ГЛАВА X

ДИФЕРЕНЦИАЛНО СМЯТАНЕ НА ФУНКЦИИ НА ДВЕ ПРОМЕНЛИВИ

Дефиницията на понятието функция на две и повече независими променливи в логическо отношение не се различава съществено от дефиницията на понятието функция на една променлива. Що се отнася до диференциалното и интегрално смятане на функциите на няколко независими променливи, то макар до голяма степен и да се развива по образеца, който ни дават функциите на една променлива, все пак в редица пунктове изисква разработката на някои нови идеи и методи. Оказва се обаче, че е достатъчно тези нови моменти да се развият за функциите на две променливи, след това те по правило без особени затруднения се пренасят за функциите на повече променливи. Поради това тази глава е посветена почти изключително на функциите на две независими променливи.

Теорията на функциите на няколко променливи, разбира се, има не по-малко значение за приложенията на математическия анализ от тази на функциите на една променлива, тъй като природните процеси, които отделните науки изучават, много често ни довеждат до необходимостта от разглеждане на функции, зависещи именно от няколко, а не само от една променлива.

§ 70. Точки в равнината и в n-мерното пространство

Преди да преминем към изучаването на функциите на две и повече независими променливи, ние ще се погрижим най-напред да придадем известна геометрична нагледност (доколкото това е възможно) на нашите разглеждания подобно на това, което правехме при функциите на една променлива. Тогава изобразявахме различните значения на аргумента като точки от една права, а на функционалните стойности съпоставяхме точки от една равнина, като получавахме по този начин т. нар. графика на дадената функция. Подобно нещо е удобно да бъде направено при функциите на две променливи. Що се отнася до функциите на три и особено до функциите на повече от три променливи, там геометричната нагледност вече се губи. Въпреки това редица идеи, почерпани от геометричния наглед, който имаме при функциите на две променливи, запазват своята сила и при функциите на произволен брой променливи. Ето защо най-подробно ще се спрем именно на функциите на две независими променливи.

Казваме, че ни е дадена функцията $f(x, y)$, когато на всяка двойка числа (x, y), взети от някакво множество M, е съпоставено съгласно някакво правило едно трето число, което означаваме с $f(x, y)$ и наричаме функционална стойност. Множеството M, което в случая представлява множество от двойки числа от вида (x, y), се нарича дефиниционно множество или дефиниционна област на дадената функция.

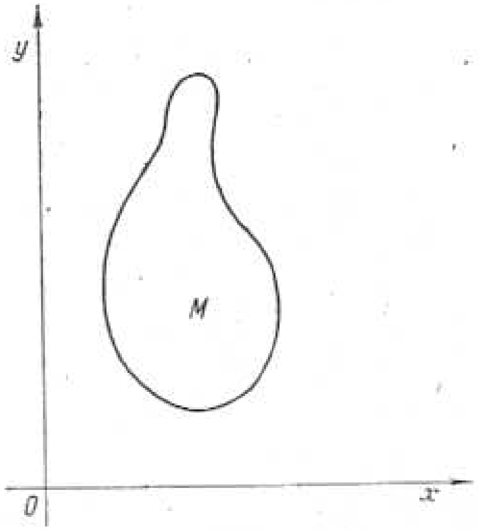
Тук, както виждаме, ролята на „аргумент" играят двете числа x и y или по-точно двойката числа (x, y), взети при това в определен ред — числото x е първата компонента, а числото y — втората компонента на аргумента. Ето защо говорим по-точно за наредена двойка реални числа (x, y). Като си спомним, че реалните числа изобразявахме като точки от една права, естествено стигаме до идеята наредените двойки числа пък да изобразяваме като точки от една равнина, в която е въведена правоъгълна координатна система Oxy. Тогава на всяка двойка числа (x, y) ще съответствува точката, за която тези две числа се явяват координати относно въведената координатна система, т. е. точката с абсциса x и ордината y. Обратно, на всяка точка от равнината ще съответствува една наредена двойка реални числа — двойката, образувана от абсцисата и ординатата на тази точка. По такъв начин ние можем винаги когато става дума за наредена двойка числа да употребяваме термина точка в равнината. Също така, когато говорим за множество от наредени двойки реални числа, можем да си служим с израза множество от точки в равнината.

Понякога подобно на това, което се прави в геометрията, ще означаваме дадена точка в равнината с една буква (обикновено главна латинска). Например ще казваме: дадена е точка P. Ако при това искаме изрично да отбележим и координатите на тази точка, ще я записваме, както в аналитичната геометрия: $P(x, y)$. По такъв начин разполагаме с три различни начина за означаване на една и съща наредена двойка реални числа.

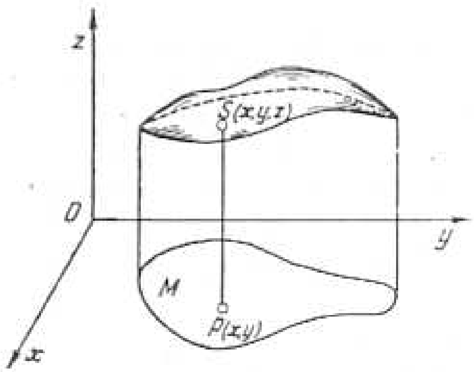
Що се отнася до графичното представяне на функция на две независими променливи, то за неговото осъществяване се налага да прибегнем вече до тримерното пространство. Това става по следния начин: Преди всичко аналогично на това, което имахме по-горе, наредените тройки реални числа се отъждествяват с точките на тримерното пространство, в което е въведена една правоъгълна координатна система $Oxyz$, така че на тройката числа (x, y, z) съответствува точката с абсциса x, ордината y и апликата z и обратно. (Тук също, разбира се, дадена точка (x, y, z) може да бъде записана във вида $P(x, y, z)$ или пък просто чрез P.)

