Глава 4

НЯКОИ ПРИЛОЖЕНИЯ НА ПРОИЗВОДНИТЕ

Производните имат многобройни приложения при изследването на функциите. Едно от най-простите от тях е изучаването на монотонността, на което е посветена тази глава. В §1 се обсъжда връзката между монотонност и производна. Понякога се налага да знаем кога производната на една функция е монотонна; за да отговорим на този въпрос си служим с втора производна, която се въвежда в §2. В §3 и §4 първата и втората производна се използуват за намиране на максимумите и минимумите на функциите. В §5 се разглеждат функции с монотонна производна. Резултатите на голяма част от досегашните усилия се проявяват в §6, където читателят може върху конкретни примери да се запознае с методи за изследване на функциите и начертаване на графиките им. В §7, §8 и §9 са доказани някои важни класически неравенства.

§ 1. МОНОТОННИ ФУНКЦИИ

Да напомним, че една функция f се нарича *растяща (монотонно растяща)*, когато за всеки две числа x_1 и x_2 от дефиниционната област на f, които са свързани с неравенството $x_1 < x_2$ е изпълнено неравенството $f(x_1) \leqq f(x_2)$. Ако пък от неравенството $x_1 < x_2$ винаги следва, че $f(x_1) \geqq f(x_2)$, функцията f се нарича *намаляваща (монотонно намаляваща)*. Растящите и намаляващите функции носят общото название *монотонни функции*.

При изследването на изменението на една функция от първостепенно значение е въпросът в кои интервали от дефиниционната си област функцията расте и в кои намалява. В тази точка ще укажем критерии, с чиято помощ ще можем да намираме интервалите, в които една диференцируема функция е монотонна.

Ако функцията f е монотонно растяща и диференцируема в интервала $[a, b]$, производната ѝ е неотрицателна навсякъде в този интервал.

Наистина, за всяко x с $a \leqq x < b$ и за всяко положително h с $a \leqq x+h \leqq b$ имаме $x < x+h$ и следователно е изпълнено неравенството $f(x) \leqq f(x+h)$, тъй като функцията f е монотонно растяща. Понеже h е положително, от последното неравенство следва

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \geqq 0, \tag{1}$$

поради което

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \geqq 0 \tag{2}$$

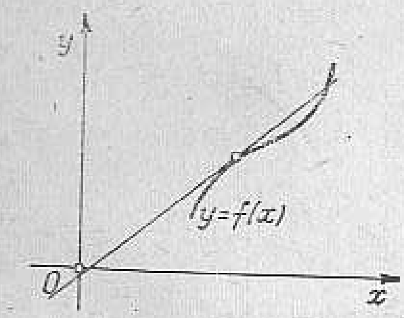
и твърдението е доказано при $a \leqq x < b$. За да направим това и когато $x=b$ ще изберем отрицателно h с $a \leqq x+h \leqq b$. Тогава (1) ще бъде отново в сила, тъй като понеже f е растяща, числителят ще бъде неположителен, а знаменателят е отрицателен съгласно избора на h. Сега (2) отново следва от (1).

Аналогично се доказва, че:

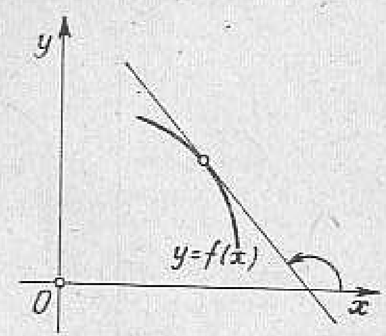
Ако функцията f е монотонно намаляваща и диференцируема в интервала $[a, b]$, производната ѝ е неположителна в този интервал.

Тези две твърдения притежават проста геометрична интерпретация. Ако функцията f е растяща (намаляваща) в един интервал, тангентата към произволна точка от графиката ѝ сочи нагоре (надолу) (вж. черт. 64 и черт. 65).

Не по-малко естествено е и механическото тълкуване на горните твърдения. Законът на едно движение на точка по абсцис-



Черт. 64



Черт. 65

ната ос е растяща функция, когато през цялото време точката се движи надясно. Но когато това е така, скоростта е очевидно неотрицателна през цялото време. Аналогично, ако законът на движението е намаляваща функция, точката се движи наляво и следователно скоростта е неположителна.

На практика се случва твърде рядко да извличаме информация за знака на производната на една функция като предварително изследваме дали тя е монотонна. Най-често се прави обратното, т. е. намира се производната на функцията f, изследва се знака на тази производна и от него се съди за монотонността на f. В основата на тази техника стои следния критерий за монотонност.

Ако функцията f е дефинирана и диференцируема навсякъде в един интервал Δ и производната ѝ е неотрицателна навсякъде в този интервал, функцията f е растяща в Δ.

Ако функцията f е дефинирана и диференцируема навсякъде в един интервал Δ и производната ѝ е неположителна навсякъде в този интервал, функцията f е намаляваща в Δ.

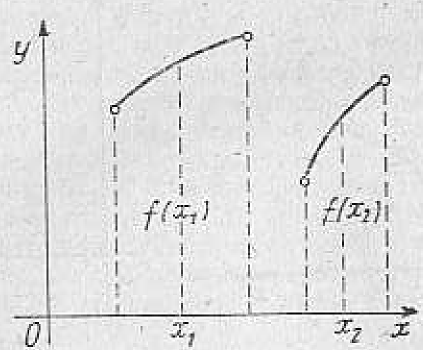
Геометрическият превод на този критерий гласи.

Ако функцията f е дефинирана в някой интервал и тангентата към всяка точка от графиката ѝ сочи нагоре (надолу), функцията е растяща (намаляваща) (вж. черт. 64 и черт. 65).

Ако преведем горния критерий на механически език ще получим:

Ако по време на цялото движение на една точка върху абсцисната ос, скоростта е неотрицателна (неположителна), точката се движи надясно (наляво).

Критерият за монотонност съдържа в себе си като частен



Черт. 66

случай фундаменталното свойство на производните (гл. 3, §10). Наистина, ако производната на една функция е нула в един интервал, тя е както неположителна, така и неотрицателна в този интервал, и съгласно критерия за монотонност функцията ще бъде едновременно растяща и намаляваща, а както знаем това е възможно само когато тя е константа.

Да отбележим още, че предположението дефиниционната област на функцията да е интервал е съществено за валидността на критерия за монотонност. Чертеж 66 посочва пример, когато дефиниционната област на функцията се състои от два интервала, производната е навсякъде положителна, но функцията не е растяща.

Пример 1. Функцията

$$y = x^{2n} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

е намаляваща при $x \leq 0$ и растяща при $x \geq 0$.

Наистина като диференцираме получаваме

$$y' = 2n\, x^{2n-1}.$$

Понеже $2n-1$ е нечетно число при $x \leq 0$ ще имаме $y' \leq 0$, а при $x \geq 0$ — $y' \geq 0$.

Пример 2. Функцията

$$y = x^{2n+1} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

е растяща върху цялата права.

Наистина като диференцираме получаваме

$$y' = (2n+1)\, x^{2n}.$$

Понеже $2n$ е четно число за всяко x ще имаме $y' \geq 0$.

Пример 3. Функцията

$$y = \frac{\sin x}{x}$$

е намаляваща при $0 < x \leq \frac{\pi}{2}$.

Наистина като диференцираме получаваме

$$y' = \frac{x \cos x - 1 . \sin x}{x^2} = \frac{\cos x\,(x - \operatorname{tg} x)}{x^2}.$$

Понеже $\cos x \geq 0$, $x > 0$ и $x < \operatorname{tg} x$ в разглеждания интервал, то $y' < 0$.

Пример 4. Да се докаже неравенството

$$\sin x \geq \frac{2}{\pi} x \qquad \left(0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}\right). \tag{3}$$

Както току-що видяхме функцията $\frac{\sin x}{x}$ е намаляваща в интервала $0 < x \leq \frac{\pi}{2}$ и следователно ще бъде изпълнено неравенството

$$(4) \qquad \frac{\sin x}{x} \geq \frac{\sin \frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}}$$

за всяко x с $0 < x \leq \frac{\pi}{2}$. Не е трудно да се види, че (3) и (4) са еквивалентни.

§ 2. ВТОРА ПРОИЗВОДНА

Производната на една функции f се нарича понякога *първа производна на f*. Производната на първата производна на f се нарича *втора производна на f* и се означава с f''. По друг начин това може да се запише и така

$$f'' = (f')'.$$

По-общо по индукция може да се дифинира и n-та производна като производната на $n-1$-вата производна, или което е все същото

$$f^{(n)} = (f^{(n-1)})'.$$

Втората производна се намира, като се диференцира първата по правилата изучени в гл. 3. За да разгледаме един пример, ще намерим втората производна на функцията $y = \frac{1}{x}$. Очевидно $y' = -\frac{1}{x^2}$ и следователно $y'' = (-x^{-2})' = 2x^{-3} = \frac{2}{x^3}$.

§ 3. ЕКСТРЕМУМИ НА ФУНКЦИИ

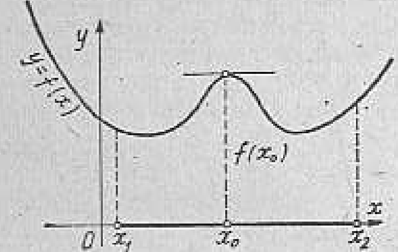
Често максимумите и минимумите на една функция f се наричат екстремуми на f, а задачата за намиране на екстремумите — екстремална задача. Следва да се различават локални и абсолютни екстремуми и по-долу предстои да изучим тези две понятия.

Нека функцията f е дефинирана в интервала (a, b) и x_0 е точка от този интервал, т. е. $a < x_0 < b$. Казваме, че функцията f притежава *локален максимум* в точката x_0, когато съществува

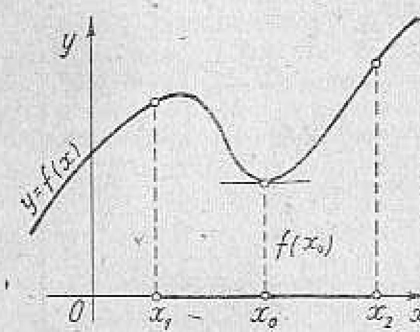
такава околност (x_1, x_2) на x_0, че за всяко x от тази околност да бъде изпълнено неравенството

$$(1) \qquad f(x) \leqq f(x_0).$$

Това означава, че измежду всички стойности на f в околността (x_1, x_2) на x_0, най-голяма е стойността $f(x_0)$ в точката x_0 (черт. 67).



Черт. 67



Черт. 68

Аналогично се дефинира и понятието локален минимум. Казваме, че функцията f има *локален минимум* в една точка x_0 от вътрешността на дефиниционния си интервал (a, b), когато съществува такава околност (x_1, x_2) на x_0 $(x_1 < x_0 < x_2)$, че за всяко x от околността (x_1, x_2) на x_0 да е в сила неравенството

$$(2) \qquad f(x) \geqq f(x_0)$$

(черт. 68).

Локалните максимуми и локалните минимуми на една функция се наричат с общото название *локални екстремуми*.

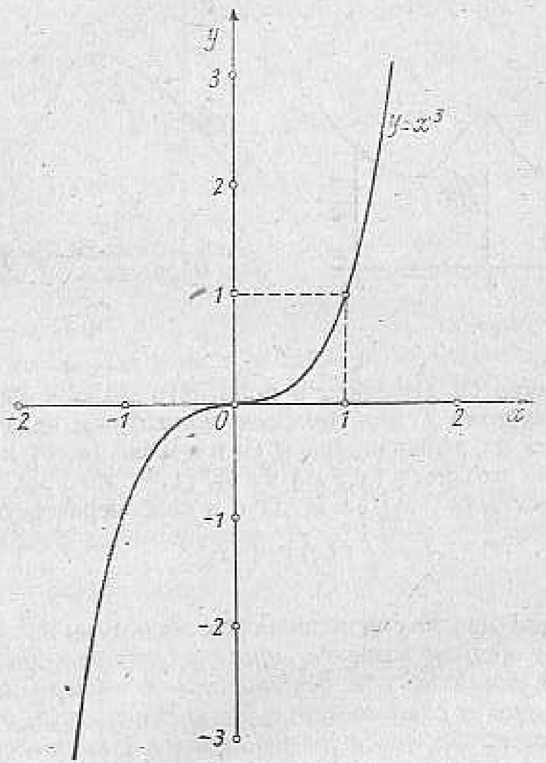
Нека функцията f е дефинирана в интервала (a, b) и е диференцируема в една точка x_0 от интервала (a, b) $(a < x_0 < b)$. Ако при тези предположения функцията f притежава локален екстремум в точката x_0, производната на f в точката x_0 се анулира, т. е.

$$(3) \qquad f'(x_0) = 0.$$

Наистина черт. 67 и 68 показват, че при направеното предположение, тангентата към графиката на f в точката $(x_0, f(x_0))$ е хоризонтална, което е възможно само когато нейният ъглов коефициент е нула, т. е. когато е налице (3).

Не е трудно да се убедим чрез конкретни примери, че условието (3) може да бъде налице без функцията f да притежава локален екстремум.

Пример 1. Нека $f(x)=x^3$. Тогава $f'(x)=3x^2$, и равенството $f'(x_0)=0$ е изпълнено при $x_0=0$. Въпреки това функцията не притежава локални екстремуми (черт. 69).



Черт. 69

Понякога се казва, че условието (3) е *необходимо* за съществуването на локален екстремум, което означава, че винаги когато в x_0 е налице локален екстремум и f е диференцируема, условието (3) е в сила. Пример 1 показва, че условието (3) не е *достатъчно* за съществуването на локален екстремум, т. е. има

случаи, когато условието (3) е налице и въпреки това функцията няма локален екстремум.

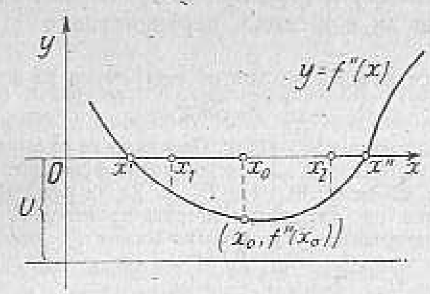
Едно достатъчно условие за съществуването на локален екстремум може да се получи с помощта на критерия за монотонност от §1. Съответното предложение гласи:

Нека функцията f е дефинирана и притежава първа и втора производна навсякъде в интервала (a, b) и x_0 е точка от вътрешността на този интервал, т. е. $a < x_0 < b$. Ако при тези предположения $f'(x_0)=0$, $f''(x_0)\neq 0$ и втората производна f'' е непрекъсната в точката x_0, функцията f сигурно притежава локален екстремум в x_0. Когато $f''(x_0)<0$ локалният екстремум е максимум, а когато $f''(x_0)>0$ той е минимум.

Без ограничаване на общността можем да се спрем само на случая, когато $f''(x_0)<0$. От последното неравенство и от непрекъснатостта на f'' в точката x_0 следва, че неравенството

$$f''(x)<0 \tag{4}$$

ще бъде изпълнено за всички x от една достатъчно малка околност (x_1, x_2) на x_0. Наистина, ако вземем произволна хоризонтална лента U, която съдържа точката $(x_0, f''(x_0))$ във вътрешността си и лежи изцяло под абсцисната ос (такава лента сигурно има понеже $f''(x_0)<0$), съгласно дефиницията на непрекъснатостта ще съществува такава околност (x_1, x_2) на x_0, че за всяко x от тази околност точката $(x, f''(x))$ да принадлежи на лентата U; тъй като лентата беше избрана изцяло под абсцисната ос от-



Черт. 70

тук следва, че за всяко x от (x_1, x_2) точката $(x, f''(x))$ ще се намира под абсцисната ос, т. е. ще бъде налице (4) (вж. черт. 70).

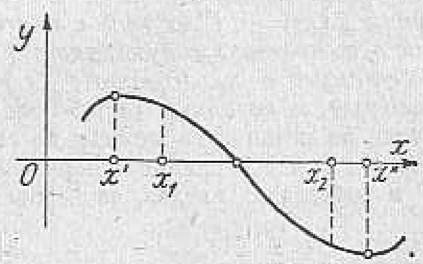
Съгласно критерия за монотонност от (4) следва, че първата производна ще бъде намаляваща в интервала (x_1, x_2). От друга страна, по условие имаме $f'(x_0)=0$, поради което ще бъдат изпълнени неравенствата

(5) $$f'(x) \geqq f'(x_0)=0 \quad \text{при} \quad x_1 < x \leqq x_0$$

и

(6) $$f'(x) \leqq f'(x_0)=0 \quad \text{при} \quad x_0 \leqq x < x_2$$

(черт. 71).



Черт. 71

Съгласно критерия за монотонност от (5) следва, че функцията f е монотонно растяща, когато $x_1 < x \leqq x_0$. Следователно

(7) $$f(x) \leqq f(x_0) \quad \text{при} \quad x_1 < x \leqq x_0.$$

Аналогично от (6) следва, че

(8) $$f(x) \leqq f(x_0) \quad \text{при} \quad x_0 \leqq x < x_2.$$

Сега неравенствата (7) и (8) показват, че за всяко x от околността (x_1, x_2) на x_0 е в сила неравенството (1). (вж. черт. 67).

Пример 2. Да се намерят локалните екстремуми на функцията

$$y=\cos x.$$

За производната имаме $y'=-\sin x$. Очевидно тя се анулира, когато $\sin x=0$ т. е. когато $x=k\pi$ $(k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$. Следователно функцията може да има локални екстремуми само при $x=k\pi$ $(k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$. За да разберем за кои от посочените точки това е така, ще изследваме втората производна. Като диференцираме първата производна получаваме $y''=-\cos x$. Тогава

$$y''(k\pi)=-\cos k\pi=-(-1)^k=(-1)^{k+1}$$

и следователно при $x=2k\pi$ функцията има локален максимум, а при $x=(2k+1)\pi$ — локален минимум.

Пример 3. Да се намерят локалните екстремуми на функцията

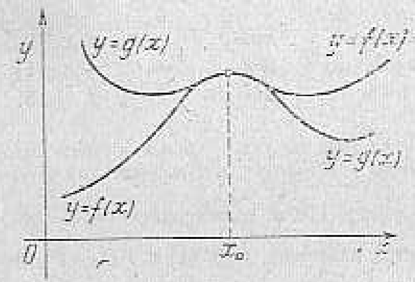
$$y=\frac{1}{3}x^3-\frac{5}{2}x^2+6x-1.$$

За производната имаме $y'=x^2-5x+6$. Очевидно тя се анулира, когато $x^2-5x+6=0$, т. е. когато $x=2, 3$ и следователно функцията може да има локални екстремуми само при $x=2, 3$. За да разберем в кои от посочените точки това е така, ще изследваме втората производна. Като диференцираме първата производна, получаваме $y''=2x-5$ и

$$y''(2)=-1<0, \quad y''(3)=1,$$

поради което функцията има локален максимум при $x=2$ и — локален минимум при $x=3$.

Да отбележим, че съгласно дефиницията въпросът дали функцията f има локален екстремум в някоя точка x_0 зависи само от поведението на f в произволно малка околност на точката x_0. По-точно, ако две функции f и g съвпадат в някоя околност на точката x_0 и f притежава локален екстремум в x_0, същото е вярно и за g (черт. 72). Това е причината, поради която разглежданите екстремуми се наричат локални.



Черт. 72

Най-голямата и най-малката стойности на една функция в един интервал се наричат съответно *абсолютен максимум* и *абсолютен минимум* на функцията в разглеждания интервал. Накратко те се наричат *абсолютни екстремуми* на функцията. Очевидно, ако абсолютният екстремум се достига във вътрешността на интервала, той е локален. Но, разбира се, абсолютните екстремуми могат да се достигат и в крайните точки на интервала, а може да се случи въобще да няма такива.

Пример 4. Функцията $f(x)=x$ няма абсолютни екстремуми в интервала $0<x<1$.

Наистина за всяко x с $0<x<1$ може да се избере $x'>x$, за което $0<x'<1$. Тогава $f(x)<f(x')$ и следователно $f(x)$ не е най-голямата стойност на f в интервала. Аналогично се вижда, че f няма и най-малка стойност в този интервал.

Пример 5. Да се намерят абсолютните екстремуми на функцията

$$f(x)=2x^3+3x^2-12x-9$$

в интервала $-\frac{5}{2}\leq x\leq 3$.

За да решим задачата, ще намерим интервалите, в които дадената функция е монотонна. За това ще си послужим с критерия за монотонност от §1. Като диференцираме f получаваме $f'(x)=6x^2+6x-12$, или като разложим квадратния тричлен на множители

(9) $$f'(x)=6(x+2)(x-1).$$

От (9) лесно следва, че са изпълнени неравенствата

$$\begin{array}{lll} f'(x)\geq 0 & \text{при} & -\,^5/_2\leq x\leq -2, \\ f'(x)\leq 0 & \text{при} & -2\leq x\leq 1, \\ f'(x)\geq 0 & \text{при} & 1\leq x\leq 3. \end{array}$$

Оттук намираме, че функцията f е

(10) $$\begin{array}{lll} \text{растяща} & \text{при} & -\,^5/_2\leq x\leq 2, \\ \text{намаляваща} & \text{при} & -2\leq x\leq 1, \\ \text{растяща} & \text{при} & 1\leq x\leq 3. \end{array}$$

Намерените свойства (10) на f до голяма степен позволяват да намерим абсолютните екстремуми на f. Наистина, от първите две от свойствата (10) следва, че за всяко x с $-\frac{5}{2}\leq x\leq 1$ е в сила неравенството $f(x)\leq f(-2)$, а от последното от тези свойства намираме, че $f(x)\leq f(3)$, когато $1\leq x\leq 3$. И така, за всяко x от интервала $\left[-\frac{5}{2}, 3\right]$ числото $f(x)$ не надминава поне едно от числата $f(-2)$ и $f(3)$ (направете чертеж). Следователно, за да намерим най-голямата стойност на f в интервала $\left[-\frac{5}{2}, 3\right]$ остава само да проверим кое от числата $f(-2)$ и $f(3)$ е по-голямо. Но $f(-2)=21$ и $f(3)=36$, поради което абсолютният максимум на f в интервала се достига в точката $x=3$ и е равен на 36.

Аналогично от (10) намираме, че $f(x)\geq f\left(-\frac{5}{2}\right)$ за всяко x с $-\frac{5}{2}\leq x\leq -2$ и $f(x)\geq f(1)$ за всяко x с $-2\leq x\leq 3$. Но $f\left(-\frac{5}{2}\right)=\frac{17}{2}$ и $f(1)=-16$, поради което най-малката стойност на f в интервала $\left[-\frac{5}{2}, 3\right]$ се достига при $x=1$ и е равна на -16.

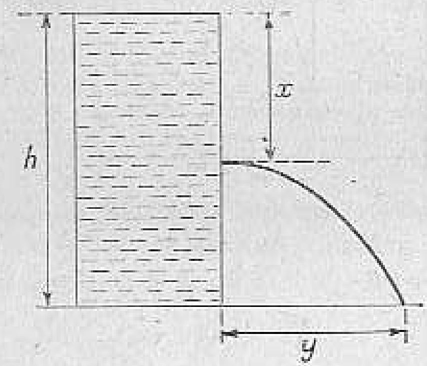
§ 4. НЯКОИ ЗАДАЧИ ЗА ЕКСТРЕМУМ

В този параграф ще разгледаме някои задачи за намиране на най-големи и най-малки стойности на функции в интервали. Това са задачи за абсолютни екстремуми. Понякога от геометрични или физични съображения се вижда, че търсеният екстремум не може да се достигне в крайните точки на интервала и следователно намирането му се свежда до това на локален екстремум.

Задача 1. *Един съд, чиято вертикална стена има височина h е поставен върху хоризонтална равнина. На кое място в стената трябва да се пробие отвор, така че струята да пресича хоризонталната равнина възможно най-далеч от съда.*

Най-напред да отбележим, че от физически съображения е ясно, че такова екстремно положение действително съществува. Освен това въпросният максимум не може да се достигне, ако отворът се пробие в най-горната или пък в най-долната точка на съда, понеже тогава струята ще пресича равнината на разстояние нула от съда. Следователно става дума за локален максимум.

Да пробием на разстояние x от горната основа на съда отвор и да намерим на какво разстояние от съда струята ще пресича хоризонталната равнина (черт. 73). Произволна капка от струята трябва да измине „по вертикалата" разстояние $h-x$. Ако означим с t времето на падането, съгласно закона за свободното падане на телата ще имаме $h-x=\frac{gt^2}{2}$, откъдето $t=\sqrt{\frac{2(h-x)}{g}}$. През така намереното време капката ще се движи „по хоризонталата" със скоростта на



Черт. 73

изтичането, която съгласно закона на Торичели е $V=\sqrt{2gx}$ и следователно търсеното разстояние ще бъде

(1) $$y=vt=2\sqrt{x(h-x)}.$$

По този начин всичко се сведе до намирането на локалните екстремуми на функцията (1), които очевидно се достигат в точките, в които функцията $y=x(h-x)$ притежава локални екстремуми. Но $y'=h-x-x$ и очевидно y' е нула само когато $x=\frac{h}{2}$. Следователно търсеният максимум може да се представи само когато $x=\frac{h}{2}$.

Задача 2. *В чаша с форма на полусфера с радиус a е пусната пръчка с дължина $l>2a$. Да се намери равновесното положение на пръчката.*

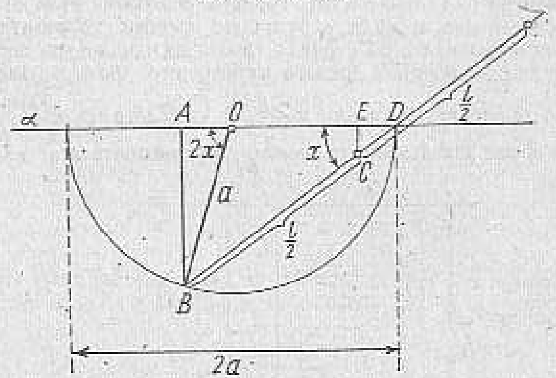
От механически съображения е ясно, че когато $l>4a$, равновесно положение не съществува, поради което ще се ограничим само със случая $l<4a$. *Въпросното равновесно положение ще се представи, когато центърът на тежестта на пръчката заема най-ниското възможно положение и следователно отново имаме задача за екстремум.*

Да изразим разстоянието y на средата на пръчката (центъра на тежестта ѝ) до равнината α, в която лежи горният ръб на чашата като функция на ъгъла, който тази пръчка сключва с α (черт. 74). Нека C е средата на пръчката. Триъгълниците DAB и DEC са очевидно подобни и следователно

$$(2)\qquad \frac{EC}{AB}=\frac{DC}{DB}.$$

От равнобедреността на триъгълника DOB следва, че

$$(3)\qquad DB=2a\cos x,$$



Черт. 74

а като използуваме правоъгълния триъгълник OAB, получаваме

$$(4)\qquad AB=a\sin 2x.$$

От друга страна, $DC=DB-CB$ и по силата на (3) получаваме

$$(5)\qquad DC=2a\cos x-\frac{l}{2}.$$

Тъй като $y=EC$ равенствата (2), (3), (4) и (5) дават

$$(6)\qquad y=\frac{a\sin 2x\left(2a\cos x-\frac{l}{2}\right)}{2a\cos x}=\sin x\left(2a\cos x-\frac{l}{2}\right).$$

По този начин решението на задачата се свежда до намирането на абсолютния максимум на функцията (6) с дефиниционна област $0\le x\le\frac{\pi}{2}$. От механически съображения следва, че въпросният максимум не може да се достигне в краищата на дефиниционния интервал, поради което ще бъде локален.

Като диференцираме (6), получаваме

$$(7)\qquad y'=\cos x\left(2a\cos x-\frac{l}{2}\right)-2a\sin^2 x=4a\cos^2 x-\frac{l}{2}\cos x-2a$$

и производната ще се анулира, когато ъгълът x удовлетворява условието

$$(8)\qquad 16a\cos x=l+\sqrt{l^2+128a^2}.$$

Следователно пръчката ще бъде в равновесие, когато се постави в чашата така, че сключеният от нея ъгъл x с равнината α да удовлетворява условията (6).

На края ще отбележим изрично, че при решаването на горните две задачи не се наложи да използуваме достатъчното условие за съществуване на локален екстремум от §3, защото наличието на желания екстремум следваше от физически съображения. Оставаше да се намери само къде този екстремум се достига, а за това е достатъчно да се използува само необходимото условие за екстремум от §3.

§ 5. ИЗПЪКНАЛИ ФУНКЦИИ

Една функция, която е дефинирана в интервал се нарича *изпъкнала (конвексна)*, когато множеството от точките в равнината, разположени над графиката на функцията е изпъкнало (черт. 75). Това означава, че каквито и две точки от графиката на тази функция и да изберем, отсечката, която ги съединява, лежи изцяло над графиката.

За да изразим това условие на аналитичен език, да означим най-напред с f дадената функция, а с $[a, b]$ дефиниционния ѝ интервал. Ако x и y са произволни точки от $[a, b]$, общият вид на точките ζ от абсцисната ос, които са между x и y, се дава с формулата

$$(1)\qquad \zeta=px+(1-p)y,$$

където p пробягва интервала $[0,1]$, а условието за изпъкналост означава, че

$$(2)\qquad \zeta D\le\zeta D'.$$

От друга страна, съгласно (1) ще имаме

$$(3)\qquad \zeta D=f(\zeta)=f(px+(1-p)y)$$

и за да запишем по друг начин (2), остава да изразим $\zeta D'$ чрез f и p. За тази цел ще си послужим с подобните триъгълници ABC и $A'B'C'$ и ще получим

$$B'C'=BC\frac{AB'}{AB},$$

откъдето

$$(4)\qquad \zeta C'=\zeta B'+B'C'=f(x)+(f(y)-f(x))\frac{\zeta-x}{y-x}.$$

Ако сега заместим в (4) ζ с равното му от (1), ще получим

(5) $$\zeta C' = f(x) + (f(y) - f(x))(1-p) = pf(x) + (1-p)f(y).$$

Сега (5), (3) и (2) дават

(6) $$f(px + (1-p)y) \leq pf(x) + (1-p)f(y).$$

И така функцията f е изпъкнала в интервала $[a, b]$, когато за всеки две точки x и y от този интервал и за всяко p с $0 \leqq p \leqq 1$ е в сила неравенството (6).

От геометрически съображения е ясно, че ако една диференцируема функция е изпъкнала, когато се движим надясно по абсцисната ос, тангентата става по-стръмна. Това означава, че първата й производна е растяща. Съгласно изученото в §1, оттук следва, че ако освен това разглежданата функция притежава и втора производна, втората производна ще бъде неотрицателна. По интересно е, че е вярно и обратното, т. е.

Ако функцията f е дефинирана и притежава първа и втора производна в интервала $[a, b]$ и ако втората производна приема неотрицателни стойности навсякъде в $[a, b]$, функцията е изпъкнала в интервала $[a, b]$.

Геометрически твърдението е ясно: щом производната на първата производна е неотрицателна, съгласно критерия за монотонност от §1, първата производна ще бъде растяща. С други думи, при движение надясно по абсцисната ос тангентата ще се върти в посока обратна на часовниковата стрелка, откъдето се вижда, че частта от равнината, разположена над графиката на f, е изпъкнала.

Ще приведем още едно доказателство. Да изберем по произволен начин y от $[a, b]$ и p от $[0,1]$ и да разгледаме функцията на x

(7) $$\varphi(x) = pf(x) - f(px + (1-p)y),$$

където x се променя в интервала $[a, y]$. Като диференцираме, получаваме

(8) $$\varphi'(x) = pf'(x) - f'(px + (1-p)y) \cdot p$$

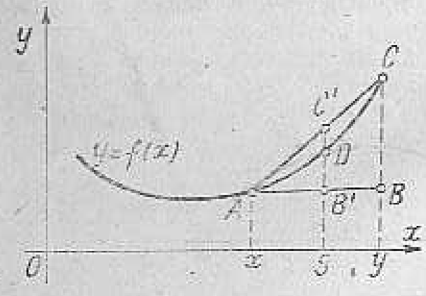
(тук бе използувана и теоремата за диференциране на функция от функция). Тъй като $x \leqq y$, то $x \leq px + (1-p)y$ и понеже първата производна е растяща, от (8) получаваме

(9) $$\varphi'(x) \leq 0,$$

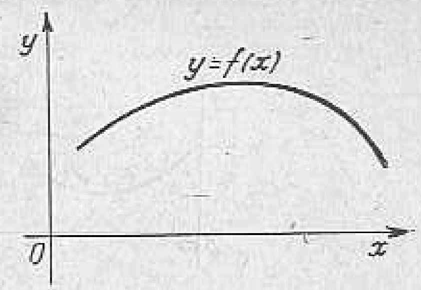
поради което функцията φ е намаляваща в интервала $[a, y]$. Следователно $\varphi(x) \geqq \varphi(y)$, което съгласно (7) дава

$$pf(x) - f(px + (1-p)y) \geq pf(y) - f(y)$$

или което е все същото — неравенството (6). По този начин неравенството (6) е доказано, когато $a \leqq x \leqq y$. Аналогично доказателство може да се даде и в случая, когато $y \leqq x \leq b$.



Черт. 75



Черт. 76

По аналогичен начин се въвежда и понятието *вдлъбната (конкавна) функция*. Функцията f се нарича вдлъбната в интервала $[a, b]$, когато частта от равнината, която е разположена под графиката на f е изпъкнала (черт. 76). Аналитически това означава, че при всеки избор на x и y от $[a, b]$ и на p от $[0,1]$ е в сила неравенството

(10) $$f(px + (1-p)y) \geq pf(x) + (1-p)f(y).$$

Също както при изпъкналите функции може да се види, че ако една функция f е два пъти диференцируема в интервала $[a, b]$, тя е вдлъбната тогава и само тогава, когато $f(x) \leq 0$ за всяко x от $[a, b]$.

Да отбележим още, че функцията f е вдлъбната тогава и само тогава, когато функцията $-f$ е изпъкнала.

Пример 1. Да се докаже, че функцията $y = x^2$ е изпъкнала.

Наистина, като диференцираме два пъти, ще получим $y'' = 2 > 0$.

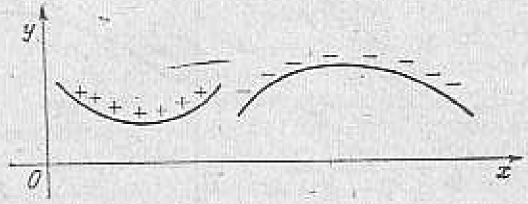
Пример 2. Да се изследва къде функцията $y = x^3$ е изпъкнала и къде е вдлъбната.

Като диференцираме два пъти, ще получим $y'' = 6x$, откъдето намираме, че

$$y''(x) \leq 0 \text{ при } x \leq 0,$$
$$y''(x) \geq 0 \text{ при } x \geq 0$$

и следователно функцията е вдлъбната в интервала $(-\infty, 0]$ и изпъкнала в интервала $[0, \infty)$.

Връзката между знака на втората производна и изпъкналостта се запомня лесно с помощта на следното „правило за чашата“ (черт. 77). Ако при наливане на течност, тя се задържа в графиката (+), втората производна е неотрицателна, ако пък течността не се задържа (−), втората производна е неположителна.



Черт. 77

На края ще се спрем на едно обобщение на неравенството (6), като ще представим на читателя сам да направи аналогичните разглеждания за (10).

Ако функцията f е изпъкнала в интервала $[a, b]$, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *са произволни точки от този интервал и* $p_1, p_2, \ldots, p_n$ *са произволни точки от интервала* $[0, 1]$ *с* $\sum_{\nu=1}^{n} p_i = 1$, *в сила е неравенството*

(11) $$f\left(\sum_{i=1}^{n} p_i x_i\right) \leqq \sum_{i=1}^{n} p_i f(x_i).$$

Доказателството използува индукция по n. При $n=2$ твърдението следва от (6). Да предположим сега, че (11) е вярно при някое n и да докажем верността му за $n+1$, т. е. да докажем неравенството

(12) $$f\left(\sum_{i=1}^{n+1} p_i x_i\right) \leqq \sum_{i=1}^{n+1} p_i f(x_i),$$

където $x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}$ са произволни точки от интервала $[a, b]$, а $p_1, p_2, \ldots, p_n, p_{n+1}$ са произволни числа от интервала $[0, 1]$ за които

(13) $$\sum_{i=1}^{n+1} p_i = 1.$$

Ако $p_{n+1}=1$, от (13) и от обстоятелството, че всички p_i са неотрицателни следва, че $p_1=p_2=\ldots=p_n=0$ и (12) е очевидно вярно. Следователно без ограничение на общността може да се приеме, че $0 \leqq p_{n+1} < 1$. Тогава можем да положим

(14) $$q_i = \frac{p_i}{1-p_{n+1}} \qquad (i=1, 2, \ldots, n).$$

От (13) най-напред получаваме

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1 - p_{n+1}$$

и следователно

(15) $$\sum_{i=1}^{n} q_i = \frac{1}{1-p_{n+1}} \sum_{i=1}^{n} p_i = 1$$

Освен това очевидно $q_i \geqq 0$ и от (15) следва, че $q_i \in [0,1]$, поради което съгласно индукционното предположение ще имаме

(16) $$f\left(\sum_{i=1}^{n} q_i x_i\right) \leqq \sum_{i=1}^{n} q_i f(x_i).$$

Да положим сега $p=p_{n+1}$, $x=x_{n+1}$ и $y=\sum_{i=1}^{n} q_i x_i$

Тогава (6) и (16) дават

$$f\left(\sum_{i=1}^{n+1} p_i x_i\right) = f\left((1-p_{n+1}) \sum_{i=1}^{n} \frac{p_i}{1-p_{n+1}} x_i + p_{n+1} x_{n+1}\right)$$

$$= f\left((1-p)y + p\,x\right) \leqq (1-p_{n+1})\, f\left(\sum_{i=1}^{n} q_i x_i\right) + p_{n+1} f(x_{n+1})$$

веднъж получаваме $y''=\frac{6x}{10}$ и $y''(\sqrt{3})=\frac{6\sqrt{3}}{10}>0$, откъдето съгласно §4 при $x=\sqrt{3}$ ще имаме локален минимум. Стойността на този минимум е $y(\sqrt{3})=\frac{3\sqrt{3}-9\sqrt{3}}{10}=\frac{-6\sqrt{3}}{10}\approx-1{,}02$.

След като познаваме производната и точките, в които тя се анулира, не е трудно да изследваме знака на тази производна. Да отбележим най-напред, че между две последователни нули знакът не може да се изменя, поради което производната ще има постоянен знак в интервалите $(-\infty,-\sqrt{3})$ и $(-\sqrt{3},\ \sqrt{3})$, и $(\sqrt{3},\infty)$.

Понеже числата $f'(-2)=\frac{3}{10}$, $f'(0)=-\frac{9}{10}$ и $f'(2)=\frac{3}{10}$ имат съответно положителен, отрицателен и положителен знак, същото ще бъде вярно и за знака на производната в съответните интервали. Следователно функцията е растяща в интервала $(-\infty,-\sqrt{3})$, намаляваща в $(-\sqrt{3},\sqrt{3})$ и отново расте в $(\sqrt{3},\infty)$. Това условно може да се изобрази в следната диаграма

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		$\sqrt{3}$		$+\infty$
y	$-\infty$	$\nearrow$	max	$\searrow$	min	$\nearrow$	$+\infty$

Да пристъпим сега към изследване знака на самата функция. Както и при изследване знака на производната, най-напред е удобно да намерим нулите на функцията, т. е. да решим уравнението $x^3-9x=0$. Като направим това, ще получим $x_1=-3$, $x_2=0$ и $x_3=3$ и при неотрицателни x функцията ще запазва постоянен знак в интервалите $[0,3]$ и $[3,\infty)$. Понеже, както вече знаем, $y(\sqrt{3})=-1{,}02<0$, знакът на y в интервала $(0,3)$ е минус. От друга страна, вече видяхме, че при големи x функцията клони към ∞ и следователно знакът на y в интервала $(3,\infty)$ ще бъде плюс. Това условно може да се изобрази в следната диаграма

x	0		3		∞
y	0	$-$	0	$+$	∞

При чертаенето на графиката трябва да имаме пред вид, че точките от нея, които са над интервала $(0,3)$ са под абсцисната ос, а онези, които са над интервала $(3,\infty)$ — над абсцисната ос.

Вече имаме немалко информация за функцията, но за да добием възможност по-точно да представим общия вид на графиката ѝ, ще изследваме къде функцията е изпъкнала и къде вдлъбната. За тази цел разглеждаме втората производна. Понеже $y''=\frac{3x}{5}$, то $y''(x)\leqq 0$ при $x\leqq 0$ и $y''(x)\geqq 0$ при $x\geqq 0$ и следователно функцията е вдлъбната при $x\geqq 0$ и изпъкнала при $x\geqq 0$. Това условно може да се изобрази в следната диаграма

x	$-\infty$		0		∞
y					

Понеже началото на координатната система е център на симетрия на графиката, желателно е да разполагаме с повече информация за тази точка. Да намерим например ъгловия коефициент на тангентата в тази точка, или което е все същото, да намерим стойността на производната при $x=0$. Очевидно $y'(0)=-0{,}9$ и следователно вече сме в състояние да построим тази тангента.

Сега ще намерим стойностите на функцията в някои отделно взети точки и ще получим следната таблица

x	0	1	2	3	4	∞
y	0	$-0{,}8$	-1	0	2,8	∞

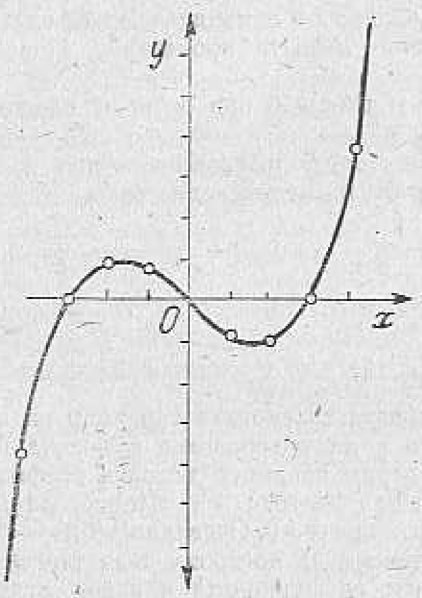
Като вземем пред вид цялата така получена информация, можем да начертаем приблизително графиката на функцията (черт. 78).

Пример 2. Да се изследва функцията

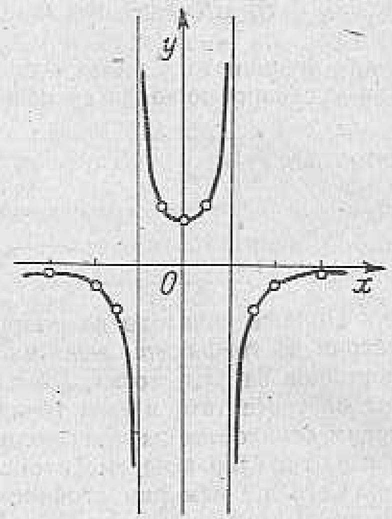
$$y=\frac{1}{1-x^2}.$$

Очевидно тази функция не е дефинирана, когато знаменателят се анулира, т. е. при $x=-1$ и $x=1$. Следователно дефиниционната ѝ област се състои от следните интервали $(-\infty,-1)$, $(-1, 1)$ и $(1, \infty)$.

Краищата на дефиниционната област са $-\infty, -1$, 1, и ∞. Но тук не се налага да изследваме поведението на y около



Черт. 78



Черт. 79

всичките така изброени точки, защото отново е налице симетрия. Този път графиката на функцията е симетрична относно ординатната ос. Това означава, че винаги когато точката (x,y) принадлежи на графиката на функцията, точката $(-x,y)$ също принадлежи. В нашия случай това е така, понеже

$$y(-x)=\frac{1}{1-(-x)^2}=\frac{1}{1-x^2}=y(x).$$

Функции със симетрична относно началото дефиниционна област и със свойството $y(-x)=y(x)$ се наричат *четни*. Графиката на всяка четна функция е симетрична относно ординатната ос. Четни функции са например всички рационални функции, в които x участвува само с четни степени, функцията $\cos x$ и т. н.

