x_1+x_2-x)=c$$

за всяко x. За да пресметнем c в (4), полагаме $x=0$ и получаваме

$$f(0)f(x_1+x_2)=c,$$

поради което (4) добива вида $f(x)f(x_1+x_2-x)=f(0)f(x_1+x_2)$. Да заместим в последното равенство x с x_1. Тогава ще получим

(5) $$f(x_1)f(x_2)=f(0)f(x_1+x_2).$$

Да си припомним сега, че числата x_1 и x_2 бяха избрани произволно. Това означава, че равенство (5) е изпълнено при всеки избор на x_1 и x_2.

За $f(0)$ могат да се представят следните две възможности:

а) $f(0)=0$ и

б) $f(0)\neq 0$.

Да разгледаме най-напред първата от тях. Когато $f(0)=0$, (5) добива вида $f(x_1)f(x_2)=0$ при произволен избор на x_1 и x_2. Ако в това равенство положим $x_1=x_2=x$, ще получим $(f(x))^2=0$, откъдето $f(x)=0$ за всяко x, т. е. в случая а) f е константата 0.

Да разгледаме сега случая $f(0)\neq 0$. Ако разделим двете страни на (5) с $(f(0))^2$, ще получим

(6) $$\frac{f(x_1)}{f(0)}\cdot\frac{f(x_2)}{f(0)}=\frac{f(x_1+x_2)}{f(0)},$$

което показва, че функцията $\varphi(x)=\frac{f(x)}{f(0)}$ удовлетворява функционалното уравнение на показателната функция. Но тъй като тази функция е диференцируема, тя е и непрекъсната и съгласно §9 от гл. 2 ще бъде показателна, т. е. ще съществува такава положителна константа a, че за всяко x да е изпълнено равенството $\varphi(x)=a^x$, т. е.

(7) $$f(x)=f(0)a^x.$$

Формула (7) дава функцията f в случая б), както току-що се убедихме. Не е трудно да се забележи, че същата формула дава f и когато $f(0)=0$. С други думи, всяка функция, която удовлетворява уравнението (1), има вида (7).

Да се върнем отново към механиката; на езика на механиката доказаното означава, че ако при движението на една точка скоростта постоянно е равна на разстоянието на точката до началото, законът на движението е функция от вида (7). Специалният случай $f(0)=0$ съответствува на движение от разглеждания вид, за което в началния момент подвижната точка се е намирала в началото. Но тогава съгласно (1) скоростта и в този момент е нула, поради което движението се редуцира на покой. Да разгледаме сега случая $f(0)=1$ т. е. да предположим, че в началния момент точката се намира на разстояние 1 от началото. Съгласно (1) с това е определена и скоростта ѝ в началния момент. Но не само скоростта в началния момент, а и цялото движение е напълно определено при тези предположения. Наистина в една „безкрайно" малка околност на началния момент точката ще се движи със скорост 1. По-нататък скоростта ѝ съгласно (1) ще продължава да съвпада с разстоянието ѝ до началото и значи движението ѝ в една „безкрайно" малка околност на един „близък" момент също ще бъде еднозначно определено и т. н. Познаването на положението на подвижната точка в някой момент x и уравнението (1) дават възможност да намерим скоростта $f'(x)$ на точката в разглеждания момент. Познаването на скоростта от своя страна определя еднозначно движението „около" този момент. Оттук следва, че е определен еднозначно и законът на движението на тази точка.

Направените наблюдения показват, че измежду функциите, които удовлетворяват уравнението (1), има една единствена, за която

(8) $$f(0)=1.$$

Това следва и от фундаменталното свойство на производните. Наистина нека f_1 и f_2 са две функции, които са дефинирани и диференцируеми навсякъде и удовлетворяват уравненията (1) и (8). Да разгледаме функцията

(9) $$\varphi(x)=\frac{f_1(x)}{f_2(x)}.$$

Производната на тази функция е

$$\varphi'(x)=\frac{f_1'(x)f_2(x)-f_1(x)f_2'(x)}{(f_2(x))^2}=0,$$

тъй като f_1 и f_2 удовлетворяват (1). Следователно $\varphi(x)=c$, където c е константа. Последното равенство и (9) дават

(10) $$\frac{f_1(x)}{f_2(x)}=c.$$

За да определим c, ще заместим в (10) x с 0; като вземем пред вид (8), получаваме $c=1$, което заедно с (10) дава

$$f_1(x)=f_2(x).$$

Съгласно (7) единствената функция, за която е изпълнено (8), ще има вида

(11) $$f(x)=a^x,$$

където a е еднозначно определена константа.