Нека е дадена една функция $f(x, y)$ с дефиниционна област M. Множеството M като множество от наредени двойки реални числа може да бъде разгледано като множество от точки, лежащи в координатната равнина Oxy на тримерното пространство (черт. 54). Ако сега означим със

z функционалната стойност $f(x, y)$, т. е. ако въведем равенството $z=f(x, y)$, то на всяка точка $P(x, y)$ от M ще бъде съпоставена по една точка от пространството — именно точката $S(x, y, z)$. Когато точката P се мени в множеството M, точката S ще опише в пространството едно



Черт. 54



Черт. 55

множество (една „повърхнина", както бихме казали), което и представлява графичното изображение на дадената функция (черт. 55).

Нека отбележим още, че в математиката е приета следната абстракция: каквото и да бъде цялото положително число n, наредените n-орки реални числа от вида $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ също така се разглеждат като „точки" в едно пространство — те образуват т. нар. n-измеримо или n-

мерно пространство. Съгласно тази терминология реалната права е едномерно пространство, а равнината — двумерно пространство. Някои понятия от дву- и тримерното пространство се пренасят съвсем естествено за произволно n-мерно пространство. Така например, както е известно от аналитичната геометрия, разстоянието между две дадени точки $P'(x', y')$ и $P''(x'', y'')$ в равнината се дава с формулата

$$r(P',\ P'')=\sqrt{(x'-x'')^2+(y'-y'')^2},$$

а разстоянието между две точки $P'(x', y', z')$ и $P''(x'', y'', z'')$ в тримерното пространство — с формулата

$$r(P',\ P'')=\sqrt{(x'-x'')^2+(y'-y'')^2+(z'-z'')^2}.$$

Това е основание, когато са дадени две точки $P'(x_1', x_2', \ldots, x_n')$ и $P''(x_1'', x_2'', \ldots, x_n'')$ в n-мерното пространство, израза

$$(1)\qquad r(P',\ P'')=\sqrt{(x_1'-x_1'')^2+(x_2'-x_2'')^2+\cdots+(x_n'-x_n'')^2}$$

да наричаме по дефиниция **р а з с т о я н и е** между тези две точки.* Нека отбележим, че когато имаме две точки от реалната права, която разглеждаме като едноизмеримо пространство, т. е. когато са ни дадени две реални числа x' и x'', формулата (1) ни дава

$$r(x',\ x'')=\sqrt{(x'-x'')^2}=|x'-x''|,$$

резултат, който също така се съгласува с нашата представа за разстояние, тъй като числото $|x'-x''|$ не е нищо друго освен дължината на интервала, определен от точките x' и x'', т. е. дължината на отсечката, свързваща тези две точки.

Понятието разстояние между две точки ни позволява по съвсем естествен начин да дойдем и до понятието за сходяща редица от точки в n-мерното пространство. Именно *ще казваме, че редицата от точки*

$$(2)\qquad P_1,\ P_2,\ \ldots,\ P_k,\ \ldots$$

е сходяща и клони към дадена точка P_0, *когато разстоянието между точките* P_k *и* P_0 *клони към нула, т. е. когато редицата от числа*

$$(3)\qquad r(P_1,\ P_0),\ r(P_2,\ P_0),\ \ldots,\ r(P_k,\ P_0),\ \ldots$$

е сходяща и има за граница числото 0.

Горната дефиниция може да се изкаже и другояче. За простота да разгледаме случая на двумерното пространство. В този случай редицата (2) може да се запише подробно по следния начин:

$$P_1(x_1, y_1),\ P_2(x_2, y_2),\ \ldots,\ P_k(x_k, y_k),\ \ldots,$$

а общият член на редицата (3) ще има вида

---

* Когато в n-мерното пространство е въведено разстояние по показания начин, то се нарича n-мерно **е в к л и д о в о** пространство.

$$r(P_k,\ P_0)=\sqrt{(x_k-x_0)^2+(y_k-y_0)^2},$$

където с x_0 и y_0 са означени координатите на граничната точка P_0. Като вземем пред вид, от една страна, неравенствата

$$|x_k-x_0|\leqq\sqrt{(x_k-x_0)^2+(y_k-y_0)^2}$$

и

$$|y_k-y_0|\leqq\sqrt{(x_k-x_0)^2+(y_k-y_0)^2},$$

а, от друга, неравенството

$$\sqrt{(x_k-x_0)^2+(y_k-y_0)^2}\leqq|x_k-x_0|+|y_k-y_0|,$$

става ясно, че условието редицата (3) да клони към нула е равносилно с условието да клонят към нула редиците с общи членове $|x_k-x_0|$ и $|y_k-y_0|$. Това пък от своя страна означава, че *изискването редицата с общ член* (x_k, y_k) *да клони към точката* (x_0, y_0) *е равносилно с изискването двете редици от реални числа*

$$x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_k,\ \ldots$$

и

$$y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_k,\ \ldots$$

да бъдат сходящи и да клонят съответно към x_0 *и* y_0.