Поради симетрията ще се ограничим с изследване на поведението на y около $x=1$ и $x=\infty$. Когато x клони към 1 отляво, $1-x^2$ клони към нула чрез положителни стойности, поради което $y\to\infty$. Когато x клони към 1 отдясно, $1-x^2$ клони към нула чрез отрицателни стойности и следователно $y\to-\infty$. Когато x клони към ∞, съгласно свойствата на полиномите $1-x^2$ клони към $-\infty$, поради което y клони към нула чрез отрицателни стойности, което понякога накратко се отбелязва така $y\to-0$. Така получените резултати могат накратко да се запишат в следната таблица

x	0	1	1	∞
y	1	$+\infty$	$-\infty$	-0

Като диференцираме y, получаваме

$$y'=\frac{2x}{(1-x^2)^2}$$

и единствената точка, в която първата производна се анулира, е $x=0$. За да си изясним дали в $x=0$ има или няма локален екстремум и за да определим вида на този екстремум, няма нужда да изследваме втората производна, понеже знакът на първата производна се изследва лесно. Наистина знакът на y' съвпада със знака на x, поради което малко преди нулата функцията намалява, а малко след тази точка расте и следователно при $x=0$ е налице локален минимум.

Поради симетрията при определяне на интервалите, в които функцията расте и тези, в които тя намалява, ще се ограничим само с положителни x. За всички такива x, за които y има смисъл, важи неравенството $y'(x)>0$, но тъй като дефиниционната област на y не е интервал, от това не следва, че y расте за всички $x>0$ (вж. §1, черт. 66). Единственото, което може да се твърди, е, че функцията y е растяща във интервалите $[0,1)$ и $(1,\infty)$. Интервалите на монотонност могат условно да се изобразят в следната диаграма

x	–	0	1	∞
y	$\searrow$	min	$\nearrow$	$\nearrow$

Да пристъпим сега към изследване знака на самата функция. Очевидно функцията не се анулира, но въпреки това мени знака си, защото дефиниционната ѝ област не е интервал. Знакът на y съвпада с този на $1-x^2$, който израз, както това не е трудно да се съобрази, е положителен при $0 \leqq x < 1$ и отрицателен при $x > 1$. Това условно може да се изобрази в следната диаграма

x	0		1		∞
y	1	+		−	

За да определим къде функцията е изпъкнала или вдлъбната, трябва да изследваме знака на втората производна. Като диференцираме първата производна, получаваме

$$y'' = \frac{6x^2+2}{(1-x^2)^3}$$

и знакът на y'' зависи само от знака на знаменателя, който пък съвпада със знака на $1-x^2$. Следователно функцията е изпъкнала между -1 и 1 и е вдлъбната в интервала $(1, \infty)$. Това условно може да се изобрази по следния начин

x	-1		1		∞
y		$\smile$		$\frown$	

Сега ще намерим стойностите на функцията в някои отделно взети точки и ще получим следната таблица

x	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	2	4
y	1	$\frac{4}{3}$	$-\frac{4}{5}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{15}$

Като вземем пред вид всичко гореизложено, можем да начертаем приблизително графиката на функцията (черт. 79).

Пример 3. Да се изследва функцията

$$y = e^{-\frac{1}{x^2}}.$$

Очевидно y има смисъл само когато $x \neq 0$ и следователно дефиниционната област се състои от интервалите $(-\infty, 0)$ и $(0, \infty)$. В случая краищата на дефиниционната област са $x=-\infty$, $x=0$ и $x=\infty$. Но и тук не се налага да изследваме поведението на y около всички така изброени точки, защото функцията е четна и следователно графиката ѝ е симетрична относно ординатната ос, поради което можем да се ограничим с изследване само при $x=0$ и $x=\infty$. Когато x клони към нула отляво, $-\frac{1}{x^2}$ клони към $-\infty$. Ето защо $y \to +0$. Аналогично, когато x клони към нула отдясно $-\frac{1}{x^2} \to -\infty$ и $e^{-\frac{1}{x^2}} \to +0$. Тук наблюдаваме един интересен феномен: при $x=0$ функцията не е дефинирана, но лявата и дясната граници на y при x клонящо към нула съществуват и съвпадат. Това позволява при желание да дефинираме y и при $x=0$ по такъв начин, че получената функция да се окаже непрекъсната; за тази цел е достатъчно да положим $y(0)=0$. При чертането на графиката на y около нулата ще считаме, че y е дефинирано и в нулата, и то именно по този начин.

Остава да изучим поведението на y около точката ∞. Когато $x \to \infty$, очевидно $-\frac{1}{x^2} \to -0$ и $y = e^{-\frac{1}{x}} \to 1-0$. Така получените резултати могат да се запишат накратко така

x	0	0	∞
y		0	$1-0$

Като диференцираме y, получаваме

$$y' = \frac{2}{x^3} e^{-\frac{1}{x^2}}.$$

Понеже при $x > 0$ имаме $y' > 0$, функцията е растяща в интервала. Тъй като освен това е налице симетрия относно ординатната ос, при $x=0$ функцията ще има минимум $y(0)=0$.

Заслужава изследване и въпросът дали в точката $x=0$ кривата има тангента или няма. За да се отговори на този въпрос, трябва да се види производната y' има или няма граница, когато x клони към нула. Може да се покаже, че тази граница действително съществува и е нула. Следователно кривата действително има тангента при $x=0$ и тази тангента е хоризонтална.

Интервалите на монотонност и локалните екстремуми могат да се запишат в следната таблица

x		0		∞
y	$\searrow$	0	$\nearrow$	$1-0$

Знакът на самата функция се изследва така: понеже $e^{u}>0$ за всяко u, то $y>0$ за всяко $x \neq 0$; освен това по дефиниция имаме $y(0)=0$ при $x=0$. И така функцията е неотрицателна, като се анулира само при $x=0$.

Като диференцираме първата производна, получаваме

$$y''=\frac{2}{x^6}e^{-\frac{1}{x^2}}(2-3x^2),$$

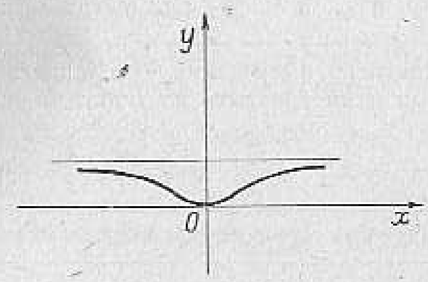
откъдето виждаме, че знакът на y'' съвпада със знака на $2-3x^2$.

Последният квадратен тричлен се анулира при $x=\pm\sqrt{\frac{2}{3}}$, отрицателен е в интервалите $\left(-\infty,-\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$ и $\left(\sqrt{\frac{2}{3}},\infty\right)$ и е положителен в $\left(-\sqrt{\frac{2}{3}},\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$. Ето защо функцията е изпъкнала в интервала $\left(-\sqrt{\frac{2}{3}},\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$ и е вдлъбната в $\left(-\infty,-\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$ и в $\left(\sqrt{\frac{2}{3}},\infty\right)$. Това може да се запише, по-нагледно така

x	$-\infty$		$-\sqrt{\frac{2}{3}}$		$\sqrt{\frac{2}{3}}$		∞
y		$\frown$		$\smile$		$\frown$	

Да намерим стойността на функцията в точките, в които графиката от изпъкнала става вдлъбната. Тези точки се наричат *инфлексни*. Като заместим x с $\sqrt{\frac{2}{3}}\approx 0{,}82$, получаваме с помощта на логаритмични таблици $y\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)=e^{-\frac{3}{2}}\approx 0{,}22$ (тук вземаме пред вид, че $e\approx 2{,}72$, както това ще видим в гл. 5, § 1.). За да се ориентираме повече, бихме могли да пресметнем и ъгловия коефициент на тангентата в едната от инфлексните точки. Като заместим x с $\sqrt{\frac{2}{3}}$ в израза за y', получаваме $y'\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)\approx 0{,}8$.

Гореизложеното дава възможност да начертаем приблизително графиката на функцията (черт. 80).



Черт. 80

Пример 4. Да се изследва функцията

$$y=\sin^3 x+\cos^3 x.$$

Очевидно дефиниционната област съвпада с цялата числова права и краищата ѝ са точките $x=-\infty$ и $x=\infty$. Но тук не се налага да изследваме толкова много поради периодичността на y. Очевидно $y(x+2\pi)=y(x)$ и функцията е периодична с период 2π. Това позволява да се ограничим само с изследването на функцията в произволен интервал с дължина 2π, например в интервала $[-\pi,\pi]$.

Като диференцираме y, получаваме

$$y'=3\sin x\cos x(\sin x-\cos x).$$

Производната се анулира за онези и само онези x, за които е в сила поне едно от равенствата $\sin x=0$, $\cos x=0$, $\sin x=\cos x$. Като намерим решенията на тези уравнения, лежащи в интервала $[-\pi, \pi]$, получаваме, че производната се анулира, когато

$$x=-\pi,\ -3\frac{\pi}{4},\ -\frac{\pi}{2},\ 0,\ \frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{2},\ \pi.$$

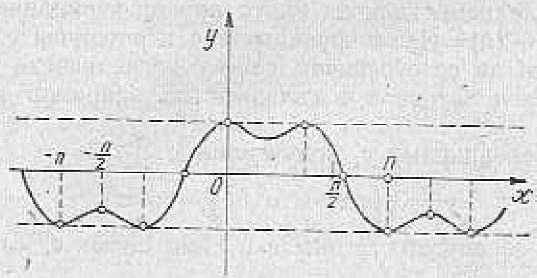
Понеже дефиниционната област е интервал, между две последователни нули производната не може да си мени знака. Непосредствено преди $-\pi$ имаме $\sin x>0$, $\cos x<0$ и $\sin x>\cos x$, поради което на това място ще бъде изпълнено неравенството $y'<0$. Непосредствено след $-\pi$ ще бъдат изпълнени неравенствата $\sin x<0$, $\cos x<0$ и $\sin x>\cos x$, и следователно ще имаме $y'>0$. Като продължим по същия начин, ще получим следната таблица:

x	$-\pi$	$-3\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	π
y'	$-\ 0\ +\ \ 0\ -\ \ 0\ +0-0+0-0+$						

откъдето непосредствено получаваме и следната таблица за локалните екстремуми и интервалите на монотонност на y

x	$-\pi$	$-3\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	π
y	↘min↗ max ↘ min↗max↘ min↗max↘ min↗						

Да изследваме знака на y. За тази цел най-напред ще намерим къде y се анулира, т. е. ще решим уравнението $\sin^3 x+\cos^3 x=0$. Онези негови решения, които лежат в интервала $[-\pi, \pi]$ са $x=-\frac{\pi}{4}$, $3\frac{\pi}{4}$. Аналогично, както и при производната, можем да



Черт. 81

изследваме знака на y и да получим следната таблица

x	$-\pi$	$-\frac{\pi}{4}$	$3\frac{\pi}{4}$	π
y		$-\ 0\ +$	$0\ -$	

Сега ще намерим стойностите на y за някои стойности на x и ще получим следната таблица

x	$-\pi$	$-3\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$3\frac{\pi}{4}$	π
y	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	0	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	0	-1

Вече сме готови да начертаем графиката (черт. 81)

§ 7. НЕРАВЕНСТВО НА КОШИ МЕЖДУ СРЕДНАТА АРИТМЕТИЧНА И СРЕДНАТА ГЕОМЕТРИЧНА

В тази точка ще докажем неравенството

$$(1)\qquad a_1^{p_1} a_2^{p_2} \dots a_n^{p_n} \leqq p_1 a_1+p_2 a_2+\dots+p_n a_n,$$

където $a_1, a_2, \dots, a_n$ са произволни неотрицателни числа, а $p_1, p_2, \dots, p_n$ са произволни неотрицателни числа, за които е в сила равенството

$$p_1+p_2+\dots+p_n=1.$$

Това неравенство е просто следствие от неравенството (5.11), което е изпълнено за произволна изпъкнала функция.

Да положим $\ln a_i=x_i$ или, което е все същото,

$$(2)\qquad a_i=e^{x_i}.$$

Втората производна на функцията $f(x)=e^x$ е $f''(x)=e^x$ и следователно е неотрицателна. Ето защо функцията f е изпъкнала. Тогава съгласно (5. 11) ще имаме

$$e^{p_1x_1+p_2x_2+\dots+p_nx_n} \leqq p_1e^{x_1}+p_2e^{x_2}+\dots p_ne^{x_n}$$

и като вземем пред вид (2) ще получим (1).

Ако в (1) положим $p_1=p_2=\dots=p_n=\frac{1}{n}$, ще получим неравенството

(3) $$\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} \leqq \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n},$$

което се нарича неравенство на Коши между средната аритметична и средната геометрична.

§ 8. НЕРАВЕНСТВО НА ХЬОЛДЕР

Ако в неравенството (7.1) положим $n=2$ ще получим

(1) $$a_1^{p_1} a_2^{p_2} \leqq p_1 a_1 + p_2 a_2,$$

където $a_1 \geqq 0$, $a_2 \geqq 0$, $p_1 \geqq 0$, $p_2 \geqq 0$ и $p_1+p_2=1$. В този параграф ще си послужим с неравенството (1), за да докажем следното неравенство на Хьолдер

(2) $$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \leqq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^q\right)^{\frac{1}{q}} \qquad \left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\right),$$

където $x_i \geqq 0$, $y_i \geqq 0$ $(i=1, 2, \ldots, n)$, $p \geqq 0$, $q \geqq 0$.

За да докажем (2), ще положим

(3) $$X=\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{\frac{1}{p}}, \qquad Y=\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

и

(4) $$\xi_i=\frac{x_i^p}{X^p}, \qquad \eta_i=\frac{y_i^q}{Y^q} \quad (i=1, 2, \ldots, n).$$

Тогава

(5) $$\sum_{i=1}^{n} \xi_i=1 \quad \text{и} \quad \sum_{i=1}^{n} \eta_i=1.$$

Неравенството (1) дава

$$\xi_i^{\frac{1}{p}} \eta_i^{\frac{1}{q}} \leqq \frac{1}{p}\xi_i+\frac{1}{q}\eta_i.$$

Като съберем последните неравенства и вземем пред вид (5) ще получим

$$\sum_{i=1}^{n} \xi_i^{\frac{1}{p}} \eta_i^{\frac{1}{q}} \leqq \frac{1}{p}\sum_{i=1}^{n} \xi_i+\frac{1}{q}\sum_{i=1}^{n} \eta_i=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1,$$

т. е.

$$\sum_{i=1}^{n} \xi_i^{\frac{1}{p}} \eta_i^{\frac{1}{q}} \leqq 1.$$

Ако в последното неравенство заместим ξ_i и η_i с равните им от (4) и се освободим от знаменателя ще получим

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \leqq XY,$$

което съгласно (3) е неравенството на Хьолдер.

§ 9. НЕРАВЕНСТВО НА МИНКОВСКИ

В този параграф ще докажем неравенството

(1) $$\left(\sum_{i=1}^{n} (a_i+b_i)^p\right)^{\frac{1}{p}} \leqq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^p\right)^{\frac{1}{p}},$$

където $a_i \geqq 0$, $b_i \geqq 0$ $(i=1, 2, \ldots, n)$ и $p \geqq 1$.

За да докажем (1), ще се възползуваме от неравенството на Хьолдер. За тази цел най-напред ще преобразуваме основата на лявата страна на (1) по следния начин

(2) $$\sum_{i=1}^{n} (a_i+b_i)^p=\sum_{i=1}^{n} (a_i+b_i)(a_i+b_i)^{p-1}=\sum_{i=1}^{n} a_i(a_i+b_i)^{p-1} + \sum_{i=1}^{n} b_i(a_i+b_i)^{p-1}.$$

Ако определим q от равенството

(3) $$\frac{1}{q}=1-\frac{1}{p}$$

и приложим неравенството на Хьолдер ще получим

$$\sum_{i=1}^{n} a_i (a_i+b_i)^{p-1} \leqq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} (a_i+b_i)^{(p-1)q}\right)^{\frac{1}{q}}$$

и тъй като съгласно (3) $(p-1)q=p$, то

$$(4) \qquad \sum_{i=1}^{n} a_i (a_i+b_i)^{p-1} \leqq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} (a_i+b_i)^p\right)^{1-\frac{1}{p}}.$$

Аналогично получаваме

$$(5) \qquad \sum_{i=1}^{n} b_i (a_i+b_i)^{p-1} \leqq \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} (a_i+b_i)^p\right)^{1-\frac{1}{p}}.$$

Ако сега съберем (4) и (5) и като използуваме (2), ще получим

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i+b_i)^p \leqq \left[\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^p\right)^{\frac{1}{p}}\right] \left(\sum_{i=1}^{n} (a_i+b_i)^p\right)^{1-\frac{1}{p}},$$

откъдето неравенството (1) следва чрез съкращаване на

$$\left(\sum_{i=1}^{n} (a_i+b_i)^p\right)^{1-\frac{1}{p}}.$$

Задачи към глава 4

1. Да се докаже, че $e^x \geqq ex$ при $x \geqq 1$.
2. Да се докаже, че $5 e x^5 \ln x \geqq -1$ при $x > 0$.
3. Да се намерят локалните екстремуми на функциите:

а) $y=(x-4)^4 (x+3)^3$;

б) $y=x+\dfrac{1}{x}$;

в) $y=x^2 \ln x$;

г) $y=e^{-x}-e^{-2x}$.

4. Да се начертаят графиките на функциите:

а) $y=\dfrac{x^2-2x+1}{x^2+1}$;

б) $y=\dfrac{x}{3-x^2}$;

в) $y=\sin x^2$;

г) $y=\dfrac{\operatorname{tg} 3x}{\operatorname{tg} x}$.

5. Да се докаже неравенството

$$\frac{x^{n+1}-1}{x-1} \geqq (n+1)\, x^{\frac{n}{2}}.$$

Упътване. Послужете си с неравенството на Коши.

Глава 5

ПРЕСМЯТАНЕ СТОЙНОСТИТЕ НА ФУНКЦИИТЕ

Това, което видяхме в гл. 4, не изчерпва кръга от въпроси, към които може да се прилага критерият за монотонност от §1 на предната глава. Тук ще приложим този критерий за пресмятане стойностите на някои елементарни функции.

От всички функции най-леснодостъпни за пресмятане са полиномите. Ето защо пресмятането на стойностите на по-сложните функции се свежда най-често до това за полиноми. За тази цел, когато е дадена някаква функция f, търсим полином P, който е приближение на f с отнапред дадена точност ε. Последното означава, че за всяко x от дефиниционната област на f е изпълнено неравенството

$$|f(x)-P(x)| < \varepsilon.$$

Положителното число ε се избира в зависимост от желаната точност, а полиномът P — в зависимост от ε. Главната трудност се състои в „напипването" на този полином, но тук няма да разглеждаме общите методи, с помощта на които се прави това. След като полиномът P е вече известен, доказателството на горното неравенство се извършва чрез просто прилагане на критерия за монотонност. По-нататък, за да пресметнем $f(a)$ с точност ε, не остава нищо друго, освен да пресметнем $P(a)$. По тази обща схема са построени отделните параграфи.

В §1 е показано как могат да се пресмятат стойностите на функцията e^x и в частност на числото e. Естествените и десетичните логаритми на числата се пресмятат по методи, указани в §2 и §3. На пресмятането стойностите на бинома $(1+x)^\mu$, където показателят μ е произволно реално число, е посветен §4. Пресмятането на числото π и стойностите на тригонометричните функции е предмет на §5 и §6.

Пресмятането на стойностите на функцията e^x става с помощта на полинома

(1) $$P_n(x)=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}.$$

Ще направим оценка на грешката, която правим, когато вместо стойността e^x вземаме стойността $P_n(x)$. За тази цел да докажем най-напред неравенството

(2) $$e^x \geq P_n(x) \qquad (n=0,\ 1,\ 2, \ldots,\ x \geq 0).$$

Ще си послужим с метода на *математичната индукция*. При $n=0$ неравенството (2) добива вида

(3) $$e^x \geq 1.$$

За да се убедим във верността на (3), ще разгледаме функцията $\varphi(x)=e^x-1$ при $x \geq 0$. Тъй като $\varphi'(x)=e^x>0$ и следователно, съгласно критерия за монотонност функцията φ е монотонно растяща. Тогава за всяко $x \geq 0$ ще имаме

(4) $$\varphi(x) \geq \varphi(0).$$

Като вземем пред вид, че $\varphi(x)=e^x-1$ и $\varphi(0)=e^0-1=0$, виждаме, че неравенствата (3) и (4) са едно и също. С това е доказана верността на неравенството (2) при $n=0$.

Да предположим сега, че (2) е вярно за някое n. Като използуваме това предположение, трябва да докажем, че (2) е вярно и за следващото го число $n+1$, т. е.

(5) $$e^x \geq P_{n+1}(x)=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\,(x \geq 0).$$

За да докажем (5), ще разгледаме функцията

$$\varphi(x)=e^x-P_{n+1}(x).$$

За производната на φ получаваме

$$\varphi'(x)=e^x-P'_{n+1}(x)=e^x-\Big(1+\frac{2x}{2!}+\frac{3x^2}{3!}+\ldots+\frac{nx^{n-1}}{n!}$$

$$+\frac{(n+1)x^n}{(n+1)!}\Big)=e^x-P_n(x)$$

и съгласно (2) е неотрицателна при $x \geq 0$. Следователно φ е монотонно растяща и за $x \geq 0$ ще имаме

$$\varphi(x) \geq \varphi(0), \tag{6}$$

което е неравенството (5), тъй като $\varphi(0) = e^0 - P_{n+1}(0) = 1 - 1 = 0$. С това неравенството (2) е доказано.

Вече разполагаме с едно приближение на e^x отляво. Сега ще покажем, че функцията

$$P_{n-1}(x) + \frac{x^n}{n!} e^x \quad (x \geq 0)$$

е приближение на e^x отдясно, т. е.

$$e^x \leq 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{x^n}{n!} e^x \quad (x \geq 0). \tag{7}$$

За да се убедим във верността на (7), ще си послужим пак с метода на *математичната индукция*. При $n=0$ неравенство (7) добива вида $e^x \leq e^x$, което очевидно е вярно. Да предположим сега, че (7) е вярно за някое n. Като използуваме това предположение, трябва да докажем, че то е вярно и за $n+1$, т. е.

$$e^x \leq 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^x = P_n(x) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^x. \tag{8}$$

За да докажем (8), ще разгледаме функцията

$$\varphi(x) = P_n(x) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^x - e^x.$$

За производната на φ имаме

$$\varphi'(x) = \left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{x^n}{n!} e^x - e^x\right) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^x.$$

Тъй като $\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^x \geq 0$ при $x \geq 0$ и, от друга страна, изразът в скобите съгласно (7) е неотрицателен, то $\varphi'(x) \geq 0$. Последното неравенство показва, че φ е растяща и следователно за $x \geq 0$ ще имаме

$$\varphi(x) \geq \varphi(0), \tag{9}$$

което е неравенството (8), тъй като $\varphi(0) = P_n(0) + 0 . e^0 - e^0 = 1 + 0 - 1 = 0$. С това неравенството (7) е доказано за всяко n и за всяко $x \geq 0$.

Неравенствата (2) и (7) сега могат да се запишат така:

$$P_n(x) \leq e^x \leq P_n(x) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^x$$

или, което е все същото,

$$0 \leq e^x - P_n(x) \leq \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^x. \qquad (x \geq 0). \tag{10}$$

Неравенството (10) не е удобно за пресмятане стойностите на e^x, защото от дясната му страна фигурира числото e, за големината на което в момента не знаем нищо. За да избегнем този недостатък, най-напред ще намерим една груба оценка отгоре за e. Ако в (10) поставим $x=1$ и $n=2$, ще получим

$$0 \leq e - \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!}\right) \leq \frac{1}{3!} e,$$

откъдето

$$e \leq 3. \tag{11}$$

Тогава от (10) и (11) следва

$$0 \leq e^x - P_n(x) \leq \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} 3^x, \tag{12}$$

което вече може да се използува за пресмятане стойностите на e^x.

Сега ще видим как може да бъде пресметнато числото e с произволна отнапред зададена точност ε. За тази цел ще използуваме неравенството (12). Ако в (12) положим $x=1$, ще получим

$$0 \leq e - \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}\right) \leq \frac{3}{(n+1)!}. \tag{13}$$

Числото $1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}$ се нарича n-то приближение на e. Неравенството (13) показва, че ако вместо e вземем неговото n-то приближение, грешката няма да надмине $\frac{3}{(n+1)!}$. Ако $\varepsilon > 0$ е точността, с която искаме да пресметнем e, ще трябва да изберем естественото число n по такъв начин, че да бъде изпълнено неравенството

$$\frac{3}{(n+1)!} < \varepsilon. \tag{14}$$

Да пресметнем e при $\varepsilon=0{,}000001$, т. е. с точност до шестия знак. Неравенството (14) в този случай добива вида $\frac{3}{(n+1)!}<10^{-6}$, т. е. $(n+1)!>3.10^6$. Тъй като $9!=362880<3.10^6<10!=3628800$, желаната точност ще се достига, когато $1+n\geq 10$, т. е. при $n\geq 9$. Естествено е да изберем $n=9$. Съответното приближение е

$$1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}+\frac{1}{6!}+\frac{1}{7!}+\frac{1}{8!}+\frac{1}{9!}.$$

Пресмятането на това число ще извършим, като разположим събираемите в следната таблица:

$$\left.\begin{array}{lll}
1 & & =1{,}00000000\\
\frac{1}{1!} = & 1 & =1{,}00000000\\
\frac{1}{2!} = & \frac{1}{2} & =0{,}50000000\\
\frac{1}{3!} = & \frac{1}{6} & =0{,}16666667\\
\frac{1}{4!} = & \frac{1}{24} & =0{,}04166667\\
\frac{1}{5!} = & \frac{1}{120} & =0{,}00833333\\
\frac{1}{6!} = & \frac{1}{720} & =0{,}00138889\\
\frac{1}{7!} = & \frac{1}{5040} & =0{,}00019841\\
\frac{1}{8!} = & \frac{1}{40320} & =0{,}00002480\\
\frac{1}{9!} = & \frac{1}{362880} & =\underline{0{,}00000276}\\
 & & e=2{,}718281\ldots
\end{array}\right\} +$$

Съобразно избраната точност трябва да се вземат под внимание само първите шест знака след десетичната запетая, като последният се закръгли. И така, ако вместо числото e вземем числото 2,718282, няма да допуснем грешка по-голяма от 0,000001.

Да пресметнем сега $\sqrt{e}$. За тази цел ще се възползуваме от неравенството (12) при $x=\frac{1}{2}$. В този случай (12) добива вида

$$0\leq\sqrt{e}-P_n\left(\frac{1}{2}\right)\leq\frac{\sqrt{3}}{(n+1)!\,2^{n+1}}.$$

За $P_n\left(\frac{1}{2}\right)$ имаме

$$P_n\left(\frac{1}{2}\right)=1+\frac{\frac{1}{2}}{1!}+\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{2!}+\ldots+\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n}{n!}=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!\,2^k}.$$

Нека желаната точност е $\varepsilon=0{,}00001$. Понеже читателят може да пресметне $\sqrt{3}$ с произволна точност, не е трудно да се убеди, че

$$\frac{\sqrt{3}}{7!\,2^7}<0{,}00001<\frac{\sqrt{3}}{6!\,2^6}.$$

Следователно, за да извършим пресмятането на $\sqrt{e}$ с указаната точност, трябва $n+1\geq 7$. Да изберем $n=6$. Тогава

$$P_6\left(\frac{1}{2}\right)=1+\frac{1}{1!\,2}+\frac{1}{2!\,2^2}+\frac{1}{3!\,2^3}+\frac{1}{4!\,2^4}+\frac{1}{5!\,2^5}+\frac{1}{6!\,2^6}=1{,}64872,$$

където е извършено и необходимото закръгляне. И така, ако вместо числото $\sqrt{e}$ вземем числото 1,64872, грешката няма да надмине 0,00001.

Читателят е разбрал вече, че колкото по-голяма точност желаем, толкова повече събираеми трябва да пресмятаме, т. е. колкото по-малко е ε, толкова по-голямо е n.

На края да кажем няколко думи и за избора на полинома (1). Без да се впускаме в подробности, ще посочим една формула, по която той се получава.

Нека f е произволна функция, която може да бъде диференцирана безбройно много пъти, т. е. допуска производни от произволно висок ред. Тогава полиномът P_n, съответствуващ на функцията f, се намира по формулата

$$P_n(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n.$$

Да приложим тази формула в случая, когато $f(x)=e^x$. Тъй като

$$f(x)=f'(x)=f''(x)=\ldots=f^{(n)}(x)=e^{(x)},$$

то

$$f(0)=f'(0)=f''(0)=\ldots=f^{(n)}(0)=e^0=1.$$

Като заместим тези стойности във формулата, получаваме точно полинома (1).

Пресмятането на стойностите на функцията

$$f(x)=\ln\frac{1+x}{1-x} \tag{1}$$

става с помощта на полинома

$$P_n(x)=2\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\ldots+\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right). \tag{2}$$

Ще оценим грешката, която правим, когато вместо стойността $f(x)$ вземаме стойността $P_n(x)$. За тази цел да докажем найнапред неравенството

$$f(x)\geqq P_n(x), \tag{3}$$

където $n=0, 1, 2,\ldots$ и $0\leqq x<1$. За да докажем (3), разглеждаме функцията

$$\varphi(x)=f(x)-P_n(x). \tag{4}$$

Производната на φ е

$$\varphi'(x)=f'(x)-P_n'(x)=\frac{2}{1-x^2}-2\left(1+\frac{3x^2}{3}+\frac{5x^4}{5}+\ldots+\frac{(2n+1)x^{2n}}{2n+1}\right)$$

$$=\frac{2}{1-x^2}-2(1+x^2+x^4+\ldots+x^{2n}).$$

Изразът в скобите е геометрична прогресия с частно x^2, следователно

$$\varphi'(x)=\frac{2}{1-x^2}-2\,\frac{1-x^{2n+2}}{1-x^2}=\frac{2x^{2n+2}}{1-x^2}.$$

Понеже $0\leqq x<1$, то $1-x^2>0$ и следователно

$$\varphi'(x)\geqq 0.$$

Последното неравество показва, че φ е растяща функция за $0\leqq x<1$, следователно

$$\varphi(x)\geqq\varphi(0). \tag{5}$$

Тъй като

$$\varphi(0)=f(0)-P_n(0)=\ln\frac{1+0}{1-0}-0=\ln 1-0=0,$$

неравенството (5), в съгласие с (4), може да бъде записано така:

$$f(x)-P_n(x)\geqq 0,$$

което не е нищо друго, освен неравенството (3).

Вече разполагаме с едно приближение на функцията f отляво. Сега ще покажем, че функцията

$$P_n(x)+\frac{2x^{2n+3}}{(2n+3)(1-x^2)} \qquad (0\leqq x<1),$$

е приближение на f отдясно, т. е.

$$f(x)\leqq P_n(x)+\frac{2x^{2n+3}}{(2n+3)(1-x^2)}. \tag{6}$$

За да докажем (6), разглеждаме функцията

$$\varphi(x)=P_n(x)+\frac{2x^{2n+3}}{(2n+3)(1-x^2)}-f(x). \tag{7}$$

Производната на φ е

$$\varphi'(x)=P_n'(x)+\frac{2[(2n+3)x^{2n+2}(1-x^2)+x^{2n+3}2x]}{(2n+3)(1-x^2)^2}-f'(x)$$

$$=\frac{4x^{2n+4}}{(2n+3)(1-x^2)^2}\geqq 0.$$

Тъй като $\varphi'(x)\geqq 0$, то функцията φ е растяща, следователно за $x\geqq 0$ имаме

$$\varphi(x)\geqq\varphi(0) \tag{8}$$

Ако в (7) поставим $x=0$, ще получим

$$\varphi(0)=P_n(0)+0-f(0)=0.$$

Тогава неравенството (8) може да бъде записано така:

$$P_n(x)+\frac{2x^{2n+3}}{(2n+3)(1-x^2)}-f(x)\geqq 0,$$

което не е нищо друго, освен (6).

От неравенствата (3) и (6) следва, че

$$P_n(x)\leqq f(x)\leqq P_n(x)+\frac{2x^{2n+3}}{(2n+3)(1-x^2)},$$

или, което е все същото,

$$0\leqq\ln\frac{1+x}{1-x}-2\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\ldots+\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right)\leqq\frac{2x^{2n+3}}{(2n+3)(1-x^2)}, \tag{9}$$

където $n=0, 1, 2, \ldots$ и $0 \leq x < 1$. Неравенството (9) лежи в основата на пресмятането на логаритмите на положителните цели числа.

Нека k е някое от числата $1, 2, 3, \ldots$ Да намерим най-напред онова x, за което

$$\frac{1+x}{1-x} = \frac{k+1}{k} \tag{10}$$

Като решим (10) по отношение на x, получаваме

$$x = \frac{1}{2k+1}. \tag{11}$$

Ясно е, че така полученото x лежи в интервала $[0,1)$. Понеже $k \geq 1$, то

$$\frac{1}{(2k+1)^2} \leq \frac{1}{(2.1+1)^2} = \frac{1}{9}.$$

Следователно

$$\frac{1}{1-\left(\frac{1}{2k+1}\right)^2} \leq \frac{1}{1-\frac{1}{9}} = \frac{9}{8},$$

т. е.

$$\frac{1}{1-\left(\frac{1}{2k+1}\right)^2} \leq \frac{9}{8} \quad (k=1, 2, 3, \ldots). \tag{12}$$

Ако сега заместим в (9) x с равното му от (11), като вземем пред вид (10) и (12), ще получим

$$0 \leq \ln\frac{k+1}{k} - 2\left(\frac{1}{2k+1} + \frac{1}{3(2k+1)^3} + \ldots + \frac{1}{(2n+1)(2k+1)^{2n+1}}\right) \leq \frac{9}{4(2n+3)(2k+1)^{2n+3}}, \tag{13}$$

където $n=0, 1, 2, 3, \ldots$, $k=1, 2, 3, \ldots$.

Сега ще покажем как с помощта на неравенството (13) могат да бъдат пресметнати логаритмите на целите числа с произволна отнапред зададена точност $\varepsilon > 0$. Да отбележим, че грешката, която ще направим, ако вместо стойността

$$\ln\frac{k+1}{k}$$

вземем стойността

$$2\left(\frac{1}{2k+1} + \frac{1}{3(2k+1)^3} + \ldots + \frac{1}{(2n+1)(2k+1)^{2n+1}}\right),$$

няма да надмине

$$\frac{9}{4(2n+3)(2k+1)^{2n+3}}. \tag{14}$$

Следователно, ако искаме да извършим пресмятането с точност ε, трябва да изберем n по такъв начин, че да бъде изпълнено

$$\varepsilon \geq \frac{9}{4(2n+3)(2k+1)^{2n+3}}. \tag{15}$$

Тъй като изразът (14) клони към нула при $n \to \infty$, следва, че колкото и малко да е положителното число ε, винаги можем да намерим естествено число n, за което да бъде изпълнено (15).

Сега ще направим някои приложения на горните резултати. Да пресметнем най-напред $\ln 2$. За тази цел да положим в (13) $k=1$. Ще получим

$$0 \leq \ln 2 - 2\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3.3^3} + \frac{1}{5.3^5} + \ldots + \frac{1}{(2n+1)\,3^{2n+1}}\right) \leq \frac{9}{4(2n+3).\,3^{2n+3}}.$$

Нека желаната точност е $\varepsilon = 10^{-7}$. Като вземем пред вид, че $k=1$, неравенството (15) добива вида

$$10^{-7} \geq \frac{9}{4(2n+3).\,3^{2n+3}},$$

което, както това лесно може да се види, е изпълнено за всяко $n \geq 6$. Съгласно избора на ε и за да намалим обема на пресмятанията, ще изберем $n=6$. Тогава числото

$$2\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3.3^3} + \frac{1}{5.3^5} + \frac{1}{7.3^7} + \frac{1}{9.3^9} + \frac{1}{11.3^{11}} + \frac{1}{13.3^{13}}\right) \tag{16}$$

ще бъде едно приближение на $\ln 2$ с точност 10^{-7}. Пресмятането ще запишем във вид на таблица:

$$+\begin{cases} \frac{1}{3} & = 0{,}333333333 \\ \frac{1}{3.3^3} & = 0{,}012345679 \\ \frac{1}{5.3^5} & = 0{,}000823045 \\ \frac{1}{7.3^7} & = 0{,}000065321 \\ \frac{1}{9.3^9} & = 0{,}000005645 \\ \frac{1}{11.3^{11}} & = 0{,}000000513 \\ \frac{1}{13.3^{13}} & = 0{,}000000048 \end{cases}$$

$$\overline{0{,}346573584}$$

За да намерим търсеното приближение трябва да удвоим получения резултат и да вземем под внимание само първите 6 знака, като последният съответно се закръгли. Така получаваме числото 0,6931472, което е приближение на $\ln 2$ с точност 10^{-7}.

Да пресметнем сега $\ln 3$ със същата точност. За тази цел да положим в (13) $k=2$. Ще получим

$$0 \leqq \ln \frac{3}{2} - 2\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{3.5^3} + \frac{1}{5.5^5} + \dots + \frac{1}{(2n+1)\,5^{2n+1}}\right) \leqq \frac{9}{4(2n+3)5^{2n+3}}$$

Избора на естественото число n ще направим пак въз основа на неравенството (15), което в този случай добива вида

$$10^{-7} \geqq \frac{9}{4\,(2n+3)\,5^{2n+3}}.$$

Не е трудно да се види, че последното неравенство е изпълнено за всяко $n \geqq 4$ При $n=4$ и $k=2$ (13) добива вида

$$0 \leqq \ln \frac{3}{2} - 2\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{3.5^3} + \frac{1}{5.5^5} + \frac{1}{7.5^7} + \frac{1}{9.5^9}\right) \leqq \frac{9}{4.\,11.\,5^{13}}$$

следователно числото

$$2\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{3.5^3} + \frac{1}{5.5^5} + \frac{1}{7.5^7} + \frac{1}{9.5^9}\right)$$

е едно приложение на $\ln \frac{3}{2}$ с точност 10^{-7}. Съответните пресмя

тания също ще запишем във вида на таблица:

$$+\begin{cases} \frac{1}{5} & = 0{,}200000000 \\ \frac{1}{3.5^3} & = 0{,}002666667 \\ \frac{1}{5.5^5} & = 0{,}000064000 \\ \frac{1}{7.5^7} & = 0{,}000001829 \\ \frac{1}{9.5^9} & = 0{,}000000057 \end{cases}$$

$$\overline{0{,}202732553}$$

Като удвоим последния резултат ще намерим едно приближение на $\ln \frac{3}{2}$ с точност 10^{-7}. Тъй като последните две цифри могат да бъдат използувани само за закръгляне, това приближение е 0,4054651. За да пресметнем търсеното приближение на $\ln 3$, ще се възползуваме от очевидното равенство $\ln 3 = \ln \frac{3}{2} + \ln 2$ и от това, че знаем приближенията с желаната точност на логаритмите от дясната страна: $0{,}4054651 + 0{,}6931472 = 1{,}0986123$, т. е.

$$\ln 3 = 1{,}0986123\dots$$

По този начин могат да бъдат пресметнати логаритмите на простите числа, а от там и на целите. Така например, за да пресметнем $\ln 10$, ще ни потрябва да пресметнем $\ln 5$, тъй като $\ln 10 = \ln 2 + \ln 5$. За да пресметнем $\ln 5$ с точност 10^{-7} ще се възползуваме от неравенството (13) при $k=4$ и $n=2$. В този случай то добива вида:

$$0 \leqq \ln \frac{5}{4} - 2\left(\frac{1}{9} + \frac{1}{3.9^3} + \frac{1}{5.9^5}\right) \leqq \frac{9}{4.\,7.\,9^7}.$$

Да пресметнем най-напред сумата в скобите:

$$+\begin{cases} \frac{1}{9} & = 0{,}111111111 \\ \frac{1}{3.9^3} & = 0{,}000457247 \\ \frac{1}{5.9^5} & = 0{,}000003387 \end{cases}$$

$$\overline{0{,}111571745}$$

Като удвоим получения резултат, ще получим приближение с желаната точност за числото $\ln\frac{5}{4}$. Тъй като последните две цифри използуваме само за закръгляне, това приближение е числото 0,2231435. Като вземем пред вид, че $\ln\frac{5}{4}=\ln 5-2\ln 2$, за приближение на ln5 получаваме числото 1,6094379.

Пресмятането на едно приближение на ln 10 ще направим с помощта на очевидното равенство $\ln 10=\ln\frac{5}{4}+3\ln 2$. Като заместим в дясната му страна пресметнатите вече приближения получаваме

$$\ln 10=2{,}3025851\ldots$$

Да отбележим, че като се продължи по този начин пресмятането на логаритмите на целите числа се натрупва грешка, която трябва да се вземе пред вид, за да се получи приближение с желаната точност.

§ 3. ПРЕСМЯТАНЕ НА ДЕСЕТИЧНИТЕ ЛОГАРИТМИ НА ЧИСЛАТА

Ако знаем естествения логаритъм на дадено число, можем да пресметнем неговия десетичен логаритъм. Наистина за всяко $x>0$ е в сила равеството $x=10^{\lg x}$, което чрез логаритмуване при основа e дава $\ln x=\lg x\ln 10$. Ето защо

(1) $$\lg x=M\ln x,$$

където $M=\frac{1}{\ln 10}$. Понякога M се нарича *модул на прехода* от естествените към десетичните логаритми. Като използуваме намереното в предния параграф приближение на ln10, за модула M получаваме

$$M=\frac{1}{\ln 10}=\frac{1}{2{,}3025851}=0{,}4342945$$

с точност 10^{-7}. Да пресметнем например lg2 с точност 10^{-5}. За тази цел ще си послужим с формула (1) и с намереното вече приближение на ln2 и ще получим за търсеното приближение $\lg 2=0{,}30103$.

Десетичните логаритми на числата могат да се пресмятат и без предварителното пресмятане на техните естествени логаритми.

Достатъчно е да умножим неравенствата (2.13) с положителното число M. По този начин като вземем пред вид (1) ще получим

(2) $$0\leqq \lg\frac{k+1}{k}-2M\left(\frac{1}{2k+1}+\frac{1}{3(2k+1)^3}+\dots+\frac{1}{(2n+1)(2k+1)^{2n+1}}\right)\leqq$$
$$\leqq\frac{9M}{4(2n+3)(2k+1)^{2n+3}}.$$

§ 4. ПРЕСМЯТАНЕ НА СТОЙНОСТИТЕ НА $(1+x)^\mu$

Ако в бинома на Нютон

$$(a+b)^n=a^n+\binom{n}{1}a^{n-1}b+\dots+\binom{n}{n}b^n$$

положим $a=1$, $b=x$, ще получим

(1) $$(1+x)^n=1+\binom{n}{1}x+\binom{n}{2}x^2+\dots+\binom{n}{n}x^n.$$

Знаем, че това представяне е валидно, когато n е произволно естествено число. Формулата (1) позволява да се пресметне степента на числото $1+x$ посредством степените на x. Естествено е да си поставим въпроса как може да се пресметне степента $(1+x)^\mu$, когато степенния показател не е цяло положително число.

Ще покажем, че стойностите на функцията

(2) $$f(x)=(1+x)^\mu,$$

където μ е произволно реално число, могат да бъдат пресметнати с произволна отнапред зададена точност с помощта на полинома

(3) $$S_{n,\mu}(x)=1+\binom{\mu}{1}x+\binom{\mu}{2}x^2+\dots+\binom{\mu}{n}x^n\ (n=1,2,\ldots).$$

Задачата ще бъде да оценим грешката $(1+x)^\mu-S_{n,\mu}(x)$, която допускаме, когато вместо стойността $(1+x)^\mu$ вземем стойността на полинома $S_{n,\mu}(x)$. Ще решим тази задача в зависимост от това, какво е числото x.