Така намерената константа се бележи с e и се нарича *неперово число.* Числото e играе важна роля в математиката и приложенията ѝ. Ето първите няколко десетични знака на това число:

$$e=2{,}7182818\ldots$$

С това означение единственото решение на уравнението (1), за което е в сила (8), се записва така:

(12) $$f(x)=e^x,$$

а уравнението (1) — така:

(13) $$(e^x)'=e^x.$$

Да резюмираме. Убедихме се, че *съществува една единствена функция f, която удовлетворява уравненията* (1) *и* (8), *и че тази функция е показателна,* т. е. има вида (11). *Основата a на тази функция означихме с e* и по този начин въведохме една важна константа. *Производната на функцията e^x се дава с формула* (13).

Да се върнем отново на уравнението (1). То беше подробно разгледано, когато $f(0)=0$ и $f(0)=1$, а в общия случай $f(0)\neq 0$ засега знаем само, че решенията му имат вида (7), където a е константа. Не е трудно да се убедим, че тази константа съвпада с неперовото число. Наистина нека f е произволно решение на (1), за което $f(0)\neq 0$. Да разгледаме функцията

$$\psi(x)=\frac{f(x)}{f(0)}. \tag{14}$$

Очевидно $\psi(0)=1$ и $\psi'(x)=\frac{f'(x)}{f(0)}=\frac{f(x)}{f(0)}=\psi(x)$, поради което $\psi(x)=e^x$ и съгласно (14)

$$f(x)=f(0)\,e^x. \tag{15}$$

С това уравнението (1) е решено.

§ 12. ХИПЕРБОЛИЧНИ ФУНКЦИИ

В този параграф ще се запознаем с две функции, наречени хиперболичен косинус и хиперболичен синус. Названията на тези функции не са случайни и се дължат на изящната аналогия, която съществува между тях и тригонометричните функции косинус и синус. Прилагателното „хиперболичен" също не е поставено случайно, но това ще видим по-нататък.

Хиперболичният косинус се дефинира с формулата

$$\operatorname{ch} x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}, \tag{1}$$

а *хиперболичният синус* — с формулата

$$\operatorname{sh} x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}. \tag{2}$$

Ако в тези равенства поставим $x=0$, получаваме

$$\operatorname{ch} 0=1, \qquad \operatorname{sh} 0=0, \tag{3}$$

които равенства са аналогични на $\cos 0=1$, $\sin 0=0$.

Ако повдигнем (1) и (2) в квадрат и извадим получените резултати, добиваме

$$\operatorname{ch}^2 x-\operatorname{sh}^2 x=\frac{e^{2x}+2e^x e^{-x}+e^{-2x}}{4}-\frac{e^{2x}-2e^x e^{-x}+e^{-2x}}{4}$$
$$=\frac{4e^0}{4}=1,$$

т. е.

$$\operatorname{ch}^2 x-\operatorname{sh}^2 x=1. \tag{4}$$

Последната формула е аналогична на формулата $\cos^2 x+\sin^2 x=1$.

Ако в (1) сменим знака на x, ще получим

$$\operatorname{ch}(-x)=\frac{e^{-x}+e^x}{2}=\operatorname{ch} x,$$

т. е.

$$\operatorname{ch}(-x)=\operatorname{ch} x. \tag{5}$$

Тази формула е аналогична на формулата $\cos(-x)=\cos x$.

По същия начин се доказва, че

$$\operatorname{sh}(-x)=-\operatorname{sh} x, \tag{6}$$

която формула е аналогична на $\sin(-x)=-\sin x$.