Разбира се, всичко това важи не само за редица от точки в равнината, но и за редица от точки в пространство с произволен брой измерения. По този начин условието за сходимостта на една редица от точки в n-мерното пространство се замества с условието за сходимост на n редици от реални числа — именно редиците, съставени от съответните компоненти на точките от дадената редица.

Ясно е сега, че *ако една редица от точки*

$$P_1,\ P_2,\ \ldots,\ P_k,\ \ldots$$

в равнината (или изобщо в n-мерното пространство) е сходяща и клони към точката P, то всяка нейна подредица

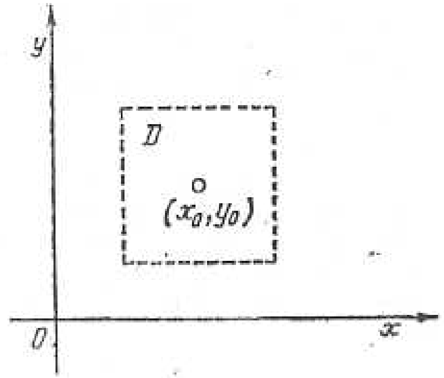
$$P_{k_1},\ P_{k_2},\ \ldots,\ P_{k_i},\ \ldots$$

е също сходяща и клони също към P.

§ 71. Видове точкови множества

Понятието околност на точка, което бяхме въвели за точките от реалната права, може да бъде въведено за точките от произволно n-мерно пространство. При това неговата роля във въпросите на математическия анализ е даже по-очевидна именно когато разглеждаме точки в пространство с две или повече измерения, отколкото при точките от реалната права.

Да се спрем отново на двумерното пространство. Нека е дадена точката (x_0, y_0). Да разгледаме един квадрат D (с произволна дължина на страната), страните на който са успоредни на координатните оси и който има за център (т. е. пресечна точка на диагоналите) точката (x_0, y_0) (черт. 56). Множеството от всички точки, влизащи в този квадрат, но нележащи върху страните му, ще наречем **о к о л н о с т** на точката (x_0, y_0).



Черт. 56

Ако дължината на страната на квадрата D означим с 2δ, то ясно е, че условието една точка (x, y) да се съдържа в споменатата околност е равносилно с изискването да бъдат изпълнени двете неравенства

$$|x-x_0|<\delta, \quad |y-y_0|<\delta.$$

Тъй като съществуват безбройно много квадрати от посочения вид, всяка точка в равнината ще притежава очевидно безбройно много околности.*

По аналогичен начин се въвежда понятието околност и за точките от пространствата с по-голям брой измерения. В тримерното пространство ролята на квадрата се изпълнява от куб със стени, успоредни на координатните равнини, и с център точката (x_0, y_0, z_0). Точките (x, y, z), лежащи в такъв куб, се характеризират с трите неравенства

$$|x-x_0|<\delta, \quad |y-y_0|<\delta, \quad |z-z_0|<\delta.$$

В n-мерното пространство говорим условно за „n-мерен хиперкуб", чиито точки имат координати, удовлетворяващи неравенства от следния вид:

$$|x_1-x_1^0|<\delta, \quad |x_2-x_2^0|<\delta, \ldots, \quad |x_n-x_n^0|<\delta.$$

* Това не е единственият начин за въвеждане на понятието околност на точка в равнината. Често например под околност на една такава точка се разбира множеството, състоящо се от точките, които влизат в един кръг с център дадената точка и произволен радиус, но не лежат върху контурната му окръжност. От гледище обаче на въпросите от математическия анализ този начин на въвеждане на понятието околност не е съществено различен от онзи, който вече посочихме и към който ще се придържаме в този курс.

Специално в случая, когато $n=1$, т. е. когато нашето пространство е реалната права, горните n неравенства се свеждат до единственото неравенство

$$|x-x_0|<\delta,$$

което е изпълнено за всички числа x от отворения интервал $(x_0-\delta, x_0+\delta)$. По такъв начин се убеждаваме, че въведеното току-що понятие околност е обобщение на онова, с което си служехме по-рано.

Използувайки понятието околност на точка, лесно можем да се убедим, че дефиницията на понятието сходяща редица от точки в n-мерното пространство, която дадохме в предишния параграф, може да се изкаже и така:

Редицата от точки в n-мерното пространство

$$P_1, P_2, \ldots, P_k, \ldots$$

е сходяща и клони към точката P_0, ако за всяка околност D на точката P_0 съществува такова число ν, че при $k>\nu$ всички точки P_k от редицата се съдържат в D.

Сега лесно ще стигнем до дефиницията на някои понятия, отнасящи се до взаимното разположение на точки и множества. Тези понятия пък от своя страна ще ни позволят да дадем удобна характеристика на някои видове множества от точки, играещи важна роля по-нататък.

В дефинициите и разсъжденията, които следват до края на този параграф, е безразлично какъв е броят на измеренията на пространството, което разглеждаме — те остават в сила за произволно n-мерно пространство.