Нека най-напред $0\leqq x<1$. За да оценим грешката, ще си послужим с неравенството

(4) $$\binom{\mu}{n+1}\left[(1+x)^\mu-S_{n,\mu}(x)\right]\geqq 0.$$

Ще докажем, че това неравенство е изпълнено за всяко μ, за всяко $x\geqq 0$ и за всяко $n=0,1,2,\ldots$.

За тази цел да положим

$$(5)\qquad \varphi_{n,\mu}(x)=\binom{\mu}{n+1}\Big[(1+x)^{\mu}-S_{n,\mu}(x)\Big].$$

Тогава неравенството (4) може да се запише по-накратко по следния начин

$$(6)\qquad \varphi_{n,\mu}(x)\geqq 0.$$

Доказателството ще извършим с индукция по n.

При $n=0$ (4) добива вида

$$(7)\qquad \varphi_{0,\mu}(x)=\mu\,[(1+x)^{\mu}-1]\geqq 0.$$

В зависимост от μ при доказателството на (7) възникват два случая:

а) $\mu\geqq 0$; б) $\mu<0$.

Случай а). Тъй като $\mu\geqq 0$, за да докажем (7) е достатъчно да покажем, че $(1+x)^{\mu}\geqq 1$, което е очевидно, защото $x\geqq 0$ и $\mu\geqq 0$.

Случай б). Тъй като $\mu<0$, за да докажем (7) е достатъчно да покажем, че $(1+x)^{\mu}\leqq 1$, което е очевидно, защото $x\geqq 0$ и $\mu<0$. С това неравенството (4) е доказано при $n=0$.

Да предположим сега, че (4) или, което е все също (6), е изпълнено за някое n, за всяко $x\geqq 0$ и за всяко μ. Ще докажем, че то е изпълнено и за $n+1$, т. е.

$$(8)\qquad \varphi_{n+1,\mu}(x)\geqq 0,$$

където μ е произволно реално число $x\geqq 0$.

Ако в (5) заместим n с $n+1$, ще получим

$$(9)\qquad \varphi_{n+1,\mu}(x)=\binom{\mu}{n+2}[(1+x)^{\mu}-S_{n+1,\mu}(x)]=\binom{\mu}{n+2}\Big[(1+x)^{\mu}$$
$$-\Big(1+\binom{\mu}{1}x+\cdots+\binom{\mu}{n}x^{n}+\binom{\mu}{n+1}x^{n+1}\Big)\Big].$$

Да диференцираме това равенство относно x:

$$\varphi'_{n+1,\mu}(x)=\binom{\mu}{n+2}\Big[\mu(1+x)^{\mu-1}-\Big(\mu+\frac{\mu(\mu-1)}{2!}2x+\frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)}{3!}3x^{2}+\cdots$$
$$+\frac{\mu(\mu-1)\cdots(\mu-n+1)}{n!}n\,x^{n-1}+\frac{\mu(\mu-1)\cdots(\mu-n)}{(n+1)!}(n+1)\,x^{n}\Big].$$

Като изнесем μ пред скоби и направим необходимите съкращения, получаваме

$$(10)\qquad \varphi'_{n+1,\mu}(x)=\mu\binom{\mu}{n+2}\Big[(1+x)^{\mu-1}-\Big(1+\binom{\mu-1}{1}x$$
$$+\binom{\mu-1}{2}x^{2}+\cdots+\binom{\mu-1}{n}x^{n}\Big].$$

Тъй като

$$\mu\binom{\mu}{n+2}=\mu\,\frac{\mu(\mu-1)\cdots[\mu-(n+2)+1]}{(n+2)!}=\frac{\mu^{2}}{n+2}\cdot\frac{(\mu-1)\cdots[\mu-1-(n+1)+1]}{(n+1)!}$$
$$=\binom{\mu-1}{n+1}\frac{\mu^{2}}{n+2},$$

равенството (10) добива вида

$$(11)\qquad \varphi'_{n+1,\mu}(x)=\frac{\mu^{2}}{n+2}\binom{\mu-1}{n+1}\Big[(1+x)^{\mu-1}-(1+\binom{\mu-1}{1}x+\cdots+\binom{\mu-1}{n}x^{n}\Big]$$
$$=\frac{\mu^{2}}{n+2}\binom{\mu-1}{n+1}\Big[(1+x)^{\mu-1}-S_{n,\mu-1}(x)\Big].$$

Но съгласно (5)

$$\binom{\mu-1}{n+1}[(1+x)^{\mu-1}-S_{n,\mu-1}(x)]=\varphi_{n,\mu-1}(x)$$

и равенство (11) добива вида

$$(12)\qquad \varphi'_{n+1,\mu}(x)=\frac{\mu^{2}}{n+2}\varphi_{n,\mu-1}(x).$$

Съгласно индукционното предположение неравенство (6) е изпълнено за всяко μ и за всяко $x\geqq 0$. Ако сега в (6) на мястото на μ поставим $\mu-1$, ще получим

$$(13)\qquad \varphi_{n,\mu-1}(x)\geqq 0$$

за всяко $x\geqq 0$. Понеже $\frac{\mu^{2}}{n+2}\geqq 0$, (12) и (13) дават

$$(14)\qquad \varphi'_{n+1,\mu}(x)\geqq 0$$

за всяко μ и за всяко $x\geqq 0$. От (14) следва, че $\varphi_{n+1,\mu}(x)$ е растяща при $x\geqq 0$. Следователно при $x\geqq 0$ ще имаме

$$(15)\qquad \varphi_{n+1,\mu}(x)\geqq \varphi_{n+1,\mu}(0).$$

Но ако в (9) положим $x=0$, ще получим

$$\varphi_{n+1,\mu}(0)=\binom{\mu}{n+2}\Big[(1+0)^{\mu}-\Big(1+\binom{\mu}{1}.0+\cdots+\binom{\mu}{n+1}.0\Big)\Big]=0,$$

и (15) добива вида

$$\varphi_{n+1,\mu}(x) \geqq 0,$$

което е неравенство (8). С това е доказано, че от верността на (6) за някое n следва верността му и за $n+1$. Съгласно принципа на пълната математична индукция неравенство (6), или което е все същото неравенство (4), е доказано.

Ако сега изберем естественото число n така, че

(16) $$n > \mu - 1,$$

от неравенството (4) ще следва, че

(17) $$|(1+x)^\mu - S_{n,\mu}(x)| \leqq \left|\binom{\mu}{n+1}\right| x^{n+1} \quad (x \geqq 0).$$

Очевидно е, че с помощта на последното неравенство можем да оценим (по абсолютна стойност) грешката, която ще направим, ако вместо стойността $(1+x)^\mu$ вземем стойността на полинома (3).

За да докажем (17) ще използваме това, че (4) е вярно за всяко n $(x \geqq 0)$. Тогава е вярно и неравенството

(18) $$\binom{\mu}{n+2}[(1+x)^\mu - S_{n+1,\mu}(x)] \geqq 0,$$

което се получава от (4) чрез заместването на n с $n+1$.

От условието (16) следва, че $\binom{\mu}{n+1}$ и $\binom{\mu}{n+2}$ имат различни знаци. За да покажем това е достатъчно да се убедим, че произведението на тези две числа е отрицателно. Наистина

$$\binom{\mu}{n+1}\cdot\binom{\mu}{n+2} = \frac{\mu(\mu-1)\cdots(\mu-n)}{(n+1)!}\cdot\frac{\mu(\mu-1)\cdots(\mu-n)(\mu-n-1)}{(n+2)!}$$
$$= \left[\frac{\mu(\mu-1)\cdots(\mu-n)}{((n+1)!)^2}\right]^2 \cdot \frac{\mu-n-1}{n+2} < 0.$$

Ако сега заменим в неравенството (18) множителя $\binom{\mu}{n+2}$ с $\binom{\mu}{n+1}$, ще получим

$$\binom{\mu}{n+1}[(1+x)^\mu - S_{n+1,\mu}(x)] \leqq 0.$$

Но съгласно равенство (3), с което е определен полинома $S_{n,\mu}$ имаме:

$$S_{n+1,\mu}(x) = 1 + \binom{\mu}{1}x + \binom{\mu}{2}x^2 + \cdots + \binom{\mu}{n}x^n + \binom{\mu}{n+1}x^{n+1}$$
$$= S_{n,\mu}(x) + \binom{\mu}{n+1}x^{n+1}.$$

Следователно последното неравенство може да се запише така

$$\binom{\mu}{n+1}\left[(1+x)^\mu - S_{n,\mu}(x) - \binom{\mu}{n+1}x^{n+1}\right] \leqq 0$$

или, което е все същото

(19) $$\binom{\mu}{n+1}[(1+x)^\mu - S_{n,\mu}(x)] \leqq \left\{\binom{\mu}{n+1}\right\}^2 x^{n+1}.$$

Съгласно (4) лявата страна на това неравенство е неотрицателна (а значи и дясната). Тъй като по определение абсолютната стойност на едно реално неотрицателно число съвпада с това число, неравенството

(20) $$\left|\binom{\mu}{n+1}\right| \cdot [(1+x)^\mu - S_{n,\mu}(x)] \leqq \binom{\mu}{n+1}^2 \cdot x^{n+1}$$

при $x \geqq 0$ и $n > \mu - 1$ е еквивалентно с (19). Ако сега разделим двете страни на (20) на положителното число $\left|\binom{\mu}{n+1}\right|$, посоката на неравенството ще се запази, и в резултат ще получим неравенството (17).

С помощта на (17) вече можем да правим пресмятания, като вместо стойността $(1+x)^\mu$ вземем стойността $S_{n,\mu}(x)$, при което грешката няма да надмине $\left|\binom{\mu}{n+1}\right| \cdot x^{n+1}$. Следователно, ако ε е точността, с която искаме да пресметнем $(1+x)^\mu$ при фиксирани $x \geqq 0$ и μ, естественото число n ще определим от неравенството

(21) $$\left|\binom{\mu}{n+1}\right| \cdot x^{n+1} \leqq \varepsilon.$$

Сега ще илюстрираме получените резултати с един пример. Да се пресметне $\sqrt[3]{68}$ с точност $\varepsilon = 10^{-5}$.

Най-близкото до 68 число, което е третата степен на някое естествено число, е $64 = 4^3$. Тъй като $68 = 64 + 4 = 64 \cdot \left(1 + \frac{1}{16}\right)$, то

$$\sqrt[3]{68} = \sqrt[3]{64\left(1 + \frac{1}{16}\right)} = 4\left(1 + \frac{1}{16}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

По този начин задачата се сведе до пресмятането на стойността на $(1+x)^\mu$ за $x = \frac{1}{16}$ и $\mu = \frac{1}{3}$; точността на последното следва да изберем по-висока от 10^{-5}, за да получим приближение на $4 \cdot \left(1 + \frac{1}{16}\right)^{\frac{1}{3}}$ при $\varepsilon = 10^{-5}$. Тогава n трябва да удовлетворява неравенството (21) при $x=\frac{1}{16}$, $\mu=\frac{1}{3}$ и $\varepsilon=10^{-6}$, т. е.

$$\left|\binom{\frac{1}{3}}{n+1}\right|\cdot\left(\frac{1}{16}\right)^{n+1}\leq 10^{-6}.$$

С опитване намираме, че лявата страна на последното неравенство при $n=2$ е близко до $1{,}5.10^{-6}$, а при $n=3$ — до $0{,}6.10^{-6}$, т. е. трябва да изберем $n=3$. Очевидно условието (16) е изпълнено, и неравенството (17) за разглеждания пример добива вида

$$\left|\left(1+\frac{1}{16}\right)^{\frac{1}{3}}-S_{3,\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{16}\right)\right|\leq 10^{-6},$$

т. е. числото $S_{3,\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{16}\right)$ е едно приближение на $\frac{1}{4}\sqrt[3]{68}$ с точност 10^{-6}. От (8) при $n=3$, $\mu=\frac{1}{3}$ и $x=\frac{1}{16}$ получаваме

$$S_{3,\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{16}\right)=1+\binom{\frac{1}{3}}{1}\cdot\frac{1}{16}+\binom{\frac{1}{3}}{2}\cdot\left(\frac{1}{16}\right)^2+\binom{\frac{1}{3}}{3}\cdot\left(\frac{1}{16}\right)^3$$

$$=1+\frac{1}{3.16}-\frac{1}{9.16^2}+\frac{5}{81.16^3}.$$

За удобство при пресмятането ще сумираме поотделно положителните и отрицателните числа и получените два резултата ще извадим:

$$+\begin{cases}1 & =1{,}0000000\\ \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{16} & =0{,}0208333\\ \frac{5}{81}\cdot\frac{1}{16^3} & =0{,}0000151\end{cases}\qquad \frac{1}{9}\cdot\frac{1}{16^2}=0{,}0004340$$

$$1{,}0208484 \qquad\qquad 0{,}0004340$$

$$-\begin{cases}1{,}0208484\\ 0{,}0004340\end{cases}$$

$$1{,}0204144$$

Като умножим последният резултат с 4 и закръглим петата цифра след десетичната запетая, получаваме числото 4,081666, което е

търсеното приближение на $\sqrt[3]{68}$ с точност 10^{-6}.

Ако $-1<x\leq 0$ стойността $(1+x)^\mu$ може да бъде пресметната с произволна отнапред дадена точност пак с помощта на полинома (3), но неравенство (17) няма да бъде в сила. Оценката на грешката в този случай можем да направим с помощта на неравенството

$$(22)\qquad (1+x)^\mu-S_{n,\mu}(x)\leq\left|(\mu-n)\binom{\mu}{n}x^{n+1}\right|.(1+x)^{\mu-1},$$

където μ е произволно реално число.

Да пресметнем числото $(7901)^{-\frac{1}{2}}$. Тъй като $88^2<7901<89^2$ и числото 7901 е по-близо до числото $89^2=7921$, ще представим подкоренната величина така: $7901=7921-20=89^2-20$. Тогава

$$(7901)^{-\frac{1}{2}}=(89^2-20)^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{89}\left(1-\frac{20}{7921}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

и задачата се свежда до пресмятането на $\left(1-\frac{20}{7921}\right)^{-\frac{1}{2}}$. За да извършим това пресмятане ще използуваме неравенство (22) при $\mu=-\frac{1}{2}$ и $x=\frac{20}{7921}$. Нека желаната точност е 10^{-7}. Тогава за конкретния пример съгласно (22) имаме

$$\frac{1.3.5\ldots(2n+1)}{2^{n+1}.n!}\left(\frac{20}{7921}\right)^{n+1}<10^{-7},$$

което се удовлетворява за $n>1$. Да изберем $n=2$. Тогава

$$S_{2,-\frac{1}{2}}\left(-\frac{20}{7921}\right)=1-\frac{1}{2}\left(-\frac{20}{7921}\right)+\frac{1}{8}\left(-\frac{20}{7921}\right)^2=1{,}0012632\ldots$$

Следователно числото $1{,}0012632.89^{-1}=0{,}0112502$ е приближение на $\frac{1}{\sqrt{7901}}$ с точност 10^{-7}.

§ 5. ПРЕСМЯТАНЕ НА ЧИСЛОТО π

В този параграф ще покажем как може да се пресметне числото π с произволна отнапред дадена точност. За тази цел ще си послужим с неравенството

$$(1)\qquad \left|x-\left(\operatorname{tg}x-\frac{\operatorname{tg}^3x}{3}+\cdots+(-1)^n\frac{(\operatorname{tg}x)^{2n+1}}{2n+1}\right)\right|\leq\frac{(\operatorname{tg}x)^{2n+3}}{2n+3},$$

където $n=0, 1, 2, \ldots$ и $0 \leqq x < \frac{\pi}{2}$. Ще извършим доказателство на (1) с помощта на монотонни функции.

Да покажем най-напред, че функцията S_n, дефинирана посредством равенството

(2) $$S_n(x)=(-1)^{n+1}\left[x-\left(\operatorname{tg} x-\frac{\operatorname{tg}^3 x}{3}+\cdots+(-1)^n\frac{(\operatorname{tg} x)^{2n+1}}{2n+1}\right)\right],$$

където $n=0, 1, 2, \ldots$ и $0 \leqq x < \frac{\pi}{2}$, е растяща. За производната ѝ получаваме

$$S_n'(x)=(-1)^{n+1}\left[1-\left(\frac{1}{\cos^2 x}-\frac{\operatorname{tg}^2 x}{\cos^2 x}+\cdots+(-1)^n\frac{(\operatorname{tg} x)^{2n}}{\cos^2 x}\right)\right]$$
$$=(-1)^{n+1}\left[1-\frac{1}{\cos^2 x}\left(1-\operatorname{tg}^2 x+\cdots+(-1)^n(\operatorname{tg} x)^{2n}\right)\right]$$

или, като използваме формулата за сума на геометрична прогресия с частно $q=-\operatorname{tg}^2 x$, получаваме

$$S_n'(x)=(-1)^{n+1}\left[1-\frac{1}{\cos^2 x}\cdot\frac{1-(-\operatorname{tg}^2 x)^{n+1}}{1-(-\operatorname{tg}^2 x)}\right]=\operatorname{tg}^{2n+2} x,$$

т. е.

$$S_n'(x) \geqq 0.$$

Следователно за $x \geqq 0$ ще имаме $S_n(x) \geqq S_n(0)$. Но съгласно (2) $S_n(0)=0$, следователно

(3) $$S_n(x) \geqq 0$$

за всяко n. От друга страна, като заместим в (2) n с $n+1$, ще получим

$$S_{n+1}(x)=(-1)^{n+2}\left[x-\left(\operatorname{tg} x-\frac{\operatorname{tg}^3 x}{3}+\cdots+(-1)^n\frac{(\operatorname{tg} x)^{2n+1}}{2n+1}\right.\right.$$
$$\left.\left.+(-1)^{n+1}\frac{(\operatorname{tg} x)^{2n+3}}{2n+3}\right)\right]=-(-1)^{n+1}\left[x-\left(\operatorname{tg} x-\frac{\operatorname{tg}^3 x}{3}\right.\right.$$
$$\left.\left.+\cdots+(-1)^n\frac{(\operatorname{tg} x)^{2n+1}}{2n+1}\right)\right]+\frac{\operatorname{tg}^{2n+3} x}{2n+3}=-S_n(x)+\frac{(\operatorname{tg} x)^{2n+3}}{2n+3}$$

и съгласно (3) ще имаме

$$0 \leqq S_{n+1}(x)=-S_n(x)+\frac{(\operatorname{tg} x)^{2n+3}}{2n+3},$$

т. е.

(4) $$S_n(x) \leqq \frac{(\operatorname{tg} x)^{2n+3}}{2n+3} \quad \left(0 \leqq x < \frac{\pi}{2}\right).$$

Тъй като $S_n(x) \geqq 0$, съгласно дефиницията за абсолютна стойност на число имаме

$$S_n(x)=|S_n(x)|=\left|x-\left(\operatorname{tg} x-\frac{\operatorname{tg}^3 x}{3}+\cdots+(-1)^n\frac{\operatorname{tg}^{2n+1} x}{2n+1}\right)\right|$$

и следователно неравенството (4) съвпада с неравенството (1). С това неравенство (1) е доказано.

Ако сега в (1) положим $x=\frac{\pi}{4}$, като използваме, че $\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}=1$ ще получим

(5) $$\left|\frac{\pi}{4}-\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\cdots+(-1)^n\frac{1}{2n+1}\right)\right| \leqq \frac{1}{2n+3}.$$

Това неравенство вече може по принцип да се използва за приблизително пресмятане на $\frac{\pi}{4}$. Наистина то показва, че ако вместо $\frac{\pi}{4}$ вземем сумата $1-\frac{1}{3}+\cdots+(-1)^n\frac{1}{2n+1}$, грешката няма да надминава $\frac{1}{2n+3}$. Така например, за да пресметнем $\frac{\pi}{4}$ с точност 0,001, трябва да изберем n така, че $\frac{1}{2n+3} \leqq 0{,}001$. Най-малкото естествено число, което удовлетворява последното неравенство е 499. Този пример показва, че неравенството (5) е твърде неудобно за поставената цел, понеже пресмятанията са много големи.

За да получим възможност да пресмятаме π без отчайващи със своя обем изчисления, да разгледаме ъгъла α, за който

(6) $$\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{5}, \qquad 0<\alpha<\frac{\pi}{4}.$$

Тогава

$$\operatorname{tg} 2\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}=\frac{2\cdot\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{25}}=\frac{5}{12}<1$$

и следователно $0<2\alpha<\frac{\pi}{4}$. Аналогично пресмятане показва, че $\operatorname{tg} 4\alpha=\frac{120}{119}>1$ и следователно $\frac{\pi}{4}<4\alpha<\frac{\pi}{2}$.

Да пресметнем $\operatorname{tg}\left(4\alpha-\frac{\pi}{4}\right)$. Имаме

$$\operatorname{tg}\left(4\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\operatorname{tg} 4\alpha-\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}}{1+\operatorname{tg} 4\alpha\cdot\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}}=\frac{\frac{120}{119}-1}{1+\frac{120}{119}}=\frac{1}{239},$$

т. е.

$$\operatorname{tg}\left(4\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{239}. \tag{7}$$

Ако сега в (1) заместим x с α и използуваме (6), ще получим

$$|\alpha - a_n| \leqq \frac{1}{(2n+3)\,5^{2n+3}}, \tag{8}$$

където сме положили

$$a_n = \frac{1}{5} - \frac{1}{3\,.\,5^3} + \frac{1}{5\,.\,5^5} - \cdots + (-1)^n \frac{1}{(2n+1)\,5^{2n+1}}. \tag{9}$$

Нека сега в (1) заместим x с $4\alpha - \frac{\pi}{4}$. Като използуваме (7) и неравенството $0 < 4\alpha - \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2}$, ще получим

$$\left|\left(4\alpha - \frac{\pi}{4}\right) - b_k\right| \leqq \frac{1}{(2k+3)\,239^{2k+3}}, \tag{10}$$

където сме положили

$$b_k = \frac{1}{239} - \frac{1}{3\,.\,239^3} + \cdots + (-1)^k \frac{1}{(2k+1)\,239^{2k+1}}. \tag{11}$$

Неравенството (10) може да се запише още и така

$$\left|\frac{\pi}{4} + b_k - 4\alpha\right| \leqq \frac{1}{(2k+3)\,239^{2k+3}}. \tag{12}$$

Ако сега умножим (8) с 4 и полученото неравенство прибавим към (12), ще получим

$$|4\alpha - 4a_n| + \left|\frac{\pi}{4} + b_k - 4\alpha\right| \leqq \frac{4}{(2n+3)\,5^{2n+3}} + \frac{1}{(2k+3)\,239^{2k+3}},$$

от което, съгласно неравенството $|A| + |B| \geqq |A+B|$ следва, че

$$\left|\frac{\pi}{4} - (4a_n - b_k)\right| \leqq \frac{4}{(2n+3)\,5^{2n+3}} + \frac{1}{(2k+3)\,239^{2k+3}}. \tag{13}$$

Неравенството (13) е удобно за пресмятането на $\frac{\pi}{4}$. Например при $n=3$ и $k=0$ то добива вида

$$\left|\frac{\pi}{4} - (4a_3 - b_0)\right| \leqq \frac{4}{9.5^9} + \frac{1}{3.\,239^3} = 0{,}00000025\ldots$$

или като вземем пред вид (9) и (11), получаваме

$$\left|\frac{\pi}{4} - \left(4\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{3.5^3} + \frac{1}{5.5^5} - \frac{1}{7.5^7}\right) - \frac{1}{239}\right)\right| < 0{,}00000025. \tag{14}$$

Като извършим необходимите пресмятания и закръглим, получаваме числото 3,14159, което е приближение на π с точност 10^{-5}.

Да пресметнем сега $\frac{\pi}{4}$ с точност 10^{-7}. За тази цел трябва да изберем n и k по такъв начин, че да бъде изпълнено неравенството

$$\frac{4}{(2n+3)\,5^{2n+3}} + \frac{1}{(2k+3)\,239^{2k+3}} \leqq 0{,}0000001.$$

Това неравенство се удовлетворява за всяко $n \geqq 4$ и всяко $k \geqq 0$. Да изберем $n=4$ и $k=0$. Като поставим тези стойности на n и k в (13), ще получим

$$\left|\frac{\pi}{4} - (4a_4 - b_0)\right| \leqq \frac{4}{11.5^{11}} + \frac{1}{3.239^3} = 0{,}0000000\,319\ldots,$$

т. е., че числото

$$4a_4 - b_0 = 4\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{3.5^3} + \frac{1}{5.5^5} - \frac{1}{7.5^7} + \frac{1}{9.5^9}\right) - \frac{1}{3.239^3}$$

е една приблизителна стойност на $\frac{\pi}{4}$, при това грешката няма да бъде по-голяма от 10^{-8}. Да пресметнем това приближение, като за удобство групираме събираемите съобразно знаците им:

$$+\begin{cases} \frac{1}{5} = 0{,}200000000 \\ \frac{1}{5.5^5} = 0{,}000064000 \\ \frac{1}{9.5^9} = 0{,}000000057 \end{cases} \qquad +\begin{cases} \frac{1}{3.5^3} = 0{,}002666667 \\ \frac{1}{7.5^7} = 0{,}000001829 \end{cases}$$

$$\overline{0{,}200064057} \qquad \overline{0{,}002668496}$$

$$-\begin{cases} 0{,}200064057 \\ 0{,}002668496 \end{cases}$$

$$a_4 = \overline{0{,}197395561}$$

$$b_0 = \frac{1}{239} = 0{,}004184100$$

$$4a_4 - b_0 = 4.0{,}197395561 - 0{,}004184100 = 0{,}785398144.$$

Като умножим последното число с 4 (а следователно с 4 ще умножим и направената грешка), ще получим едно приближение на π с точност 10^{-7}. Това приближение е 3,1415926.

§ 6. ПРЕСМЯТАНЕ СТОЙНОСТИТЕ НА $\sin x$ и $\cos x$

Пресмятането на стойностите на функцията $\sin x$ се извършва с помощта на полинома

(1) $$S_n(x)=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

а тези на функцията $\cos x$ — с помощта на полинома

(2) $$C_n(x)=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

Грешката, която допускаме, когато вместо стойността $\sin x$ вземем стойността $S_n(x)$ се оценява с неравенството

(3) $$|\sin x-S_n(x)|\leqq\frac{x^{2n+3}}{(2n+3)!}\qquad(x\geqq 0),$$

а тази, която допускаме, когато вместо стойността $\cos x$ вземем стойността на $C_n(x)$ се оценява с помощта на неравенството

(4) $$|\cos x-C_n(x)|\leqq\frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}.$$

За да докажем неравенствата (3) и (4) ще въведем две функции f_n и g_n, дефинирани чрез равенствата

(5) $$f_n(x)=(-1)^{n+1}[\sin x-S_n(x)],$$
$$g_n(x)=(-1)^{n+1}[\cos x-C_n(x)].$$

Ще докажем, че $f_n(x)\geqq 0$ и $g_n(x)\geqq 0$ за $x\geqq 0$. При $n=0$ очевидно имаме

$$f_0(x)=-[\sin x-S_0(x)]=x-\sin x\geqq 0$$

и аналогично

$$g_0(x)=-[\cos x-C_0(x)]=1-\cos x\geqq 0.$$

Да допуснем, че за някое n е изпълнено неравенството $f_n(x)\geqq 0$

$(x\geqq 0)$. Следвайки метода на пълната математична индукция трябва да образуваме f_{n+1}. Ако в равенствата (5) поставим на мястото на n числото $n+1$, ще получим

$$f_{n+1}(x)=(-1)^{n+2}[\sin x-S_{n+1}(x)]=(-1)^{n+2}\Big[\sin x-\Big(x-\frac{x^3}{3!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+(-1)^{n+1}\frac{x^{2n+3}}{(2n+3)!}\Big)\Big].$$

За производната на f_{n+1} намираме:

$$f'_{n+1}(x)=(-1)^{n+2}\Big[\cos x-\Big(1-\frac{x^2}{2!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+(-1)^{n+1}\frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}\Big)\Big]=g_{n+1}(x).$$

Ако диференцираме още веднаж, за втората производна на f_{n+1} получаваме

$$f''_{n+1}(x)=g'_{n+1}(x)=(-1)^{n+2}\Big[-\sin x-\Big(-x+\frac{x^3}{3!}-\ldots+(-1)^{n+1}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\Big)\Big]$$
$$=(-1)^{n+1}\Big[\sin x-\Big(x-\frac{x^3}{3!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\Big)\Big]=f_n(x).$$

Съгласно допускането $f_n(x)\geqq 0$ следователно $g'_{n+1}(x)=f_n(x)\geqq 0$, което показва, че функцията $g_{n+1}(x)$ е растяща за $x\geqq 0$ и следователно $g_{n+1}(x)\geqq g_{n+1}(0)=0$. Последното неравенство от своя страна показва, че $f'_{n+1}(x)=g_{n+1}(x)\geqq 0$, т. е. функцията $f_{n+1}(x)$ е също така растяща за $x\geqq 0$ и следователно $f_{n+1}(x)\geqq f_{n+1}(0)=0$. С това е доказана верността на неравенствата (5) за всяко n.

За да докажем (3) ще представим f_{n+1} по следния начин:

$$f_{n+1}(x)=-(-1)^{n+1}\Big[\sin x-\Big(x-\frac{x^3}{3!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\Big)\Big]+\frac{x^{2n+3}}{(2n+3)!}=-f_n(x)+\frac{x^{2n+3}}{(2n+3)!}.$$

Тъй като $f_{n+1}(x)\geqq 0$ за $x\geqq 0$ то

$$f_n(x)\leqq\frac{x^{2n+3}}{(2n+3)!}.$$

От друга страна, съгласно първото от неравенствата (5) и дефиницията за абсолютна стойност $|f_n(x)| = f_n(x)$. Тогава последното неравенство може да се запише така

$$|f_n(x)| \leqq \frac{x^{2n+3}}{(2n+3)!},$$

което не е нищо друго, освен (3). По аналогичен начин се извършва и доказателството на неравенството (4).

По-долу ще направим приложение на неравенствата (3) и (4) върху конкретни примери. Преди това обаче нека напомним, че ъгълът x се измерва в радиани. В противен случай неравенствата (3) и (4) не са валидни.

Пример 1. Да се пресметне $\sin 22^\circ$ с точност 10^{-5}.

Тъй като е дадена градусната мярка α на ъгъла, трябва да пресметнем неговата радианна мярка ρ по формулата

$$\rho = \alpha \frac{\pi}{180}. \tag{6}$$

В §5 намерихме едно приближение на π, което ще използваме сега. Да приемем $\pi = 3{,}1415926$. Тогава

$$22 \frac{\pi}{180} = \frac{11 \,.\, 3{,}1415926}{90} = 0{,}3839724.$$

За пресмятането на $\sin 22^\circ$ ще използваме неравенството (3) при $x = 0{,}3839724$. Тъй като грешката не трябва да надмине 10^{-5}, естественото число n съгласно (3) ще удовлетворява неравенството

$$\frac{(0{,}3839724)^{2n+3}}{(2n+3)!} < 0{,}00001.$$

Можем да изберем $n=2$, понеже

$$\frac{(0{,}3839724)^7}{7!} = 0{,}0000002 < 0{,}00001.$$

Тогава търсеното приближение е стойността на полинома (1) при $n=2$ и $x = 0{,}3839724$, т. е. числото

$$0{,}3839724 - \frac{(0{,}3839724)^3}{3!} + \frac{(0{,}3839724)^5}{5!}.$$

Да направим пресмятанията:

$$\left.\begin{array}{ll} 0{,}3839724 & = 0{,}3839724 \\ \dfrac{(0{,}3839724)^5}{5!} & = 0{,}0000696 \end{array}\right\} + \qquad \frac{(0{,}3839724)^3}{3!} = 0{,}0094352$$

$$- \left\{\begin{array}{l} 0{,}3840420 \\ 0{,}0094352 \end{array}\right.$$
$$\overline{0{,}3746068}$$

Като направим закръгляне на последното число на 5-я знак, получаваме приближение на $\sin 22^\circ$ с желаната точност, а именно, числото 0,37461.

Пример 2. Да се пресметне $\cos 60^\circ$ с точност 10^{-4}.

Съгласно (6) радианната мярка на 60° е $\frac{\pi}{3}$ или превърнато в десетична дроб

$$\frac{\pi}{3} = \frac{3{,}1415926}{3} = 1{,}0471975.$$

Ще използваме неравенството (4) при $x = 1{,}0471975$. Числото n определяме от неравенството

$$\frac{(1{,}0471975)^{2n+2}}{(2n+2)!} < 0{,}0001$$

т. е. $n=3$ понеже

$$\frac{(1{,}0471975)^8}{8!} = 0{,}0000359 < 10^{-4}.$$

Тогава търсеното приближение е стойността на полинома (2) при $n=3$ и $x = 1{,}0471975$, т. е. числото

$$1 - \frac{(1{,}0471975)^2}{2!} + \frac{(1{,}0471975)^4}{4!} - \frac{(1{,}0471975)^6}{6!}.$$

Да направим пресмятанията

$$\left.\begin{array}{ll} 1 & = 1{,}0000000 \\ \dfrac{(1{,}0471975)^4}{4!} & = 0{,}0501075 \end{array}\right\} + \qquad \left.\begin{array}{ll} \dfrac{(1{,}0471975)^2}{2!} & = 0{,}5483113 \\ \dfrac{(1{,}0471975)^6}{6!} & = 0{,}0018316 \end{array}\right\} +$$

$$\overline{1{,}0501075} \qquad\qquad \overline{0{,}5501429}$$

$$-\begin{cases}1{,}0501075\\0{,}5501429\end{cases}$$
$$\overline{0{,}4999646}$$

Като направим закръгляне съобразно желаната точност, получаваме $\cos 60° = \cos 1{,}047\ldots = 0{,}5000$, което както знаем е точната стойност на $\cos 60°$.

Задачи към глава 5

1. Да се пресметне e^{-1} с точност 10^{-3}. Отг. 0,367 ...

2. Да се пресметне ch 3 с точност 10^{-3}. Отг. 10,067 ...

Глава 6

НЯКОИ ДИФЕРЕНЦИАЛНИ УРАВНЕНИЯ ОТ ПЪРВИ РЕД

Диференциално уравнение от първи ред се нарича всяко уравнение от вида

$$F(x, y, y') = 0,$$

където функцията F е дадена, а $y = y(x)$ е функция, която се търси. Всяка функция $y = y(x)$, за която горното уравнение се превръща в тъждество по отношение на x, се нарича *решение* на даденото диференциално уравнение. Така например, функцията $y = x$ е решение на диференциалното уравнение $yy' - x = 0$, защото имаме $yy' - x = x(x)' - x = x - x = 0$; лесно може да се провери, че това уравнение се удовлетворява и от функцията $y = \sqrt{x^2 + c}$, където c е произволна константа. Наличието на произволна константа в решението на това диференциално уравнение не е случайно. Такава константа се появява, когато търсим всички решения на диференциално уравнение.

Теорията на диференциалните уравнения от първи ред е обширна част на математическия анализ с многобройни приложения. Но по понятни съображения тук ще се ограничим само с разглеждането на най-елементарни въпроси от този кръг. В §1, §2, §3 и §4 са разгледани уравнения от вида $y' = f(x)$. Те са обект на така нареченото *интегрално смятане*. В §5, §6 и §7 се изучава линейното диференциално уравнение от първи ред. Някои геометрични приложения са дадени в §8.

§ 1. ИНТЕГРАЛНО СМЯТАНЕ

Действието интегриране е обратно на диференцирането. При диференцирането по дадена функция се търси производната ѝ, а при интегрирането се прави обратното, т. е. по дадена производна се търси функцията. И така задачата на интегралното смятане е по дадена функция $f(x)$ да се намери функция $F(x)$, за която

$$F'(x)=f(x). \tag{1}$$

Всяка функция F, за която е изпълнено (1), се нарича *неопределен интеграл* или *примитивна функция* на f. Тъй като производната на всяка константа е нула, не е трудно да се съобрази, че ако F е примитивна на функцията f и c е произволна константа, функцията $F+c$ е също примитивна на f (от тази неопределеност на примитивната идва и названието „неопределен интеграл“). Обратното е също вярно, т. е.

Ако функцията f е дефинирана в интервал и F е произволен неопределен интеграл на f, всеки друг неопределен интеграл F_1 на f се получава от F чрез прибавяне на подходяща константа, т. е

$$F_1=F+c. \tag{2}$$

Наистина по условие имаме $F'(x)=f(x)$ и $F_1'(x)=f(x)$. Следователно $(F(x)-F_1(x))'=f(x)-f(x)=0$, т. е. производната на $F-F_1$ се анулира навсякъде в дефиниционния интервал на f. Ето защо фундаменталното свойство на производните (гл. 3, §10) дава $F-F_1=c$, където c е константа и (2) е доказано.

Произволен неопределен интеграл $F(x)$ на функцията $f(x)$ се означава със символа

$$\int f(x)\,dx.$$

Следователно съгласно дефиницията на примитивна ще имаме

$$\left(\int f(x)\,dx\right)'=f(x), \tag{3}$$

т. е. по определение $\int f(x)\,dx$ е функция, чиято производна съвпада с $f(x)$. Така например, не е трудно да се съобрази, че

$$\int x\,dx=\frac{x^2}{2}+c,$$

където c е произволна константа. Наистина, $\left(\frac{x^2}{2}+c\right)'=\frac{2x}{2}=x$. По-общо, таблицата на производните (гл. 3, §15) дава очевидно следната таблица на неопределените интеграли:

1. $\int 0\,dx=c$
2. $\int x^a\,dx=\frac{x^{a+1}}{a+1}+c \qquad (a\neq-1),$
3. $\int \cos x\,dx=\sin x+c,$
4. $\int \sin x\,dx=-\cos x+c,$
5. $\int \frac{dx}{\cos^2 x}=\operatorname{tg} x+c,$
6. $\int \frac{dx}{\sin^2 x}=-\operatorname{ctg} x+c,$
7. $\int \operatorname{ch} x\,dx=\operatorname{sh} x+c,$
8. $\int \operatorname{sh} x\,dx=\operatorname{ch} x+c,$
9. $\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x}=\operatorname{th} x+c,$
10. $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x}=-\operatorname{cth} x+c,$
11. $\int e^x\,dx=e^x+c,$
12. $\int a^x\,dx=\frac{a^x}{\ln a}+c \qquad (a\neq1),$
13. $\int \frac{dx}{x}=\ln x+c \qquad (x>0).$

Но не само таблицата на производните може да се запише като таблица на неопределените интеграли, а и правилата за диференциране могат да се запишат като правила за интегриране. Ето и таблицата на правилата за интегриране

1. $\int c\,f(x)\,dx=c\int f(x)\,dx$ (c — константа),
2. $\int (f(x)+g(x))\,dx=\int f(x)\,dx+\int g(x)\,dx,$
3. $\int f(x)\,g'(x)\,dx=f(x)\,g(x)-\int g(x)\,f'(x)\,dx,$

4. $\int f(x)\frac{g'(x)}{g^2(x)}dx=-\frac{f(x)}{g(x)}+\int\frac{f'(x)}{g(x)}dx,$

5. Ако $\int F(u)\,du=\Gamma(u)$, то $\int F(f(x))\,f'(x)\,dx=\Gamma(f(x))$.

За да се докаже коя да е от горните формули, достатъчно е да се диференцира дясната страна и да се забележи, че след диференцирането се получава точно функцията, която стои под интеграла от лявата страна на формулата.

Ето доказателството на правилото 3 за интегриране.

$$\left(f(x)g(x)-\int g(x)f'(x)\,dx\right)'$$

$$=(f(x)g(x))'-g(x)f'(x).$$

$$=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)-g(x)f'(x)=f(x)g'(x).$$

Да докажем и правилото 5. Тъй като $\Gamma(u)$ е примитивна на $F(u)$, то $\Gamma'(u)=F(u)$. Тогава съгласно правилото за диференциране на функция от функция ще имаме
$(\Gamma(f(x)))'=\Gamma'(f(x)).f'(x)=F(f(x)).f'(x)$,
с което правило 5 е доказано.

Правилата 3 и 4 се наричат понякога правила за *интегриране по части*. Да отбележим преди всичко, че правилото 4 е следствие от 3. Наистина, тъй като $\frac{g'(x)}{g^2(x)}=-\left(\frac{1}{g(x)}\right)'$, лявата страна на 4 може да се запише и така:

$$\int f(x)\frac{g'(x)}{g^2(x)}dx=-\int f(x)\left(\frac{1}{g(x)}\right)'dx. \tag{4}$$

От друга страна, правилото 3 дава

$$\int f(x)\left(\frac{1}{g(x)}\right)'dx=\frac{f(x)}{g(x)}-\int\frac{f'(x)}{g(x)}dx. \tag{5}$$

Равенствата (4) и (5) дават правилото 4.

Сръчното прилагане на таблиците на неопределените интеграли и на правилата за интегриране дава възможност да се пресмятат многобройни неопределени интеграли. На тази тема са посветени обемисти книги (вж. например А. Ф. Тимофеев, Интегрирование функций, 1948). Тук ще разгледаме само най-простите интеграли.

Ето няколко примера, в които освен таблицата на неопределените интеграли се използуват само правилата 1 и 2.

Пример 1. Да се пресметне

$$\int\frac{dx}{\sin^2x\cos^2x}$$

Решение.

$$\int\frac{dx}{\sin^2x\cos^2x}=\int\frac{\sin^2x+\cos^2x}{\sin^2x\cos^2x}dx$$

$$=\int\frac{dx}{\cos^2x}+\int\frac{dx}{\sin^2x}=\operatorname{tg}x-\operatorname{ctg}x+c.$$

Пример 2. Да се пресметне

$$\int\frac{x^2+3x+1}{\sqrt[3]{x}}dx.$$

Решение.

$$\int\frac{x^2+3x+1}{\sqrt[3]{x}}dx=\int\left(x^{\frac{5}{3}}+3x^{\frac{2}{3}}+x^{-\frac{1}{3}}\right)dx$$

$$=\int x^{\frac{5}{3}}dx+3\int x^{\frac{2}{3}}dx+\int x^{-\frac{1}{3}}dx$$

$$=\frac{x^{\frac{5}{3}+1}}{\frac{5}{3}+1}+3\frac{x^{\frac{2}{3}+1}}{\frac{2}{3}+1}+\frac{x^{-\frac{1}{3}+1}}{-\frac{1}{3}+1}=\frac{3}{8}\sqrt[3]{x^8}+\frac{9}{5}\sqrt[3]{x^5}+\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}.$$

Пример 3. Да се пресметне

$$\int(2^x+1)^2dx.$$

Решение.

$$\int(2^x+1)^2dx=\int(2^{2x}+2.2^x+1)\,dx$$

$$=\int 4^x\,dx+2\int 2^xdx+\int x^0dx=\frac{4^x}{\ln 4}+2\frac{2^x}{\ln 2}+x+c.$$

Следват няколко приложения на правилата за интегриране по части.