Сега да потърсим аналог на формулата $\cos(x+y)=\cos x\cos y-\sin x\sin y$. Тъй като очакваме в резултата да получим произведения на хиперболични косинуси и хиперболични синуси, да пресметнем произведението $\operatorname{ch} x\operatorname{ch} y$:

$$\operatorname{ch} x\operatorname{ch} y=\frac{e^x+e^{-x}}{2}\cdot\frac{e^y+e^{-y}}{2}=\frac{e^{x+y}+e^{x-y}+e^{-x+y}+e^{-x-y}}{4}$$

и произведението $\operatorname{sh} x\operatorname{sh} y$:

$$\operatorname{sh} x\operatorname{sh} y=\frac{e^x-e^{-x}}{2}\cdot\frac{e^y-e^{-y}}{2}=\frac{e^{x+y}-e^{x-y}-e^{-x+y}+e^{-x-y}}{4}.$$

Като съберем тези равенства, получаваме

$$\operatorname{ch} x\operatorname{ch} y+\operatorname{sh} x\operatorname{sh} y=\frac{e^{x+y}+e^{-(x+y)}}{2}=\operatorname{ch}(x+y),$$

т. е.

$$\operatorname{ch}(x+y)=\operatorname{ch} x\operatorname{ch} y+\operatorname{sh} x\operatorname{sh} y. \tag{7}$$

По същия начин се доказва и формулата

$$\operatorname{sh}(x+y)=\operatorname{sh} x\operatorname{ch} y+\operatorname{ch} x\operatorname{sh} y, \tag{8}$$

която е аналогична на $\sin(x+y)=\sin x\cos y+\cos x\sin y$.

Да намерим производната на $\operatorname{ch} x$:

$$(\operatorname{ch} x)'=\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)'=\frac{e^x-e^{-x}}{2}=\operatorname{sh} x,$$

т. е.

$$(\operatorname{ch} x)'=\operatorname{sh} x, \tag{9}$$

която формула е аналогична на $(\cos x)'=-\sin x$.

По същия начин се доказва, че

$$(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x, \tag{10}$$

която формула е аналогична на $(\sin x)' = \cos x$.

От (1) се вижда, че $\operatorname{ch} x$ не се анулира за никое x и следователно функцията $\operatorname{th} x$, определена чрез равенството

$$\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} \tag{11}$$

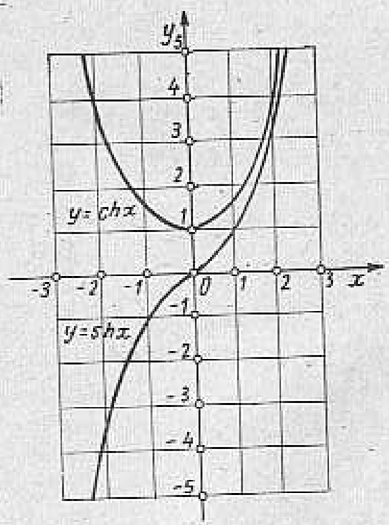
има смисъл за всяко x. Тя се нарича *хиперболичен тангенс*. Като използуваме (9), (10), (11) и правилото за диференциране на частно, намираме

$$(\operatorname{th} x)' = \left(\frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}\right)' = \frac{(\operatorname{sh} x)' \operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x (\operatorname{ch} x)'}{\operatorname{ch}^2 x} = \frac{\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x}{\operatorname{ch}^2 x} = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x},$$

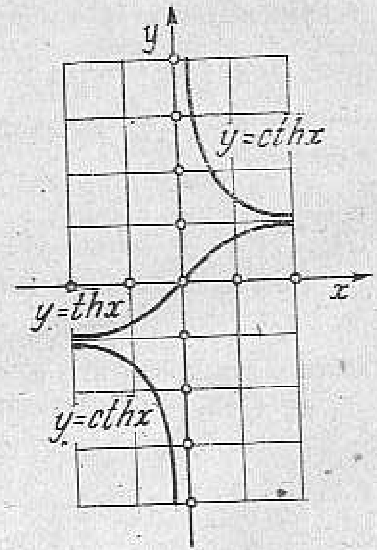
т. е.

$$(\operatorname{th} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}. \tag{12}$$

Да потърсим решенията на уравнението $\operatorname{sh} x = 0$. Последното равенство означава, че $e^x - e^{-x} = 0$, т. е. $e^{2x} = 1$, което е изпълнено



Черт. 62



Черт. 63

само когато $x = 0$. Следователно функцията $\operatorname{cth} x$, определена чрез равенството

$$\operatorname{cth} x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}, \tag{13}$$

е дефинирана за всяко $x \neq 0$. Производната ѝ се намира аналогично на тази на $\operatorname{th} x$ и се дава от формулата

$$(\operatorname{cth} x)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}. \tag{14}$$

Графиките на хиперболичните функции са представени на черт. 62 и черт. 63. Читателят лесно ще съобрази, като си припомни как изглежда графиката на показателната функция, че графиките на хиперболичните функции имат указания на тези чертежи вид.