Нека в едно пространство е дадено някакво множество M. *Една точка P от същото пространство се нарича* **в ъ т р е ш н а** *за множеството M, когато тя притежава такава околност, която се състои изцяло от точки, принадлежащи на M. Една точка Q се нарича* **в ъ н ш н а** *за M, ако притежава околност, състояща се изцяло от точки, непринадлежащи на M. Най-сетне една точка R се нарича* **к о н т у р н а** *за множеството M, ако тя не е нито вътрешна, нито външна за M.*

Лесно е да се съобрази, че условието една точка да бъде *контурна* за дадено множество M може да се изкаже още така: *всяка нейна околност съдържа както точки от M, така и точки, непринадлежащи на M.*

Оттук пък следва, че ако R е една контурна точка на множеството M, могат да се намерят две редици от точки — едната:

$$P_1, P_2, \ldots, P_k, \ldots,$$

съставена от точки от M, а другата

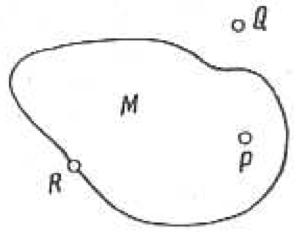
$$Q_1, Q_2, \ldots, Q_k, \ldots,$$

състояща се от точки, непринадлежащи на M, които редици клонят (и двете) към точката R. (Предоставяме доказателството на читателя.)

На черт. 57 са показани едно множество M в равнината и три точки P, Q и R, явяващи се съответно вътрешна, външна и контурна точка за M.

Множеството от всички контурни точки на дадено множество M се нарича к о н т у р на това множество, а множеството от всички негови вътрешни точки — негова в ъ т р е ш н о с т.

От изложените дефиниции е ясно, че всяко множество съдържа всички свои вътрешни точки и не съдържа никоя от своите външни точки.



Черт. 57

Що се отнася до контурните му точки, то някои от тях могат да му принадлежат, други — не. Именно това последно обстоятелство ни довежда до следните две дефиниции:

Едно множество от точки се нарича о т в о р е н о, когато то не съдържа нито една своя контурна точка (т. е. когато то съвпада със своята вътрешност).

Едно множество от точки се нарича з а т в о р е н о, когато то съдържа всички свои контурни точки (т. е. когато съдържа своя контур).

Разбира се, дадено множество от точки може да не бъде нито отворено, нито затворено. Това ще бъде така, когато то съдържа само част от своите контурни точки, но не всичките.

П р и м е р и: 1. Точките, лежащи в един кръг в равнината, но не и върху ограждащата го окръжност, образуват отворено множество. Ние ще наричаме това множество о т в о р е н к р ъ г. Точките пък, лежащи в един кръг, взет заедно с контурната му окръжност, образуват затворено множество, което ще наричаме з а т в о р е н к р ъ г. Аналогично ще употребяваме термините отворен квадрат, затворен квадрат, отворен многоъгълник, затворен многоъгълник и пр.

2. Нека е дадена една права в равнината. Кои са нейните контурни точки? Какво множество е правата?

3. Дайте примери на отворени и затворени множества в тримерното пространство.

4. Ако вземем множеството, съставено от всички точки на разглежданото пространство, т. е. цялото пространство разглеждаме като едно множество от точки, то това множество няма контурни точки. Следователно то е едновременно отворено и затворено.

Лесно може да се докаже следното свойство на затворените множества:

Ако множеството M е затворено и ако редицата

$$P_1,\ P_2,\ \ldots,\ P_k,\ \ldots,$$

съставена от точки, принадлежащи на M, е сходяща и клони към P, то точката P също принадлежи на M.

Наистина във всяка околност на точката P се съдържат точки P_k от дадената редица — това са точки, принадлежащи на M. Оттук е ясно, че точката P не е външна за множеството M — тя е негова вътрешна или контурна точка. Множеството M обаче е затворено и следователно то съдържа както всички свои вътрешни, така и всички свои контурни точки. Следователно точката P принадлежи на M.

В същност вярно е и обратното — *ако едно множество M съдържа граничната точка на всяка сходяща редица, съставена от точки, принадлежащи на M, то това множество е затворено.* (Нека читателят сам докаже това.)

Ще дадем още следната дефиниция:

Едно множество от точки в равнината се нарича о г р а н и ч е н о, когато то се съдържа изцяло в някой квадрат. Едно множество от точки в тримерното пространство е ограничено, когато се съдържа изцяло в някой куб.

Лесно можем да се убедим, че както в равнината, тъй и в тримерното пространство тази дефиниция е равносилна със следната:

Едно множество е о г р а н и ч е н о, когато разстоянията на всички негови точки до някоя фиксирана точка (например до началото на координатната система) не надминават дадено положително число.

Така изказана, дефиницията запазва валидността си за произволно n-мерно пространство.

П р и м е р и. Всеки отворен, както и всеки затворен кръг в равнината, представлява ограничено множество. Всяка права в равнината е неограничено множество. Ивицата от равнината, заградена между две успоредни прави, също представлява пример за неограничено множество.

§ 72. Непрекъснати функции

Понятието о г р а н и ч е н а ф у н к ц и я се пренася без изменения за функциите на няколко променливи. Една такава функция се нарича о г р а н и ч е н а, когато е ограничено множеството от нейните функционални стойности. Точната горна граница на това множество се нарича точна горна граница на самата функция, а точната му долна граница — точна долна граница на функцията.

Важното понятие непрекъснатост на функция на няколко променливи се въвежда, както и при функциите на една променлива, посредством две еквивалентни дефиниции — на Коши и на Хайне. Ще ги изкажем за случая на две променливи.