Пример 4. Да се пресметне

$$\int x^2 \ln x\, d\,x.$$

Р е ш е н и е. Като вземем пред вид, че $\int x^2 dx = \frac{x^3}{3}$, търсеният интеграл може да се запише и така:

$$(6) \qquad \int x^2 \ln x\, d\,x = \int \ln x \left(\frac{x^3}{3}\right)' dx.$$

Сега прилагаме правилото 3 за интегриране по части и получаваме

$$\int \ln x \left(\frac{x^3}{3}\right)' d\,x = \frac{x^3 \ln x}{3} - \frac{1}{3}\int x^3 (\ln x)' dx$$

$$= \frac{x^3 \ln x}{3} - \frac{1}{3}\int x^2 dx = \frac{x^3 \ln x}{3} - \frac{x^3}{9},$$

което заедно с (6) дава

$$\int x^2 \ln x dx = \frac{1}{3} x^3 \ln x - \frac{1}{9} x^3.$$

Пример 5. Да се пресметне

$$\int \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x} dx.$$

Р е ш е н и е. Тук ще си послужим с правилото 4, като ще положим $f(x) = \cos^2 x$ и $g(x) = \sin x$. Очевидно

$$(7) \qquad \int \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x} d\,x = \int \cos^2 x \frac{(\sin x)'}{\sin^2 x} dx.$$

Но

$$\int \cos^2 x \frac{(\sin x)'}{\sin^2 x} dx = -\frac{\cos^2 x}{\sin x} + \int \frac{(\cos^2 x)'}{\sin x} dx$$

$$= -\frac{\cos^2 x}{\sin x} - 2\int \frac{\cos x \sin x}{\sin x} dx = -\frac{\cos^2 x}{\sin x} - 2 \sin x.$$

Последното заедно със (7) дава

$$\int \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x} dx = -\frac{\cos^2 x}{\sin x} - 2 \sin x.$$

Понякога се налага да се интегрира по части повече от веднъж.

Пример 6. Да се пресметне

$$\int x^2 e^x dx.$$

Р е ш е н и е.

$$\int x^2 e^x dx = \int x^2 (e^x)' d\,x = x^2 e^x - \int e^x (x^2)' d\,x$$

$$= x^2 e^x - 2\int x e^x dx = x^2 e^x - 2\int x (e^x)' d\,x$$

$$= x^2 e^x - 2x e^x + 2\int e^x (x)' dx = x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x.$$

Вече имахме случай да се убедим в значението на правилото за диференциране на функция от функция за диференциалното смятане. Аналогична е ролята на правилото 5 в интегралното смятане. Най-напред ще посочим някои от най-простите приложения на това правило. Това са случаите, когато функцията f е линейна, т. е. $f(\bar{x}) = ax + b$.

Пример 7. Да се пресметне

$$\int \sin(2x+1) dx.$$

Р е ш е н и е. Очевидно търсеният интеграл може да се запише и така:

$$(8) \qquad \int \sin(2x+1)\, dx = \frac{1}{2}\int \sin(2x+1).(2x+1)' dx.$$

Съгласно правило 5, за да пресметнем интеграла, който стои отдясно на последното равенство, е достатъчно да пресметнем $\int \sin u\, d\,u$ и след това в получената примитивна да заместим u с $2x+1$. Но $\int \sin u\, d\,u = -\cos u$ и следователно $\int \sin(2x+1)(2x+1)' dx = -\cos(2x+1)$. Последното равенство заедно с (8) дава

$$\int \sin(2x+1) dx = -\frac{1}{2}\cos(2x+1).$$

Разбира се, читателят би могъл да съобрази последния резултат и директно. Да отбележим още, че аналогично на пример 7 може да се процедира с всички таблични интеграли. Така например

$$\int \frac{dx}{\cos^2 2x} = \frac{1}{2} \operatorname{tg} 2x, \qquad \int \operatorname{ch}(ax+b)\, d\,x = \frac{1}{a} \operatorname{sh}(ax+b)$$

и т. н.

Посочените дотук приложения на правило 5 не са типични. Ето няколко по-типични приложения на това правило.

Пример 8. Да се пресметне

$$\int \frac{\cos x-\sin x}{\cos x+\sin x}\,dx$$

Решение.

$$\int \frac{\cos x-\sin x}{\cos x+\sin x}\,dx=\int \frac{(\cos x+\sin x)'}{\cos x+\sin x}\,dx$$

$$=\int \frac{du}{u}=\ln u=\ln(\cos x+\sin x),$$

където с u беше означено $\cos x+\sin x$.

Пример 9. Да се пресметне

$$\int \frac{dx}{e^x+1}.$$

Решение.

$$\int \frac{dx}{e^x+1}=\int \frac{e^x+1-e^x}{e^x+1}\,dx=\int dx-\int \frac{(e^x+1)'}{e^x+1}\,dx$$

$$=x-\int \frac{du}{u}=x-\ln u=x-\ln(e^x+1),$$

където с u беше означено e^x+1.

Пример 10. Да се пресметне

$$\int \frac{dx}{\sin x\cos x}.$$

Решение.

$$\int \frac{dx}{\sin x\cos x}=\int \frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin x\cos x}\,dx=\int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx+\int \frac{\cos x}{\sin x}\,dx$$

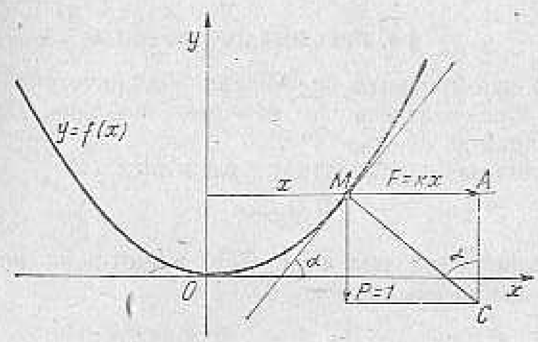
$$=-\int \frac{(\cos x)'}{\cos x}\,dx+\int \frac{(\sin x)'}{\sin x}\,dx=-\ln\cos x+\ln\sin x$$

$$=\ln \operatorname{tg} x.$$

Естествено е да се запитаме каква е ролята на знака dx в означението на $\int f(x)dx$. При по-систематично построяване на интегралното смятане този знак се използува за по-удобно манипулиране с правилото 5.

Накрая ще разгледаме едно просто хидравлично приложение на интегрирането. *Да си мислим цилиндричен съд, който се върти с постоянна ъглова скорост около оста си, която е вертикална. Пита се, ако в този съд налеем известно количество течност, каква ще бъде формата, която тази течност ще заеме.*

Ясно е преди всичко, че течността ще се завърти след известно време със същата ъглова скорост, с която се върти цилиндъра, като при това горният ѝ пласт ще приеме формата на някакна ротационна повърхнина. Задачата е да се намери тази ротационна повърхнина. Разбира се, поради симетрията е достатъчно да намерим кривата, по която произволна равнина, минаваща през оста на цилиндъра, пресича ротационната повърхнина (черт. 82).



Черт. 82

След като течността приеме окончателната си форма, една произволна точка M от най-горния ѝ пласт ще се върти равномерно около оста на цилиндъра със същата ъглова скорост, с която се върти и цилиндърът. От една страна, върху M действува теглото ѝ P, което без ограничение на общността можем да считаме 1, а от друга — центробежната сила F. Тъй като точката M през цялото време остава върху един и същи хоризонтал, резултантата R на силите P и F трябва да бъде ортогонална на повърхнината. Тази бележка е достатъчна, за да се намери видът на ротационната повърхнина.

В следващата глава ще покажем, че силата F е пропорционална на радиуса x с коефициент на пропорционалност, който зависи от масата на M и от ъгловата скорост, т. е. $F=kx$.

Да означим с α ъгъла, който тангентата в точката M сключва с абсцисната ос. От триъгълника AMC намираме

$$\operatorname{tg}\alpha=kx. \tag{9}$$

Но, ако означим с $y=f(x)$ уравнението на кривата, по която произволна равнина през оста на цилиндъра пресича ротационната повърхнина, то

$$\operatorname{tg}\alpha=f'(x)$$

и съгласно (9) ще имаме $f'(x)=kx$, т. е.

$$f(x)=\int kx\,dx=\frac{k}{2}x^2$$

и следователно уравнението на търсената крива е

$$y=\frac{k}{2}x^2, \tag{10}$$

което показва, че кривата е парабола. Повърхността, която се получава от въртенето на една парабола около оста ѝ, се нарича *ротационен параболоид.*

И така при дадените условия горният пласт на течността ще приеме формата на ротационен параболоид.

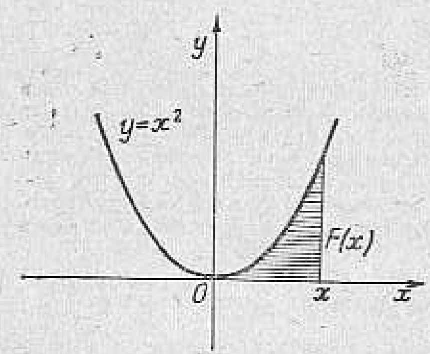
§ 2. ПРЕСМЯТАНЕ НА ЛИЦА

Едно от най-хубавите приложения на интегралното смятане е свързано със задачата за намиране на лица. Да започнем с един прост пример.

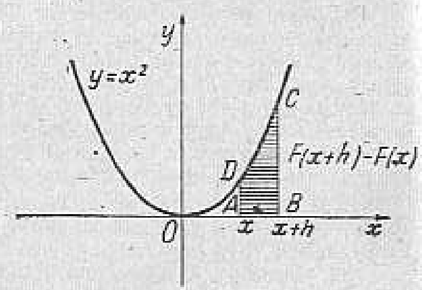
Да разгледаме параболата с уравнение

$$y=x^2 \tag{1}$$

и за произволно x да означим с $F(x)$ лицето на криволинейния триъгълник, изобразен на черт. 83.



Черт. 83



Черт. 84

Да намерим производната на функцията. Очевидно нарастването

$$F(x+h)-F(x)$$

не е нищо друго освен лицето на криволинейния трапец $ABCD$ от черт. 84. Но тогава

$$AD.\,h\leq F(x+h)-F(x)\leq BC.\,h,$$

т. е.

$$x^2.\,h\leq F(x+h)-F(x)\leq(x+h)^2.\,h$$

и следователно

$$x^2\leq\frac{F(x+h)-F(x)}{h}\leq(x+h)^2. \tag{2}$$

Когато h клони към нула, дясната страна на (2) клони към x^2, т. е. към лявата страна. От това следва, че

$$\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=x^2,$$

т. е.

$$F'(x)=x^2$$

и следователно

$$F(x)=\int x^2\,dx=\frac{x^3}{3}+c. \tag{3}$$

За да намерим константата c, в (3) ще положим $x=0$ и съгласно дефиницията на $F(x)$ ще получим $0=0+c$, откъдето

$$F(x)=\frac{x^3}{3}. \tag{4}$$

Така намерената формула (4) дава възможност да се намери лицето на криволинейния триъгълник от черт. 83 за всяко x.

Специалният резултат (4) е интересен, тъй като елементарната геометрия не ни дава средства за намиране на разглежданото лице. Значително по-интересен е методът, с който (4) беше намерено, защото той е общ, т. е. позволява по аналогичен начин да се пресмятат лица и в много други случаи.

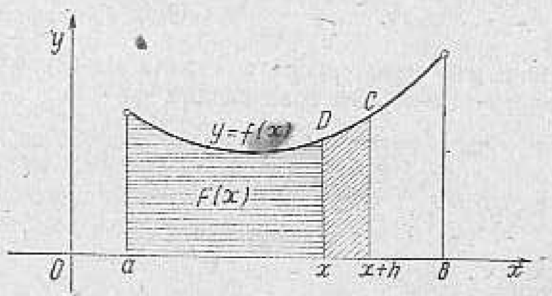
Нека функцията f е дефинирана и непрекъсната в интервала $[a, b]$ и нека $f(x)\geq 0$ за всяко x от този интервал. Да означим с T множеството на всички точки с координати (x, y) от равнината, за които са изпълнени неравенствата (черт. 85)

$$a\leq x\leq b, \tag{5}$$
$$0\leq y\leq f(x).$$

При тези предположения се твърди, че ако Φ е произволна примитивна (неопределен интеграл) на f в $[a, b]$, то лицето S на множеството T се дава с формулата

(6) $$S=\Phi(b)-\Phi(a).$$

Доказателството на (6) е аналогично на това на (4). За произволно x от $[a, b]$ да означим с $F(x)$ лицето на частта от множеството T, която лежи вляво от вертикалната права през точ-



Черт. 85

ката $(x, 0)$. Ще докажем най-напред, че F е една примитивна на f. Очевидно нарастването

$$F(x+h)-F(x)$$

съвпада с лицето на криволинейния трапец $ABCD$ от черт. 85. Следователно

(7) $$\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=y_{cp},$$

където y_{cp} е средната височина на трапеца $ABCD$. Понеже функцията f е непрекъсната, когато h клони към нула, y_{cp} ще клони към $f(x)$. Ето защо от (7) следва, че

$$\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=f(x),$$

т. е. $F'(x)=f(x)$, което показва, че F е примитивна на f.

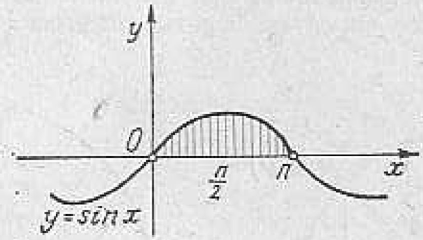
От друга страна, Φ е също примитивна на f и следователно ще имаме

(8) $$F(x)=\Phi(x)+c.$$

За да намерим стойността на константата c, в (8) ще положим $x=a$ и ще получим $0=\Phi(a)+c$, откъдето $c=-\Phi(a)$. Сега заместваме получения резултат в (8) и получаваме $F(x)=\Phi(x)-\Phi(a)$. В последната формула заместваме x с b и получаваме $F(b)=\Phi(b)-\Phi(a)$. Но по определение $F(b)=S$ и формула (6) е доказана.

И така, за да намерим лицето на криволинейния трапец T, е достатъчно да интегрираме f и след това да намерим разликата между стойностите на получения интеграл в точките b и a.

Пример 1. Да се намери лицето S, заградено от синусоидата $y=\sin x$ $0\leq x\leq\pi$ и абсцисната ос (черт. 86).



Черт. 86

Очевидно множеството, чието лице се търси, е определено от неравенствата

$$0\leq x\leq\pi,$$
$$0\leq y\leq\sin x$$

и следователно, за да намерим лицето му, ще трябва да пресметнем разликата $\Phi(\pi)-\Phi(0)$, където $\Phi(x)$ е някаква примитивна на $\sin x$. Но $\int\sin x\,dx=-\cos x$. Ето защо $S=(-\cos\pi)-(-\cos 0)=2$.

Пример 2. Да се намери лицето на частта от равнината, заградена от хиперболата $y=\frac{1}{x}$, вертикалните прави $x=1$ и $x=2$ и абсцисната ос.

Очевидно $\int\frac{1}{x}\,dx=\ln x$ и следователно

$$S=\ln 2-\ln 1=\ln 2.$$

Пример 3. Да се намери лицето на кръга.

За удобство ще разгледаме кръг с радиус a и център в началото на координатната система (черт. 87). Достатъчно е да намерим лицето само на онази негова част, която е разположена в първия квадрант.

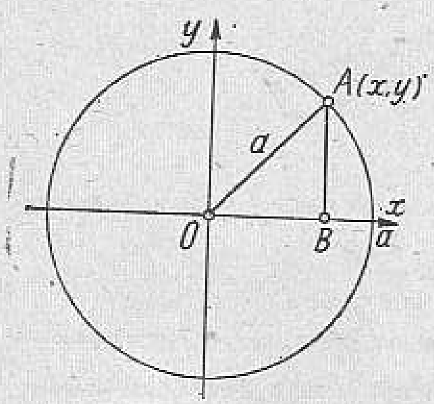
Ако $A(x, y)$ е произволна точка от окръжността, от триъгълника OAB намираме $x^2+y^2=a^2$, откъдето $y=\pm\sqrt{a^2-x^2}$. Следователно уравнението на частта от окръжността, която е над абсцисната ос, е

(9) $$y=\sqrt{a^2-x^2}.$$

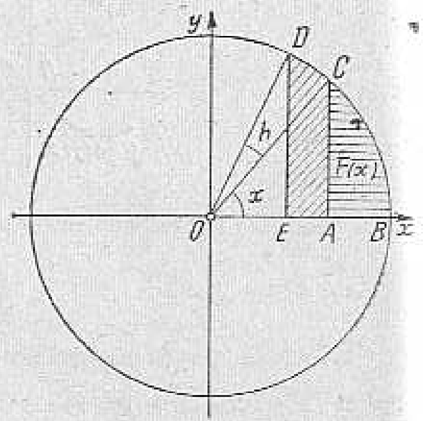
Ако Φ е някаква примитивна на функцията (9), лицето S на частта от кръга, която се намира в първия квадрант, се дава от формулата

$$S=\Phi(a)-\Phi(0). \tag{10}$$

Но така написаната формула не може да се използува за намиране на лицето на кръга, понеже средствата, изучени в тази



Черт. 87



Черт. 88

книга, не дават възможност да се намери примитивната Φ. Ето защо ще изберем друг път, който също използува интеграли, но такива, които сме в състояние да пресмятаме.

За произволен ъгъл x, $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, означаваме с $F(x)$ лицето на полусегмента ABC (черт. 88). Очевидно нарастването $F(x+h)-$ $-F(x)$ съвпада с лицето на криволинейния трапец $EACD$, т. е.

$$F(x+h)-F(x)=EA \, . \, y_{ср}, \tag{11}$$

където $y_{ср}$ е „средната" височина на криволинейния трапец. Тъй като $EA=a(\cos x-\cos(x+h))$ от (11) получаваме

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=-a\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h} \, . \, y_{ср}. \tag{12}$$

Но $\overline{\lim\limits_{h\to 0}}\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h}=(\cos x)'=-\sin x$ и $\lim\limits_{h\to 0} y_{ср}=a\sin x$. Следователно

$$\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=-a(-\sin x) \, . \, a\sin x=a^2\sin x,$$

т. е. $F'(x)=a^2\sin x$. Последното равенство показва, че $F(x)$ е една примитивна на $a^2\sin x$. Ето защо

$$F(x)=a^2\int \sin^2 x\,dx=a^2\int\frac{1-\cos 2x}{2}\,dx$$

$$=\frac{a^2}{2}\int dx-\frac{a^2}{2}\int\cos 2x\,dx=\frac{a^2x}{2}-\frac{a^2\sin 2x}{4}+c.$$

За да намерим константата c, ще положим $x=0$ и ще получим $0=0+c$, поради което

$$F(x)=\frac{a^2x}{2}-\frac{a^2\sin 2x}{4}. \tag{13}$$

Съгласно дефиницията на F, търсеното лице S е равно на $F\left(\frac{\pi}{2}\right)$ и следователно $S=\frac{\pi a^2}{4}$. Тъй като лицето σ на кръга е четири пъти по-голямо от S, последното равенство дава познатата формула

$$\sigma=\pi a^2. \tag{14}$$

Нека $a>0$ и $b>0$ са произволни константи. Множеството на всички точки (x, y) в равнината, координатите на които удовлетворяват уравнението

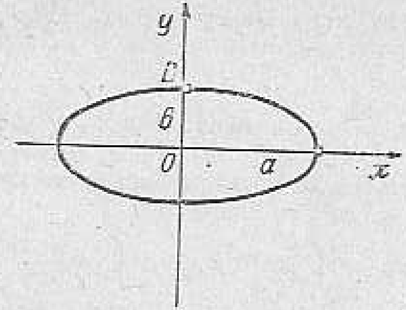
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \tag{15}$$

се нарича *елипса с полуоси* a и b. Както ще видим по-късно, това е симетрична относно координатните оси затворена крива (черт. 89). Частта от равнината, която е заградена от елипсата, също се нарича *елипса*.

Пример 4. Да се намери лицето на елипсата.

Като решим (15) относно y, ще получим $y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$. Следователно уравнението на частта от елипсата, която е над абсцисната ос, е

$$y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}. \tag{16}$$



Черт. 89

Нека Φ е примитивна на функцията (8). Тогава съгласно правилата за интегриране функцията $\frac{b}{a}\Phi$ ще бъде примитивна на (16). Следователно за лицето S_1 на частта от елипсата, която е разположена в първия квадрант, ще имаме $S_1=\frac{b}{a}\Phi(a)-\frac{b}{a}\Phi(0)$, което заедно с (10) дава $S_1=\frac{b}{a}S$. Но, както вече знаем, $S=\frac{\pi a^2}{4}$ и следователно $S_1=\frac{\pi}{4}ab$. Лицето σ_1 на елипсата е четири пъти по-голямо от S_1 и последното равенство дава

(17) $$\sigma_1=\pi a b.$$

Да отбележим изрично, че формула (17) беше получена без ефективно намиране на примитивна на функцията (16). Вместо това използувахме познатото вече лице на кръга и приликата между уравненията (16) и (9).

§ 3. ПРЕСМЯТАНЕ НА ОБЕМИ

Интегралното смятане може да се използува с успех при решаване на задачата за намиране на обеми. Начинът, по който това става, е аналогичен на това, което видяхме в § 2.

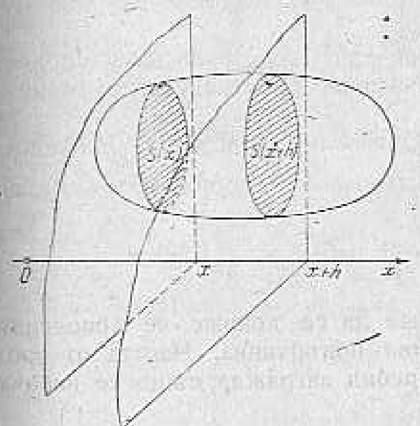
Ето общия подход към тази задача. *Нека M е тяло, чиято проекция върху някоя ос Ox съвпада с интервала $[a, b]$. Нека освен това за всяко x от този интервал равнината $\alpha(x)$, която минава през x и е перпендикулярна на оста Ox, пресича тялото в сечение с лице $S(x)$ (черт. 90). При тези предположения се твърди, че ако $\Phi(x)$ е произволна примитивна на $S(x)$, обемът V на тялото M се дава с формулата*

(1) $$V=\Phi(b)-\Phi(a).$$

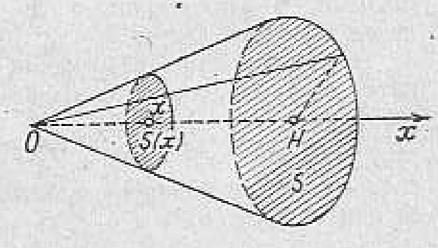
Доказателството на (1) е аналогично на това на (2.6). За произволно x от $[a, b]$ да означим с $F(x)$ обема на частта от множеството M, която лежи вляво от $\alpha(x)$. Най-напред ще се убедим, че $F(x)$ е примитивна на $S(x)$. Нарастването $F(x+h)-F(x)$ съвпада с обема на частта от тялото M, която се намира между равнините $\alpha(x)$ и $\alpha(x+h)$. Следователно

(2) $$\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=S_{\text{ср}},$$

където $S_{\text{ср}}$ е лицето на „средното" напречно сечение. Но когато h клони към нула, $S_{\text{ср}}$ клони към $S(x)$, поради което $F'(x)=S(x)$. Следователно $F(x)=\Phi(x)+c$. От друга страна, по определение $F(a)=0$. Ето защо $c=-\Phi(a)$ и $F(x)=\Phi(x)-\Phi(a)$. Формула (1) се получава, след като в последното равенство заместим x с b.



Черт. 90



Черт. 91

Пример 1. Да се намери обемът на конуса.

Разсъжденията, които ще направим, важат за конус с произволна основа с лице S (черт. 91). По този начин едновременно ще намерим обемите на правия и наклонен кръгов конус, на различните видове пирамиди и т. н.

Нека височината на конуса е H. Разглеждаме ос Ox, успоредна на височината му. За произволно x от интервала $[0,H]$ означаваме с $\alpha(x)$ равнината, минаваща през точката x и успоредна на основата на конуса. Ясно е, че за лицето $S(x)$ на сечението на $\alpha(x)$ с конуса ще имаме

$$\frac{S(x)}{S}=\frac{x^2}{H^2},$$

откъдето $S(x)=\frac{x^2}{H^2}S$. Следователно

$$\Phi(x)=\int S(x)\,dx=\frac{S}{H^2}\int x^2\,dx=\frac{Sx^3}{3H^2}$$

и

$$V=\Phi(H)-\Phi(0)=\frac{SH^3}{3H^2}=\frac{SH}{3},$$

Нека в пространството са зададени три взаимно перпендикулярни оси Ox, Oy и Oz, които минават през една точка O. През произволна точка A от пространството да прекараме равнините ξ, η и ζ, перпендикулярни съответно на Ox, Oy и Oz. Нека пресечната точка на ξ с Ox е x, тази на η с Oy е y и онази на ζ с Oz е z. По такъв начин на произволна точка A от пространството съпоставихме по една наредена тройка от числа (x, y, z). Те се наричат *координати на точката* A (x се нарича *абсциса*, y — *ордината*, а z — *апликата*) *относно координатната система* $Oxyz$.

Основното предназначение на една пространствена координатна система е свеждането на различни пространствени геометрични задачи към алгебрични.

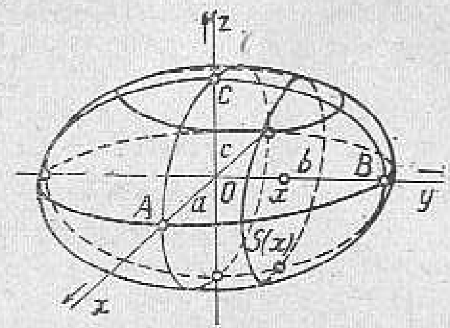
Нека $a>0$, $b>0$ и $c>0$ са произволни константи. Множеството на всички точки от пространството с кооординати (x, y, z), за които

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \tag{3}$$

се нарича *триосен елипсоид*. Може да се докаже, че триосният елипсоид е ограничена и затворена повърхнина. Частта от пространството, която триосният елипсоид загражда, също се нарича *триосен елипсоид* (черт. 92).

Пример 2. Да се намери обемът на триосния елипсоид.

За произволна точка x от абсцисната ос да означим с $\alpha(x)$ равнината, която минава през x и е ортогонална на Ox. Най-напред ще намерим сечението на $\alpha(x)$ с елипсоида. Очевидно всичките точки на това сечение имат една и съща абсциса x. Следователно единствените координати, които могат да се изменят, когато една точка описва сечението, са y и z. Тяхното изменение трябва да става по такъв начин, че да е изпълнено уравнението (3). Очевидно проекцията на сечението върху равнината Oyz ще бъде крива, еднаква със сечението. Следователно достатъчно е да намерим тази проекция. Тъй като ординатата и апликатата на произволна точка A са равни съответно на ординатата и апликатата на проекцията ѝ A_1 върху равнината Oyz, координатите (y, z) на проекцията върху Oyz на произволна точка (x, y, z) от сечението ще удовлетворяват (3) при фик-



Черт. 92

сираното в началото на абзаца x. Ето защо уравнението на проекцията на сечението върху равнината Oyz ще бъде

$$\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{x^2}{a^2}. \tag{4}$$

Когато $|x|>a$, дясната страна на това уравнение е отрицателна и понеже лявата страна може да приема само неотрицателни стойности (тя е сума от квадрати), за такива x равнината $\alpha(x)$ няма да пресича елипсоида. При $|x|=a$ отдясно получаваме 0 и (4) е изпълнено само когато $y=z=0$, т. е. при $x=a$ и при $x=-a$ сечението се състои само от една точка. Най-после при $|x|<a$, дясната страна на (4) е положителна и (4) може да се запише и така

$$\frac{y^2}{\left(b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\right)^2}+\frac{z^2}{\left(c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\right)^2}=1, \tag{5}$$

откъдето се вижда, че сечението е елипса с полуоси $b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$ и $c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$. Следователно лицето на това сечение е $S(x)=\pi bc\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)$. Ето защо

$$\Phi(x)=\int S(x)\,dx=\pi bc\int\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)dx=\pi bcx-\frac{\pi bcx^3}{3a^2}.$$

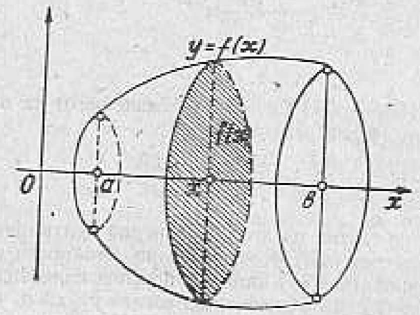
Тогава
$$V=\Phi(a)-\Phi(-a)=\pi bca-\frac{\pi bca}{3}-\left(-\pi bca+\frac{\pi bca}{3}\right)$$
$$=\frac{4}{3}\pi abc.$$

На края ще приложим разгледаните методи за намиране обема на ротационно тяло.

Нека функцията f е дефинирана и непрекъсната в интервала $[a, b]$ и нека $f(x)\geq 0$ за всяко x от този интервал. Да означим с T множеството на всички точки с координати (x, y) от равнината, за които са изпълнени неравенствата (черт. 85)

(6)
$$a \leq x \leq b,$$
$$0 \leq y \leq f(x)$$

и да означим с M тялото, което се получава от въртенето на T около абсцисната ос (черт. 93). Очевидно за произволно x от



Черт. 93

$[a, b]$ сечението на $\alpha(x)$ с M е кръг с радиус $f(x)$. Ето защо $S(x) = \pi f^2(x)$ и следователно

$$\Phi(x) = \int S(x)\,dx = \pi \int f^2(x)\,dx.$$

Както вече знаем, обемът V може да се пресметне по формулата

(7)
$$V = \Phi(b) - \Phi(a).$$

И така, *за да намерим обема на ротационното тяло T можем да използуваме формула* (7), *където Φ е произволна примитивна на функцията $\pi f^2(x)$*.

Пример 3. Да се намери обемът на тялото, получено от въртенето на синусоидата $y = \sin x$, $0 \leq x \leq \pi$ около абсцисната ос.

Очевидно

$$\Phi(x) = \pi \int \sin^2 x\,dx = \pi \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4}$$

и

$$V = \Phi(\pi) - \Phi(0) = \frac{\pi^2}{2}.$$

§ 4. ИЗТИЧАНЕ НА ТЕЧНОСТИ

Тук ще разгледаме някои хидродинамични приложения на интегралното смятане.

Да се спрем най-напред на въпроса за скоростта на изтичане. Нека от един съд с височина H изтича течност (черт. 94). Както е известно на читателя от физиката, ако оставим една точка свободно да пада, докато измине височина H, скоростта ѝ ще бъде $\sqrt{2gH}$, където g е земното ускорение.

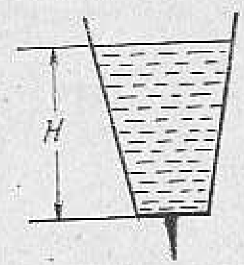
За читателя, свикнал с механичните принципи за запазване, не ще бъде трудно да съобрази, че и скоростта на изтичане на течността от разглеждания съд ще се дава с формулата

(1)
$$V = \sqrt{2gH}.$$

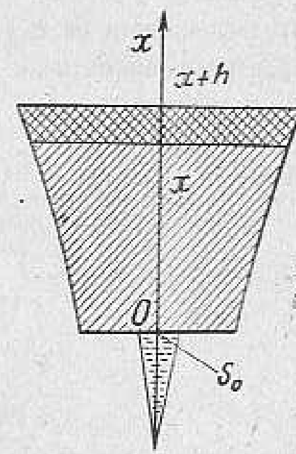
Да отговорим и на въпроса какво количество течност μ ще изтече през отвор с лице S_0, ако времето на изтичане е t, а скоростта на изтичане е постоянно равна на V. Не е трудно да се съобрази, че това количество течност изпълва цилиндър с височина Vt и лице на основата S_0. Следователно

(2)
$$\mu = Vt\,S_0.$$

Да разгледаме сега съд с отвор с лице S_0 на дъното, през който изтича течност. Въпросът, от който се интересуваме, е *за колко време съдът ще се изпразни*. За да отговорим на този въпрос, най-напред ще означим с $F(x)$ времето, необходимо за изтичането на течност с височина x (черт. 95). Ще намерим про-



Черт. 94



Черт. 95

изводната на $F(x)$. Съгласно дефиницията на F, времето, необходимо за изтичането на пласта течност с височина h, ще бъде $F(x+h)-F(x)$. Ето защо това количество течност ще се даде с формулата

(3) $$\mu = S_0 V_{\text{ср}} (F(x+h)-F(x)),$$

където $V_{\text{ср}}$ е средната скорост на изтичането в интервала от време $[F(x), F(x+h)]$, а S_0 е лицето на отвора. От друга страна, μ не е нищо друго освен обема на този пласт, който е

(4) $$\mu = S_{\text{ср}} h,$$

където $S_{\text{ср}}$ е лицето на „средното" хоризонтално сечение на пласта. Като приравним десните страни на (3) и (4) и разделим двете страни на полученото равенство с h, добиваме

(5) $$S_0 V_{\text{ср}} \frac{F(x+h)-F(x)}{h} = S_{\text{ср}}.$$

Когато h клони към нула, $S_{\text{ср}}$ очевидно клони към лицето $S(x)$ на сечението на съда с хоризонталната равнина през x, а $V_{\text{ср}}$ клони към скоростта на изтичане, отговаряща на височината x, която съгласно (1) е $\sqrt{2gx}$. Ето защо, ако в (5) оставим h да клони към нула, ще получим $S_0\sqrt{2gx}.\ F'(x)=S(x)$, откъдето

$$F'(x) = \frac{S(x)}{S_0\sqrt{2gx}}$$

и следователно $F(x)$ е примитивна на $\dfrac{S(x)}{S_0\sqrt{2gx}}$. В същото време от дефиницията на F следва, че $F(0)=0$. Следователно, ако Φ е произволна примитивна на $\dfrac{S(x)}{S_0\sqrt{2gx}}$, то

(6) $$F(x) = \Phi(x) - \Phi(0).$$

Пример 1. На дъното на цилиндричен съд с лице на основата S е пробит отвор с лице S_0. За колко време съдът ще се изпразни, ако височината му е H.

Очевидно $S(x)=S$ и следователно

$$\Phi(x) = \int \frac{S}{S_0\sqrt{2gx}}\,dx = \frac{S}{S_0\sqrt{2g}} \int x^{-\frac{1}{2}}\,dx$$

$$= \frac{S}{S_0\sqrt{2g}} \cdot \frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} = \frac{2S\sqrt{x}}{S_0\sqrt{2g}}$$

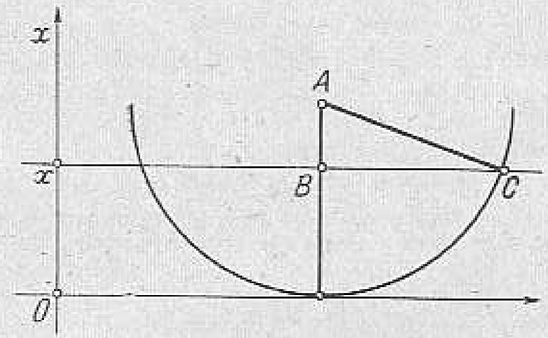
откъдето съгласно (6)

$$F(x) = \frac{2S\sqrt{x}}{S_0\sqrt{2g}}.$$

Тъй като според дефиницията на F времето T, необходимо за изпразване на цилиндъра, е $F(H)$, последното равенство при $x=H$ дава

(7) $$T = \frac{2S\sqrt{H}}{S\sqrt{2g}}.$$

Пример 2. Полусфера с радиус R е напълнена с течност. На дъното на полусферата е пробит отвор с радиус r. Да се намери времето T, необходимо за изтичане на течността от полусферата.



Черт. 96

Сечението на полусферата с хоризонталната равнина през x е кръг с радиус BC (черт. 96). От триъгълника ABC намираме

$$BC^2 = R^2 - (R-x)^2 = 2Rx - x^2,$$

откъдето $F'(x) = \dfrac{\pi(2Rx-x^2)}{\pi r^2\sqrt{2gx}}$ и следователно

$$\Phi(x) = \frac{1}{r^2\sqrt{2g}} \int \frac{2Rx-x^2}{x^{\frac{1}{2}}}\,dx = \frac{1}{r^2\sqrt{2g}} \left(2R\int x^{\frac{1}{2}}\,dx - \int x^{\frac{3}{2}}\,dx\right)$$

$$= \frac{1}{r^2\sqrt{2g}} \left(\frac{4}{3}Rx^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}\right).$$

Сега (6) дава

$$F(x) = \frac{1}{r^2\sqrt{2g}} \left(\frac{4}{3}Rx^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}\right)$$

и тъй като времето T, необходимо за изпразване на полусферата, е $F(R)$, последното равенство при $x=R$ дава

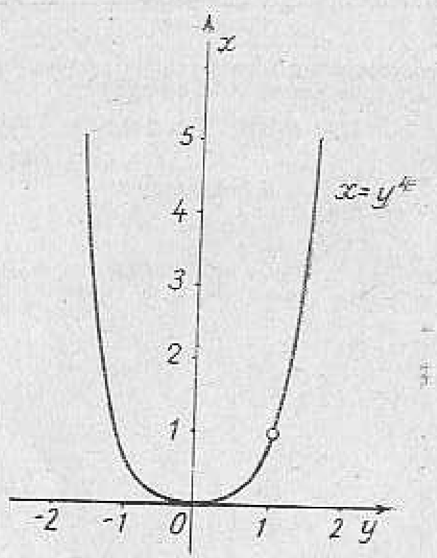
$$T=\frac{14R^{\frac{5}{2}}}{15r^2\sqrt{2g}}. \tag{8}$$

Пример 3. Да се намери формата на ротационна чаша по такъв начин, че спадането на нивото при изтичането на течност през отвор на дъното ѝ да става равномерно.

Иска се времето, необходимо за изтичане на течност с височина x, да е пропорционално на x, т. е. $F(x)=kx$, където k е константа. Следователно $F'(x)=k$ и формулата $F'(x)=\frac{S(x)}{S_0\sqrt{2gx}}$ дава $k=\frac{S(x)}{S_0\sqrt{2gx}}$, откъдето $S(x)=\pi\gamma^2\sqrt{x}$, където $\gamma>0$ е константа. Ако означим с $y(x)$ радиуса на сечението $S(x)$ от последното равенство, ще получим $\pi y^2(x)=\pi\gamma^2\sqrt{x}$ и

$$y=\gamma\sqrt[4]{x}. \tag{9}$$

Графиката на функцията $y=\sqrt[4]{x}$ е изобразена на черт. 97. Чаша с желаното свойство може да се получи, ако завъртим намерената крива около оста Ox. Такава чаша може да се използува за пясъчен часовник.



Черт. 97

В последните три параграфа често имахме случай за някаква функция f да образуваме разликата $\Phi(b)-\Phi(a)$, където Φ е произволна примитивна на f. Тъй като всеки две примитивни на f се различават с константа, разликата $\Phi(b)-\Phi(a)$ не зависи от конкретния избор на примитивната Φ, а само от функцията f и от точките a и b. Тази разлика се нарича *определен интеграл от f в интервала* $[a, b]$ и се бележи с $\int_a^b f(x)\,dx$. По силата на тази дефиниция имаме

$$\int_a^b f(x)\,dx=\Phi(b)-\Phi(a), \tag{9}$$

където Φ е произволна примитивна на f.

Определените интеграли създават редица принципиални и технически удобства. С помощта на това понятие формула (2.6) се записва така: $S=\int_a^b f(x)\,dx$, формула (3.1) — така: $V=\int_a^b S(x)\,dx$, а формула (4.6) — така: $T=\int_0^H \frac{S(x)}{S_0\sqrt{2gx}}\,dx$, където T е времето, необходимо за изтичане на течността от съда, а H е височината ѝ.

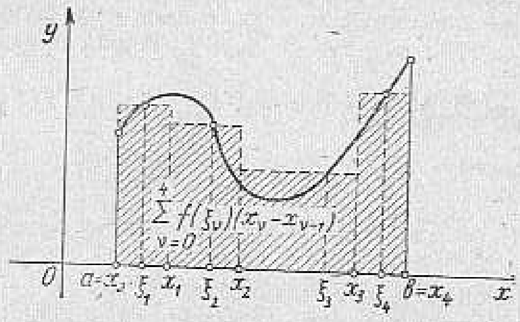
От дефиницията (9) веднага следва и един начин за пресмятане на определените интеграли. Именно, пресмятаме определения интеграл като неопределен и след това намираме разликата между стойността на така получената функция при $x=b$ и стойността ѝ при $x=a$. Графически това изглежда например така:

$$\int_0^\pi \sin x\,dx=-\cos x\Big|_0^\pi=-\cos\pi+\cos 0=2.$$

Ако анализираме внимателно формула (2.6) (а също така, разбира се, формули (3.1) и (4.6)), ще получим увереност, че поне когато подинтегралната функция f е неотрицателна, $\int_a^b f(x)\,dx$ може да се представи като граница на суми от вида

$$\sum_{\nu=1}^{n} f(\xi_\nu)(x_\nu-x_{\nu-1}),$$

където $a=x_0<x_1<x_2<\ldots<x_n=b$, а ξ_ν е произволна точка от интервала $[x_{\nu-1}, x_\nu]$ (за случая $n=3$ вж. черт. 98); за да получим границата, оставяме дължината на най-голямия от интервалите



Черт. 98

$[x_{\nu-1}, x_\nu]$ да клони към нула (при което, разбира се, броят n на интервалите ще трябва да расте неограничено). Може да се покаже, че това действително е така, и то за произволна непрекъсната функция f.

§ 5. УРАВНЕНИЕТО $y'=ay$

В природата понякога се срещат величини, скоростта на изменение на които е пропорционална на стойността на величината. На тях съответствуват функции $y=y(x)$, за които е изпълнено уравнението

(1) $$y'=ay \qquad (a \text{ — константа})$$

за всяко x.

Веднага се вижда, че функцията $y=e^{ax}$ е решение на това уравнение. Нещо повече, решения на (1) са и всички функции

(2) $$y=ce^{ax},$$

където c е произволна константа.

Задачите, които изникват от приложенията, често изглеждат така. За функцията y, описваща някое явление или процес, се убеждаваме, че удовлетворява уравнението (1). Познаването на някои решения на уравнението не носи особена полза за задачата, която решаваме, защото освен посочените решения уравнението може да има и други и търсената функция може евентуално да се окаже измежду тях. Следователно трябва да се намерят всички решения на това уравнение.

Ще покажем, че всяко решение на (1) е функция от вида (2). За тази цел за произволна функция y, за която е в сила (1), ще разгледаме функцията

(3) $$z=\frac{y}{e^{ax}}=ye^{-ax}.$$

Забележете, че ако действително е вярно, че всички решения на (1) са функции от вида (2), функцията (3) би следвало да бъде константа. За да проверим дали това е така, ще намерим производната на z:

$$z'=y'e^{-ax}-yae^{-ax}=(y'-ay)e^{-ax}=0.$$

От получения резултат следва, че $z=c=\text{const.}$, което заедно с (3) показва, че y е функция от вида (2).

И така функциите (2) *удовлетворяват* (1) *и никоя друга функция няма това свойство.*

По-долу следват някои приложения на направените разглеждания.

Пример 1. Да се намери законът за разпадане на радиоактивните вещества.

Известно е, че скоростта на разпадане на едно радиоактивно вещество е пропорционална на наличното количество от това вещество. Следователно, ако означим с y количеството от разглежданото вещество в произволен момент x от времето ще имаме

(4) $$y'=\lambda y,$$

където λ е константа. Понеже количеството на радиоактивното вещество намалява с течение на времето, скоростта y' ще бъде отрицателна, поради което константата λ ще бъде отрицателна и (4) може да се запише във вида

(5) $$y'=-\mu y,$$

където μ е положителна константа.

Вече знаем, че общото решение на (5) е

(6) $$y=ce^{-\mu x}.$$

При $x=0$ намираме $c=y(0)$ и следователно c е началното количество от радиоактивното вещество. По този начин (6) добива вида

(7) $$y=y_0\, e^{-\mu x},$$

където y_0 е началното количество на радиоактивния материал.

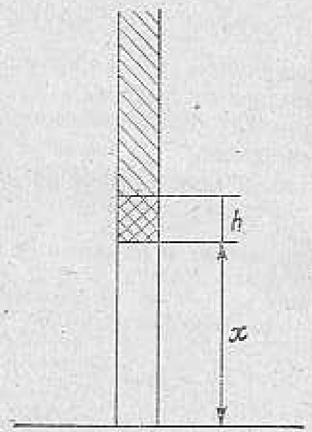
Пример 2. Да се намери законът, по който атмосферното налягане f се изменя в зависимост от надморската височина x.