§ 13. ПРОИЗВОДНА НА ПОКАЗАТЕЛНАТА ФУНКЦИЯ

В параграф 11 видяхме, че функцията e^x се диференцира по формулата $(e^x)' = e^x$. Задачата, която си поставяме в този параграф, е да намерим производната на показателната функция a^x при произволна положителна основа a.

За тази цел ще представим a^x като степен с основа e. Съгласно дефиницията на логаритмите имаме

$$a = e^{\log_e a}. \tag{1}$$

Логаритъмът при основа e на едно число a се нарича натурален логаритъм на a и се бележи със символа ln, т. е.

$$\log_e a = \ln a.$$

Съгласно това равенството (1) се записва още така:

$$a = e^{\ln a}. \tag{2}$$

Ако повдигнем двете страни на (2) в степен x, получаваме равенството

$$a^x = e^{x \ln a}, \tag{3}$$

което представя a^x като степен с основа e.

Вече не е трудно да намерим производната на показателната функция. Съгласно формули (3) и (11.13) и правилото за диференциране на съставна функция имаме

$$(a^x)' = (e^{x \ln a})' = e^{x \ln a} (x \ln a)' = e^{x \ln a} \ln a = a^x \ln a,$$

т. е.

$$(a^x)' = a^x \ln a, \tag{4}$$

с което поставената задача е решена.

Ако в частност $a=e$, формула (4) съвпада с (11.13), понеже $e-1$.

§ 14. ПРОИЗВОДНА НА ЛОГАРИТМИЧНАТА ФУНКЦИЯ

Производната на функцията $\ln x$ $(\log_e x)$ *се дава с фор-улата*

$$(\ln x)' = \frac{1}{x} \quad (x>0).$$

Нека x_0 е произволно положително число. Съгласно дефини-ията производната на $\ln x$ в точката x_0 е границата

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\ln x - \ln x_0}{x - x_0}.$$

да пресметнем границата (2), ще положим

$$\ln x = t, \quad \ln x_0 = t_0.$$

гава

$$x = e^t, \quad x_0 = e^{t_0}$$

$$\frac{\ln x - \ln x_0}{x - x_0} = \frac{t - t_0}{e^t - e^{t_0}} = \frac{1}{\frac{e^t - e^{t_0}}{t - t_0}}.$$

Тъй като логаритмичната функция е непрекъсната от (3), едва, че когато x клони към x_0, числото t ще клони към t_0, ради което (5) дава

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\ln x - \ln x_0}{x - x_0} = \frac{1}{\lim\limits_{t\to t_0} \frac{e^t - e^{t_0}}{t - t_0}}.$$

ъгласно дефиницията на производна границата $\lim\limits_{t\to t_0} \frac{e^t - e^{t_0}}{t - t_0}$ ще бъ- равна на производната на функцията e^t в точката t_0, която гласно (11.13) е равна на e^{t_0}, т. е.

$$\lim_{t\to t_0} \frac{e^t - e^{t_0}}{t - t_0} = e^{t_0}.$$

оследното равенство и (6) дават

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\ln x - \ln x_0}{x - x_0} = \frac{1}{e^{t_0}}$$

като използуваме второто от равенствата (4), получаваме окон-телно

(7) $$\mathrm{mil}_{x\to x_0} \frac{\ln x - \ln x_0}{x - x_0} = \frac{1}{x_0},$$

с което формула (1) е доказана.

§ 15. ТАБЛИЦА НА ПРОИЗВОДНИТЕ

Намерените дотук производни и правила за диференциране дават възможност да се напише производната на всяка елементарна функция (вж. гл. 2, § 3). Ето защо ще приведем таблица на намерените дотук производни.

1. $c' = 0$.
2. $(x^a)' = ax^{a-1}$.
3. $(\sin x)' = \cos x$.
4. $(\cos x)' = -\sin x$.
5. $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$.
6. $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$.
7. $(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$.
8. $(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$.
9. $(\operatorname{th} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$.
10. $(\operatorname{cth} x)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$.
11. $(e^x)' = e^x$, $(a^x)' = a^x \ln a$.
12. $(\ln x)' = \frac{1}{x}$.