Дефиниция на Коши. *Функцията $f(x, y)$ се нарича непрекъсната в една точка (x_0, y_0) от своята дефиниционна област M, ако за всяко положително число ε съществува такова положително число δ, че за всяка точка (x, y) от M, за която са в сила неравенствата*

$$|x-x_0|<\delta,\quad |y-y_0|<\delta,$$

е изпълнено и неравенството

$$|f(x, y)-f(x_0, y_0)|<\varepsilon.$$

Дефиниция на Хайне. *Функцията $f(x, y)$ е непрекъсната в точката (x_0, y_0) от дефиниционната си област M, когато при всеки избор на редицата*

$$(x_1, y_1),\ (x_2,\ y_2), \ldots, (x_n,\ y_n), \ldots,$$

състояща се от точки от множеството M и клоняща към точката (x_0, y_0), съответната редица от функционални стойности

$$f(x_1, y_1),\ f(x_2, y_2), \ldots, f(x_k, y_k), \ldots$$

е сходяща и клони към $f(x_0,\ y_0)$.

Ако дадена функция $f(x, y)$ е непрекъсната в една точка $(x_0,\ y_0)$ и ако разгледаме функциите на една променлива $\varphi(x)=f(x, y_0)$ и $\psi(y)=f(x_0, y)$, получени чрез фиксиране на единия от аргументите, тези две функции очевидно ще бъдат непрекъснати — първата в точката x_0, а втората — в точката y_0. Както ще видим обаче в следващия параграф, от непрекъснатостта на функциите $\varphi(x)$ и $\psi(y)$ съответно в точките x_0 и y_0 още не следва непрекъснатостта на функцията $f(x, y)$ в точката (x_0, y_0).

Както и при функциите на една променлива, лесно се установява, че ако две функции $f(x, y)$ и $g(x, y)$ са непрекъснати в дадена точка (x_0, y_0), то сумата, разликата, произведението и частното на тези две функции са също непрекъснати функции в тази точка. Разбира се, когато става дума за частното, трябва да се предположи още, че $g(x_0, y_0)\neq 0$.

Също така с разсъждения, подобни на онези, които извършихме при функциите на една променлива, се доказва и следното просто, но важно свойство на непрекъснатите функции:

Ако функцията $f(x, y)$ е непрекъсната в точката (x_0, y_0) и ако $f(x_0, y_0)\neq 0$, то съществува такава околност на точката (x_0, y_0), в която функцията не си мени знака.

По-сложен е въпросът за пренасянето на теоремите от § 24 към функции на две и повече променливи. Въпреки това се оказва, че след подходящо прередактиране, което впрочем не е много очевидно, те също остават в сила. За три от тях, а именно за теоремата за ограниченост, за теоремата на Вайерщрас и за теоремата за равномерната непрекъснатост, ще покажем още сега — в настоящия параграф и в § 74*, каква формулировка придобиват в случая на две променливи и как се доказват в този случай (в n-мерното пространство нещата стоят аналогично). Нека обърнем внимание на това, че във всички тях условието дадена функция $f(x)$ да бъде непрекъсната в един краен и затворен интервал $[a, b]$, се замества с условието дадена функция $f(x, y)$ да бъде непрекъсната в едно ограничено и затворено множество M в равнината (такова множество се нарича к о м п а к т н о м н о ж е с т в о).

Теорема за ограниченост. *Ако функцията $f(x, y)$ е непрекъсната в едно ограничено и затворено множество M, тя е ограничена в M.*

Теорема на Вайерщрас. *Ако функцията $f(x, y)$ е непрекъсната в ограниченото и затворено множество M, то тя достига в M както своята точна горна, така и своята точна долна граница.*

Преди да формулираме следващата теорема, ще въведем едно ново понятие. Нека е дадено едно ограничено множество M. Да вземем две произволни негови точки и да измерим разстоянието между тях. Тъй като M е ограничено, това разстояние ще бъде по-малко от някое фиксирано положително число, което не зависи от избора на двете точки. Това означава, че ако вземем всички възможни двойки точки, съставени от точки, принадлежащи на M, и разгледаме множеството на разстоянията между тях, то това множество от числа ще бъде ограничено отгоре. Неговата точна горна граница се нарича д и а м е т ъ р на множеството M.

Така например диаметърът на един кръг в равнината (в смисъла на горната дефиниция) съвпада с дължината на който и да е негов диаметър, разбиран в обикновения геометричен смисъл; диаметърът на един правоъгълник е равен на дължината на неговия диагонал; диаметърът на един триъгълник съвпада с дължината на най-голямата му страна; и т. н.

Теорема за равномерната непрекъснатост. *Ако функцията $f(x, y)$ е непрекъсната в ограниченото и затворено множество M и ако ε е едно положително число, то съществува такова положително число δ, че във всяко подмножество на M, имащо диаметър, по-малък от δ, осцилацията на функцията $f(x, y)$ е по-малка от ε.*

Разбира се, и тук о с ц и л а ц и я т а на една функция $f(x, y)$ в някое множество N се дефинира като разлика между нейната точна горна и нейната точна долна граница в N.