Да отбележим най-напред, че съгласно закона на Бойл—Мариот теглото Q на газ, разположен в обем V под налягане p, се дава от формулата

$$Q = kp\,V, \tag{8}$$

където k зависи от естеството на газа, от температурата му, но не и от налягането.

Да разгледаме вертикален цилиндричен въздушен стълб с лице на напречното сечение 1 и с основа върху морското ниво. За произволна надморска височина x означаваме с $p(x)$ атмосферното налягане на тази височина. Очевидно $p(x)$ съвпада с теглото на онази част от въздуха, която е в стълба и е над x (черт. 99). Следователно разликата $p(x)-p(x+h)$ ще бъде равна на теглото на въздуха, който се намира в цилиндъра с лице на основата 1 и височина h, който е изобразен на черт. 99. Тъй като обемът на този цилиндър е h, съгласно (8)



Черт. 99

теглото на въздуха, който се намира в него, ще бъде $kp_{ср}h$, където $p_{ср}$ е средното налягане на въздуха в цилиндъра. Ето защо $p(x)-p(x+h)=k\,p_{ср}\,h$ и като разделим двете страни на това равенство с $-h$ ще получим

$$\frac{p(x+h)-p(x)}{h} = -p_{ср}\,k. \tag{9}$$

Когато h клони към нула, налягането $p_{ср}$ клони към $p(x)$ и като оставим в (9) h да клони към нула, получаваме

$$p'(x) = -k\,p(x). \tag{10}$$

Така полученото уравнение не е от вида (1), понеже k зависи от температурата, която изобщо се изменя с x. Но във всеки случай (10) добива вида (1), ако температурата на атмосферата е постоянна. По такъв начин получаваме възможност да намерим как налягането в една атмосфера с постоянна температура се изменя заедно с височината x.

И така, ако температурата на една атмосфера е постоянна, уравнението (10) *е от вида* (1) *и следователно* $p(x)=c\,e^{-kx}$. При $x=0$ намираме $c=p(0)$ и следователно

$$p(x) = p_0\,e^{-kx}, \tag{11}$$

където p_0 е атмосферното налягане на морското ниво. За да може формула (11) да се използува за конкретни изчисления, трябва да се знае константата k. Ако вече знаем p_0, тази константа може да се определи от (11), ако измерим $p(x)$ за някое $x \neq 0$.

§ 6. УРАВНЕНИЕТО $y'=ay+b$

Уравнението

$$y' = ay + b, \tag{1}$$

където a и b са константи, е обобщение на (5.1), тъй като последното се получава от (1) при $b=0$.

Лесно се вижда, че (1) може да се запише и във вида

$$\left(y+\frac{b}{a}\right)' = a\left(y+\frac{b}{a}\right) \tag{2}$$

и като положим

$$y+\frac{b}{a} = z \tag{3}$$

виждаме, че (1) е еквивалентно с уравнението

$$z' = a\,z, \tag{4}$$

което е от вида (5.1). Следователно $z=c\,e^{ax}$ и съгласно (3) общото решение на (1) ще има вида

$$y = c\,e^{ax} - \frac{b}{a}, \tag{5}$$

където c е произволна константа.

Пример 1. Да се намери законът, по който температурата T на едно нагрято тяло, което е оставено да се охлажда, зависи от времето x.

Ще отбележим най-напред, че количеството топлина Q, което се съдържа в едно тяло, и температурата T на това тяло са свързани с релацията

$$Q = kT, \tag{6}$$

където k зависи от тялото, но не и от Q или T.

Да си мислим два топлинни източника A и B с температури T_A и T_B. Ако тези температури са различни, от източника с по-висока температура изтича топлина към източника с по-ниска температура. Количеството Q на топлината, протекла от A към B, е пропорционално на температурната разлика $T_A - T_B$ и на интервала от време h, през който е ставал топлообменът между A и B, т. е.

(7) $$Q = \lambda\,(T_A - T_B)\,h,$$

където λ зависи от телата, но не зависи от температурите и от интервала от време h.

В нашия случай също имаме два топлинни източника — нагрятото тяло и заобикалящата го среда. При това можем да считаме, че температурата T_0 на заобикалящата тялото среда остава постоянна по време на целия топлообмен.

За произволен момент x означаваме съответно с $Q(x)$ и $T(x)$ количеството топлина, която се съдържа в тялото в момента x и температурата на тялото в този момент. Съгласно (6) ще имаме

(8) $$Q(x) = k\,T(x).$$

Съгласно дефиницията на $Q(x)$ разликата $Q(x) - Q(x+h)$ ще бъде равна на количеството топлина, която е изтекла от тялото в интервала от време $[x,\ x+h]$. Следователно

$$Q(x) - Q(x+h) = \lambda\,(T_{cp} - T_0)\,h,$$

където T_{cp} е средната температура на тялото в интервала $[x,\ x+h]$. Ако в последното равенство заместим Q с равното му от (8) и разделим двете страни на така полученото равенство на $-kh$, ще получим

(9) $$\frac{T(x+h) - T(x)}{h} = -\frac{\lambda}{k}(T_{cp} - T_0).$$

Когато h клони към нула, T_{cp} клони към $T(x)$. Ето защо, ако в (9) оставим h да клони към нула, ще получим

(10) $$T'(x) = -\frac{\lambda}{k}(T(x) - T_0),$$

което показва, че температурата като функция на времето удовлетворява уравнение от вида (1). Следователно $T(x)$ ще има вида (5), т. е.

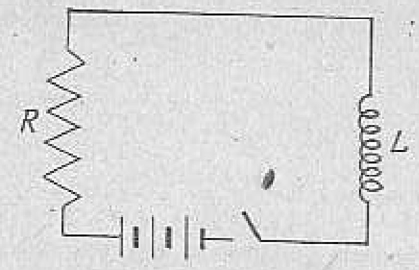
(11) $$T(x) = C\,e^{-\frac{\lambda}{k}x} + T_0.$$

Ако в (11) положим $x=0$, ще получим $T(0) = C + T_0$ и $C = T(0) - T_0$, поради което (11) добива вида

(12) $$T(x) = (T(0) - T_0)\,e^{-\frac{\lambda}{k}x} + T_0.$$

Ако знаем $T(0)$, константата $\dfrac{\lambda}{k}$ може да се определи от (12), ако се измери $T(a)$ за някое $x \neq 0$.

Пример 2. Дадена е електрическа верига с неизменящи се във времето съпротивление R и самоиндукция L. Да се намери законът, по който силата на тока I зависи от времето x, ако напрежението V е постоянно (черт. 100).



Черт. 100

Ако във веригата няма самоиндукция, напрежението V, съпротивлението R и силата на тока I са свързани със закона на Ом:

(13) $$V = IR.$$

Типична самоиндукция наблюдаваме, когато във веригата е включена една навита на желязна пръчка бобина. При изменението на силата на тока I, самоиндукционната бобина произвежда променливо магнитно поле, което от своя страна произвежда едно допълнително електрическо напрежение V_L във веригата. Индукционното напрежение V_L се противопоставя на изменението на тока и е пропорционално на скоростта на изменение на тока, т. е.

(14) $$V_L = -L\,I',$$

където коефициентът L се нарича самоиндукция на веригата.

Да отбележим, че всяка електрическа верига притежава самоиндукция. Това е причината, поради която силата на тока при включване и изключване е непрекъсната функция на времето. Наистина, ако във веригата не би имало самоиндукция, при включване силата на тока би трябвало от нула скокообразно да приеме стойността (13). Но както вече видяхме, самоиндукцията произвежда напрежение, което се противопоставя на изменението на силата на тока и по такъв начин (както ще видим това подробно след малко) осигурява нейната непрекъснатост.

И така във верига със самоиндукция освен външното напрежение V действа и напрежението (14). Следователно сумарното напрежение $V - LI'$ трябва да се постави в закона на Ом (13) вместо V, за да се получи диференциалното уравнение за силата на тока. Така получаваме $V - LI' = RI$ или, което е все същото,

(15) $$I' = -\frac{R}{L}I + \frac{V}{L},$$

което е уравнение от вида (1). Решенията на това уравнение са функции от вида (5), т. е.

(16) $$I = C\,e^{-\frac{R}{L}x} + \frac{V}{R}.$$

При $x=0$ уравнението (16) дава $C=I_0-\frac{V}{R}$ и следователно решението на (15) се дава с формулата

(17) $$I=\left(I_0-\frac{V}{R}\right)e^{-\frac{R}{L}x}+\frac{V}{R},$$

където I_0 е началната сила на тока.

От (17) се вижда, че след известно време силата на тока практически се стабилизира на стойността $\frac{V}{R}$. Наистина при нарастването на x функцията $e^{-\frac{R}{L}x}$ бързо клони към нула. Така се убеждаваме, че в крайна сметка силата на тока приема стойността, предписвана от закона на Ом (13). В същото време (17) е непрекъсната функция на x, както и да бъде избрано I_0.

§ 7. ОБЩО ЛИНЕЙНО УРАВНЕНИЕ ОТ ПЪРВИ РЕД

Уравненията, които разглеждахме в предните два параграфа, са частни случаи от уравнението

(1) $$y'=a(x)\,y+b(x),$$

което се нарича линейно диференциално уравнение от първи ред. То се различава от уравнението (6.1) по това, че коефициентите $a(x)$ и $b(x)$ не са непременно постоянни, а могат да се изменят.

По аналогия с това, което имахме в § 5, най-напред ще разгледаме специалния случай, когато в (1) имаме $b(x)=0$, т. е. ще се занимаем с уравнението

(2) $$y'=a(x)\,y.$$

След деление с y уравнението (2) добива вида $(\ln y)'=a(x)$ и следователно $\ln y=\int a(x)\,dx+\ln C$, където за удобство произволната константа е записана като $\ln C$. От последното равенство намираме

(3) $$y=C\,e^{\int a(x)\,dx},$$

което е общото решение на (2).

Изложеният начин за решаване на (2) не е коректен, понеже делихме с функцията y, без да сме сигурни, че тя не се анулира. За да се заобиколи тази мъчнотия, обикновено (2) се решава така.

За произволна функция y, която удовлетворява (2), разглеждаме функцията

(4) $$z=y\,e^{-\int a(x)\,dx}.$$

Очевидно е, че ако общото решение на (2) се дава от (3), функцията z би трябвало да бъде константа. Да проверим чрез диференциране дали това действително е така:

(5) $$\begin{cases} z'=y'e^{-\int a(x)dx}+ye^{-\int a(x)dx}\left(-\int a(x)dx\right)' \\ =y'e^{-\int a(x)dx}+ye^{-\int a(x)dx}(-a(x)) \\ =(y'-a(x)y)\,e^{-\int a(x)dx}=0. \end{cases}$$

Следователно съгласно фундаменталното свойство на производната имаме $z=c=\text{const}$ и (4) дава (3). С това е доказано, че общото решение на (2) се дава от формулата (3), където C е произволна константа.

Полученият резултат може да се използува например за изучаване на зависимостта на атмосферното налягане от височината, в случая, когато температурата на атмосферата не е постоянна. Тогава k от уравнението (5.10) не е константа, но това не е пречка да приложим (3).

За да решим общото уравнение (1), отново ще разгледаме произволно решение y на (1) и отново ще разгледаме функцията (4). Изчислението (5) на z' отново може да се проведе, но тъй като този път $y'-a(x)y=b(x)$, за z' ще получим

(6) $$z'=b(x)e^{-\int a(x)dx},$$

откъдето

(7) $$z=\int b(x)e^{-\int a(x)dx}+C.$$

Тъй като от (4) следва, че $y=z\,e^{\int a(x)dx}$, равенство (7) дава

(8) $$y=e^{\int a(x)dx}\left[\int b(x)e^{-\int a(x)dx}+C\right],$$

което е общото решение на (1).

Пример 1. Дадена е електрическа верига с постоянно съпротивление R и самоиндукция L. Да се намери закона, по който силата на тока I зависи от времето x, ако напрежението се дава с формулата $V=V_0\cos\omega x$.

Когато напрежението V зависи от времето x по указания начин, полученият електричен ток се нарича променлив. Разсъждавайки, както в пример 2 от §6, се убеждаваме, че диференциалното уравнение, което ще удовлетворява силата на тока, ще бъде

$$I'=-\frac{R}{L}I+\frac{V_0\cos\omega x}{L}. \tag{9}$$

Следователно $a(x)=-\frac{R}{L}$ и $b(x)=\frac{V_0}{L}\cos\omega x$. Ето защо

$$\int a(x)\,dx=-\frac{R}{L}x \tag{10}$$

и

$$\int b(x)e^{-\int a(x)dx}dx=\frac{V_0}{L}\int\cos\omega x\, e^{\frac{R}{L}x}dx. \tag{11}$$

За да намерим интеграла, фигуриращ отдясно на (11), ще пресметнем най-напред интеграла

$$I=\int\cos\lambda x\, e^{\mu x}dx. \tag{12}$$

Очевидно

$$I=\frac{1}{\mu}\int\cos\lambda x\,(e^{\mu x})'dx=\frac{1}{\mu}\cos\lambda x\, e^{\mu x}-\frac{1}{\mu}\int e^{\mu x}(\cos\lambda x)'dx$$

$$=\frac{1}{\mu}\cos\lambda x\, e^{\mu x}+\frac{\lambda}{\mu}\int\sin\lambda x\, e^{\mu x}dx$$

$$=\frac{1}{\mu}\cos\lambda x\, e^{\mu x}+\frac{\lambda}{\mu^2}\int\sin\lambda x\,(e^{\mu x})'dx$$

$$=\frac{1}{\mu}\cos\lambda x\, e^{\mu x}+\frac{\lambda}{\mu^2}\sin\lambda x\, e^{\mu x}-\frac{\lambda^2}{\mu^2}\int\cos\lambda x\, e^{\mu x}dx,$$

където беше интегрирано два пъти по части. От написаната верига от равенства следва, че

$$I=\frac{1}{\mu}\cos\lambda x\, e^{\mu x}+\frac{\lambda}{\mu^2}\sin\lambda x\, e^{\mu x}-\frac{\lambda^2}{\mu^2}I,$$

откъдето след решаване относно I намираме

$$\int\cos\lambda x\, e^{\mu x}dx=\frac{\lambda\sin\lambda x+\mu\cos\lambda x}{\lambda^2+\mu^2}e^{\mu x}. \tag{13}$$

Ако в полученото равенство заместим λ с ω и μ с $\frac{R}{L}$, като вземем пред вид

(11), ще получим

$$\int b(x)e^{-\int a(x)dx}dx=\frac{V_0}{\sqrt{L^2\omega^2+R^2}}\cdot\frac{L\omega\sin\omega x+R\cos\omega x}{\sqrt{L^2\omega^2+R^2}}\cdot e^{\frac{R}{L}x}. \tag{14}$$

Ако сега заместим (10) и (14) в (8), ще получим

$$I=\frac{V_0}{\sqrt{L^2\omega^2+R^2}}\cdot\frac{L\omega\sin\omega x+R\cos\omega x}{\sqrt{L^2\omega^2+R^2}}+Ce^{-\frac{R}{L}x}, \tag{15}$$

което е общото решение на (9).

Ако във веригата нямаше самоиндукция, т. е. ако $L=0$, от (15) бихме получили

$$I=\frac{V_0\cos\omega x}{R}, \tag{16}$$

което се съгласува със закона на Ом (6.13), защото $V=V_0\cos\omega x$. Удобно е (15) да се представи във вид, който напомня (16). За тази цел най-напред ще отбележим, че $e^{-\frac{R}{L}x}$ много бързо клони към нула и следователно, когато x е далече от началния момент, с достатъчна точност (15) може да се представи във вида

$$I=\frac{V_0}{\sqrt{L^2\omega^2+R^2}}\cdot\frac{L\omega\sin\omega x+R\cos\omega x}{\sqrt{L^2\omega^2+R^2}}. \tag{17}$$

Понеже сборът от квадратите на числата $\frac{L\omega}{\sqrt{L^2\omega^2+R^2}}$ и $\frac{R}{\sqrt{L^2\omega^2+R^2}}$ е очевидно 1, сигурно съществува ъгъл φ, за който

$$\begin{cases}\cos\omega\varphi=\dfrac{R}{\sqrt{L^2\omega^2+R^2}},\\[2ex] \sin\omega\varphi=\dfrac{L\omega}{\sqrt{L^2\omega^2+R^2}},\end{cases} \tag{18}$$

което след заместване в (17) дава

$$I=\frac{V_0\cos\omega(x-\varphi)}{\sqrt{L^2\omega^2+R^2}}. \tag{19}$$

Полученият израз действително напомня (16). Ролята на съпротивлението R се поема от $\sqrt{L^2\omega^2+R^2}$ и освен това токът е „изместен по фаза“ в сравнение със случая (16), когато няма самоиндукция.

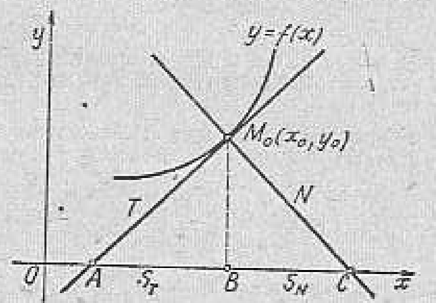
§ 8. НЯКОИ ПРИЛОЖЕНИЯ В ГЕОМЕТРИЯТА

Най-напред ще разгледаме задачата за намиране на уравнението на тангентата към дадена крива в дадена нейна точка.

Да разгледаме кривата с уравнение $y=f(x)$ и произволна нейна точка $(x_0, f(x_0))$ (черт. 101). Както вече знаем, ъгловият коефициент на тангентата към кривата в точката $(x_0, f(x_0))$ е $f'(x_0)$. Следователно тангентата ще има уравнение

(1) $$y=f'(x_0)\,x+b,$$

където b трябва да се определи от условието правата (1) да минава през точката $(x_0, f(x_0))$. Ако поставим координатите на тази точка вместо (x, y) в (1), ще получим $y_0=f'(x_0)f(x_0)+b$ и



Черт. 101

като извадим почленно това равенство от (1), ще получим окончателно уравнението на тангентата

(2) $$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0).$$

Правата, която минава през точката $(x_0, f(x_0))$ и е перпендикулярна на тангентата, се нарича *нормала* към кривата $y=f(x)$ в точката $(x_0, f(x_0))$. Да означим с k ъгловия коефициент на нормалата, а с α и β — съответно ъгъла, който тангентата и нормалата сключват с абсцисната ос. Тогава $\operatorname{tg}\alpha=f'(x_0)$ и $\beta=\alpha+\frac{\pi}{2}$. Ето защо

$$k=\operatorname{tg}\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)}{\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)}=\frac{\cos\alpha}{-\sin\alpha}=-\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}=-\frac{1}{f'(x_0)}.$$

Следователно уравнението на нормалата ще бъде

$$y=-\frac{1}{f'(x_0)}\,x+b$$

и като използуваме, че това е права, която минава през точката $(x_0, f(x_0))$, ще получим окончателно

(3) $$y-f(x_0)=-\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0).$$

Понякога уравненията на тангентата и нормалата се записват по-кратко така

(4) $$\eta-y=y'(\xi-x)$$

и

(5) $$\eta-y=-\frac{1}{y'}(\xi-x).$$

Да отбележим, че в тези две уравнения x и y са координатите на произволна точка от кривата, а ξ и η — координатите на произволна точка от съответната права.

Отсечките T, N, S_T S_N (черт. 101) се наричат съответно *тангента, нормала, субтангента* и *субнормала.*

Да положим в уравнението на тангентата $\eta=0$ и да решим така полученото уравнение относно ξ. Тогава ще получим следната формула за абсцисата на точка A:

(6) $$\xi=x-\frac{y}{y'}$$

и тъй като абсцисата на точката B е x, намираме следната формула за субтангентата

(7) $$S_T=\frac{y}{y'}.$$

Аналогично за субнормалата намираме

(8) $$S_N=yy'.$$

По-нататък от правоъгълните триъгълници ABM_0 и CBM_0, общият катет BM_0, на които е y, намираме

(9) $$T=\frac{y}{y'}\sqrt{1+y'^2}$$

и

(10) $$N=y\sqrt{1+y'^2}.$$

Формулите (7), (8), (9) и (10) могат да се използуват за съставяне на различни геометрични задачи, водещи до диференциални уравнения. Тук ще разгледаме няколко най-прости примери.

Пример 1. Да се намерят всички криви, субнормалата на които навсякъде е равна на p.

Съгласно (8) диференциалното уравнение на тези криви ще бъде

(11) $$yy'=p,$$

което очевидно може да се запише и така $\frac{1}{2}(y^2)'=p$, т. е. $(y^2)'=2p$. Следователно $y^2=\int 2p\,dx=2px+C$, поради което уравненията на тези криви са

(12) $$y^2=2px+C,$$

където C е произволна константа. Да отбележим, че за всяка стойност на C се получава по една крива с желаното свойство и че, когато C пробягва цялата числова права, (12) дава всички такива криви.

Пример 2. Да се намерят всички криви, сумата от дължините на нормалата и на субнормалата на които е постоянно равна на a.

Съгласно (8) и (10) диференциалното уравнение на тези криви ще бъде

$$yy'+y\sqrt{1+y'^2}=a.$$

Като решим това уравнение относно y', ще получим

(13) $$y'=\frac{a^2-y^2}{2ay}.$$

Очевидно (13) може да се запише и така $\frac{2yy'}{a^2-y^2}=\frac{1}{a}$, $\frac{(y^2)'}{a^2-y^2}=\frac{1}{a}$ и $\frac{(a^2-y^2)'}{a^2-y^2}=-\frac{1}{a}$, откъдето $(\ln(a^2-y^2))'=-\frac{1}{a}$ и следователно $\ln(a^2-y^2)=-\frac{x}{a}+\ln(-C)$, където за удобство произволната константа е записана като $\ln(-C)$. От последното равенство чрез антилогаритмуване получаваме

(14) $$y^2=a^2+ce^{-\frac{x}{a}},$$

което е и уравнението на всички криви с желаното свойство.

Задачи към глава 6

1. Като се използуват правилата за интегриране 1 и 2, да се пресметнат следните неопределени интеграли

а) $\int\frac{(x-1)^2}{\sqrt{x}}\,dx.$

Отг. $\left(\frac{2}{5}x^2-\frac{4}{3}x+2\right)\sqrt{x}.$

б) $\int\frac{(x+1)^2}{x}\,dx.$

Отг. $\frac{x^2}{2}+2x+\ln x.$

в) $\int\frac{dx}{\operatorname{sh}^2x\operatorname{ch}^2x}.$

Отг. $-\operatorname{th}x-\operatorname{cth}x.$

г) $\int\left(\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}\right)^2dx.$

Отг. $x+\cos x.$

д) $\int\left(\cos^4\frac{x}{2}-\sin^4\frac{x}{2}\right)dx$

Отг. $\sin x$

е) $\int\operatorname{tg}^2x\,dx.$

Отг. $\operatorname{tg}x-x.$

ж) $\int\operatorname{ctg}^2x\,dx.$

Отг. $-x-\operatorname{ctg}x.$

з) $\int\frac{dx}{a^x}.$

Отг. $-\frac{1}{\ln a\,.\,a^x}.$

и) $\int(3^x+e^x)^2dx.$

Отг. $\frac{9^x}{\ln 9}+\frac{2}{1+\ln 3}3^xe^x+\frac{e^{2x}}{2}.$

2. Като се използуват правилата за интегриране по части, да се пресметнат следните неопределени интеграли

а) $\int x^a\ln x\,dx\quad(a\neq-1).$

Отг. $x^{a+1}\left(\frac{\ln x}{a+1}-\frac{1}{(a+1)^2}\right).$

б) $\int x \ln^2 x dx.$

Отг. $\frac{x^2}{2}\left(\ln^2 x - \ln x + \frac{1}{2}\right).$

в) $\int \ln x dx.$

Отг. $x \ln x - x.$

г) $\int \ln^2 x dx$

Отг. $x(\ln^2 x - 2\ln x + 1).$

д) $\int x e^x dx.$

Отг. $(x-1)e^x.$

е) $\int \frac{\cos^2 x}{\sin^3 x} dx.$

Отг. $\frac{\sin^2 x}{\cos x} + 2\cos x$

ж) $\int \sin \lambda x e^{\mu x} dx.$

Отг. $\frac{\mu \sin \lambda x - \lambda \cos \lambda x}{\lambda^2 + \mu^2} e^{\mu x}$

з) $\int \sin \lambda x \operatorname{ch} \mu x dx$

Отг. $\frac{\mu \sin \lambda x \operatorname{sh} \mu x - \lambda \cos \lambda x \operatorname{ch} \mu x}{\lambda^2 + \mu^2}.$

3. Като се използува правило 5, да се пресметнат следните неопределени интеграли

а) $\int \frac{dx}{\operatorname{sh} x \operatorname{ch} x}.$

Отг. $\ln \operatorname{th} x.$

б) $\int \frac{x^2}{1+x^3} dx$

Отг. $\frac{1}{3} \ln(1+x^3)$

в) $\int \frac{\ln x}{x}.$

Отг. $\frac{1}{2} \ln^2 x$

г) $\int \frac{dx}{x \ln x}.$

Отг. $\ln(\ln x).$

д) $\int x\sqrt{1+x^2} dx$

Отг. $\frac{1}{3}(1+x^2)^{\frac{3}{2}}$

е) $\int \frac{dx}{x(1+x^2)}.$

Отг. $\ln x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) = \ln \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$

4. Да се пресметнат следните определени интеграли

а) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} x dx.$

Отг. $\frac{1}{2} \ln 2.$

б) $\int_0^{\pi} \cos 2x dx.$

Отг. 0.

в) $\int_1^2 \frac{dx}{e^x - 1}.$

5. Да се намерят лицата на множествата, определени от следните системи от неравенства:

а) $0 \le x \le 1,$
$0 \le y \le x^3.$

Отг. $\frac{1}{4}.$

б) $1 \le x \le 2,$
$0 \le y \le \frac{1}{x^2}.$

Отг. $\frac{1}{2}.$

в) $0 \le x \le \pi,$
$0 \le y \le \cos^2 x.$

Отг. $\frac{\pi}{2}.$

г) $0 \le x \le a,$
$0 \le y \le \operatorname{sh}^2 x.$ $(a>0).$

Отг. $\frac{1}{2}\operatorname{sh} 2a - a.$

6 Да се намерят обемите на телата, получени от въртенето на следните криви около абсцисната ос:

а) $y = \cos x$ $\left(0 \le x \le \frac{\pi}{2}\right).$

Отг. $\frac{\pi^2}{2}.$

б) $y = |\cos x|$ $(0 \le x \le \pi).$

Отг. $\pi^2.$

в) $y = \sin^2 x.$ $(0 \le x \le 2\pi).$

Отг. $\frac{5}{8}\pi^2.$

г) $y = \operatorname{tg} x.$ $\left(0 \le x \le \frac{\pi}{4}\right).$

Отг. $\pi - \frac{\pi^2}{4}.$

д) $y = x^2$ $(-a \le x \le a).$

Отг. $\frac{2}{3}a^3.$

7. Да се намери обема на тялото, определено от неравенствата:

$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \le \frac{x}{a} \le 1$ $(a, b, c>0).$ Отг. $\frac{\pi}{2}abc.$

Упътване. Равнината, която минава през точката $(x, 0, 0)$ и е перпендикулярна на Ox, пресича разглежданото тяло по елипсата с уравнение $\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = \frac{x}{a}.$

8. Да се намери обемът на тялото, определено от неравенствата

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \le \frac{x^3}{a^3} \le 1 \qquad (a, b, c>0).$$

Отг. $\frac{\pi}{4}abc.$

9. Конична фуния с лице на горния отвор S и лице на долния отвор S_0 е напълнена с течност. Да се намери времето T, необходимо за изтичане на течността от фунията, ако височината ѝ е H.

Отг. $\frac{S}{5S_0}\sqrt{\frac{2H}{g}}.$

10. Да се решат следните линейни диференциални уравнения

а) $y' = \frac{2x}{1+x^2}y.$

Отг. $y = C(1+x^2).$

б) $y' = -\frac{y}{x} + 3x.$

Отг. $y = \frac{C}{x} + x^2.$

в) $y' = y \sin x + \sin x \cos x.$

Отг. $y = Ce^{-\cos x} - \cos x + 1.$

11. Да се намерят всички криви, тангентата в произволна точка към които отсича от ординатната ос отсечка с дължина половината от сбора на координатите на допирната точка.

Отг. $y = C\sqrt{x} - x.$

НЯКОИ ДИФЕРЕНЦИАЛНИ УРАВНЕНИЯ ОТ ВТОРИ РЕД

Диференциално уравнение от втори ред се нарича всяко уравнение от вида

$$F(x, y, y', y'')=0,$$

където функцията F е дадена, а $y=y(x)$ е функция, която се търси. Функциите $y=e^x$ и $y=e^{-x}$ са решения на диференциалното уравнение от втори ред $y''-y=0$, което лесно може да се провери чрез двукратно диференциране и заместване. Същото уравнение се удовлетворява и от всяка функция от вида $y=C_1e^x+C_2e^{-x}$, където C_1 и C_2 са произволни константи. Появата на две произволни константи при търсенето на общото решение на едно диференциално уравнение от втори ред е нещо закономерно.

Диференциалните уравнения от втори ред са основен математически апарат на механиката. Това дава основната насока на тази глава. В § 1 и §2 са разгледани някои спомагателни въпроси. Съдържанието на тази глава до голяма степен се основава на тези два параграфа. Връзката на диференциалните уравнения от втори ред с механиката е обсъдена в §3 и §4. Движението на точка под действието на различни видове сили е изучено в §5, §6, §7 и §8. Физическото явление резонанс получава математическа форма в §9 и §10.

§ 1. ФУНКЦИИ, КОИТО СЕ ДИФЕРЕНЦИРАТ КАТО ТРИГОНОМЕТРИЧНИТЕ

Двойката функции $\sin x$ и $\cos x$ притежават свойствата

(1)
$$(\sin x)'=\cos x,$$
$$(\cos x)'=-\sin x.$$

Естествено е да се запитаме дали няма и други двойки функции с тези свойства. В тази точка ще намерим всички двойки функции $S(x)$ и $C(x)$, за които

(2)
$$\left|\begin{aligned} &S'(x)=C(x)\\ &C'(x)=-S(x).\end{aligned}\right.$$

Нека $S(x)$ и $C(x)$ е двойка функции със свойствата (2). Може да се очаква, че функцията φ и ψ, дефинирани посредством равенствата

$$\varphi(x)=S(x)\cos x-C(x)\sin x$$
$$\psi(x)=S(x)\sin x+C(x)\cos x,$$

са константи, защото поне в специалния случай, когато $S(x)=\sin x$ и $C(x)=\cos x$, това е така. Да пресметнем производните φ' и ψ':

$$\varphi'(x)=S'(x)\cos x-S(x)\sin x-C'(x)\sin x-C(x)\cos x$$

или, като вземем пред вид (2), получаваме

$$\varphi'(x)=C(x)\cos x-S(x)\sin x+S(x)\sin x-C(x)\cos x=0$$

и следователно $\varphi(x)-C_1=\mathrm{const}$. Аналогично

$$\psi'(x)=S'(x)\sin x+S(x)\cos x+C'(x)\cos x-C(x)\sin x=0,$$

следователно $\psi(x)-C_2=\mathrm{const}$. Така получихме, че всяка двойка функции, които удовлетворяват (2), трябва да удовлетворяват системата

(3)
$$\left|\begin{aligned} &S(x)\cos x-C(x)\sin x=C_1\\ &S(x)\sin x+C(x)\cos x=C_2,\end{aligned}\right.$$

където C_1 и C_2 са константи. Като решим системата (3) по отношение на $S(x)$ и $C(x)$, получаваме

(4)
$$\left|\begin{aligned} &S(x)=C_1\cos x+C_2\sin x\\ &C(x)=C_2\cos x-C_1\sin x.\end{aligned}\right.$$

Обратно, всеки две функции $S(x)$ и $C(x)$, дефинирани чрез равенствата (4), удовлетворяват системата (2). Наистина от (4) намираме

$$\left|\begin{aligned} &S'(x)=-C_1\sin x+C_2\cos x\\ &C'(x)=-C_1\cos x-C_2\sin x\end{aligned}\right.$$

и следователно

$$\begin{cases} S'(x)=C(x) \\ C'(x)=-S(x). \end{cases}$$

§ 2. ФУНКЦИИ, КОИТО СЕ ДИФЕРЕНЦИРАТ КАТО ХИПЕРБОЛИЧНИТЕ

Тук ще решим една задача, аналогична на тази от предната точка. Двойката функции $\operatorname{sh} x$ и $\operatorname{ch} x$ притежават свойствата

(1) $$\begin{cases} (\operatorname{sh} x)'=\operatorname{ch} x \\ (\operatorname{ch} x)'=\operatorname{sh} x. \end{cases}$$

Задачата, която си поставяме, е да намерим всички двойки функции, за които

(2) $$\begin{cases} S'(x)=C(x) \\ C'(x)=S(x). \end{cases}$$

Нека $S(x)$ и $C(x)$ е двойка функции със свойства (2). Ще покажем, че функциите φ и ψ, дефинирани посредством равенствата

$$\begin{cases} \varphi(x)=S(x)\operatorname{ch} x-C(x)\operatorname{sh} x \\ \psi(x)=-S(x)\operatorname{sh} x+C(x)\operatorname{ch} x \end{cases}$$

са константи. За тази цел да пресметнем производните им:

$$\varphi'(x)=S'(x)\operatorname{ch} x+S(x)\operatorname{sh} x-C'(x)\operatorname{sh} x-C(x)\operatorname{ch} x$$

или, като вземем пред вид (2), получаваме

$$\varphi'(x)=C(x)\operatorname{ch} x+S(x)\operatorname{sh} x-S(x)\operatorname{sh} x-C(x)\operatorname{ch} x=0$$

и следователно $\varphi(x)=C_1=\text{const}$. Аналогично

$$\psi'(x)=-S'(x)\operatorname{sh} x-S(x)\operatorname{ch} x+C'(x)\operatorname{ch} x+C(x)\operatorname{sh} x=0,$$

следователно $\psi(x)=C_2=\text{const}$. Така получихме, че всяка двойка функции, които удовлетворяват (2), трябва да удовлетворяват системата

(3) $$\begin{cases} S(x)\operatorname{ch} x-C(x)\operatorname{sh} x=C_1 \\ -S(x)\operatorname{sh} x+C(x)\operatorname{ch} x=C_2, \end{cases}$$

където C_1 и C_2 са произволни константи. Като решим системата (3) по отношение на $S(x)$ и $C(x)$, получаваме

(4) $$\begin{cases} S(x)=C_1\operatorname{ch} x+C_2\operatorname{sh} x \\ C(x)=C_1\operatorname{sh} x+C_2\operatorname{ch} x. \end{cases}$$

Обратно, всеки две функции S и C, дефинирани чрез равенствата (4), удовлетворяват системата (2). Наистина от (4) намираме

$$\begin{cases} S'(x)=C_1\operatorname{sh} x+C_2\operatorname{ch} x \\ C'(x)=C_1\operatorname{ch} x+C_2\operatorname{sh} x \end{cases}$$

и следователно

$$\begin{cases} S'(x)=C(x) \\ C'(x)=S(x). \end{cases}$$

§ 3 УСКОРЕНИЕ

Нека $S=S(t)$ е законът на движение на някаква точка M. *Ускорение* на точката M в момента t наричаме втората производна на функцията S, пресметната за този момент. Очевидно ускорението е една функция на времето. Ако означим тази функция с $a(t)$, горното определение може да се запише по следния начин:

(1) $$a(t)=S''(t).$$

Съгласно определението на втора производна (вж. гл. 4, §2) функцията a е производна на функцията V, където $V(t)$ е скоростта на движещата се точка. Следователно ускорението има същото значение при изучаването на скоростта, което има скоростта за изучаването на пътя.

По-долу ще разгледаме няколко примера.

Пример 1. Ако точка M се движи равномерно, ускорението й във всеки момент от времето е нула.

Наистина законът на движението в този случай е $S(t)=\alpha t+\beta$, където α и β са фиксирани константи. Скоростта във всеки момент е $V(t)=S'(t)=\alpha$ и следователно $a(t)=V'(t)=0$.

Пример 2. Да се намери най-общият закон на равноускорителните движения.

Движението на една точка наричаме *равноускорително*, ако ускорението й във всеки момент е постоянно. Нека $a(t)=\alpha=\text{const}$. Последното равенство може да се запише и така:

(2) $$V'(t)=\alpha.$$

Като интегрираме (2), намираме

$$V(t)=\int\alpha dt=\alpha\int dt=\alpha t+C_1.$$

Тъй като $S'(t)=V(t)$, то

$$S(t)=\int V(t)\,dt=\int(\alpha t+C_1)\,dt=\frac{\alpha t^2}{2}+C_1 t+C_2.$$

И така най-общият закон на равноускорителните движения е квадратен тричлен по отношение на времето.

Пример 3. Да се намери ускорението във всеки момент, ако законът на движението е $S(t)=\sin\alpha t$, където α е константа.

Чрез двукратно диференциране намираме $S''(t)=-\alpha^2\sin\alpha t$, което може да се запише и така:

$$a(t)+\alpha^2\sin\alpha t=0. \tag{3}$$

Ако сега заместим в (3) $a(t)$ с $S''(t)$ и $\sin\alpha t$ с $S(t)$, ще получим

$$S''+\alpha^2 S=0, \tag{4}$$

т. е. законът на движението удовлетворява диференциалното уравнение (4). По-нататък ще намерим всички функции, които удовлетворяват уравнението (4).

§ 4. ОСНОВЕН ЗАКОН НА ДИНАМИКАТА

Ускоренията играят важна роля в динамиката, понеже дават възможност по дадена сила, която действува върху движещата се точка, да се намери законът на движение на тази точка.

Движението на тяло, върху което не действуват сили, е равномерно. Обратното също е вярно. Ако едно тяло се движи равномерно, действуващите върху него сили взаимно се уравновесяват. Това е причината, поради която в природата не може да наблюдаваме равномерни движения. Наистина в природата действуват многобройни сили, като например силата на гравитацията, силата на триене и много други, които рядко се уравновесяват и поради това непрекъснато променят скоростта.

И така силите причиняват изменение на скоростта. При това изменението на скоростта е толкова по-голямо, колкото по-голяма е действуващата сила. С други думи, изменението на скоростта е пропорционално на действуващата сила. Но изменението на скоростта се измерва с ускорението, поради което е естествено да се очаква, че ускорението е пропорционално на силата. Тази хипотеза бе блестящо потвърдена от приложенията ѝ, направени от Нютон и неговите последователи, и се превърна в основен закон на динамиката. Този закон се записва в математична форма чрез равенството

$$F=ma, \tag{1}$$

където F е силата, която действува на движещата се точка, m е масата и a — ускорението на точката.

Уравнението (1) може да се представи и във вида

$$a=\frac{1}{m}F. \tag{2}$$

В много задачи силата F и масата m са известни и (2) дава възможност да се намери ускорението. Принципно вече знаем как по дадена скорост $V(t)$ да намерим изминатия път $S(t)$. Наистина скоростта е производната на пътя, т. е. $S'(t)=V(t)$, поради което $S(t)$ е една примитивна на $V(t)$, или което е все същото

$$S(t)=\int V(t)\,dt. \tag{3}$$

По същия начин, когато е известно ускорението $a(t)$, скоростта $V(t)$ може да се пресметне по формулата

$$V(t)=\int a(t)\,dt. \tag{4}$$

Формулите (4) и (3) дават възможност по дадено ускорение чрез двукратно интегриране да се намери пътят.

Пример 1. Да се намери законът на движението, когато върху движещата се точка действува постоянна сила F.

Понеже m и F са константи, съгласно (2) ускорението a също ще бъде константа. Съгласно (4) ще имаме $V(t)=\int a\,dt=a\,t+C$. При $t=0$ получаваме $V(0)=C$, откъдето $C=V_0$, където V_0 е началната скорост. Следователно $V(t)=a\,t+V_0$. Сега за $S(t)$ получаваме $S(t)=\int V(t)\,dt=\int(a\,t+V_0)\,dt=\frac{a}{2}t^2+V_0 t+S_0$, където S_0 е абсцисата на подвижната точка в момента $t=0$.

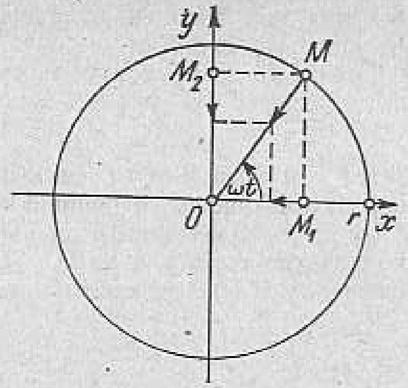
Пример 2. Точка с маса 1 се движи по закона $S(t)=t^3$. Да се намери силата, която действува върху точката.

Очевидно $V(t)=S'(t)=3t^2$, поради което $a(t)=V'(t)=6t$ и (1) дава $F=1.6t=6t$.

Пример 3. Точка с маса m се движи по окръжност с радиус r. Да се намери центробежната сила F, ако ъгловата скорост ω е постоянна.

Точката се движи под действието на сила R, насочена към центъра на окръжността (черт. 102). Нека в момента $t=0$ точката се е намирала в положението $(r, 0)$. Тъй като ъгловата скорост ω е постоянна, за интервала от време $(0, t)$ радиусът OM ще опише ъгъл ωt, поради което в момента t точката ще се намира в положението $(r\cos\omega t,\ r\sin\omega t)$. Следователно проекциите M_1 и M_2 се движат съответно по законите

$$\begin{aligned} x&=r\cos\omega t,\\ y&=r\sin\omega t. \end{aligned} \tag{5}$$



Черт. 102

Очевидно

(6) $$x'' = -r\,\omega^2 \cos \omega t,\quad y'' = -r\,\omega^2 \sin \omega t$$

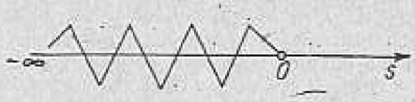
и следователно за проекциите R_1 и R_2 на R имаме $R_1 = -m\,r\,\omega^2 \cos \omega t$, $R_2 = -m\,r\,\omega^2 \sin \omega t$. Ето защо големината на R е $R = \sqrt{R_1^2 + R_2^2} = m\,r\,\omega^2$. Големината на центробежната сила F е еднаква с тази на R и следователно

$$F = m\,r\,\omega^2.$$

§ 5. ДВИЖЕНИЕ НА ТОЧКА ПОД ДЕЙСТВИЕ НА ЕЛАСТИЧНА СИЛА

Да разгледаме една пружина, единият край на която е закачен неподвижно. При деформация (опъване или свиване) пружината действува със сила, насочена противоположно на деформацията. При това силата става толкова по-голяма, колкото е по-голяма деформацията. Опитът показва, че при „малки" деформации силата е пропорционална на деформацията.

Тук ще си служим с една „идеална" пружина с безкрайно голяма дължина, единият край на която е закачен в минус безкрайност, а другият край при недеформирано състояние на пружината се намира в нулата (черт. 103). Ще предполагаме, че си-



Черт. 103

лата е пропорционална и противоположно насочена на деформацията.

Да разгледаме едно топче M, закачено на свободния край на тази пружина. При това ще считаме, че липсват други сили, които да смущават движението (съпротивление на средата, гравитация и др.). Ако пружината се опъне и след това се пусне, топчето M ще започне да извършва колебателно движение около началото O. Задачата, която си поставяме, е да намерим закона на движението $S(t)$ на топчето M.

Тъй като силата F е пропорционална на $OM = S$ (черт. 104), то $F = -kS$, където $k > 0$ е константа, която зависи от качествата

Черт. 104

на пружината, а знакът минус показва, че F е насочена постоянно към O. Ускорението на M е $a(t) = S''(t)$ и съгласно (4.2) имаме

(1) $$S'' = -\frac{k}{m} S,$$

където m е масата на M. Ако положим $\frac{k}{m} = \alpha^2$, (1) добива вида

(2) $$S'' + \alpha^2 S = 0.$$

По този начин задачата се сведе до намиране на решението $S(t)$ на уравнението (2). Последното е едно диференциално уравнение от втори ред, тъй като в него участвува втората производна на търсената функция S и не участвуват производни от по-висок ред.