Ето и таблицата на правилата за диференциране:

1. $(cf)' = cf'$.
2. $(f+g)' = f' + g'$.
3. $(fg)' = f'g + fg'$.

4. $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$.

5. $(F(f))' = F'(f)f'$.

Ще приведем няколко примера.

Пример 1. Като приложим формулите 1. и 2. и правилата 1 и 2 за производната на функцията

$$y=2x^3-x^2+3,$$

получаваме

$$y'=6x^2-2x.$$

Пример 2. Като приложим формулите 13 и 3 и правило 5, за производната на функцията

$$y=\ln \sin x$$

получаваме

$$y'=\frac{1}{\sin x}(\sin x)'=\operatorname{ctg} x.$$

Пример 3. Като приложим формулите 13,5,2 и 1 и правила 5 и 1, за производната на функцията

$$y=\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left(\sqrt{2}\operatorname{tg} x+\sqrt{1+2\operatorname{tg}^2 x}\right)$$

получаваме

$$y'=\frac{1}{\sqrt{2}}\,\frac{1}{\sqrt{2}\operatorname{tg} x+\sqrt{1+2\operatorname{tg}^2 x}}\left(\sqrt{2}\frac{1}{\cos^2 x}+\frac{1}{2\sqrt{1+2\operatorname{tg}^2 x}}\cdot 2.2\operatorname{tg} x\frac{1}{\cos^2 x}\right),$$

откъдето след елементарни преобразувания получаваме

$$y'=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^4 x}}.$$

Задачи към глава 3

1. Да се пресметне

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-5x+6}{x^2-7x+10}.$$ Отг. $\frac{1}{3}$.

2. Да се пресметне

$$\lim_{x\to 4}\frac{x^2-6x+8}{x^2-5x+4}.$$ Отг. $\frac{2}{3}$.

3. Да се пресметне

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^n-1}{x-1}.$$ Отг. n.

4. Да се пресметне

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^m-1}{x^n-1}.$$ Отг. $\frac{m}{n}$.

5. Да се пресметне

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{\operatorname{tg} x}.$$ Отг. 5.

6. Да се пресметне

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\sin 3x}.$$ Отг. $\frac{2}{3}$.

7. Да се пресметне

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}.$$ Отг. $\frac{1}{2}$.

Намерете производните на функциите:

8. $y=2x^3-5x^2+7x-12$. Отг. $y'=6x^2-10x+7$.

9. $y=x^4-3x^2+18$. Отг. $y'=4x^3-6x$.

10. $y=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4$. Отг. $y'=1-x+x^2-x^3$.

11. $y=x^3(x^2-1)^2$. Отг. $y'=7x^6-10x^4+3x^2$.

12. $y=\frac{x-1}{x+1}$. Отг. $y'=\frac{2}{(x+1)^2}$.

13. $y=\frac{x}{1-x^2}$. Отг. $y'=\frac{1+x^2}{(1-x^2)^2}$.

14. $y=\frac{3x-1}{x^5}$. Отг. $y'=-12x^{-5}+5x^{-6}$.

15. $y=\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}$. Отг. $y'=\frac{2(1-x^2)}{(x^2-x+1)^2}$.

16. $y=\sqrt{x}$. Отг. $y'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$.

17. $y=\sqrt[3]{x}$. Отг. $y'=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$.

18. $y=\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}$. Отг. $y'=\frac{7}{8}x^{-\frac{1}{8}}$.

19. $y=e^x(x^2-2x+2)$. Отг. $y'=x^2e^x$.

20. $y=x\sin x$. Отг. $y'=x\cos x+\sin x$.

21. $y=x^2\sin x+2x\cos x-2\sin x$. Отг. $y'=x^2\cos x$.

22. $y=x\ln x-x$. Отг. $y'=\ln x$.

23. $y=\frac{x^3}{3}\ln x-\frac{1}{9}x^3$. Отг. $y'=x^2\ln x$.

24. $y=\sqrt{x}+\ln x-\frac{1}{\sqrt{x}}$. Отг. $y'=\frac{(1+\sqrt{x})^2}{2x\sqrt{x}}$.

25. $y=\frac{1}{\sin x}$. Отг. $y'=-\frac{\cos x}{\sin^2 x}$.

26. $y=\frac{1}{\cos x}$. Отг. $y'=\frac{\sin x}{\cos^2 x}$.