Ясно е, че от теоремата за осцилациите следва веднага твърдението (което е фактически еквивалентно на твърдението на теоремата):

Ако функцията $f(x, y)$ е непрекъсната в едно ограничено и затворено множество M и ако ε е произволно положително число, то съществува такова положително число δ, че при $(x_1, y_1)\in M$, $(x_2, y_2)\in M$ от неравенствата

$$|x_1-x_2|<\delta,\quad |y_1-y_2|<\delta$$

следва неравенството

$$|f(x_1,\ y_1)-f(x_2,\ y_2)|<\varepsilon.$$

Функция, която притежава изказаното по-горе свойство в някое множество M, се нарича р а в н о м е р н о н е п р е к ъ с н а т а в M. Ето защо теоремата може да се изкаже още и така:

Ако една функция $f(x, y)$ е непрекъсната в ограниченото и затворено множество M, тя е и равномерно непрекъсната в M.

Доказателството на формулираните по-горе три теореми ще бъде изложено в § 74*. Що се отнася до теоремата на Болцано от § 24, нейното пренасяне за функции на две и повече променливи ще отложим за понататък — то е направено в § 98.

§ 73*. Теореми на Кантор и на Болцано—Вайерщрас в равнината

Теоремата на Кантор, която доказахме в § 4, след подходящо видоизменение на нейната формулировка може да бъде пренесена и за n-мерното пространство. Ще я формулираме и докажем за равнината (в случая на произволно n-мерно пространство нещата стоят аналогично).

Множеството от точки (x, y) в равнината, чиито координати удовлетворяват неравенствата

$$a \leqq x \leqq b, \qquad c \leqq y \leqq d,$$

където $a<b$ и $c<d$, представлява един затворен правоъгълник със страни, успоредни на координатните оси. Именно за такива правоъгълници се говори в теоремата на Кантор за равнината, която следва.

Теорема. *Нека е дадена редицата от затворени правоъгълници*

$$(1) \qquad D_1,\ D_2,\ \ldots,\ D_n,\ \ldots,$$

където правоъгълникът D_n е зададен с неравенствата

$$(2) \qquad a_n \leqq x \leqq b_n, \qquad c_n \leqq y \leqq d_n,$$

и нека са изпълнени следните условия:

а) *за всяко n правоъгълникът D_n съдържа правоъгълника D_{n+1} (т. е. D_{n+1} е част от D_n);*

б) $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n-a_n)=0$ *и* $\lim\limits_{n\to\infty}(d_n-c_n)=0.$

Тогава съществува, и то една единствена точка (ξ, η), съдържаща се във всички правоъгълници от редицата (1).

Доказателство. Изискването правоъгълникът D_n да съдържа D_{n+1} се изразява фактически чрез неравенствата

$$a_n \leqq a_{n+1},\quad b_{n+1} \leqq b_n,\quad c_n \leqq c_{n+1},\quad d_{n+1} \leqq d_n.$$

Оттук заключаваме, че както редицата от интервалите

$$[a_1, b_1],\ [a_2, b_2],\ \ldots,\ [a_n, b_n],\ \ldots,$$

така и редицата от интервалите

$$[c_1, d_1],\ [c_2, d_2],\ \ldots,\ [c_n, d_n],\ \ldots$$

удовлетворява условията на теоремата на Кантор от § 4. Следователно ще съществуват едно единствено число ξ, съдържащо се във всичките интервали $[a_n, b_n]$, и едно единствено число η, съдържащо се във всичките интервали $[c_n, d_n]$. Тогава точката (ξ, η), чиито координати удовлетворяват за всяко n неравенствата

$$a_n \leqq \xi \leqq b_n \quad \text{и} \quad c_n \leqq \eta \leqq d_n,$$

ще се съдържа във всичките правоъгълници D_n от редицата (1), като при това тя ще бъде очевидно (поради единствеността на числата ξ и η) и единствената точка с това свойство.

С това твърдението в теоремата е установено.

С оглед на приложението на тази теорема при доказателството на теоремите на предишния параграф ще направим, както и при теоремата на Кантор от § 4, още следната допълнителна бележка:

При условията на горната теорема, каквато и околност U на точката (ξ, η) да вземем, всички правоъгълници D_n с достатъчно големи номера се съдържат в U.

Наистина нека U е квадрат, зададен с неравенствата

$$\xi-\delta<x<\xi+\delta, \quad \eta-\delta<y<\eta+\delta.$$

Поради условието б) на теоремата ще съществува такова число ν, че при $n>\nu$ да имаме

$$b_n-a_n<\delta \quad \text{и} \quad d_n-c_n<\delta,$$

т. е. страните на правоъгълника D_n, зададен с неравенствата (2), при $n>\nu$ ще станат по-малки от δ. Тъй като точката (ξ, η), явяваща се център на квадрата U, е в същото време и точка от D_n, а страните на квадрата U имат дължина 2δ, ясно е, че при $n>\nu$ правоъгълникът D_n ще се съдържа изцяло в U.

Теоремата на Болцано—Вайерщрас се пренася без изменение за редици от точки в равнината (и изобщо в n-мерното пространство). При това и нейното доказателство остава по идея същото. И така в сила е следната

Теорема на Болцано—Вайерщрас. *Всяка ограничена редица от точки в равнината*

$$(3) \qquad P_1,\ P_2,\ \ldots,\ P_n,\ \ldots$$

притежава поне една сходяща подредица.