За да решим уравнението (2), да положим

(3) $$S'(t) = C(t).$$

Очевидно функцията $C(t)$ е неизвестна, тъй като $S(t)$ е неизвестна. Като диференцираме равенството (3), за производната на C получаваме $C'(t) = S''(t)$. Но съгласно (2) $S''(t) = -\alpha^2 \cdot S(t)$, т. е.

(4) $$C'(t) = -\alpha^2 S(t).$$

По този начин задачата се сведе до намирането на всички двойки функции S и C, които удовлетворяват (3) и (4), т. е. системата

(5) $$\left| \begin{array}{l} S'(t) = C(t) \\ C'(t) = -\alpha^2 S(t). \end{array} \right.$$

Тази система много напомня системата (1.2), която умеем вече да решаваме. За да решим (5), ще си послужим с помощни функции, аналогични на тези, които използувахме в §1. Ще дефинираме тези функции посредством равенствата

$$(6)\qquad \begin{aligned} \varphi(t) &= S(t)\cos\alpha t - \frac{1}{\alpha}S'(t)\sin\alpha t,\\ \psi(t) &= S(t)\sin\alpha t + \frac{1}{\alpha}S'(t)\cos\alpha t\,. \end{aligned}$$

Не е трудно да се покаже, че φ и ψ не зависят от времето t. За тази цел да пресметнем производните им. За производната на φ получаваме

$$\varphi'(t) = S'(t)\cos\alpha t - \alpha S(t)\sin\alpha t - \frac{1}{\alpha}S''(t)\sin\alpha t - S'(t)\cos\alpha t$$
$$= -\frac{\sin\alpha t}{\alpha}(S''(t)+\alpha^2 S(t)) = 0,$$

понеже $S''(t)+\alpha^2 S(t)=0$. Следователно $\varphi(t)=C_1=\text{const}$. Аналогично за производната на ψ получаваме

$$\psi'(t) = S'(t)\sin\alpha t + \alpha S(t)\cos\alpha t + \frac{1}{\alpha}S''(t)\cos\alpha t - S'(t)\sin\alpha t$$
$$= \frac{\cos\alpha t}{\alpha}(S''(t)+\alpha^2 S(t)) = 0.$$

Следователно $\psi(t)=C_2=\text{const}$. Ако сега заместим в (6) φ и ψ съответно с C_1 и C_2, ще получим

$$(7)\qquad \left|\begin{aligned} S(t)\cos\alpha t - \frac{1}{\alpha}S'(t)\sin\alpha t &= C_1\\ S(t)\sin\alpha t + \frac{1}{\alpha}S'(t)\cos\alpha t &= C_2, \end{aligned}\right.$$

което е една алгебрична система от две уравнения с неизвестни $S(t)$ и $S'(t)$. Като умножим първото от тези уравнения с $\cos\alpha t$, а второто със $\sin\alpha t$ и съберем, ще получим

$$(8)\qquad S(t) = C_1\cos\alpha t + C_2\sin\alpha t,$$

където C_1 и C_2 са произволни константи. Така се убедихме, че всяка функция, която удовлетворява уравнението (2), има вида (8). Проверката, че всяка функция от вида (8) удовлетворява (2), се състои в заместването на $S(t)$, дефинирана чрез (8) в уравнението (2), т. е. в установяването на тъждеството

$$(C_1\cos\alpha t + C_2\sin\alpha t)'' + \alpha^2(C_1\cos\alpha t + C_2\sin\alpha t) = 0,$$

което предоставяме на читателя.

Решението (8) представлява закона на движението на точка M в неговата най-обща форма. Това означава, че всяко конкретно движение от типа, разглеждан в този параграф, се подчинява на закон, който е частен случай от общия закон, даден с равенството (8). С други думи, законът на движението за всеки конкретен случай е една функция $S(t)$, която се получава от (8) за определени стойности на константите C_1 и C_2; тази функция се нарича *частно решение (частен интеграл)* на уравнението (2). Функцията (8), където C_1 и C_2 са произволни константи, се нарича *общо решение (общ интеграл)* на уравнението (2). Всяко частно решение на уравнението (2) се получава от общото решение (8) за конкретни стойности на константите C_1 и C_2. Така например $S(t)=\cos\alpha t - \frac{1}{2}\sin\alpha t$ е частно решение на (2), защото се получава от общото решение (8) за $C_1=1$ и $C_2=-\frac{1}{2}$. Функцията $S(t)=\cos\alpha t$ е друго частно решение на (2), защото се получава от (8) за $C_1=1$ и $C_2=0$ и т. н.

За намирането на едно частно решение на (2) са необходими още условия, наречени начални. Ако в даден момент t_0 знаем пътя $S_0=S(t_0)$ и скоростта $V_0=S'(t_0)$ на точката M, можем да намерим закона на движението ѝ. За да намерим решението на (2) при начални условия

$$(9)\qquad \left|\begin{aligned} S(t_0) &= S_0\\ S'(t_0) &= V_0, \end{aligned}\right.$$

където S_0 и V_0 са известни величини, трябва да пресметнем константите C_1 и C_2 в (8) съгласно условията (9). Ако в (8) заместим t с t_0 и вземем пред вид първото от условията (9), ще получим

$$(10)\qquad S_0 = C_1\cos\alpha t_0 + C_2\sin\alpha t_0.$$

Ако сега диференцираме (8), получаваме

$$S'(t) = -\alpha C_1\sin\alpha t + \alpha C_2\cos\alpha t.$$

Като заместим в последното равенство t с t_0 и вземем пред вид второто от условията (9), получаваме

$$(11)\qquad V_0 = -\alpha C_1\sin\alpha t_0 + \alpha C_2\cos\alpha t_0.$$

Уравненията (10) и (11) представляват една система от две уравнения с неизвестни C_1 и C_2. Като решим тази система, получаваме

$$C_1 = S_0\cos\alpha t_0 - \frac{V_0}{\alpha}\sin\alpha t_0$$
$$C_2 = S_0\sin\alpha t_0 + \frac{V_0}{\alpha}\cos\alpha t_0.$$

За да намерим частното решение, остава да заместим в (8) така пресметнатите стойности на C_1 и C_2.

Да разгледаме един по-конкретен пример. Нека в момента $t=0$ точката M се е намирала на разстояние от началото $S_0=S(0)=1$, а скоростта ѝ в този момент е била $V_0=S'(0)=0$. Тогава законът на движението на точка M е едно частно решение на уравнението (2) при начални условия

$$\left|\begin{array}{l} S(0)=1 \\ S'(0)=0. \end{array}\right.$$

Като поставим $t=0$ във формулите, които определят $S(t)$ и $S'(t)$, и вземем пред вид началните условия, ще получим $C_1=1$, $C_2=0$, откъдето намираме частното решение

$$S(t)=\cos\alpha t.$$

Да се върнем отново към общия интеграл (8). Един по-компактен вид на тази формула може да се получи, ако положим

$$C_1=A\sin\beta \qquad (12)$$
$$C_2=A\cos\beta,$$

където $A>0$ и β са константи. Като поставим в (8) C_1 и C_2, определени чрез равенствата (12), ще получим

$$S(t)=A\sin\beta\cos\alpha t+A\cos\beta\sin\alpha t=A\sin(\alpha t+\beta).$$

По този начин общият интеграл на (2) се представя във вида

$$S(t)=A\sin(\alpha t+\beta), \qquad (13)$$

където $A>0$ и β са константи, определени чрез формулите

$$\left|\begin{array}{l} A=\sqrt{C_1^2+C_2^2} \\ \operatorname{tg}\beta=\frac{C_1}{C_2}. \end{array}\right. \qquad (14)$$

Съгласно общоприетата терминология A се нарича *амплитуда*, α — *честота* на колебателното движение, което извършва точката M. Величината $\alpha t+\beta$ се нарича *фаза*, а β — *начална фаза*. Очевидно A е най-голямото разстояние (по абсолютна стойност) от точката M до началото O, т. е. абсолютният максимум на функцията $S(t)$.

Общият интеграл на диференциалното уравнение (2) е една периодична функция на t с период

$$T=\frac{2\pi}{\alpha} \qquad (15)$$

(вж. Увод, 17, 18). Числото T се нарича *период* на колебателното (хармоничното) движение, което извършва подвижната точка M. Периодът T е интервал от време, за който M извършва едно пълно колебание.

§ 6. ДВИЖЕНИЕ НА ТОЧКА ПОД ДЕЙСТВИЕТО НА ОТБЛЪСКВАЩА СИЛА ПРОПОРЦИОНАЛНА НА ПЪТЯ

Да разгледаме движението на една точка M, подложена на действието на отблъскваща сила F, пропорционална на разстоянието $S=OM$, т. е. $F(t)=k\,.\,S(t)$, където $k>0$, е дадена константа. Тъй като $a(t)=S''(t)$, основното уравнение на динамиката $F=ma$ за този случай добива вида

$$S''-\alpha^2S=0, \qquad (1)$$

където $\alpha=\sqrt{\frac{k}{m}}$ е константа. Уравнението (1) е диференциалното уравнение на разглежданото движение. Законът на движението на точката M е общият интеграл на уравнението (1).

Уравнението (1) ще решим аналогично на (5.2). За тази цел ще разгледаме функциите

$$\varphi(t)=S(t)\operatorname{ch}\alpha t-\frac{1}{\alpha}S'(t)\operatorname{sh}\alpha t, \qquad (2)$$
$$\psi(t)=-S(t)\operatorname{sh}\alpha t+\frac{1}{\alpha}S'(t)\operatorname{ch}\alpha t.$$

За производната на φ имаме

$$\varphi'(t)=S'(t)\operatorname{ch}\alpha t+\alpha S(t)\operatorname{sh}\alpha t-\frac{1}{\alpha}S''(t)\operatorname{sh}\alpha t-S'(t)\operatorname{ch}\alpha t$$
$$=-\frac{\operatorname{sh}\alpha t}{\alpha}(S''(t)-\alpha^2S(t))=0,$$

понеже $S''(t)-\alpha^2S(t)=0$. Аналогично

$$\psi'(t)=-S'(t)\operatorname{sh}\alpha t-\alpha S(t)\operatorname{ch}\alpha t+\frac{1}{\alpha}S''(t)\operatorname{ch}\alpha t+S'(t)\operatorname{sh}\alpha t$$
$$=\frac{\operatorname{ch}\alpha t}{\alpha}(S''(t)-\alpha^2S(t))=0.$$

Следователно $\varphi(t)=C_1$ и $\psi(t)=C_2$, където C_1 и C_2 са произволни константи. Като заместим в (2) $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ съответно с C_1 и C_2, получаваме

$$\left|\begin{array}{l} S(t)\operatorname{ch}\alpha t-\frac{1}{\alpha}S'(t)\operatorname{sh}\alpha t=C_1 \\ -S(t)\operatorname{sh}\alpha t+\frac{1}{\alpha}S'(t)\operatorname{ch}\alpha t=C_2, \end{array}\right. \qquad (3)$$

което е една алгебрична система от две уравнения с неизвестни $S(t)$ и $S'(t)$. Като умножим първото от тези уравнения с $\operatorname{ch}\alpha t$, а второто с $\operatorname{sh}\alpha t$ и съберем, ще получим

$$(4)\qquad S(t)=C_1\operatorname{ch}\alpha t+C_2\operatorname{sh}\alpha t,$$

понеже $\operatorname{ch}^2\alpha t-\operatorname{sh}^2\alpha t=1$. Функцията (4) е общият интеграл на диференциалното уравнение (1). Като използуваме дефиницията на хиперболичните функции, общото решение (4) може да се представи във вида

$$S(t)=C_1\frac{e^{\alpha t}+e^{-\alpha t}}{2}+C_2\frac{e^{\alpha t}-e^{-\alpha t}}{2}$$

или, което е все същото,

$$S(\ )=\frac{C_1+C_2}{2}e^{\alpha t}+\frac{C_1-C_2}{2}e^{-\alpha t}.$$

Ако сега в последното равенство положим

$$\frac{C_1+C_2}{2}=A,\qquad \frac{C_1-C_2}{2}=B,$$

получаваме

$$(5)\qquad S(t)=Ae^{\alpha t}+Be^{-\alpha t},$$

където A и B са произволни константи. Равенството (5) представлява общият интеграл на уравнението (1), изразен с помощта на експоненти.

Пример. Да се намери законът на движението, ако при $t=0$ имаме

$$(6)\qquad \left|\begin{array}{l} S(0)=1\\ S'(0)=2.\end{array}\right.$$

Като заместим $t=0$ в общото решение (4) и използуваме първото от началните условия (6), намираме

$$(7)\qquad C_1=1.$$

От (4) за производната на S получаваме

$$S'(t)=\alpha C_1\operatorname{sh}\alpha t+\alpha C_2\operatorname{ch}\alpha t.$$

Като заместим сега t с 0 в последното равенство и вземем пред вид второто от началните условия (6), намираме

$$(8)\qquad C_2=\frac{2}{\alpha}.$$

От (4), (7) и (8) намираме частното решение, съответствуващо на началните условия (6), а именно

$$S(t)=\operatorname{ch}\alpha t+\frac{2}{\alpha}\operatorname{sh}\alpha t.$$

§ 7. ОТЧИТАНЕ НА СЪПРОТИВЛЕНИЕТО НА СРЕДАТА

Задачата, която разглеждахме в §5, предполага отсъствието на смущаващи сили. Тук ще разгледаме движение на точка, извършващо се в някаква среда (напр. въздух), която оказва съпротивление. Това съпротивление е една сила R, която, събрана с еластичната сила F, дава силата $F_1=R+F$, която действува върху точката M. Съгласно основния закон на динамиката ще имаме

$$(1)\qquad mS''=F_1.$$

Еластичната сила е $F=-kS$. Съпротивлението R е сила, която освен от средата зависи и от скоростта на M. При това тя се увеличава с увеличаването на скоростта. Тук ще разгледаме случая, когато средата оказва съпротивление, пропорционално на скоростта на M, т. е. $R=-lS'$, където l е неотрицателна константа. Знакът минус показва, че съпротивлението е насочено обратно на посоката на скоростта. При това предположение за резултантната сила F_1 намираме $F_1=F+R=-kS-lS'$ и уравнението (1) добива вида

$$(2)\qquad mS''=-lS'-kS.$$

Ако положим сега $\frac{l}{m}=\lambda$, $\frac{k}{m}=\mu$, уравнението (2) може да се запише и така:

$$(3)\qquad S''+\lambda S'+\mu S=0,$$

където λ и μ са известни константи. И така, законът на каквото и да е движение от разглеждания вид е една функция на t, която е решение на (3).

Преди да потърсим общия интеграл на диференциалното уравнение (3), да отбележим, че до това уравнение достигнахме, като следвахме чисто физични съображения, поради които $\lambda\geq 0$ и $\mu>0$; но методът, който по-долу прилагаме, за да решим (3), не се нуждае от тези предположения, затова ще разгледаме уравнението за произволни λ и μ.

В специалния случай, когато $\lambda=0$, уравнението (3) добива вида $S''+\mu S=0$, което при $\mu>0$ е уравнението (5.2) и следователно съгласно (5.8) общият интеграл се дава с формулата

$$S(t)=C_1\cos t\sqrt{\mu}+C_2\sin t\sqrt{\mu}.$$

При $\lambda=0$ и $\mu<0$ разглежданото уравнение е уравнението (6.1) и следователно съгласно (6.5) общият интеграл се дава с формулата

$$S(t)=C_1 e^{t\sqrt{-\mu}}+C_2 e^{-t\sqrt{-\mu}}.$$

Естествено е да се опитаме да сведем (3) към уравнение от типа (6.1) или (5.2), на които познаваме общия интеграл. За тази цел ще представим търсената функция $S(t)$ във вида

(4) $$S(t)=e^{pt}f(t),$$

където p е константа, която имаме свободата да избираме произволно, а $f(t)$ ще потърсим така, щото $S(t)$, представена с равенството (4), да бъде решение на уравнението (3). От (4) за производната на S получаваме

(5) $$S'(t)=e^{pt}(pf(t)+f'(t)).$$

Като диференцираме равенството (5), ще получим

(6) $$S''(t)=e^{pt}(p^2f(t)+2pf'(t)+f''(t)).$$

Като заместим S, S' и S'' от (4), (5) и (6) в уравнението (3), ще получим

$$e^{pt}(f''(t)+(2p+\lambda)f'(t)+(p^2+\lambda p+\mu)f(t))=0.$$

Тъй като $e^{pt}>0$ за всяко t, то като съкратим на e^{pt}, ще получим

(7) $$f''+(2p+\lambda)f'+(p^2+\lambda p+\mu)f=0.$$

Като че ли не се осъществи никакъв прогрес, тъй като (7) е също от вида (3). Да припомним обаче, че имаме свободата да избираме p по произволен начин. Ако искаме (7) да добие вида (5.2) или (6.1) не ни остава нищо друго, освен да положим $2p+\lambda=0$, т. е.

(8) $$p=-\frac{\lambda}{2}.$$

Сега (7) добива вида

(9) $$f''+\left(\mu-\frac{\lambda^2}{4}\right)f=0,$$

тъй като съгласно (8) $p^2+\lambda p+\mu=\frac{\lambda^2}{4}+\lambda\left(-\frac{\lambda}{2}\right)+\mu=\mu-\frac{\lambda^2}{4}$.

Могат да се предоставят следните три случая:

а) $\mu-\frac{\lambda^2}{4}>0$;

б) $\mu-\frac{\lambda^2}{4}<0$;

в) $\mu-\frac{\lambda^2}{4}=0$.

Ще разгледаме всяка от тези три възможности поотделно.

Случай а. Полагаме $\mu-\frac{\lambda^2}{4}=\alpha^2$ и (9) добива вида $f''+\alpha^2 f=0$. Общият интеграл на последното уравнение съгласно (5.8) се дава с формулата

(10) $$f(t)=C_1\cos\alpha t+C_2\sin\alpha t,$$

където C_1 и C_2 са произволни константи. Като заместим функцията f, определена чрез равенството (10) в (4), и вземем пред вид (8), получаваме

(11) $$S(t)=e^{-\frac{\lambda}{2}t}(C_1\cos\alpha t+C_2\sin\alpha t).$$

И така общият интеграл на уравнението (3) в този случай се дава с (11), където $\alpha=\sqrt{\mu-\frac{\lambda^2}{4}}$.

Случай б. Полагаме $\mu-\frac{\lambda^2}{4}=-\alpha^2$ и (9) добива вида $f''-\alpha^2 f=0$. Общият интеграл на последното уравнение съгласно (6.5) се дава с формулата

(12) $$f(t)=C_1 e^{\alpha t}+C_2 e^{-\alpha t},$$

където C_1 и C_2 са произволни константи. Като заместим f, определена чрез (12) в (4), и вземем пред вид (8), получаваме

(13) $$S(t)=C_1 e^{\left(\alpha-\frac{\lambda}{2}\right)t}+C_2 e^{-\left(\alpha+\frac{\lambda}{2}\right)t}.$$

И така общият интеграл на уравнението (3) в този случай се дава с (13), където $\alpha=\sqrt{\frac{\lambda^2}{4}-\mu}$.

Случай в. В този случай уравнението (9) има вида

(14) $$f''=0,$$

на което общият интеграл се намира чрез двукратно интегриране, т. е.

$$(15)\qquad f(t)=C_1t+C_2,$$

където C_1 и C_2 са произволни константи. Като заместим f, определена чрез (15) в (4), и вземем пред вид (8), получаваме

$$(16)\qquad S(t)=e^{-\frac{\lambda}{2}t}(C_1t+C_2).$$

И така общият интеграл на уравнението (3) в този случай се дава с (16).

С това задачата за намиране на общия интеграл на уравнението (3) е решена.

Да се върнем сега към физическата постановка на въпроса, с която започнахме. В такъв случай $\lambda > 0$ и $\mu > 0$. Да предположим най-напред, че е налице случаят a; тогава законът на движение на точката M е функцията S, дефинирана чрез (11). Каквито и да са константите C_1 и C_2 функцията $C_1\cos\alpha t+C_2\sin\alpha t$ остава ограничена, понеже

$$|C_1\cos\alpha t+C_2\sin\alpha t|\leqq|C_1|\,|\cos\alpha t|+|C_2|\,|\sin\alpha t|\leqq|C_1|+|C_2|,$$

следователно

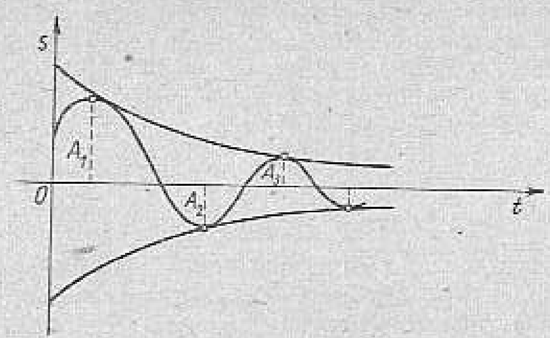
$$(17)\qquad S(t)\leqq(|C_1|+|C_2|)\,e^{-\frac{\lambda}{2}t}.$$

Тъй като $\lambda > 0$, то $\lim\limits_{t\to\infty} e^{-\frac{\lambda}{2}t}=0$, което заедно със (17) дава

$$(18)\qquad \lim_{t\to\infty} S(t)=0.$$

Равенството (18) показва, че точката M, движеща се по закона (11), извършва затихващо хармонично трептене. Графически това движение може да се илюстрира като „затихваща синусоида", допираща се до кривите с уравнения $S(t)=Ce^{-\frac{\lambda}{2}t}$ и $S(t)=-Ce^{-\frac{\lambda}{2}t}$ (черт. 105), където $C=|C_1|+|C_2|$.

Функцията (11) е законът на движение на точката M, когато съпротивлението на средата е сравнително малко ($\lambda < 2\sqrt{\mu}$). Когато това съпротивление стане достатъчно голямо ($\lambda > 2\sqrt{\mu}$), законът на движение се дава с (13). Това движение, както трябва



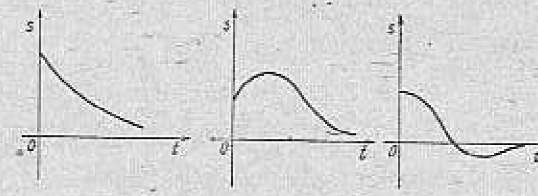
Черт. 105.

да се очаква, е също така затихващо, т. е. че формула (18) е валидна и в този случай. Наистина, като вземем пред вид, че

$$\alpha-\frac{\lambda}{2}=\sqrt{\frac{\lambda^2}{4}-\mu}-\frac{\lambda}{2}<0,$$

$$-\left(\alpha+\frac{\lambda}{2}\right)=-\left(\sqrt{\frac{\lambda^2}{4}-\mu}+\frac{\lambda}{2}\right)>0,$$

всяка от експонентите, фигуриращи в (13), клони към 0, когато t расте неограничено, следователно $S(t)$ също клони към 0. Примерни графики на едно такова движение са изобразени на черт. 106. Не е трудно да се покаже, че ако C_1 и C_2 имат еднакви знаци, графиката на функцията $S(t)$ няма екстремум, а ако тези



Черт. 106

знаци са различни, тя притежава един екстремум (докажете това твърдение сами, като покажете, че уравнението $S'(t)=0$ в първия случай няма реални корени, а във втория — само един реален корен).

Ако сравним движенията в случаите a. и б. виждаме, че когато съпротивлението на средата е „малко", подвижната точка M

през него най-много един път.

Случай c е граничен на разгледаните. Покажете сами, че графиката на функцията (16) притежава само един екстремум ($t > 0$).

§ 8. ДЕЙСТВИЕ НА ВЪНШНИ СИЛИ

В §7 разгледахме движение под действието на две сили $F(t) = -k\,S(t)$ и $R(t) = -l\,S'(t)$. Първата е еластична сила и е определена от положението на движещата се точка. Втората сила представлява съпротивлението на средата и е определена от скоростта. Силите F и R са непосредствено свързани със самото движение на точката.

Тук ще разгледаме движение, което е подложено освен на действието на силите $F(t)$ и $R(t)$ и на това на една трета сила $\Phi(t)$, която е дадена функция на времето, т. е. не зависи от закона, по който точката се движи. Тогава резултантната сила $F_1(t)$, която действува върху движещата се точка M, е

$$F_1(t) = -k\,S(t) - l\,S'(t) + \Phi(t),$$

където S е търсеният закон на движение, по който се движи M под действието на F_1. Съгласно основния закон на динамиката имаме $m\,S'' = F_1$ или

(1) $$m\,S'' = -k\,S - l\,S' + \Phi,$$

където m е масата на M. Да положим $\frac{l}{m} = \lambda$, $\frac{k}{m} = \mu$. Тогава уравнението (1) може да се запише и така:

(2) $$S'' + \lambda\,S' + \mu\,S = \varphi(t),$$

където сме положили $\varphi(t) = \frac{1}{m}\Phi(t)$, и следователно φ е известна функция на времето. Да намерим закона на движението на точката M, означава да намерим общия интеграл на диференциалното уравнение (2). Тук ще дадем една обща схема, по която може да се реши така поставената задача.

Да отбележим най-напред, че когато силата Φ липсва ($\Phi = 0$), имаме $\varphi(t) = \frac{1}{m}\Phi(t) = 0$ и уравнението (2) се превръща в

(3) $$S'' + \lambda\,S' + \mu\,S = 0.$$

Този случай е разгледан в §7 ... движение S_0 (общият интеграл на (3)) се дава с една от формулите (7.11), (7.13) и (7.16). Ще покажем, че ако познаваме едно какво да е решение (частен интеграл) на уравнението (2), общият му интеграл се представя като сума от това частно решение и общия интеграл на (3).

Нека S_1 е известно частно решение на (2) и S е произволно решение на (2), т. е.

$$S''(t) + \lambda\,S'(t) + \mu\,S(t) = \varphi(t),$$
$$S_1''(t) + \lambda\,S_1'(t) + \mu\,S_1(t) = \varphi(t).$$

Като извадим последните две уравнения и вземем пред вид правилото за диференциране на разлика, получаваме

$$(S - S_1)'' + \lambda\,(S - S_1)' + \mu\,(S - S_1) = 0,$$

което показва, че функцията $S(t) - S_1(t)$ е едно решение на уравнението (3) и следователно $S - S_1 = S_0$, т. е.

(4) $$S(t) = S_0(t) + S_1(t),$$

където S е едно произволно решение на (2), S_1 е познато частно решение на (2), а S_0 има вида (7.11), (7.13) или (7.16). Обратно, всяка функция S, определена чрез равенството (4), е решение на уравнението (2). Наистина

$$S'' + \lambda\,S' + \mu\,S = (S_0 + S_1)'' + \lambda\,(S_0 + S_1)' + \mu\,(S_0 + S_1)$$
$$= \underbrace{S_0'' + \lambda\,S_0' + \mu\,S_0}_{0} + \underbrace{S_1'' + \lambda\,S_1' + \mu\,S_1}_{\varphi} = \varphi,$$

с което последното твърдение е доказано. Следователно общото решение на (2) се дава с равенството (4), където $S_0(t)$ е общият интеграл на (3), а $S_1(t)$ е едно каквото и да е познато решение на (2).

Пример 1. Да се реши уравнението

(5) $$S'' + S = 1$$

при начални условия

(6) $$\left|\begin{array}{l} S\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \\ S'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1. \end{array}\right.$$

Ще използуваме равенството (4), като за целта потърсим най-напред едно частно решение на (5). Лесно се вижда, че $S_1 = 1$ е решение на (5), тъй като

$S_1' + S_1 = 0 + 1 = 1$. Функцията S_0 съгласно показаната схема е решение на уравнението $S_0'' + S_0 = 0$ и следователно има вида (5.8) при $\alpha = 1$, т. е.

$$S_0(t) = C_1 \cos t + C_2 \sin t.$$

Като поставим така намерените функции S_1 и S_0 в (4), получаваме общия интеграл на уравнението (5)

(7) $$S(t) = C_1 \cos t + C_2 \sin t + 1,$$

където C_1 и C_2 са произволни константи. За да намерим частното решение, ще използуваме началните условия (6). За тази цел ще намерим производната на S от (7). Имаме

(8) $$S'(t) = -C_1 \sin t + C_2 \cos t.$$

Като поставим сега $t = \frac{\pi}{2}$ в (7) и (8) и вземем пред вид условията (6), получаваме системата

$$\left|\begin{aligned} C_2 + 1 &= 1 \\ -C_1 &= -1, \end{aligned}\right.$$

откъдето $C_1 = 1$ и $C_2 = 0$. Като поставим така пресметнатите стойности на C_1 и C_2 в общия интеграл (7), получаваме търсеното частно решение

$$S(t) = \cos t + 1.$$

Пример 2. Да се реши уравнението

(9) $$S'' + 2S' + 5S = 5t^2 + 4t + 2$$

при начални условия

(10) $$\left|\begin{aligned} S(0) &= 0 \\ S'(0) &= 2. \end{aligned}\right.$$

Тъй като $\lambda = 2$ и $\mu = 5$, то $\mu - \frac{\lambda^2}{4} = 5 - \frac{2^2}{4} = 4 > 0$, следователно общият интеграл на уравнението

(11) $$S'' + 2S' + 5S = 0$$

се дава с (7.11) при $\lambda = 2$, $\alpha = \sqrt{\mu - \frac{\lambda^2}{4}} = \sqrt{4} = 2$, т. е.

$$S_0(t) = e^{-t}(C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t).$$

Тъй като дясната страна на (9) е полином на t от втора степен, естествено е да потърсим едно частно решение на това диференциално уравнение, което също да бъде полином от втора степен на t, т. е.

(12) $$S_1(t) = at^2 + bt + c,$$

където a, b и c са константи, които ще определим от условието S_1 да бъде решение на (9). За това е необходимо да бъде изпълнено равенството

$$(at^2 + bt + c)'' + 2(at^2 + bt + c)' + 5(at^2 + bt + c) = 5t^2 + 4t + 2$$

за всяко t. Като пресметнем производните и подредим лявата страна по степените на t, получаваме тъждеството

$$5at^2 + (4a + 5b)t + 2a + 2b + 5c = 5t^2 + 4t + 2.$$

Като приравним коефициентите пред еднаквите степени на t (вж. гл. 1, § 4), за a, b и c получаваме системата

$$\left|\begin{aligned} 5a &= 5 \\ 4a + 5b &= 4 \\ 2a + 2b + 5c &= 2. \end{aligned}\right.$$

Решението на тази система е $a = 1$, $b = 0$, $c = 0$, за което частният интеграл (12) добива вида

(13) $$S_1(t) = t^2.$$

Като поставим така намерените функции S_0 и S_1 в (4), намираме общия интеграл на уравнението (9)

$$S(t) = e^{-t}(C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t) + t^2.$$

Покажете, че при началните условия (10) решението на (9) е функцията

$$S(t) = e^{-t} \sin 2t + t^2.$$

§ 9. ЯВЛЕНИЕТО РЕЗОНАНС

Тук ще решим уравнението (8.2) в специалния случай, когато $\lambda = 0$, $\mu > 0$ и $\varphi(t) = \sin at$, където $a \neq 0$ е константа. Тогава то добива вида

(1) $$S'' + \alpha^2 S = \sin at,$$

където за удобство при пресмятанията е положено $\mu = \alpha^2$. Ще приложим (8.4). Тук S_0 е общият интеграл на уравнението $S'' + \alpha^2 S = 0$ и следователно е функцията (5.8), т. е.

(2) $$S_0(t) = C_1 \cos \alpha t + C_2 \sin \alpha t,$$

където C_1 и C_2 са произволни константи. За да намерим общото решение на (1), е достатъчно да намерим едно частно решение S_1 на това уравнение, което да прибавим към S_0. Ще потърсим решението S_1 във вида

(3) $$S_1(t) = M \sin at,$$

където a е константа, която трябва да определим от условието функцията S_1, определена чрез (3) да удовлетворява (1), т. е. да бъде изпълнено тъждеството $(M \sin at)'' + \alpha^2 (M \sin at) = \sin at$ или, което е все същото,

$$M(\alpha^2 - a^2) \sin at = \sin at.$$

Последното равенство е изпълнено за всяко t, ако коефициентите пред синусите от двете страни са равни, т. е.

$$M=\frac{1}{\alpha^2-a^2} \quad (\alpha \neq \pm a). \tag{4}$$

Като заместим константата M, определена чрез (4) в (3), намираме един частен интеграл на уравнението (1), а именно

$$S_1(t)=\frac{1}{\alpha^2-a^2}\sin a\,t. \tag{5}$$

Като заместим S_0 и S_1, определени съответно чрез (2) и (5), в (8.4), получаваме общия интеграл на (1)

$$S(t)=C_1\cos\alpha\,t+C_2\sin\alpha\,t+\frac{1}{\alpha^2-a^2}\sin a\,t, \tag{6}$$

където C_1 и C_2 са произволни константи и $\alpha \neq \pm a$.

От (4) се вижда, че при $\alpha^2=a^2$ не съществува такава константа M, за която (3) да бъде частен интеграл на (1), тъй като в противен случай бихме получили тъждеството $\sin a\,t=0$, което не е вярно за всяко t поради условието $a \neq 0$. Този случай е забележителен. Наистина честотата α на „несмутеното" движение, картината на което се описва от уравнението $S''+\alpha^2 S=0$, съвпада с честотата a на външната сила, която го „смущава", поради което е естествено да очакваме, че амплитудата ще расте неограничено с течение на времето. Това явление се нарича резонанс.

При наличие на резонанс, т. е. $\alpha^2=a^2$, ще потърсим едно частно решение на уравнението (1) във вида

$$S_1(t)=M\,t\cos a\,t, \tag{7}$$

където M е константа, която ще определим от условието функцията $M\,t\cos a\,t$ да бъде решение на (1). Като заместим S в (1) с S_1, определена чрез (7), и опростим, получаваме

$$-2\,a\,M\sin a\,t=\sin a\,t.$$

Последното равенство е изпълнено за всяко t при $M=-\frac{1}{2a}$ и следователно частният интеграл добива вида

$$S_1(t)=-\frac{1}{2a}t\cos a\,t. \tag{8}$$

Като заместим S_0 и S_1, определени съответно чрез (2) и (8) в (8.4), получаваме общия интеграл на (1)

$$S(t)=C_1\cos a\,t+C_2\sin a\,t-\frac{1}{2a}t\cos a\,t. \tag{9}$$

За да разберем по-добре явлението резонанс, по-долу ще разгледаме конкретни примери.

Пример 1. Да се намери общото решение на уравнението

$$S''+S=\sin t. \tag{10}$$

Уравнението (10) се получава от (1) при $\alpha=1$ и $a=1$. Понеже $\alpha=a$ имаме резонанс, следователно общото решение на (10) ще се получи от (9) при $a=1$, т. е.

$$S(t)=C_1\cos t+C_2\sin t-\frac{1}{2}t\cos t. \tag{11}$$

Функцията $|t\cos t|$ може да взема произволно големи стойности за достатъчно големи t, а $C_1\cos t+C_2\sin t$ остава ограничена. Това показва, че S, определена чрез (11), не е ограничена, когато t расте неограничено. Една подвижна точка M, която извършва движение по закон от вида (11), ще се колебае около началото O, като амплитудата ѝ ще расте неограничено с течение на времето.

Пример 2. Да се намери законът на движението S, ако движението се описва с диференциалното уравнение

$$S''+3S=\sin\sqrt{3}\,t, \tag{12}$$

а пътят и скоростта в момента $t=0$ са съответно

$$\left|\begin{aligned} S(0)&=-\frac{1}{2\sqrt{3}}\\ S'(0)&=-\frac{1}{2\sqrt{3}}. \end{aligned}\right. \tag{13}$$

Уравнението (12) се получава от (1) при $\alpha=a=\sqrt{3}$, следователно има резонанс. Тогава общото решение на (12) ще се получи от (9) при $a=\sqrt{3}$, т. е.

$$S(t)=C_1\cos\sqrt{3}\,t+C_2\sin\sqrt{3}\,t-\frac{1}{2\sqrt{3}}t\cos\sqrt{3}\,t. \tag{14}$$

Лесно се вижда, че началните условия (13) дават $C_1=-\frac{1}{2\sqrt{3}}$, $C_2=0$, поради което законът на движението е

$$S(t)=-\frac{1}{2\sqrt{3}}(t+1)\cos\sqrt{3}\,t. \tag{15}$$

Да определим моментите, в които точката M ще съвпада с O. Очевидно всеки такъв момент е корен на уравнението $S(t)=0$ или, като вземем пред вид (15), на уравнението $\cos\sqrt{3}\,t=0$, на което решенията са $t_k=(2k+1)\frac{\pi}{2\sqrt{3}}$, $k=0, 1, 2, \dots$ Това показва, че M ще съвпада с O през равни интервали от време с дължина $\frac{\pi}{\sqrt{3}}$. Поради наличието на множителя $(t+1)$ амплитудата ще расте неограничено с течение на времето.

Пример 3. Да се реши диференциалното уравнение

$$S''+4S=\sin 4t \tag{16}$$

при начални условия

$$\begin{cases} S(0)=0 \\ S'(0)=-\dfrac{1}{6}. \end{cases} \tag{17}$$

Уравнението (16) се получава от уравнението (1) при $\alpha=2$ и $a=4$. Понеже $\alpha\neq a$, няма резонанс. Тогава общият интеграл на (16) се получава от (6) при $\alpha=2$ и $a=4$, т. е.

$$S(t)=C_1\cos 2t+C_2\sin 2t-\frac{1}{12}\sin 4t. \tag{18}$$

Началните условия (17) дават $C_1=0$ и $C_2=\frac{1}{12}$, следователно частният интеграл е

$$S(t)=\frac{1}{12}(\sin 2t-\sin 4t). \tag{19}$$

За разлика от резонансния случай тук отсъствуват множители пред тригонометричните функции, които да зависят от t, поради което решението (18) е една ограничена функция. Освен това тази функция е и периодична, тъй като честотата на несмутеното движение ($\alpha=2$) е съизмерима с честотата на външната сила ($a=4$). Очевидно този период е $T=\pi$.

Уравнението

$$S''+\alpha^2 S=\beta\sin a t+\gamma\cos a t, \tag{20}$$

където α, β, γ, a са известни константи, е обобщение на (1). При отсъствие на резонанс ($\alpha^2\neq a^2$) съществува частно решение на (20) от вида

$$S_1(t)=M\sin a t+N\cos a t.$$

Покажете сами, че общото решение на (20) е

$$S(t)=C_1\cos\alpha t+C_2\sin\alpha t+\frac{\beta\sin a t+\gamma\cos a t}{\alpha^2-a^2}. \tag{21}$$

В резонансния случай ($\alpha^2-a^2=0$) едно частно решение може да бъде намерено, ако се потърси във вида

$$S_1(t)=t\,(M\sin a t+N\cos a t).$$

Определете сами константите M и N и запишете общия интеграл.

§ 10. ДРУГ СЛУЧАЙ НА РЕЗОНАНС

Тук ще потърсим решението на уравнението (8.2) в случая, когато $\varphi(t)=e^{\alpha t}(at+b)$, където α, a и b са дадени константи; това уравнение има вида

$$S''+\lambda S'+\mu S=e^{\alpha t}(a t+b). \tag{1}$$

Функцията S_0, която е решение на уравнението $S''+\lambda S'+\mu S=0$, се дава с някоя от формулите (7.11), (7.13) или (7.16). Съгласно (8.4), за да намерим общото решение на (1), трябва да знаем едно частно решение на (1). Ще потърсим едно частно решение S_1 на (1) във вид, сходен с този на φ, а именно

$$S_1(t)=e^{\alpha t}(Mt+N), \tag{2}$$

където M и N са константи, които се определят от условието S_1 да бъде решение на (1). Като пресметнем S_1', S_1'' и заместим съответно в (1), след съкращение на $e^{\alpha t}$ получаваме

$$M(\alpha^2+\lambda\alpha+\mu)t+N(\alpha^2+\lambda\alpha+\mu)+M(\lambda+2\alpha)=a t+b. \tag{3}$$

За да бъде изпълнено (3) за всяко t, трябва кофициентите пред еднаквите степени на t да бъдат равни, т. е.

$$\begin{cases} M(\alpha^2+\lambda\alpha+\mu)=a \\ N(\alpha^2+\lambda\alpha+\mu)+M(\lambda+2\alpha)=b. \end{cases} \tag{4}$$

Решението на тази система при $\alpha^2+\lambda\alpha+\mu\neq 0$ е

$$M=\frac{a}{\alpha^2+\lambda\alpha+\mu},\quad N=\frac{b\alpha^2+b\lambda\alpha+b\mu-a\lambda-2ab}{(\alpha^2+\lambda\alpha+\mu)^2}. \tag{5}$$

Като заместим M и N, определени чрез формулите (5) в (2), ще получим

$$S_1(t)=\frac{e^{\alpha t}}{\alpha^2+\lambda\alpha+\mu}\left(a t+\frac{b\alpha^2+b\lambda\alpha+b\mu-a\lambda-2ab}{\alpha^2+\lambda\alpha+\mu}\right). \tag{6}$$

Тогава общото решение се намира съгласно (8.2), където S_1 и S_0 се дават съответно с (6) и някоя от формулите (7.11), (7.13), (7.16).

Разгледаният метод е неприложим, ако $\alpha^2+\lambda\alpha+\mu=0$, понеже системата (4) няма решение. От това следва, че не съществува частен интеграл на (1) от вида (2). Този случай е резонансен и за да намерим S_1, ще постъпим както в §9, т. е. ще умножим дясната страна на (2) с t. Търсеното решение S_1 добива вида

(7) $$S_1(t)=e^{\alpha t}(Mt^2+Nt).$$

Като поставим S_1 от (7) в (1), след леки пресмятания получаваме

$$M(\alpha^2+\lambda\alpha+\mu)t^2+2M(\lambda+2\alpha)t+2M+\lambda\alpha N+\mu N=at+b.$$

Тъй като разглеждаме случая $\alpha^2+\lambda\alpha+\mu=0$, горното равенство приема вида

$$2M(\lambda+2\alpha)t+2M+\lambda\alpha N+\mu N=at+b.$$

За да бъде изпълнено последното, за всяко t е необходимо

(8) $$\begin{cases} 2M(\lambda+2\alpha) & =a \\ 2M+\lambda\alpha N+\mu N=b. \end{cases}$$

Решението на тази система при $\lambda+2\alpha\neq 0$ е

(9) $$M=\frac{a}{2(\lambda+2\alpha)}, \quad N=\frac{b\lambda+2b\alpha-a}{(\lambda+2\alpha)^2}.$$

Така S_1 е вече известна функция и следователно общият интеграл на уравнението (1), $S=S_0+S_1$ е намерен.

Формулите (9) показват, че се налага да разгледаме и трети случай, а именно, когато $\lambda+2\alpha=0$ и $\alpha^2+\lambda\alpha+\mu=0$. Потърсете сами частен интеграл на (1) S_1, като го представите във вида

(10) $$S_1(t)=e^{-\frac{\lambda}{2}t}(Mt^3+Nt^2).$$

Да резюмираме трите случая.

1. $\alpha^2+\lambda\alpha+\mu\neq 0$. Тогава S_1 се дава с (6) и търсеното решение S на (1) е $S=S_0+S_1$, където S_0 се дава с (7.11), (7.13) или (7.16).