27. $y=\frac{1}{\ln x}$. Отг. $y'=-\frac{1}{x\ln^2 x}$.

28. $y=\frac{e^x-1}{e^x+1}$. Отг. $y'=\frac{2e^x}{(e^x+1)^2}$.

29. $y=e^x(\sin x-\cos x)$. Отг. $y'=2e^x\sin x$.

30. $y=(ax+b)^n$. Отг. $y'=na\,(ax+b)^{n-1}$.

31. $y=\sin^3 x$. Отг. $y'=3\sin^2 x\cos x$.

32. $y=(x^2-1)^5$. Отг. $y'=10x\,(x^2-1)^4$.

33. $y=\cos^5 x$. Отг. $y'=-5\cos^4 x\sin x$.

34. $y=\sqrt{3x-5}$. Отг. $y'=\frac{3}{2\sqrt{3x-5}}$.

35. $y=\sin 5x$. Отг. $y'=5\cos 5x$.

36. $y=\sqrt{a^2-x^2}$. Отг. $y'=-\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$.

37. $y=e^{-x}$. Отг. $y'=-e^{-x}$.

38. $y=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$. Отг. $y'=\frac{1}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$.

39. $y=\ln\sin x$. Отг. $y'=\operatorname{ctg} x$.

40. $y=\frac{1}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}$. Отг. $y'=-\frac{3x}{(1+x^2)^{\frac{5}{2}}}$.

41. $y=\ln\operatorname{tg} x$. Отг. $y'=\frac{2}{\sin 2x}$.

42. $y=x\sqrt{x^2+1}$. Отг. $y'=\frac{2x^2+1}{\sqrt{x^2+1}}$.

43. $y=e^{-x^2}$. Отг. $y'=-2x\,e^{-x^2}$.

44. $y=\sqrt{x+\sqrt{x}}$. Отг. $y'=\frac{2\sqrt{x}+1}{4\sqrt{x(x+\sqrt{x})}}$.

45. $y=\ln(x^2+x)$. Отг. $y'=\frac{2x+1}{x^2+x}$.

46. $y=\sqrt[3]{(2x+1)^2}$. Отг. $y'=\frac{4}{3\sqrt[3]{2x+1}}$.

47. $y=\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})$. Отг. $y'=\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}$.

48. $y=\cos ax\cdot\sin bx$. Отг. $y'=b\cos ax\cos bx-a\sin ax\sin bx$.

49. $y=\ln\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$. Отг. $y'=\frac{1}{x^2-1}$.

50. $y=e^{ax}\cos bx$. Отг. $y'=e^{ax}(a\cos bx-b\sin bx)$.

51. $y=\ln\sqrt{\frac{1-\sin x}{1+\sin x}}$. Отг. $y'=-\frac{1}{\cos x}$.

52. $y=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$. Отг. $y'=\frac{4}{(e^x+e^{-x})^2}=\frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$.

53. $y=\ln\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$. Отг. $y'=\frac{1}{\cos x}$.

54. $y=\frac{x^2}{4}\left[(\ln x)^2-\frac{1}{2}\ln x+\frac{1}{8}\right]$. Отг. $y'=x^3\ln^2 x$.

55. $y=\ln\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}$. Отг. $y'=-\frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}$.

56. $y=\ln\frac{x^2+1+\sqrt{x^4+3x^2+1}}{x}$. Отг. $y'=\frac{x^2-1}{x\sqrt{x^4+3x^2+1}}$.

57. $y=\operatorname{ctg}\pi x+\dfrac{\cos\pi x}{2\sin^3\pi x}$. Отв. $y'=-\dfrac{3\pi}{2\sin^4\pi x}$.

58. $y=e^{\sqrt[3]{x}}\left(\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}+2\right)$. Отв. $y'=\dfrac{1}{3}e^{\sqrt[3]{x}}$.

59. $y=(x+2a)\sqrt{x^2-a^2}+a^2\ln\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right)$. Отв. $y'=2x\sqrt{\dfrac{x+a}{x-a}}$.

60. $y=\dfrac{\sin(2\ln x)-\cos(2\ln x)}{x^2}$. Отв. $y'=\dfrac{4\cos 2\ln x}{x^3}$.