Доказателство. Тъй като редицата (3) е ограничена, ще съществува някакъв затворен правоъгълник D със страни, успоредни на координатните оси, който съдържа всички нейни точки. Да разделим този правоъгълник на четири еднакви по-малки правоъгълника и да означим с D_1 един от тях, избран така, че да съдържа безбройно много точки от дадената редица. Нека P_{n_1} е една точка от редицата (3), принадлежаща на D_1. Да разделим след това и D_1 на четири еднакви правоъгълника и да означим с D_2 един от тях, в който се съдържат безбройно много точки от редицата (3), а с P_{n_2} — една такава точка от тази редица, която се съдържа в D_2 и за която освен това имаме $n_2>n_1$. Продължавайки по този начин, ще получим една редица от затворени правоъгълници

$$(4) \qquad D_1,\ D_2,\ \ldots,\ D_k,\ \ldots,$$

която удовлетворява очевидно условията на теоремата на Кантор, и една редица от точки

$$(5) \qquad P_{n_1},\ P_{n_2},\ \ldots,\ P_{n_k},\ \ldots,$$

която е подредица на редицата (3). Нека P е онази единствена точка, която съгласно теоремата на Кантор се съдържа във всички правоъгълници D_k, и нека U е произволна околност на точката P. Съгласно бележката, която направихме след доказателството на теоремата на Кантор, за достатъчно големи стойности на k всички правоъгълници D_k, а следователно и всички точки P_{n_k} ще се съдържат в U. Това означава, че редицата (5), която е подредица на редицата (3), е сходяща и клони към P. По такъв начин теоремата е доказана.

§ 74*. Доказателства на теоремите от § 72

Преминаваме към доказателството на трите теореми, формулирани в предишния параграф. Както ще видим, основна роля тук играе доказаната от нас в § 73* теорема на Кантор в равнината.

Доказателство на теоремата за ограниченост. Дадено е, че функцията $f(x, y)$ е непрекъсната в ограниченото и затворено множество M. Трябва да докажем, че тя е ограничена. Да допуснем, че функцията $f(x, y)$ не е ограничена в M. Да вземем един квадрат D със страни, успоредни на координатните оси, съдържащ ограниченото множество M, и да го разделим посредством средните му линии на четири еднакви по-малки квадрата. Поне един от тези четири квадрата — да го означим с D_1 — ще съдържа такава част M_1 от множеството M, в която функцията $f(x, y)$ не е ограничена — в противен случай тя би била ограничена в M. Да разделим D_1 също тъй на четири еднакви по-малки квадрата (представляващи — всеки от тях, вече една шестнадесета част от D) и да означим с D_2 един от тях, избран така, че функцията $f(x, y)$ да бъде неограничена в онази част M_2 от M, която се съдържа в него (такъв квадрат D_2 сигурно има, иначе $f(x, y)$ би била ограничена в M_1). Продължавайки по този начин, ние ще получим една редица от затворени квадрати

$$D_1, \; D_2, \; \ldots, \; D_n, \; \ldots,$$

удовлетворяваща очевидно условията и теоремата на Кантор. При това всеки от тези квадрати D_n съдържа такава част M_n от множеството M, в която функцията $f(x, y)$ не е ограничена. Ако (ξ, η) е онази единствена точка, която според теоремата на Кантор се съдържа във всичките квадрати D_n, и ако U е произволна околност на точката (ξ, η), то съгласно бележката, която направихме непосредствено след доказателството на тази теорема, всички квадрати D_n с достатъчно големи номера ще се съдържат в U. Оттук следва, че във всяка околност на точката (ξ, η) се съдържат точки от M, откъдето пък заключаваме, че тази точка не може да бъде външна — тя е или вътрешна, или контурна за M. Но множеството M е затворено, следователно то съдържа не само всички свои вътрешни, но и всички свои контурни точки. По този начин се убеждаваме, че точката (ξ, η) е точка от M.

Понеже функцията $f(x, y)$ е непрекъсната в точката (ξ, η), ще можем да намерим, прилагайки дефиницията на Коши при $\varepsilon = 1$, такова положително число δ, че от неравенствата

(1) $$|x-\xi|<\delta, \quad |y-\eta|<\delta$$

за точки (x, y) от M да следва неравенството

(2) $$|f(x, y)-f(\xi, \eta)|<1.$$

Неравенствата (1) определят един квадрат U, явяващ се околност на точката (ξ, η). За достатъчно големи стойности на n квадратът D_n, а следователно и множеството M_n ще се съдържат в U. Следователно за всички точки (x, y) от M_n ще бъде изпълнено неравенството (2), което може да се запише още така:

$$f(\xi, \eta)-1<f(x, y)<f(\xi, \eta)+1.$$

Оттук виждаме, че функцията $f(x, y)$ е ограничена в множеството M_n, противно на свойството на това множество тази функция да бъде неограничена в него. Полученото противоречие показва, че нашето първоначално допускане, според което функцията $f(x, y)$ е неограничена в множеството M, е било погрешно. С това теоремата е доказана.

Доказателство на теоремата на Вайерщрас. И тук е дадена една функция $f(x, y)$, непрекъсната в ограниченото и затворено множество M. Съгласно предишната теорема функцията $f(x, y)$ е ограничена в M. Нека L е нейната точна горна, а l — нейната точна долна граница в M. Ще докажем, че числото L се явява стойност на функцията $f(x, y)$ за някоя точка от множеството M (аналогично се доказва същото за числото l).