2. $\alpha^2+\lambda\alpha+\mu=0$ и $\lambda+2\alpha\neq 0$. В този случай S_1 се дава с (7), където M и N са определени с формулите (9). Тъй като реалното число α е решение на квадратното уравнение $x^2+\lambda x+\mu=0$, трябва дискриминантата $\lambda^2-4\mu$ да бъде неотрицателна. Ако $\lambda^2-4\mu=0$, ще имаме $\mu=\frac{\lambda^2}{4}$, т. е.

$$0=\alpha^2+\lambda\alpha+\mu=\alpha^2+\lambda\alpha+\frac{\lambda^2}{4}=\frac{1}{4}(4\alpha^2+4\alpha\lambda+\lambda^2)=\frac{1}{4}(2\alpha+\lambda)^2,$$

което противоречи на условието $\alpha+2\lambda\neq 0$. Тогава $\lambda^2-4\mu>0$, следователно S_0 се дава със (7.13). Общото решение на (1) в този

случай има вида

$$S(t)=C_1e^{\left(\alpha-\frac{\lambda}{2}\right)t}+C_2e^{-\left(\alpha+\frac{\lambda}{2}\right)t}+\frac{e^{\alpha t}}{\lambda+2\alpha}\left(\frac{a}{2}t^2+\frac{(b\lambda+2b\lambda-a)t}{\lambda+2\alpha}\right).$$

3. $\alpha^2+\lambda\alpha+\mu=0$ и $\lambda+2\alpha=0$. Тогава $\alpha=-\frac{\lambda}{2}$ и

$$0=\alpha^2+\lambda\alpha+\mu=\frac{\lambda^2}{4}-\frac{\lambda^2}{2}+\mu=\mu-\frac{\lambda^2}{4}.$$

Последният резултат показва, че S_0 се дава с формулата (7.16). Общото решение на (1) в този случай е

$$S(t)=e^{-\frac{\lambda}{2}t}\left(\frac{a}{6}t^3+\frac{b}{2}t^2+C_1t+C_2\right).$$

Задачи към глава 7

1. Да се реши уравнението $y''-y=0$.
Отг. $y=C_1e^x+C_2e^{-x}$.

2. Да се реши уравнението $y''-5y'+6y=0$.
Отг. $y=C_1e^{2x}+C_2e^{3x}$.

3. Да се реши уравнението $y''+3y'+2y=0$.
Отг. $y=C_1e^{-x}+C_2e^{-2x}$.

4. Да се реши уравнението $y''+2y'+y=0$.
Отг. $y=e^{-x}(C_1+C_2x)$.

5. Да се реши уравнението $y''-4y'+4y=0$.
Отг. $y=e^{-2x}(C_1+C_2x)$.

6. Да се реши уравнението $y''+a^2y=e^x$
Отг. $y=C_1\cos ax+C_2\sin ax+\frac{e^x}{a^2+1}$.

7. Да се реши уравнението $y''-7y'+6y=\sin x$.
Отг. $y=C_1e^x+C_2e^{6x}+\frac{5x+7\cos x}{74}$.

8. Да се реши уравнението $y''-a^2y=e^{bx}$.
Отг. $$\begin{cases} y=C_1e^{ax}+C_2e^{-ax}+\frac{e^{bx}}{b^2-a^2}\ (b\neq a) \\ y=C_1e^{ax}+C_2e^{-ax}+\frac{xe^{ax}}{2a}\ (b=a). \end{cases}$$

9. Да се реши уравнението $y''+a^2y=\sin bx$.
Отг. $$\begin{cases} y=C_1\cos ax+C_2\sin ax+\frac{\sin bx}{a^2-b^2}\ (a\neq b) \\ y=C_1\cos ax+C_2\sin ax-\frac{x\cos ax}{2a}\ (a=b). \end{cases}$$

Глава 8

ДВИЖЕНИЕ НА ПЛАНЕТИТЕ

В началото на 17 в. немският астроном Йохан Кеплер откри основните закони за движение на планетите. Главната задача на тази глава е извеждането на законите на Кеплер от нютоновия закон за всемирното привличане.

Както е известно, планетите се движат около Слънцето по равнинни криви, наречени орбити. Орбитата на една планета се изучава най-лесно, като вместо декартовите се използуват така наречените полярни координати. Необходимите сведения за тях са дадени в §1, §2 и §3.

Орбитите на телата от Слънчевата система са криви, които се получават от пресичането на прав кръгов конус с равнина. Така получените криви се наричат конични сечения. Коничните сечения са изучени в §4, §5, §6, §7 и §8.

В §9 е формулиран законът на Нютон за гравитацията, а в §10, §11, §12 и §13 са посветени на доказателството на законите на Кеплер.

§ 1 ПОЛЯРЕН РАДИУС И ПОЛЯРЕН ЪГЪЛ

Появата на координатния метод може да се схваща като поява на съвременната математика, тъй като той дава възможност да се прилагат аналитични методи за решаване на многобройни геометрични и физични задачи. Така например изучаването на кривите вече беше сведено към изучаване на функции. Но декартовите координати, които използувахме досега, не са винаги най-удобни за тази цел, тъй като в някои важни случаи се получават необозрими уравнения.

Нека M е точка от равнината, в която е зададена една декартова координатна система Oxy. Под *полярен радиус* на точката M разбираме разстоянието OM. Той е едно неотрицателно число и е равен на нула тогава и само тогава, когато M съвпада с началото O.

Нека $M \neq 0$. Под *полярен ъгъл* на M ще разбираме всеки от ъглите, които OM сключва с оста Ox. По този начин точката M има безбройно много полярни ъгли. Тези от тях, които са измерени в положителна посока, считаме положителни, а онези, които са измерени в отрицателна посока — отрицателни. Очевидно разликата на всеки два полярни ъгъла на точката M е целочислено кратно на 2π, т. е. за всеки два полярни ъгъла θ_1 и θ_2 на M имаме

$$(1) \qquad \theta_2 - \theta_1 = 2k\pi,$$

където k е произволно цяло число. Например, ако M лежи върху положителния лъч на Ox, полярните ѝ ъгли са числата от вида $0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \ldots$; ако тя лежи на противоположния лъч, полярните ъгли са числата $\pi, \pi \pm 2\pi, \pi \pm 4\pi, \ldots$; точките с полярни ъгли $\frac{\pi}{4} + 2k\pi$ са разположени по ъглополовящата на първи квадрант, а онези с полярни ъгли $-\frac{\pi}{4} + 2k\pi$ — по ъглополовящата на трети квадрант.

Понятието полярен ъгъл се въвежда и когато $M = O$. Тогава под полярен ъгъл на M се разбира всеки ъгъл.

Накрая да отбележим, че полярният радиус на произволна точка M се означава с ρ, а произволен неин полярен ъгъл с θ.

§ 2. ПОЛЯРНИ КООРДИНАТИ

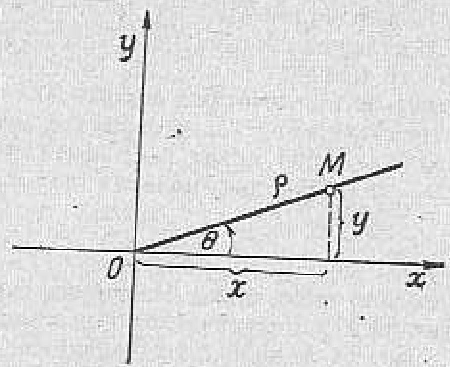
От черт. 107 се вижда, че ако ρ е полярният радиус, а θ кой да е полярен ъгъл на една точка M с декартови координати (x, y), то

$$(1) \qquad \begin{aligned} x &= \rho \cos \theta, \\ y &= \rho \sin \theta. \end{aligned}$$

Така написаната формула дава повод за следната дефиниция.

Полярни координати на една точка M с декартови координати (x, y) наричаме всяка двойка числа (ρ, θ), за които са изпълнени формулите (1).

От тази дефиниция най-напред следва, че полярният радиус ρ и кой да е полярен ъгъл θ на точка M образуват една двойка (ρ, θ) полярни координати на M. Но с това не се изчерпват всички възможни двойки полярни координати на M. Ако (ρ, θ) са полярни координати на M, то $(-\rho, \theta + \pi)$ са също полярни коорди-



Черт. 107

нати на тази точка. Наистина това, че ρ и θ са полярни координати на M означава, че са изпълнени равенствата (1). От друга страна,

$$-\rho \cos(\theta+\pi) = -\rho(-\cos\theta) = \rho\cos\theta = x$$

и

$$-\rho \sin(\theta+\pi) = -\rho(-\sin\theta) = \rho\sin\theta = y,$$

откъдето виждаме, че числата $-\rho$ и $\theta+\pi$ удовлетворяват съотношенията (1) и следователно са една двойка полярни координати на точка M.

И така полярни координати на точка M са всеки две числа ρ и θ, където ρ е полярният радиус на M, а θ е кой да е полярен ъгъл на M, както и всеки две числа ρ и θ, където $-\rho$ е полярен радиус на M, а $\theta+\pi$ е полярен ъгъл на M. Читателят ще се убеди сам, че освен така посочените полярни координати точката M няма други.

Ако повдигнем равенствата (1) в квадрат и съберем получените резултати, ще получим

$$x^2+y^2=\rho^2. \tag{2}$$

Това е важно следствие от връзката (1) между декартовите и полярните координати.

Нека $f(x, y)$ е една функция на две променливи. Под крива с уравнение

$$f(x, y)=0 \tag{3}$$

се разбира множеството на всички точки (x, y) от равнината, за които е изпълнено (3). Например кривата с уравнение $x^2+y^2=r^2$ е окръжност с радиус r и център в началото на координатната

система. Уравнението на една крива представлява връзка между двете ѝ координати. Тъй като в (3) участвуват декартовите координати на точката от кривата, това уравнение се нарича декартово уравнение на кривата.

Аналогично стоят нещата и при полярните координати. Уравнението на една крива в полярни координати (полярното уравнение на кривата) представлява връзка между полярните координати на точките от тази крива.

Да видим кои са кривите, представени с най-простите възможни полярни уравнения. Такова е например уравнението $\theta=\theta_0$, където θ_0 е константа. То се удовлетворява от онези и само онези точки, един от полярните ъгли на които е θ_0 или $\theta_0+\pi$. Явно това е правата, която минава през началото на координатната система и сключва ъгъл θ_0 с оста Ox. Така например абсцисната ос има уравнение $\theta=0$, а също така има за уравнение и $\theta=\pi$. Ординатната ос има уравнение $\theta=\frac{\pi}{2}$, а също така и $\theta=\frac{\pi}{2}+k\pi$. Да видим сега кой е кривата с уравнение $\rho=r>0$, където $r>0$ е константа. Това уравнение се удовлетворява от онези и само онези точки, които се намират на разстояние r от началото и следователно кривата е окръжност с радиус r и център в началото.

За да получим полярното уравнение на кривата с декартово уравнение (3), трябва да заместим в (3) x и y с равните им от (1). Да намерим например полярното уравнение на окръжността, като изходим от декартовото ѝ уравнение $x^2+y^2=r^2$. Като заместим в това уравнение x и y с равните им от (1) и вземем пред вид (2), ще получим $\rho^2=r^2$, откъдето получаваме $\rho=r$ или $\rho=-r$. По-общо полярното уравнение на кривата (3) е

$$f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)=0. \tag{4}$$

Да намерим сега полярното уравнение на права, която не минава през началото. Както е известно, декартовото уравнение на такава права е $ax+by+c=0$ $(c\neq0)$. Като заместим отново x и y с равните им от (1), ще получим

$$\rho(a\cos\theta+b\sin\theta)=-c. \tag{5}$$

Нека (d, θ_0) е една двойка полярни координати на точката с декартови координати (a, b). Тогава съгласно (1) ще имаме $a=d\cos\theta_0$ и $b=d\sin\theta_0$ и като заместим a и b с тези стойности в (5), получаваме

$$\rho\, d(\cos\theta\cos\theta_0+\sin\theta\sin\theta_0)=-c,$$

откъдето

$$\rho = \frac{p}{\cos(\theta - \theta_0)}, \tag{6}$$

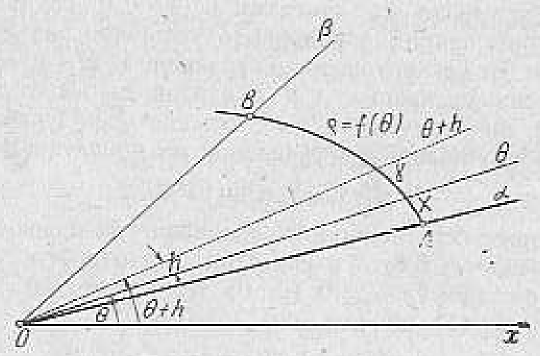
където е положено $p = -\frac{c}{d}$. Без ограничение на общността можем да предполагаме, че $c < 0$ и $d > 0$, поради което $p > 0$. Предоставяме на читателя да се убеди, че (ρ, θ_0) е една двойка полярни координати на най-близката до началото точка от разглежданата права.

§ 3. ПРЕСМЯТАНЕ НА ЛИЦА В ПОЛЯРНИ КООРДИНАТИ

Нека функцията f е дефинирана и непрекъсната в интервала $[\alpha, \beta]$ $(0 \leqq \alpha < \beta \leqq 2\pi)$ и нека $f(\theta) \geqq 0$ за всяко θ от този интервал. С T ще означим множеството на всички точки с полярни координати (ρ, θ), за които

$$\begin{gathered} \alpha \leqq \theta \leqq \beta \\ 0 \leqq \rho \leqq f(\theta). \end{gathered} \tag{1}$$

Тъй като ρ е неотрицателно, θ е полярен ъгъл и следователно точките на множеството T са разположени между лъчите α и β. При фиксирано θ координатата ρ се изменя по дефиниция от 0 до $f(\theta)$ (черт. 108). Така дефинираното множество се нарича понякога *сектор*.



Черт. 108

Тъй като секторът T е еднозначно определен, когато е зададена функцията f, лицето му би трябвало да може да се изрази чрез f. Това става особено просто чрез интеграли.

Ако Φ е произволна примитивна на функцията $\frac{1}{2} f^2$ в интервала $[\alpha, \beta]$, лицето S на сектора T се дава от формулата

$$S = \Phi(\beta) - \Phi(\alpha). \tag{2}$$

Доказателството на (2) става с помощта на добре известните вече на читателя методи. За произволно θ, $\alpha \leqq \theta \leqq \beta$, означаваме с $F(\theta)$ лицето на сектора OAX (черт. 108). Очевидно нарастването $F(\theta+h) - F(\theta)$ съвпада с лицето на сектора OXY. Като вземем пред вид, че лицето на кръгов сектор с радиус r и централен ъгъл ω, измерен в радиани, е равно на $\frac{1}{2} r^2 \omega$, лесно съобразяваме, че лицето на сектора OXY ще бъде $\frac{1}{2} \rho_{\text{ср}}^2 h$, където $\rho_{\text{ср}}$ е средният радиус на този сектор. Следователно $F(\theta+h) - F(\theta) = \frac{1}{2} \rho_{\text{ср}}^2 h$, откъдето

$$\frac{F(\theta+h) - F(\theta)}{h} = \frac{1}{2} \rho_{\text{ср}}^2. \tag{3}$$

Съгласно (1) при фиксирано θ радиусът ρ се мени от 0 до $f(\theta)$. Поради това не е трудно да се съобрази, че при h, клонящо към нула, $\rho_{\text{ср}}$ ще клони към $f(\theta)$. Ето защо от (3) получаваме $F'(\theta) = \frac{1}{2} f^2(\theta)$, което показва, че $F(\theta)$ е примитивна на $\frac{1}{2} f^2(\theta)$. По условие Φ е също примитивна на тази функция и следователно $F(\theta) = \Phi(\theta) + C$. Понеже по дефиниция $F(\alpha) = 0$, то $0 = \Phi(\alpha) + C$ и следователно $F(\theta) = \Phi(\theta) - \Phi(\alpha)$. Сега формула (2) се получава, ако в последното равенство поставим $\theta = \beta$.

Да отбележим изрично, че доказателството на (2) даде повече, отколкото беше формулирано. Именно получихме равенството

$$F'(\theta) = \frac{1}{2} f^2(\theta). \tag{4}$$

Пример. Да се докаже, че множеството M на точките (x, y), за които е изпълнено неравенството

$$(x^2+y^2)^2 \leqq a^2(x^2 - y^2) \qquad (a > 0),$$

е ограничено и да се намери лицето му.

Ако въведем полярни координати, ще получим $\rho^4 \leqq a^2(\cos^2\theta - \sin^2\theta)\rho^2$, откъдето виждаме, че M съвпада с множеството на всички точки в равнината, полярните координати на които удовлетворяват неравенството

$$\rho^2 \leqq a^2 \cos 2\theta. \tag{5}$$

Тъй като в дефиницията на M координатите x и y участвуват само с четни степени, множеството M е симетрично относно координатните оси. Следователно достатъчно е да намерим лицето само на онази негова част, която се намира в първи квадрант.

Преди всичко от (5) следва, че $\cos 2\theta \geq 0$. За стойности на θ от интервала $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ последното неравенство е изпълнено само когато $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$. Ето защо частта от M, която се намира в първи квадрант, е определена в полярни координати с неравенствата

$$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4},$$

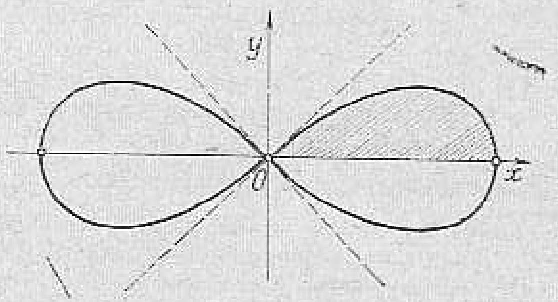
(6)

$$0 \leq \rho \leq a\sqrt{\cos 2\theta},$$

които показват, че тази част на M е елип сектор. Тогава

$$\Phi(\theta) = \frac{a^2}{2}\int \cos 2\theta\, d\theta = \frac{a^2}{4}\sin 2\theta$$

и съгласно (2) лицето на частта от M, която се намира в първия квадрант, ще



Черт. 109

бъде $S = \Phi\left(\frac{\pi}{4}\right) - \Phi(0) = \frac{a^2}{4}\left(\sin\frac{\pi}{2} - \sin 0\right) = \frac{a^2}{4}$. Оттук намираме, че лицето S на M е

$$S = a^2.$$

Кривата с уравнение $(x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2)$ се нарича *лемнискáта на Бернули*. Тя е изобразена на черт. 109. Множеството M представлява вътрешността на лемнискатата на Бернули

§ 4. КОНИЧНИ СЕЧЕНИЯ

Нека K е конус и ω е равнина, която не минава през върха му. Кривата, по която ω пресича K, се нарича *конично сечение*.

Да разгледаме равнината ω', която е успоредна на ω и минава през върха O на конуса K. За ω' могат да се представят следните три възможности:

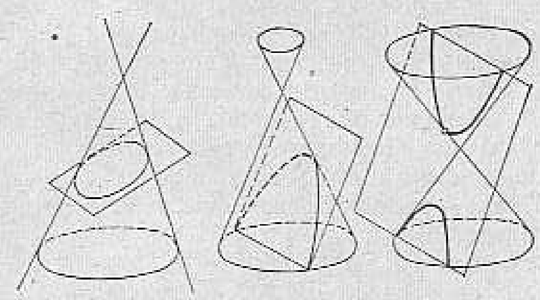
а) ω' пресича K само в точката O; тогава коничното сечение се нарича *елипса*.

б) ω' пресича конуса по една права; тогава коничното сечение се нарича *парабола*.

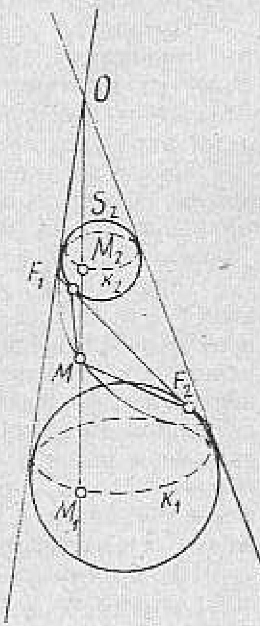
в) ω' пресича конуса по две прави; тогава коничното сечение се нарича *хипербола*.

Не бива да забравяме, че коничната повърхнина е съставена от две части с общ връх. Очевидно точките на елипсата и параболата са разположени само върху едната част на коничната повърхнина, докато хиперболата има точки върху всяка от тях (черт. 110).

Противно на първото впечатление коничните сечения са твърде симетрични фигури. Преди да пристъпим към подробното им изучаване, ще отбележим, че светилата от Слънчевата система се движат по конични сечения.



Черт. 110



Черт. 111

Да разгледаме най-напред случая, когато равнината ω пресича коничната повърхнина по елипса (черт. 111). Да означим с S_1 и S_2 двете сфери, които са вписани в конуса и се допират до равнината ω. Допирните точки на сферите S_1 и S_2 с ω означаваме съответно с F_1 и F_2.

Ще покажем, че *сборът от разстоянията на коя да е точка M от елипсата до точките F_1 и F_2 не зависи от точката M.*

Преди всичко ще отбележим, че сферите S_1 и S_2 се допират до коничната повърхнина по две окръжности K_1 и K_2 и че всяка образуваща l на конуса пресича тези две окръжности в две точки, разстоянието между които не зависи от образуващата.

Да отбележим освен това, че всеки две допирателни към една сфера през някоя външна точка са равни.

След тези бележки твърдението става почти очевидно. Да изберем произволна точка M от елипсата и да прекараме образувателната l на конуса през точката M. Пресечните точки на l с S_1 и S_2 означаваме съответно с M_1 и M_2. Тогава

$$F_1M+F_2M=M_1M+M_2M=M_1M_2=\text{const.},$$

с което всичко е доказано.

Предоставяме на читателя сам да докаже, че ако M е точка от равнината ω, за която сборът от разстоянията F_1M+F_2M е равен на дължината на отсечката, която окръжностите K_1 и K_2 отсичат от произволна образувателна на конуса, то M непременно лежи върху разглежданата елипса.

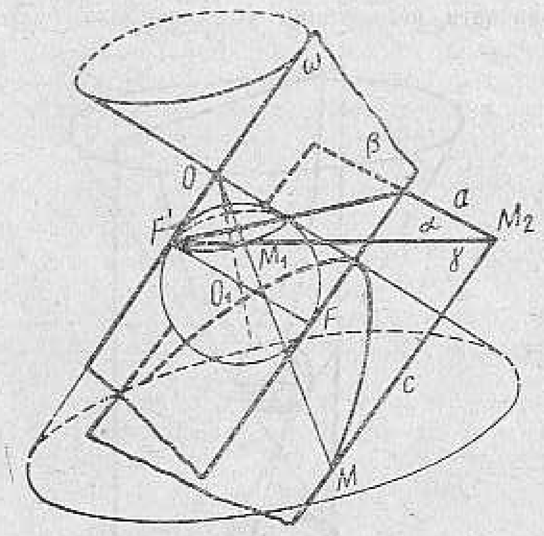
По такъв начин се убедихме, че *елипсата е геометрично място на точки от една равнина ω, сборът от разстоянията на които до две дадени точки F_1 и F_2 е постоянна величина.* Точките F_1 и F_2 се наричат *фокуси* на елипсата.

Преминаваме към изучаване на параболата. Да разгледаме конус K и равнина ω' през върха O на конуса, която пресича конуса по една единствена права OL. Нека равнината ω е успоредна на ω'. Както вече видяхме, ω пресича конуса K по една парабола. Да означим с S сферата, която е вписана в конуса и се допира до равнината ω. Очевидно S се допира и до успоредната на ω равнина ω'. Означаваме допирните точки съответно с F и F'. Нека K е окръжността, по която S се допира до конуса, и α е равнината, в която тази окръжност лежи. Пресечната права на ω и α означаваме с a (черт. 112).

Ще покажем, че *разстоянието на коя да е точка M от параболата до точката F се равнява на разстоянието на M до правата a.*

Преди всичко да отбележим, че правата a е перпендикулярна на OL. Да означим с O_1 центъра на сферата S. Тогава правата OO_1 е оста на конуса. Нека β е равнината, определена от правите FF' и OO_1. Тъй като правата FF' е очевидно перпендикулярна на ω, ще имаме $a \perp FF'$. От друга страна, оста OO_1

на конуса е перпендикулярна и на α, следователно $a \perp OO_1$. По този начин виждаме, че правата a е перпендикулярна на двете прави FF' и OO_1 от равнината β. Но тогава тя е перпендикулярна и на всяка права от тази равнина, а следователно и на OL.



Черт. 112

Да вземем сега произволна точка M от параболата и да означим с M_1 пресечната точка на правата OM с окръжността K. Нека γ е равнината, определена от правите OM и $F'M_1$ и нека c е пресечната права на γ и ω.

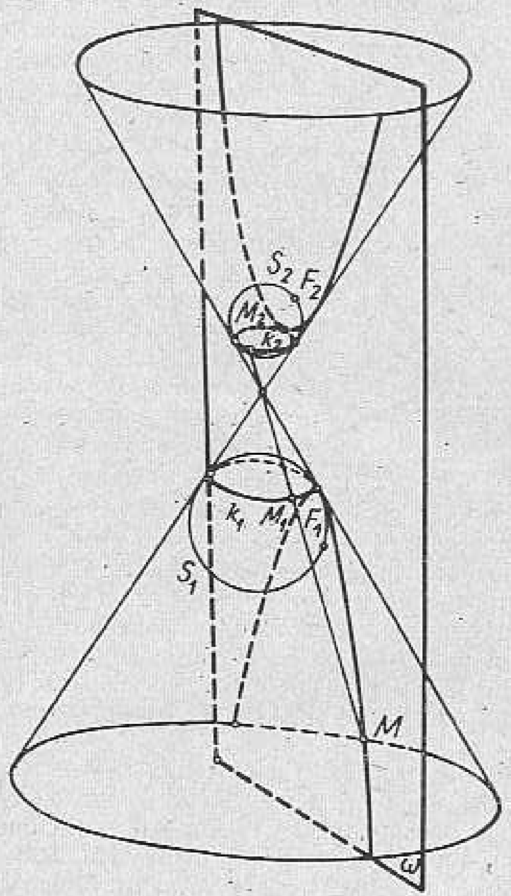
Тъй като γ пресича успоредните равнини ω' и ω съответно по правите OL и c, то $c \parallel OL$. Но вече видяхме, че $a \perp OL$. Следователно $a \perp c$ и ако означим с M_2 пресечната точка на c и a, дължината на отсечката MM_2 ще бъде разстоянието между M и a.

Триъгълникът MM_2M_1 е подобен на $OF'M_1$ (понеже $c \parallel OL$). От друга страна, F' и M_1 лежат на K и следователно триъгълникът $OF'M_1$ е равнобедрен. Ето защо и триъгълникът MM_2M_1 е равнобедрен, поради което $MM_2=MM_1$. Но MM_1 и MF са допирателни към S от една и съща точка M. Следователно $MM_1=$ $=MF$ и тъй като $MM_2=MM_1$, то $MM_2=MF$. С това е показано, че MF е равно на разстоянието от M до a.

Предоставяме на читателя да докаже сам, че ако M е точка от ω, за която MF е равно на разстоянието от M до a, то M непременно лежи върху разглежданата парабола.

По този начин се убедихме, че *параболата е геометрично място на точки от една равнина ω, разстоянията на които до дадена точка F и до дадена права a са равни.* Точката F се нарича *фокус* на параболата, а a *директриса.*

Преминаваме към изучаване на хиперболата. Нека равнината ω пресича коничната повърхнина по хипербола (черт. 113). Да



Черт. 113

означим с S_1 и S_2 двете сфери, които са вписани в конуса и се допират до равнината ω. Допирните точки на сферите S_1 и S_2 с ω означаваме съответно с F_1 и F_2.

Ще докажем, че *разликата от разстоянията на коя да е точка M от хиперболата до точките F_1 и F_2 не зависи от точката M.*

Преди всичко ще отбележим, че сферите S_1 и S_2 се допират до коничната повърхнина по две окръжности K_1 и K_2 и че всяка образуваща l на конуса пресича тези две окръжности в две точки, разстоянието между които не зависи от образуващата.

Да изберем произволна точка M от хиперболата и да прекараме образувателната l на конуса през точката M. Пресечните точки на l с K_1 и K_2 означаваме съответно с M_1 и M_2. Тогава

$$MF_1 - MF_2 = MM_1 - MM_2 = M_2M_1 = \text{const.},$$

с което всичко е доказано.

Читателят ще докаже сам, че ако M е точка от равнината ω, за която разликата от разстоянията MF_1 и MF_2 е равна на дължината на отсечката, която окръжностите K_1 и K_2 отсичат от произволна образувателна на конуса, то M непременно лежи върху разглежданата хипербола.

Така се убедихме, че *хиперболата е геометрично място на точки от една равнина ω, разликата от разстоянията на които до две дадени точки F_1 и F_2 е постоянна величина.* Точките F_1 и F_2 се наричат *фокуси* на хиперболата.

§ 5. ДЕКАРТОВИ УРАВНЕНИЯ НА КОНИЧНИТЕ СЕЧЕНИЯ

Да разгледаме една елипса E с фокуси F_1 и F_2. Ако при произволна координатна система изразим разстоянията от фокусите F_1 и F_2 до произволна точка от елипсата чрез координатите им и ги заместим в равенството

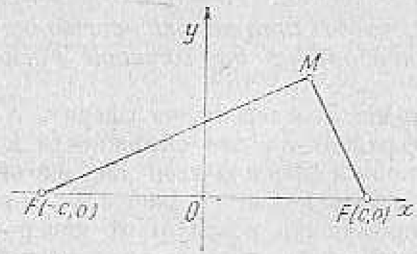
$$(1) \qquad F_1M + F_2M = 2a \quad (a > 0,\ a = \text{const.}),$$

ще получим уравнение, което ще се удовлетворява от всяка точка на елипсата.

За да получим това уравнение във възможно най-прост вид, ще изберем координатната система по следния начин. За абсцисна ос ще изберем правата F_1F_2; за начало на координатната система ще изберем средата на отсечката F_1F_2. Нека при така избраната координатна система координатите на фокусите са съответно $F_1(-c, 0)$ и $F_2(c, 0)$ (черт. 114).

Да разгледаме произволна точка $M(x, y)$ от елипсата. Тогава за разстоянията F_1M и F_2M ще имаме:

$$F_1M = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}, \qquad F_2M = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}.$$



Черт. 114

Тъй като M е точка от елипсата, ще бъде в сила равенство (1) и следователно

(2) $$\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a.$$

Преобразуваме това уравнение по следния начин:

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x-c)^2+y^2}.$$

Повдигаме двете страни в квадрат и получаваме

$$(x+c)^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+(x-c)^2+y^2.$$

След като опростим това равенство, добиваме

$$a\sqrt{(x-c)^2+y^2}=a^2-cx.$$

Повдигаме отново двете страни в квадрат и след приведение получаваме

$$(a^2-c^2)\,x^2+a^2y^2=a^2(a^2-c^2).$$

Полагаме $b=\sqrt{a^2-c^2}$ (тъй като $2c=F_1F_2<F_1M+MF_2=2a$, разликата a^2-c^2 е положителна), откъдето $b^2=a^2-c^2$. Така получаваме уравнението в следния вид:

(3) $$b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2.$$

Като разделим двете страни на това уравнение на a^2b^2, ще получим

(4) $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

което е уравнението на елипсата.

Ако (x, y) е произволна точка от елипсата от (4) следва, че $\frac{x^2}{a^2}\leqq 1$, поради което $x^2\leqq a^2$. Ето защо $-a\leqq x\leqq a$, т. е. абсцисата на произволна точка от елипсата се намира между $-a$ и a. Това

показва, че точките на елипсата са разположени между правите $x=-a$ и $x=a$. Аналогично се проверява, че точките на елипсата са разположени и между правите $y=-b$ и $y=b$.

По този начин се убедихме, че елипсата е разположена изцяло в правоъгълника, заграден от правите $x=-a$, $x=a$; $y=-b$ и $y=b$. Най-дясната и най-лявата точки на елипсата са съответно $(a, 0)$ и $(-a, 0)$, а най-горната и най-долната $(b, 0)$ и $(-b, 0)$.

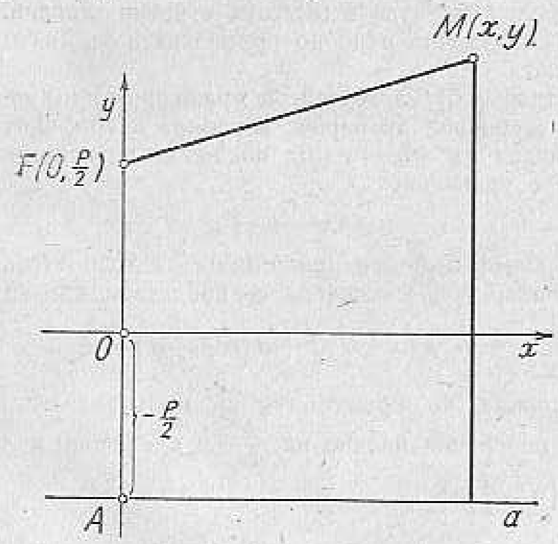
Да отбележим още, че тъй като в (4) x и y участвуват само с четни степени, елипсата е симетрична спрямо координатните оси, т. е. те са оси на симетрия на елипсата. Частта от абсцисната ос която лежи в елипсата, е отсечка с дължина $2a$, а частта от ординатната ос, която лежи в нея, има дължина $2b$. Ето защо a и b се наричат *полуоси* на елипсата (a се нарича *голяма полуос*, а b — *малка полуос*).

Ще споменем изрично, че голямата полуос, малката полуос и половината c от разстоянието между фокусите са свързани с равенството

(5) $$a^2=b^2+c^2$$

(вж. определението на b).

Преминаваме към намиране уравнението на параболата. Нека P е парабола с фокус F и директриса a. Както и при елипсата, за да получим възможно най-простото уравнение на параболата, ще изберем координатната система по специален начин. Да озна-



Черт. 115

чим с A петата на перпендикуляра от F към a (черт. 115). Абсцисната ос прекарваме през средата на FA, успоредно на a, и за начало избираме пресечната точка на FA с абсцисната ос. Нека сега координатите на фокуса са $\left(0, \frac{p}{2}\right)$.

Нека $M(x, y)$ е произволна точка от параболата. За MF имаме

$$MF=\sqrt{\left(y-\frac{p}{2}\right)^2+x^2}.$$

Разстоянието d от M до a е $d=y+\frac{p}{2}$. Според характеристиката на параболата от предния параграф ще имаме равенството $MF=d$, т. е.

$$y+\frac{p}{2}=\sqrt{\left(y-\frac{p}{2}\right)^2+x^2}.$$

След като се освободим от корена и направим опростяване, ще получим уравнението $2py=x^2$, или

(6) $$y=\frac{x^2}{2p}$$

на параболата.

От това уравнение се вижда, че за всяка точка от параболата имаме $y\geq 0$, поради което тя е разположена над абсцисната ос. Освен това x участвува в (6) само с четни степени. Ето защо параболата е симетрична относно ординатната ос, която се нарича *ос* на параболата.

Читателят знае от алгебрата, че уравнението (6) описва парабола. Но той е свикнал да нарича парабола и графиката на всеки квадратен тричлен ax^2+bx+c. Да покажем, че например, когато $a>0$, кривата с уравнение

(7) $$y=ax^2+bx+c$$

е парабола в смисъла, който придадохме на този термин в предната точка. Очевидно (7) може да се представи във вида

$$y=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+a\left(c-\frac{b^2}{4a^2}\right),$$

откъдето се вижда, че кривата (7) се получава от параболата $y=ax^2$ чрез транслация наляво на $\frac{b}{2a}$ и следваща я транслация нагоре на $a\left(c-\frac{b^2}{4a^2}\right)$.

Уравнението на хиперболата се получава аналогично на това на елипсата. Избираме абсцисната ос по такъв начин, че фокусите на хиперболата да лежат върху нея и да са разположени симетрично на началото. Нека при така избраната координатна система координатите на фокусите са съответно $F_1(-c, 0)$ и $F_2(c, 0)$.

Както вече видяхме, точките от хиперболата се характеризират с равенството

(8) $$MF_1-MF_2=2a.$$

Ако за произволна точка $M(x, y)$ от хиперболата изразим разстоянията MF_1 и MF_2 чрез координатите и заместим в (8) след преобразования, аналогични на тези при извода на уравнението на елипсата, ще получим

(9) $$(c^2-a^2)x^2-a^2y^2=a^2(c^2-a^2).$$

Тук изниква въпросът за знака на c^2-a^2. Съгласно неравенството между дължините на страните на триъгълника и равенство (8) имаме

$$2c=F_1F_2\geq MF_1-MF_2=2a,$$

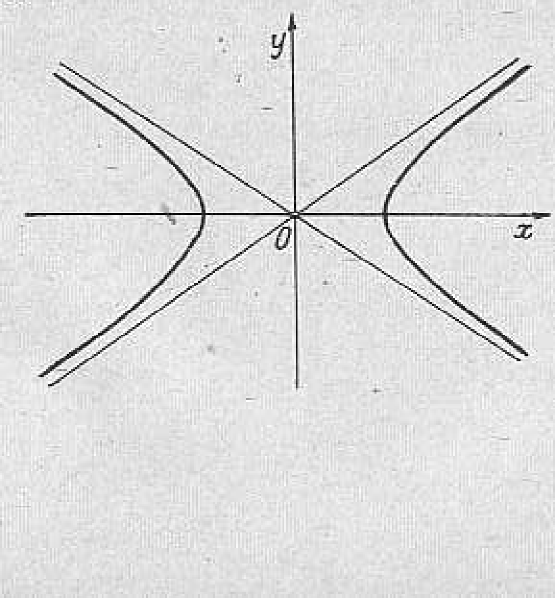
откъдето $c>a$ и следователно $c^2-a^2>0$. Ако положим $b=\sqrt{c^2-a^2}$, то $c^2-a^2=b^2$ и (9) дава

$$b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2,$$

или

(10) $$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,$$

което е и уравнението на хиперболата.



Черт. 116

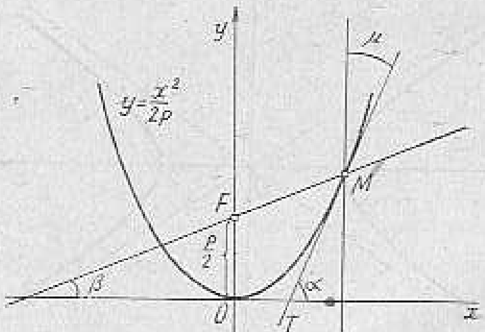
Понеже в (10) x и y участвуват само с четни степени, хиперболата е симетрична относно координатните оси. При $x=0$ лявата страна на (10) е неположителна и следователно не може да бъде равна на дясната. Следователно върху ординатната ос няма точки от хиперболата. Ето защо тя се нарича имагинерна ос на хиперболата. Аналогично от (10) следва, че при $|x|<a$ няма точки от хиперболата. При $|x|\geq a$ уравнението (10) вече има решения относно y и следователно за тези x има точки от хиперболата. Без да се впускаме в повече подробности, ще отбележим, че общият вид на хиперболата е представен на черт. 116.

Да отбележим изрично, че константите a и b от (10) и половината на фокусното разстояние c са свързани с формулата

(11) $$c^2=a^2+b^2.$$

От многобройните важни свойства на коничните сечения ще отбележим едно, свързано с оптиката. Ако в единия от фокусите на елипсата поставим светлинен източник, след отразяването си от елипсата лъчите ще минат през другия фокус. Аналогично стоят нещата и при хиперболата. Ако един светлинен лъч минава през единия от фокусите на хиперболата, след отразяването му от хиперболата неговото продължение минава през другия фокус. Ако пък поставим светлинен източник във фокуса на параболата, след отражението лъчите стават успоредни на оста на параболата. Ето защо понякога се казва, че параболата е елипса, единият от фокусите на която е в „безкрайност". Понякога се отива по-далече, като се казва, че хиперболата е елипса, която пресича „безкрайната права". Изучаването на коничните сечения в този аспект е предмет на така наречената проективна геометрия.

Ще се ограничим с доказателството на оптичното свойство на параболата. Да разгледаме произволна точка $M(x, y)$ от параболата. Съгласно закона за отражението трябва да се докаже, че $\sphericalangle FMT=\mu$, където μ е ъгълът, който тангентата T сключва с ординатната ос (черт. 117). Да означим с α и β ъглите,



Черт. 117

които тангентата и правата FM сключват с абсцисната ос. Тогава съгласно (6) ще имаме

(12) $$\operatorname{tg}\alpha=y'=\frac{x}{p}.$$

От друга страна, $\operatorname{tg}\beta=\dfrac{y-\frac{p}{2}}{x-0}$ и като използваме отново (6), последното равенство след прости преобразования дава

(13) $$\operatorname{tg}\beta=\frac{x^2-p^2}{2px}.$$

От друга страна,

$$\operatorname{tg}\sphericalangle FMT=\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$$

и като използваме (12) и (13), след прости преобразования получаваме

(14) $$\operatorname{tg}\sphericalangle FMT=\frac{p}{x}.$$

За да завършим доказателството, остава само да забележим, че

$$\operatorname{tg}\mu=\operatorname{ctg}\alpha=\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}=\frac{1}{y'}=\frac{p}{x}$$

и да използваме (14).

Така отбелязаното оптическо свойство на параболата действително намира широко практическо приложение. Така например прожекторите по принцип се състоят от параболично огледало (огледало, което има формата на ротационен параболоид) и светлинен източник, който се намира във фокуса. Още по важно е приложението на параболичните рефлектори в астрономията. Ако един сноп лъчи е успореден на оста на параболата, съгласно доказаното след отразяване от параболата всички лъчи ще минат през фокуса ѝ. Най-големите телескопи в света са построени върху този принцип. Най-лесно параболичен телескоп може да се построи, като се вземе цилиндър, пълен с живак, и се завърти около оста си. Съгласно доказаното в края на §1 от гл. 6 живакът ще приеме формата на ротационен параболоид. С такъв телескоп могат да се наблюдават само звезди, които са разположени близко до зенита.

§ 6. ХИПЕРБОЛИЧНИТЕ ФУНКЦИИ И ХИПЕРБОЛАТА

Окръжността с уравнение

(1) $$x^2+y^2=r^2 \qquad (r>0),$$

е елипса. Наистина, ако в уравнението на елипсата (5.4) поставим $a=b=r$, ще получим след освобождаване от знаменателя (1). Може да се каже, че окръжността с радиус r е елипса, двете полуоси a и b на която са равни на r.

Аналогично, ако в уравнението на хиперболата (5.10) поставим $a=b=r>0$, ще получим, след като се освободим от знаменателя

(2) $$x^2-y^2=r^2.$$

Кривата с уравнението (2) се нарича *равнораменна хипербола* (*с рамо r*). Както е и взаимоотношението на окръжността с елипсите, такова е и взаимоотношението на равнораменната хипербола с хиперболите.

Читателят познава важната връзка, която съществува между тригонометричните функции и окръжността. Да отбележим например, че за произволен ъгъл t точката с координати

$$x = r\cos t,$$
$$y = r\sin t$$

лежи на окръжността (1). Нещо повече, всяка точка $M(x, y)$ от окръжността може да се получи по този начин. Достатъчно е за тази цел да означим с t кой да е от ъглите, които радиусът OM сключва с Ox.

Като се използува съотношението

$$\operatorname{ch}^2 t - \operatorname{sh}^2 t = 1$$

(вж. §12, гл. 3), не е трудно да се съобрази, че за всяко t точката с координати

$$(3) \qquad x = r\operatorname{ch} t, \quad y = r\operatorname{sh} t$$

лежи върху равнораменната хипербола (2). Тъй като по определение $\operatorname{ch} t = \frac{e^t + e^{-t}}{2} > 0$, всички точки от вида (3) лежат върху десния клон на хиперболата.