61. $y=\sqrt{x}\ln\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+a}\right)-\sqrt{x+a}$. Отв. $y'=\dfrac{\ln\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+a}\right)}{2\sqrt{x}}$.

62. $y=\ln\dfrac{1+\sqrt{x^2+1}}{x}-\sqrt{x^2+1}$. Отв. $y'=-\dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x}$.

63. $y=\ln\dfrac{3-x^2}{2-x^2}$. Отв. $y'=\dfrac{2x}{x^4-5x^2+6}$.

64. $y=\dfrac{1}{2a}\left[\ln\dfrac{\sqrt{a^2+x^2}}{a+x}-\dfrac{a}{a+x}\right]$. Отв. $y'=\dfrac{x^2}{(x^2+a^2)(x+a)^2}$.

65. $y=\ln\dfrac{1}{\sqrt{1-x^4}}$. Отв. $y'=\dfrac{2x^3}{1-x^4}$.

66. $y=x\,\mathrm{sh}\,x$. Отв. $y'=\mathrm{sh}\,x+x\,\mathrm{ch}\,x$.

67. $y=\dfrac{x^2}{\mathrm{ch}\,x}$. Отв. $y'=\dfrac{2x\,\mathrm{ch}\,x-x^2\,\mathrm{sh}\,x}{\mathrm{ch}^2 x}$.

68. $y=\mathrm{th}\,x-x$. Отв. $y'=-\mathrm{th}^2 x$.

69. $y=\dfrac{3\,\mathrm{cth}\,x}{\ln x}$. Отв. $y'=\dfrac{-3(x\ln x+\mathrm{sh}\,x\,\mathrm{ch}\,x)}{x(\ln x)^2\mathrm{sh}^2 x}$.

70. $y=\mathrm{sh}^3 2x$. Отв. $y'=6\,\mathrm{sh}^2 2x\,\mathrm{ch}\,2x$.

71. $y=e^{ax}\,\mathrm{ch}\,bx$. Отв. $y'=e^{ax}(a\,\mathrm{ch}\,bx+b\,\mathrm{sh}\,bx)$.

72. $y=\mathrm{th}^3 2x$. Отв. $y'=6\,\mathrm{th}^2 2x\,(1-\mathrm{th}^2 2x)$.

73. $y=\ln\mathrm{sh}\,2x$. Отв. $y'=2\,\mathrm{cth}\,2x$.

74. $y=\dfrac{1}{2}\mathrm{th}\,x+\dfrac{\sqrt{2}}{8}\ln\dfrac{1+\sqrt{2}\,\mathrm{th}\,x}{1-\sqrt{2}\,\mathrm{th}\,x}$. Отв. $y'=\dfrac{1}{1-\mathrm{sh}^4 x}$.

75. $y=-\dfrac{\cos x}{2\sin^2 x}+\dfrac{1}{2}\ln\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$. Отв. $y'=\dfrac{1}{\sin^3 x}$.

76. $y=\dfrac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x+\ln\cos x$. Отв. $y'=\operatorname{tg}^3 x$.

77. $y=\dfrac{\sin x}{2\cos^2 x}-\dfrac{1}{2}\ln\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{x}{2}\right)$. Отв. $y'=\dfrac{1}{\cos^3 x}$.

78. $y=\operatorname{tg}x\ln\cos x+\operatorname{tg}x-x$. Отв. $y'=\dfrac{\ln\cos x}{\cos^2 x}$.

? 79. $y=\ln\dfrac{\sqrt{a+be^x}-\sqrt{a}}{\sqrt{a+be^x}+\sqrt{a}}$. Отв. $y'=\sqrt{\dfrac{a}{a+be^x}}$.

80. $y=\ln\dfrac{e^x+2+\sqrt{e^{2x}+4e^x+1}}{e^x+2-\sqrt{e^{2x}+4e^x+1}}$. Отв. $y'=\dfrac{2e^x}{\sqrt{e^{2x}+4e^x+1}}$.

81. $y=(x-2)\sqrt{1+e^x}-\ln\dfrac{\sqrt{1+e^x}-1}{\sqrt{1+e^x}+1}$. Отв. $y'=\dfrac{xe^x}{2\sqrt{1+e^x}}$.

82. $y=\ln\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}-\operatorname{ctg}x\ln(1+\sin x)-x$. Отв. $y'=\dfrac{\ln(1+\sin x)}{\sin^2 x}$.