Да изберем сега едно число $t_1 \neq t$. Тогава точката с координати

$$(4) \qquad x = r\operatorname{ch} t_1, \quad y = r\operatorname{sh} t_1$$

също лежи върху хиперболата. Ще покажем, че тези две точки са различни. Ако допуснем противното, ще имаме

$$\operatorname{ch} t = \operatorname{ch} t_1$$
$$\operatorname{sh} t = \operatorname{sh} t_1.$$

Като съберем тези равенства и вземем пред вид, че по определение

$$\operatorname{ch} t = \frac{e^t + e^{-t}}{2}, \ \operatorname{sh} t = \frac{e^t - e^{-t}}{2},$$

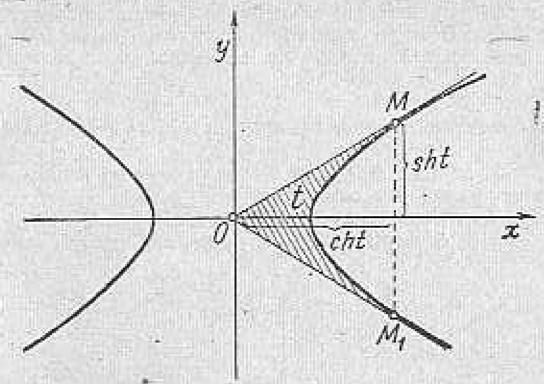
ще получим $e^t = e^{t_1}$, откъдето $t = t_1$, което противоречи на предположението, че $t_1 \neq t$.

И така за всяко t равенствата (3) дават координатите на една точка от равнораменната хипербола (2) и за различни числа t се получават различни точки от десния клон на тази крива.

Интересно е, че по този начин се получава целият десен клон на равнораменната хипербола. Да покажем, че това е така за онази негова част, която лежи над абсцисната ос (черт. 118). При $t = 0$ равенствата (3) очевидно дават точката $(r, 0)$ от хиперболата. Когато t расте неограничено (чрез положителни стойности), имаме

$$\operatorname{ch} t = \frac{e^t + e^{-t}}{2} \to +\infty, \ \operatorname{sh} t = \frac{e^t - e^{-t}}{2} \to +\infty.$$

и следователно за произволно големи t равенствата (3) дават произволно отдалечени от началото точки от хиперболата.



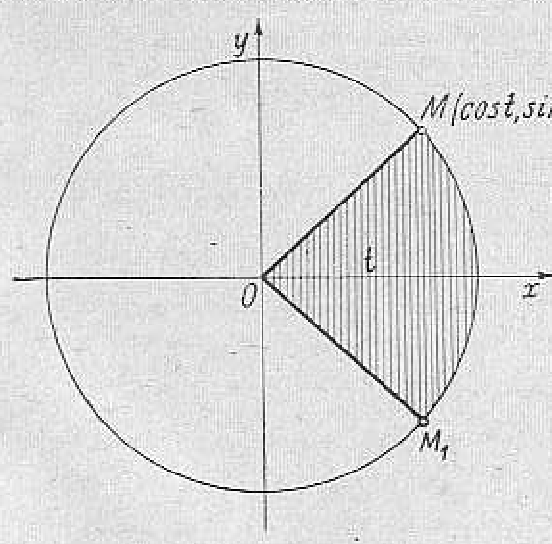
Черт. 118

От друга страна, хиперболичните функции са непрекъснати и следователно при изменението на t в интервала $(0, \infty)$ точката с координати (3) ще опише една непрекъсната крива. Тъй като тази непрекъсната крива лежи върху хиперболата, минава през точката $(r, 0)$ и съдържа произволно отдалечени от началото точки от горната половина на десния ѝ клон, ясно е, че докато t пробягва интервала $[0, \infty)$, точката, дадена от (3), ще трябва да пробяга цялата горна част на десния клон.

Да разгледаме единичната окръжност

$$(5) \qquad x^2 + y^2 = 1$$

и произволна точка $M(x, y)$ върху горната ѝ половина. Координатите (x, y) на тази точка могат да се представят във вида $x = \cos t$, $y = \sin t$, където t е ъгълът MOx. Особено интересно е, че t е равно също и на лицето на сектора OMM_1, където M_1 е симетрична на M относно абсцисната ос (черт. 119).



Черт. 119

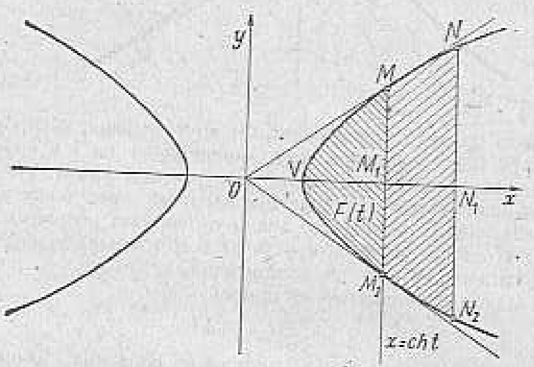
Аналогично стоят нещата с хиперболичните функции и единичната равнораменна хипербола. *Нека* OMM_1 *е симетричен относно оста* Ox *сектор с лице* t, *който е ограничен отдясно с дъга от хиперболата*

(6) $$x^2-y^2=1$$

(черт. 118). *Тогава точката с координати* $(\operatorname{ch} t,\ \operatorname{sh} t)$ *е най-горната точка* M *на този сектор.*

Доказателството на това твърдение е аналогично на начина, по който в §2 на гл. 6 намерихме лицето на кръга.

За произволно $t \geq 0$ означаваме с $F(t)$ лицето на сегмента, заграден от десния клон на хиперболата (6) и от вертикалната права $x=\operatorname{ch} t$ (черт. 120).



Черт. 120

Очевидно нарастването $F(t+h)-F(t)$ съвпада с лицето на криволинейния трапец MM_2N_2N, т. е.

(7) $$F(t+h)-F(t)=M_1N_1 \cdot y_{\text{ср.}},$$

където $y_{\text{ср.}}$ е „средната" височина на криволинейния трапец. Тъй като $M_1N_1=\operatorname{ch}(t+h)-\operatorname{ch} t$, от (7) получаваме

(8) $$\frac{F(t+h)-F(t)}{h}=\frac{\operatorname{ch}(t+h)-\operatorname{ch} t}{h}\, y_{\text{ср.}}$$

Но $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\operatorname{ch}(t+h)-\operatorname{ch} t}{h}=(\operatorname{ch} t)'=\operatorname{sh} t$ и $\lim\limits_{h\to 0} y_{\text{ср.}}=2\operatorname{sh} t$. Ето защо

$$\lim_{h\to 0}\frac{F(t+h)-F(t)}{h}=\operatorname{sh} t\, 2\operatorname{sh} t=2\operatorname{sh}^2 t,$$

т. е. $F'(t)=2\operatorname{sh}^2 t$. Последното равенство показва, че $F(t)$ е една примитивна на $\operatorname{sh}^2 t$. Ето защо

$$F(t)=2\int \operatorname{sh}^2 t\, dt=2\int\frac{\operatorname{ch} 2t-1}{2}\, dt$$

$$=\int \operatorname{ch} 2t\, dt-\int dt=\frac{1}{2}\cdot \operatorname{sh} 2t-t+c.$$

За да намерим константата c, полагаме $t=0$ и получаваме $0=0+c$, поради което

(9) $$F(t)=\frac{1}{2}\operatorname{sh} 2t-t=\operatorname{sh} t\operatorname{ch} t-t.$$

И така лицето на сегмента VMM_2 се дава от формула (9). За да намерим лицето S на сектора OMM_2, трябва от лицето на триъгълника OMM_2 да извадим $F(t)$. Следователно

$$S=\frac{1}{2}\,OM_1\,MM_2-\operatorname{sh} t\operatorname{ch} t+t$$

$$=\frac{1}{2}\operatorname{ch} t\,.\,2\operatorname{sh} t-\operatorname{sh} t\operatorname{ch} t+t$$

$$=t$$

и твърдението е доказано.

§ 7. ПОЛЯРНИ УРАВНЕНИЯ НА КОНИЧНИТЕ СЕЧЕНИЯ

За да получим законите на Кеплер, се нуждаем от полярните уравнения на коничните сечения. При това началото на координатната система трябва да се избере в един от фокусите на коничното сечение.

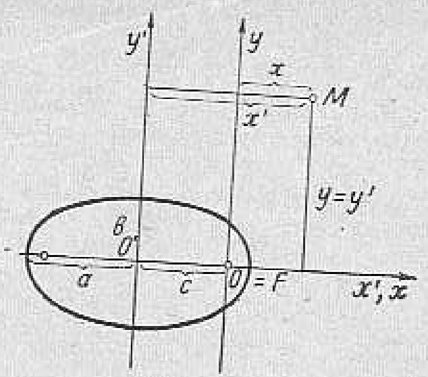
Вече видяхме в §2 как по дадено декартово уравнение на една крива се намира полярното ѝ уравнение. В декартовото уравнение на кривата x и y се заместват с (2.1). По този начин, като изходим от уравненията (5.4), (5.6) и (5.10) на коничните сечения, можем да получим техни полярни уравнения. Но нашата цел е да получим полярни уравнения на коничните сечения, при които началото на координатната система е в един от фокусите. Ето защо първо ще намерим декартовите уравнения на тези криви относно координатна система с начало в някой от фокусите.

Да разгледаме най-напред елипсата с полуоси a и b и фокусно разстояние $2c$ $(a>b>0,\ c>0)$. Избираме координатната система Oxy с връх в десния фокус (черт. 121). Да разгледаме освен това „стандартната" координатна система $O'x'y'$ с начало в центъра на елипсата. Както вече знаем, уравнението на елипсата относно $O'x'y'$ е

(1) $$\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}=1.$$

Очевидно връзката между координатите (x, y) и (x', y') на произволна точка M от равнината се дава от формулите

(2) $$x'=x+c,\quad y'=y.$$



Черт. 121

Като заместим така написаните изрази за x' и y' в (1), ще получим уравнението на елипсата относно фокалната координатна система Oxy. По този начин добиваме

$$\frac{x^2+2cx+c^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

откъдето след освобождаване от знаменателя намираме

$$b^2x^2+2b^2cx+b^2c^2+a^2y^2=a^2b^2,$$

което след прости преобразования дава

$$a^2(x^2+y^2)=(a^2-b^2)x^2-2b^2cx+b^2(a^2-c^2).$$

Като вземем пред вид връзката (5.5) $a^2=b^2+c^2$, получаваме

$$a^2(x^2+y^2)=c^2x^2-2cxb^2+b^4,$$

или, което е все същото,

$$a^2(x^2+y^2)=(b^2-cx)^2.$$

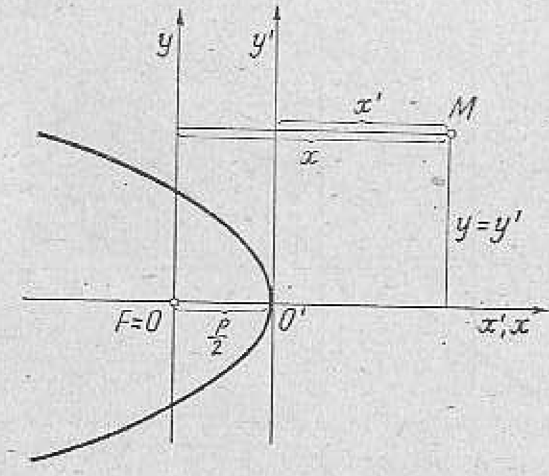
Като разделим двете страни на последното равенство с a^2, добиваме окончателно

(3) $$x^2+y^2=\left(\frac{b^2}{a}-\frac{c}{a}x\right)^2,$$

което е уравнението на елипсата относно „фокалната" координатна система Oxy.

Преминаваме към фокалното уравнение на параболата. С оглед да се подчертае приликата между трите конични сечения ще разположим параболата както на черт. 122. Като вземе пред вид (5.6), читателят лесно ще съобрази, че уравнението на разглежданата парабола относно координатната система $Ox'y'$ ще бъде

(4) $$y'^2=-2px'.$$



Черт. 122

Освен това връзката между координатите (x, y) и (x', y') на произволна точка M се дава от формулите

(5) $$x'=x-\frac{p}{2},\quad y'=y.$$

Като заместим така написаните изрази за x' и y' в (4), ще получим уравнението на параболата относно координатната система Oxy. По този начин добиваме

$$y^2=-2p\left(x-\frac{p}{2}\right),$$

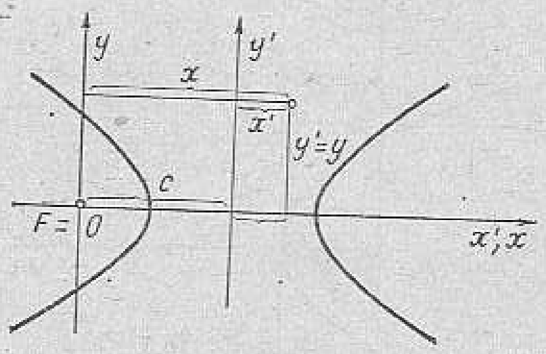
или, което е все същото, $y^2=-2px+p^2$. Като прибавим към двете страни на това равенство x^2, ще получим

(6) $$x^2+y^2=(p-x)^2,$$

което е уравнението на параболата относно координатната система Oxy.

Накрая да разгледаме хиперболата с полуоси a и b и фокусно разстояние $2c$ ($a>0, b>0, c>0$). Избираме координатните системи както на черт. 123. Съгласно (5.10) уравнението на хиперболата относно $Ox'y'$ ще бъде

$$\frac{x'^2}{a^2}-\frac{y'^2}{b^2}=1. \tag{7}$$



Черт. 123

Тъй като връзката между координатите (x, y) и (x', y') на произволна точка M се дава от формулите

$$x'=x-c,$$
$$y'=y,$$

от (7) получаваме за уравнението на хиперболата относно Oxy:

$$\frac{x^2-2cx+c^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,$$

което след преобразования, аналогични на тези при елипсата, дава окончателно

$$x^2+y^2=\left(\frac{b^2}{a}-\frac{c}{a}x\right)^2. \tag{8}$$

Един поглед върху уравненията (3), (6) и (8) показва, че те са частни случаи на следното уравнение

$$x^2+y^2=(p-ex)^2 \qquad (p>0,\ e\geq 0), \tag{9}$$

което се нарича фокално уравнение на коничните сечения. Константата p често се нарича *параметър* на коничното сечение (9), а e — *ексцентрицитет.* Ако в (9) положим $x=0$, ще получим $y^2=p^2$ и следователно p има прост геометричен смисъл. Именно

p е ординатата на онази точка от коничното сечение, която се намира точно над фокуса му.

Тъй като при елипсата имаме $c<a$, ексцентрицитетът e на тази крива удовлетворява неравенството $0\leq e<1$. От (6) следва, че ексцентрицитетът e на параболата е единица. При хиперболата пък имаме $e>1$.

Уравнението (9) изтъква еднаквата природа на коничните сечения. Видът на сечението се определя от стойността на ексцентрицитета. Да отбележим, че най-малко ексцентричната елипса — окръжността, има ексцентрицитет нула. Колкото повече ексцентрицитетът на една елипса се приближава до 1, елипсата става толкова по-разтегната. Ако в (9) държим p фиксирано и оставим e да клони към 1 (чрез стойности, по-малки от 1), левият фокус на елипсата ще се отдалечава неограничено от началото. Фигуративно казано, при $e=1$ „фокусът е в безкрайността" и тогава кривата е парабола. Ако оставим e да расте след единицата, част от кривата „ще отиде оттатък безкрайността, т. е. ще се появи в дясната част на равнината", и ще получим хипербола.

Накрая да намерим полярното уравнение на коничните сечения. За тази цел в (9) ще поставим

$$x=\rho\cos\theta,$$
$$y=\rho\sin\theta$$

и ще получим $\rho^2=(p-e\rho\cos\theta)^2$, откъдето

$$\rho=\frac{p}{1+e\cos\theta}, \tag{10}$$

или

$$\rho=-\frac{p}{1-e\cos\theta}, \tag{11}$$

т. е. коничното сечение (9) се състои от онези и само онези точки, полярните координати на които удовлетворяват поне едно от уравненията (10) или (11).

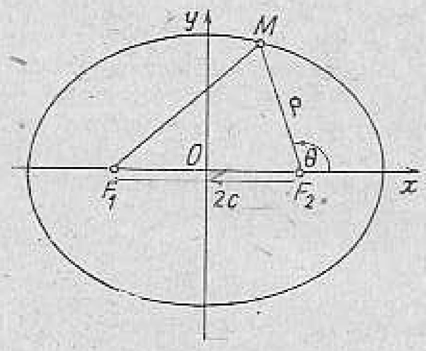
Разбира се, не е приятно точките на една крива да се изчисляват от две уравнения. За щастие тук може да се мине с кое да е от уравненията (10) или (11), понеже всяка точка, която се дава от някое от тях, се дава и от другото. Ще се убедим, че точките, давани от (11), се дават и от (10), което ще ни позволи да се ограничим само с (10). Нека някоя точка M има двойка полярни координати (ρ, θ), които удовлетворяват (11). Точката M има и много други двойки полярни координати (вж. §2). Ще покажем, че двойката полярни координати $(-\rho, \theta+\pi)$ на M удовлетворяват (10). Наистина

$$\frac{p}{1+e\cos(\theta+\pi)}=\frac{p}{1-e\cos\theta}=-\left(\frac{p}{1-e\cos\theta}\right)=-\rho,$$

тъй като по условие ρ се изразява чрез θ съгласно (11).

И така *полярното уравнение на коничните сечения е* (10).

Да отбележим, че уравнението (10) може да се получи и директно, като се изхожда направо от характеристиката на коничните сечения като геометрични места, дадена в §4. Ще покажем как това може да стане за елипсата. Нека M е произволна точка от елипсата с полуоси a и b. От триъгълника F_1F_2M (черт. 124), като приложим косинусовата теорема, получаваме



Черт. 124

$$F_1M^2=\rho^2+4c^2-4\rho c\cos(\pi-\theta). \tag{12}$$

Но $\rho+F_1M=2a$ и (12) дава

$$(2a-\rho)^2=\rho^2+4c^2+4\rho c\cos\theta,$$

откъдето $a^2-a\rho=c^2+\rho c\cos\theta$ и

$$\rho=\frac{a^2-c^2}{a+c\cos\theta}=\frac{b^2}{a+c\cos\theta}=\frac{\frac{b^2}{a}}{1+\frac{c}{a}\cos\theta}=\frac{p}{1+e\cos\theta},$$

което е полярното уравнение на елипсата.

§ 8. НАМИРАНЕ ЛИЦЕТО НА ЕЛИПСАТА ПО ЗАДАДЕНО ПОЛЯРНО УРАВНЕНИЕ

За да изведем единия от законите на Кеплер, имаме нужда да можем да изразяваме лицето на елипсата, когато са зададени нейният параметър p и ексцентрицитетът ѝ e. От (7.3) и (7.9) следва, че

$$\frac{b^2}{a}=p,\qquad \frac{c}{a}=e. \tag{1}$$

Освен това съгласно (5.5) имаме

$$a^2=b^2+c^2. \tag{2}$$

От системата уравнения (1) и (2) ще намерим a и b. За тази цел от второто от уравненията (1) определяме c, заместваме в (2) и получаваме $a^2=b^2+e^2a^2$ или $b^2=a^2(1-e^2)$. Ако така полученият израз за b^2 заместим в първото от уравненията (1), ще получим $a(1-e^2)=p$, откъдето

$$a=\frac{p}{1-e^2}. \tag{3}$$

Заместваме така намереното a в първото от уравненията (1) и добиваме $b^2=\frac{p^2}{1-e^2}$ и следователно

$$b=\frac{p}{\sqrt{1-e^2}}. \tag{4}$$

Съгласно формула (16) от §2 на гл. 6 лицето S на елипсата се дава с формулата $S=\pi ab$. Ето защо (3) и (4) дават

$$S=\frac{\pi p^2}{(1-e^2)^{\frac{3}{2}}}. \tag{5}$$

§ 9. ЗАКОН ЗА ГРАВИТАЦИЯТА

Откритият от Нютон закон за гравитацията гласи:

Всеки две тела с маси m_1 и m_2 се привличат със сила F, която е право пропорционална на масата на всяко от тях и е обратно пропорционална на квадрата от разстоянието.

По-точно този закон се дава от формулата

$$F = k\frac{m_1 m_2}{r^2}, \tag{1}$$

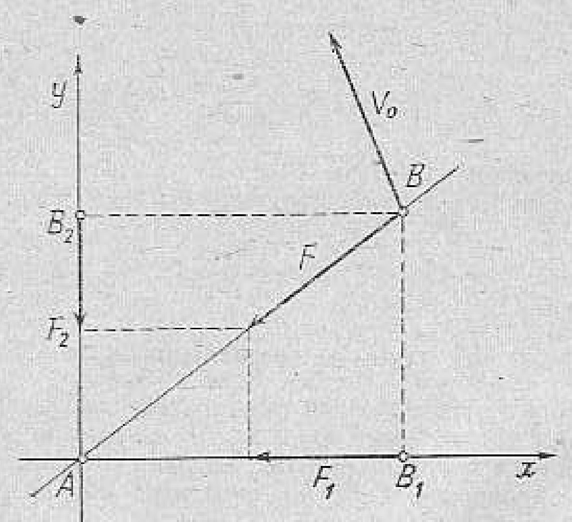
където m_1 и m_2 са масите на телата, r е разстоянието между тях, а k е един коефициент на пропорционалност, наречен *гравитационна* константата. Коефициентът k не зависи нито от масите на телата, нито от разстоянието между тях.

§ 10. ДИФЕРЕНЦИАЛНИ УРАВНЕНИЯ НА ДВИЖЕНИЕТО НА ЕДНА ПЛАНЕТА

Да си мислим, че в пространството има две тела A и B с маси, съответно равни на m_A и m_B. Върху всяко от тях ще действува силата на привличане на другото тяло, чиято големина е дадена от формулата (9.1) и е насочена към другото тяло.

Да фиксираме една пространствена координатна система с начало в точката A. Интересуваме се от закона на движение на точката B по отношение на тази координатна система. В специалния случай, когато A е Слънцето, а B е някоя планета, това означава че се интересуваме от движението на планетата по отношение на Слънцето.

Нека тялото B има в момента t_0 начална скорост V_0 (черт. 125). Да разгледаме равнината, определена от точките A и B, и от тази



Черт. 125

скорост. Силата F, която действува върху B, лежи в същата равнина. Поради това точката B ще остане през време на цялото движение в тази равнина. Следователно *задачата, която имаме да решаваме, е равнинна.*

В глава 7 изучавахме праволинейни движения и подробно видяхме как по дадена сила може да се напише диференциалното уравнение на едно такова движение. *Изучаването на равнинните движения се свежда до изучаване на праволинейните.* Ако проектираме точката B върху една произволна права, то проекцията B_1 на B ще се движи по закон, който се определя от сила, равна на проекцията F_1 на силата F, действуваща на B (черт. 125). В нашия специален случай ще проектираме точката B върху координатните оси Ox и Oy. Очевидно е, че ако познаваме движенията на тези проекции, с това познаваме и движението на точката B. Движението на всяка от проекциите се определя от своя закон. Нека $x=x(t)$ и $y=y(t)$ са тези два закона. Тогава в момента t точката B има координати $x(t)$ и $y(t)$. И така, за да получим диференциалните уравнения на движението на точката B, трябва да приложим основния закон на динамиката към нейните проекции. Силите, които действуват върху проекциите B_1 и B_2, са проекциите на гравитационната сила F.

Ще започнем с намирането на тези проекции. Нека координатите на B в произволен момент t са $x(t)$ и $y(t)$. От правоъгълния триъгълник AB_1B (черт. 126) намираме

$$r = AB = \sqrt{(x(t))^2 + (y(t))^2}. \tag{1}$$

Тогава съгласно закона на Нютон за гравитацията за големината на силата F намираме

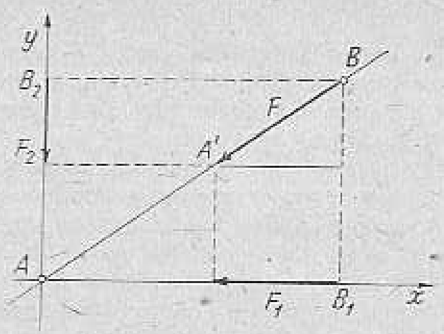
$$F = k\frac{m_A m_B}{(x(t))^2 + (y(t))^2}. \tag{2}$$

За да намерим големината на проекцията на F върху оста Ox, ще разгледаме подобните триъгълници AB_1B и $A'B'B$. От подобието следва, че $\frac{A'B}{AB} = \frac{A'B'}{AB_1}$ и като използуваме (1), получаваме

$$\frac{F}{\sqrt{(x(t))^2 + (y(t))^2}} = \frac{A'B'}{x(t)},$$

откъдето

$$A'B' = \frac{F \cdot x(t)}{\sqrt{(x(t))^2 + (y(t))^2}}.$$



Черт. 126

В последната формула $A'B'$ е големината на проекцията F_1 на F. Понеже посоката на F_1 е противна на тази на AB_1, проекцията F_1 на F ще се получи от $A'B'$ чрез умножение с -1, т. е.

$$F_1 = -\frac{F \cdot x(t)}{\sqrt{(x(t))^2+(y(t))^2}}$$

и като използуваме (2), получаваме

$$(3) \qquad F_1 = -k\, m_A m_B \frac{x(t)}{(\sqrt{(x(t))^2+(y(t))^2})^3}.$$

Аналогично намираме и втората проекция F_2 на F:

$$(4) \qquad F_2 = -k\, m_A m_B \frac{y(t)}{(\sqrt{(x(t))^2+(y(t))^2})^3}.$$

Вече сме готови да напишем диференциалните уравнения на движенията на проекциите B_1 и B_2:

$$m_B x''(t) = -k\, m_A m_B \frac{x(t)}{((x(t))^2+(y(t))^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$m_B y''(t) = -k\, m_A m_B \frac{y(t)}{((x(t))^2+(y(t))^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Като съкратим на m_B и изпуснем независимата променлива, получаваме окончателно

$$(5) \qquad x'' = -\alpha \frac{x}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}, \qquad y'' = -\alpha \frac{y}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}},$$

където $\alpha = k m_A > 0$, зависи от A, но не и от B (тази бележка играе основна роля при третия закон на Кеплер).

Диференциалните уравнения (5) описват движението на точката B. Трябва да помним, че в тази система от уравнения x и y са функции на времето t и производните x'' и y'' са пресметнати по отношение на t. При всяко начално положение и начална скорост на B уравненията (5) еднозначно определят функциите $x(t)$ и $y(t)$, т. е. закона на движението на точката B.

Няма да разглеждаме въпроса за решаване на системата (5), т. е. няма да се интересуваме от закона на движение на точка B, а ще се ограничим само с извеждане на законите на Кеплер от (5).

§ 11. ЗАКОН ЗА ПЛОЩИТЕ

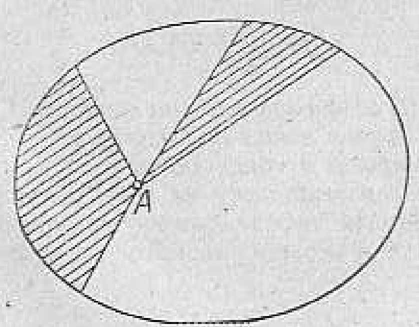
Законът за площите, който понякога се нарича първи закон на Кеплер, гласи:

При движението на тяло B от слънчевата система около Слънцето A под действието на силата на гравитацията отсечката AB описва за равни интервали от време равни площи.

Оттук вече следва известна качествена характеристика за движението на тялото B. При дадено движение на B законът за площите може да бъде спазен само ако скоростта на B е по-голяма, когато B се намира по-близо до A (черт. 127). В частност виждаме, че една планета се движи с най-голяма скорост, когато е най-близко до Слънцето, и обратно, скоростта е най-малка, когато планетата е най-далече от него.

Да фиксираме един момент t_0 и за всяко $t > t_0$ да означим с $\Phi(t)$ лицето на площта, която радиусът AB е описал при движението на B от момента t_0 до момента t.

Ще намерим производната на функцията $\Phi(t)$. За тази цел да означим с $(R(t), Q(t))$ полярните координати на B в произво-

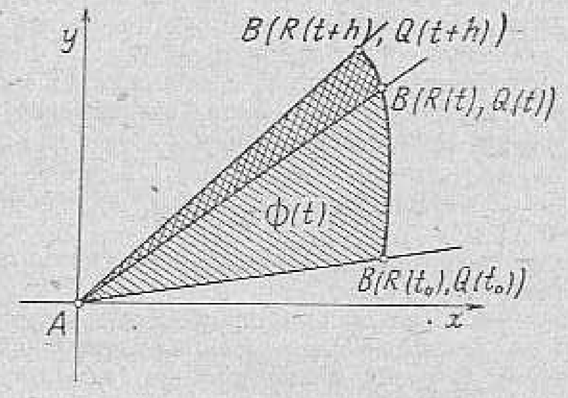


Черт. 127

лен момент t. За произволно $h \neq 0$ означаваме с $S(h)$ лицето на сектора с върхове A, $B(R(t), Q(t))$, $B(R(t+h), Q(t+h))$ (черт. 128).

Очевидно

$$\Phi(t+h)-\Phi(t)=S(h). \tag{1}$$



Черт. 128

От друга страна, секторът, който разглеждаме, има централен ъгъл $Q(t+h)-Q(t)$, поради което

$$S(h)=\frac{1}{2}\,R_{cp}^2\,(Q(t+h)-Q(t)), \tag{2}$$

където R_{cp} е средното разстояние между A и B в интервала от време $[t, t+h]$. От (1) и (2) след деление с h получаваме

$$\frac{\Phi(t+h)-\Phi(t)}{h}=\frac{1}{2}\,R_{cp}^2\,\frac{Q(t+h)-Q(t)}{h}. \tag{3}$$

Ако в (3) оставим h да клони към нула, ще получим

$$\Phi'(t)=\frac{1}{2}\,R^2(t)\,.\,Q'(t). \tag{4}$$

Функцията $\Phi'(t)$ се нарича *площна скорост*. Очевидно точната формулировка на първия закон на Кеплер е.

Площната скорост е константа.

Да се заемем с извеждането на този закон. След като разполагаме със системата диференциални уравнения (10.5), това не е никак трудно. Ако умножим първото от уравненията на тази система с y, второто с x и извадим намерените резултати, ще получим

$$xy''-x''y=0. \tag{5}$$

Лесно се вижда, че лявата страна на (5) представлява точно производната на $xy'-x'y$, така че (5) добива вида $(xy'-x'y)'=0$. Ето защо ще бъде в сила равенството

$$xy'-x'y=2C, \tag{6}$$

където C е някаква константа.

За да получим закона за площите, ще запишем равенството (6) в полярни координати. Полярните координати на B в произволен момент t бяха вече означени с $R(t)$ и $Q(t)$. Както знаем, те са свързани с декартовите координати (x, y) на B в момента t посредством формулите

$$\begin{aligned} x&=R(t)\cos Q(t),\\ y&=R(t)\sin Q(t). \end{aligned} \tag{7}$$

Като диференцираме равенствата (7), ще получим

$$\begin{aligned} x'&=R'(t)\cos Q(t)-R(t)\sin Q(t)\,.\,Q'(t),\\ y'&=R'(t)\sin Q(t)+R(t)\cos Q(t)\,.\,Q'(t). \end{aligned} \tag{8}$$

Съгласно (7) и (8) ще имаме

$$\begin{aligned} xy'-x'y&=RR'\cos Q\sin Q+R^2\cos^2 Q\,.\,Q'\\ &\quad-RR'\cos Q\,\sin Q+R^2\sin^2 Q\,.\,Q'=R^2(t)\,.\,Q'(t). \end{aligned}$$

От последните равенства и от (6) следва, че $R^2(t)\,.\,Q'(t)=2C$, което заедно с (4) показва, че

$$\Phi'(t)=C \tag{9}$$

и площната скорост действително се оказа константа.

Да отбележим, че при извода на закона за площите централна роля играеше следствието (5) от системата диференциални уравнения (10.5). Същото следствие бихме получили и ако системата (10.5) би имала следния по-общ вид

$$\begin{aligned} x''&=x\,.\,f(x, y),\\ y''&=y\,.\,f(x, y), \end{aligned} \tag{10}$$

където f е произволна функция. Не е трудно да се съобрази, че системата (10) описва движението на точка под действието на сила, която е постоянно насочена към точката A. Такива сили се наричат в механиката *централни*. И така законът за площите е изпълнен в общия случай на централна сила. Не е трудно да се види, че ако една точка B се движи около някакъв център A по такъв начин, че да е в сила законът за площите, силата, под действието на която се движи B, е постоянно насочена към центъра. Така виждаме, че *една точка B изпълнява при движението си закона за площите тогава и само тогава, когато се движи под действието на централна сила.*

§ 12. ОРБИТИ НА ПЛАНЕТИТЕ

Орбитите на планетите са конични сечения, в един от фокусите на които се намира Слънцето.

За да докажем този закон, ще намерим полярното уравнение на кривата, която точка B описва при движението си. Изходен момент е системата (10.5). По-точно ще използваме уравнението

(1) $$x'' = \frac{-\alpha x}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

и закона за площите във формата

(2) $$R^2(t).Q'(t) = 2C,$$

която следва от (11.4) и (11.9).

Нека полярното уравнение на орбитата на точка B е

(3) $$\rho = \rho(\theta),$$

където $\rho(\theta)$ е една неизвестна функция. Задачата е да се намери функцията $\rho(\theta)$. За тази цел ще намерим едно диференциално уравнение за функцията $\rho(\theta)$, като използваме намерените вече уравнения (1) и (2). Да отбележим, че в търсеното диференциално уравнение диференцирането трябва да става относно θ, а в уравненията (1) и (2) производните са относно времето t. Ето защо при извеждането на диференциалното уравнение за $\rho(\theta)$ ще се наложи многократно да се използва правилото за диференциране на функция от функция. Може да се каже, че това е един от главните моменти.

Вече знаем полярното уравнение на коничните сечения

(4) $$\rho = \frac{p}{1+e\cos\theta}$$

(вж. (7.10)). Следователно (3) трябва да има вида (4), т. е. неизвестната функция, която търсим, трябва да бъде от вида $\rho(\theta) = \frac{p}{1+e\cos\theta}$. Тъй като функцията $\frac{1}{\rho(\theta)} = \frac{1+e\cos\theta}{p}$ е значително по-проста от $\rho(\theta)$, няма да се придържаме стриктно към програмата от предния абзац, а ще намерим диференциално уравнение,

в което неизвестна функция е $\frac{1}{\rho(\theta)}$. И така да положим

(5) $$u(\theta) = \frac{1}{\rho(\theta)}.$$

Да напомним, че в §11 означихме с $(R(t), Q(t))$ полярните координати на точката B в момента T. Тъй като съгласно (3) $\rho(\theta)$ е полярният радиус на B, когато полярният ъгъл е θ, функциите $R(t)$, $Q(t)$ и $\rho(\theta)$ ще бъдат свързани с равенството

(6) $$R(t) = \rho(Q(t)).$$

От (5) и (6) добиваме и следната връзка:

(7) $$R(t) = \frac{1}{u(Q(t))}$$

между $R(t)$, $Q(t)$ и $u(\theta)$. Да отбележим още, че по силата на (7) законът за площите (2) може да се запише и във вида

(8) $$Q'(t) = 2C\,u^2(Q(t)).$$

Ако сега диференцираме (7), ще получим

(9) $$R'(t) = -\frac{u'(Q(t)).Q'(t)}{u^2(Q(t))},$$

което заедно с (8) дава

(9) $$R'(t) = -2C\,u'(Q(t)).$$

В първото от равенствата (11.8) заместваме R, Q' и R' с равните им от (7), (8) и (9) и получаваме

$$x' = -2C\,u'(Q).\cos Q - \frac{1}{u(Q)}\sin Q\,.\,2C\,.\,u^2(Q)$$

или

(10) $$x' = -2C\,(u'(Q)\cos Q + u(Q)\sin Q),$$

където за краткост вместо $Q(t)$ е писано Q.

Ако диференцираме (10), ще получим

$$\begin{aligned} x'' = -2C\,(u''(Q)\,.\,Q'\,.\cos Q - u'(Q)\,.\sin Q\,.\,Q' \\ + u'(Q)\,.\,Q'\,.\sin Q + u(Q)\,.\cos Q\,.\,Q'), \end{aligned}$$

откъдето, като използваме (8), добиваме

(11) $$x'' = -4C^2u^2(Q)\cos Q\,(u''(Q) + u(Q)).$$

По този начин лявата страна на (1) е изразена чрез функцията u и втората ѝ производна. За да направим същото и с дясната страна, ще заместим x и y с равните им от (11.7). Тогава

$$(12) \qquad -\frac{\alpha x}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{\alpha R(t) \cos Q(t)}{R^3(t)} = -\alpha u^2(Q) \cos Q,$$

където беше използувано още и (7).

Съгласно (1) десните страни на (11) и (12) трябва да са равни, т. е.

$$-4C^2 u^2(Q) \cos Q\,(u''(Q)+u(Q)) = -\alpha u^2(Q) \cos Q,$$

откъдето чрез деление на $-4C^2 u^2(Q) \cos Q$ получаваме

$$(13) \qquad u''(Q(t))+u(Q(t)) = \frac{\alpha}{4C^2}.$$

Тъй като (13) е изпълнено за всяко t и при изменението на t полярният ъгъл $Q(t)$ сигурно пробягва дефиниционната област на функцията (3), уравнението (13) ще бъде изпълнено за всяко θ от тази дефиниционна област. И така функцията u удовлетворява диференциалното уравнение

$$(14) \qquad u''+u = \frac{\alpha}{4C^2}.$$

Диференциалните уравнения от този тип изучихме в гл. 7. За да решим (14), трябва най-напред да решим хомогенното уравнение

$$(15) \qquad u''+u=0$$

и след това към общото решение на (15) да прибавим някакво частно решение на (14).

Вече знаем, че функциите, които удовлетворяват (15), са

$$(16) \qquad M \cos \theta + N \sin \theta,$$

където M и N са произволни константи, а (14) сигурно се удовлетворява от константата $\frac{\alpha}{4C^2}$. Ето защо общото решение на (14) е

$$(17) \qquad u = M \cos \theta + N \sin \theta + \frac{\alpha}{4C^2}.$$

Ако положим

$$(18) \qquad \frac{4C^2}{\alpha} = p,$$

общото решение (17) добива вида

$$(19) \qquad u = \frac{pM \cos \theta + pN \cos \theta + 1}{p}.$$

Нека сега $e \geq 0$ и θ_0 са двойка полярни координати на точката (pM, pN). Тогава

$$pM = e \cos \theta_0, \qquad pN = e \sin \theta_0$$

и като заместим тези изрази в (19), ще получим

$$u = \frac{e(\cos \theta \cos \theta_0 + \sin \theta \sin \theta_0)+1}{p},$$

откъдето

$$(20) \qquad u = \frac{1+e \cos(\theta-\theta_0)}{p}.$$

Разбира се, θ_0 е една константа. Без ограничение на общността можем да считаме, че тя е 0, тъй като можем да завъртим координатната система на ъгъл θ_0. И така всяко решение на (14) при подходяща координатна система има вида

$$(21) \qquad u = \frac{1+e \cos \theta}{p},$$

откъдето, като си припомним (5), виждаме, че полярното уравнение на орбитата на тяло от Слънчевата система действително има вида (4).

С това е доказано, че орбитите на планетите са конични сечения, в един от фокусите на които се намира Слънцето. Това твърдение е известно под названието втори закон на Кеплер.

Първият и вторият закон на Кеплер дават възможност по принцип да определяме положението на едно светило във всеки момент. За това са нужни три наблюдения на тялото. Наистина двете от тях са достатъчни, за да се определи равнината на движението, а след това трите дават възможност да се намери и орбитата, тъй като в (20) има само три неизвестни константи. По-нататък само две от наблюденията са достатъчни, за да се намери площната скорост и след това да се изчислява положението на светилото в произволен момент. Тъй като съгласно (20) видът на орбитата не се мени с времето, а площната скорост е постоянна, виждаме, че движенията на телата от Слънчевата система са периодични, когато орбитите им са елиптични. Това е и типичният наблюдаем случай, защото при параболична или хиперболична орбита светилото минава около Слънцето само веднаж.

Вече видяхме, че движението на една планета около Слънцето е периодично. Времето T, за което една планета прави пълна обиколка около Слънцето, се нарича *период* на тази планета.

Периодът на една планета може да се пресметне, като се раздели лицето на елипсата, по която тя обикаля, с площната скорост на планетата. Нека полярното уравнение на орбитата на планетата е

$$\rho=\frac{p}{1+e\cos\theta} \qquad (p>0,\ 0\leqq e<1). \tag{1}$$

От §8 знаем, че лицето S на елипсата с това уравнение се дава от формулата

$$S=\frac{\pi p^2}{(1-e^2)^{\frac{3}{2}}}. \tag{2}$$

Но съгласно (12.18) имаме

$$p=\frac{4C^2}{\alpha}, \tag{3}$$

където C е площната скорост на планетата (вж. 11.9)), а α е една константа, която ни най-малко не зависи от планетата (вж. (10.5)). Ако заместим p от (3) **в** (2) ще получим

$$S=\frac{16\pi}{\alpha^2}\cdot\frac{C^4}{(1-e^2)^{\frac{3}{2}}}. \tag{4}$$

Ето защо за периода T на планетата намираме

$$T=\frac{S}{C}=\frac{16\pi}{\alpha^2}\cdot\frac{C^3}{(1-e^2)^{\frac{3}{2}}}. \tag{5}$$

С оглед да дадем още едно физическо тълкуване на константата α ще напомним, че голямата полуос на елипсата (1) се дава от формулата $a=\frac{p}{1-e^2}$ (вж. (8.3)), която заедно с (3) дава

$$a=\frac{4}{\alpha}\cdot\frac{C^2}{1-e^2}. \tag{6}$$

Сега от (5) и (6) следва, че

$$\frac{T^2}{a^3}=\frac{4\pi^2}{\alpha}. \tag{7}$$

Да забележим, че от дясната страна на това равенство стои число, което ни най-малко не зависи от планетата. И така *отношението на квадрата на периода на една планета към куба на голямата полуос на орбитата ѝ не зависи от планетата.* Следователно това отношение е едно и също за всички планети. Това е третият закон на Кеплер.

Задачи към глава 8

1. Като се използуват полярни координати, да се намерят лицата на множествата, определени от неравенствата:

а) $(x^2+y^2)^2\leqq a^2xy \qquad (a>0).$

Отг. $\frac{1}{4}a^2$,

б) $(x^2+y^2)^4\leqq a^4y^4 \qquad (a>0).$

Отг. $\frac{\pi}{2}a^2$.

в) $\begin{cases} 0\leqq\theta\leqq\pi \\ 0\leqq\rho\leqq a(1+\cos\theta) \end{cases} \qquad (a>0)$

Отг. $\frac{3\pi}{4}a^2$.

2. Да се докаже, че за всяка точка $M(x, y)$ от кривата

$$x^2+y^2=(p-ex)^2$$

отношението на разстоянието от M до началото на координатната система и на разстоянието от M до правата с уравнение $x=\frac{p}{e}$ не зависи от M. Каква е стойността на тази константа?

Отг. e.

3. Без да се използува уравнението (7.9), да се изведат полярните уравнения на параболата и хиперболата.

4. Да се намери полярното уравнение на орбитата на една планета, като вместо първото от уравненията (10.5) се използува второто.

СЪДЪРЖАНИЕ

Любомир Николов Петрушев
Доц. Иван Рачев Проданов

ПЪРВИ СТЪПКИ В АНАЛИЗА

Редактор **доц. Друми Байнов**
Художник на корица **Георги Гаделев**

Художник-редактор **Магда Гедова**
Технически редактор **Симеон Айтов**
Коректор **Ева Близнашка**

Бълг. Издание I Л. Г. III 16 Темат. № 1386/74 г. Дадена за набор 2 X 1974 г. Подписана за печат 7. II. 1975 г. Излязла от печат 20. II. 1975 г. Формат 60×84/16 Печатни коли 19.25 Изд. коли 16,36 Тираж 10101 Поръчка № 1157 Цена 0,91 лв.

Държавно издателство **„Народна просвета“**
Д. П. „Г. Димитров“