Да вземем, както в предишната теорема, един квадрат D със страни, успоредни на координатните оси, съдържащ множеството M, и да го разделим на четири равни части. Поне един от така получените по-малки квадрати — нека го означим с D_1 — ще съдържа такава част M_1 от множеството M, в която точната горна граница на функцията $f(x, y)$ е равна на L (ако това не би било така, то точната горна граница на $f(x, y)$ в цялото множество M би била по-малка от L). Разделяйки D_1 също на четири равни части, ще означим с D_2 един такъв от новополучените още по-малки квадрати, че и в съдържащата се в него част M_2 от множеството M функцията $f(x, y)$ да има точна горна граница, равна на L, и т. н. Получаваме редица от затворени квадрати

$$D_1, \; D_2, \; \ldots, \; D_n, \; \ldots,$$

всеки от които съдържа такава част M_n от множеството M, в която функцията $f(x, y)$ има за своя точна горна граница числото L. Тази редица от квадрати удовлетворява условията на теоремата на Кантор, значи съществува някаква точка (ξ, η), съдържаща се във всичките квадрати D_n. Както в предишната теорема се убеждаваме, че точката (ξ, η) принадлежи на M.

Ще покажем, че $f(\xi, \eta)=L$. Да допуснем, че това не е вярно и че следователно имаме $f(\xi, \eta)<L$. Ако L_1 е такова число, че $f(\xi, \eta)<L_1<L$, то вземайки пред вид, че функцията $f(x, y)-L_1$ е непрекъсната в точката (ξ, η) и че $f(\xi, \eta)-L_1<0$, ще намерим такава околност U на (ξ, η), че да имаме $f(x, y)-L_1<0$ за всички точки от тази околност. Но за достатъчно големи n квадратите D_n, а значи и множествата M_n, се съдържат изцяло в U. Следователно за всички точки (x, y) от M_n ще бъде в сила неравенството $f(x, y)-L_1<0$, или все едно неравенството

$$f(x, y)<L_1,$$

което показва, че числото L_1 е горна граница на функцията $f(x, y)$ в множеството M. Но това е невъзможно, тъй като $L_1<L$, а L е точната,

т. е. най-малката горна граница на $f(x, y)$ в M_n. Полученото противоречие се дължи на допускането, че $f(\xi, \eta) \neq L$. Следователно това допускане е погрешно; в сила е равенството $f(\xi, \eta) = L$. И така функцията $f(x, y)$ достига в M своята точна горна граница L. Както вече казахме, аналогично се установява, че тя достига в M и своята точна долна граница l.

Доказателство на теоремата за равномерната непрекъснатост. Отново е дадено, че функцията $f(x, y)$ е непрекъсната в ограниченото и затворено множество M. Нека ε е едно положително число. Трябва да установим съществуването на такова положително число δ, че във всяко подмножество на M с диаметър, по-малък от δ, осцилацията на функцията $f(x, y)$ да бъде по-малка от ε.

Да допуснем, че такова число δ не съществува. Това значи по-точно, че каквото и положително число δ да вземем, винаги можем да намерим такова подмножество на M с диаметър, по-малък от δ, в което осцилацията на $f(x, y)$ е по-голяма или равна на ε. Следователно ще съществуват подмножества

$$M_1, \ M_2, \dots, M_k, \dots$$

на множеството M, такива, че диаметърът на M_k е по-малък от $\frac{1}{k}$ и в същото време осцилацията на $f(x, y)$ във всяко от тях е по-голяма или равна на ε.

Да вземем, както и в предишните две теореми, квадрат D със страни, успоредни на координатните оси, който съдържа множеството M, и да разделим този квадрат на четири еднакви по-малки квадрата. Поне един от тези квадрати — да го означим с D_1 — ще има общи точки с безбройно много от множествата M_k. Ако разделим D_1 също тъй на четири еднакви по-малки квадратчета, отново ще намерим между тях поне един — да го означим с D_2, — който има общи точки с безбройно много от множествата M_k. Продължавайки така, ще построим една редица от затворени квадрати

$$D_1, \ D_2, \dots, D_n, \dots,$$

всеки един от които има общи точки с безбройно много от множествата M_k. Тази редица удовлетворява очевидно условията на теоремата на Кантор. Следователно ще съществува една точка (ξ, η), съдържаща се във всичките квадрати D_n. Както и преди, можем да се убедим, че тази точка принадлежи на M. Тъй като функцията $f(x, y)$ е непрекъсната в точката (ξ, η), ще съществува такова число δ, че при

$$(3) \qquad |x-\xi| < \delta, \qquad |y-\eta| < \delta,$$

когато (x, y) е точка от M, да имаме $|f(x, y) - f(\xi, \eta)| < \frac{\varepsilon}{3}$, или все едно

$$(4) \qquad f(\xi, \eta) - \frac{\varepsilon}{3} < f(x, y) < f(\xi, \eta) + \frac{\varepsilon}{3}.$$

Неравенствата (3) определят една околност U на точката (ξ, η). Да разгледаме и по-малката околност V на (ξ, η), определена чрез неравенствата

$$|x-\xi| < \frac{\delta}{2}, \quad |y-\eta| < \frac{\delta}{2}.$$

Ако n е достатъчно голямо, квадратът D_n ще се съдържа във V. Да вземем в D_n една точка (x_k, y_k), принадлежаща на такова множество M_k, чийто номер k удовлетворява неравенството $\frac{1}{k} < \frac{\delta}{2}$ (това можем да направим, тъй като D_n има общи точки с безбройно много от множествата M_k). Тъй като една точка от M_k — точката (x_k, y_k) — се съдържа в околността V на точката (ξ, η), то цялото множество M_k, чийто диаметър, както знаем, е по-малък от $\frac{1}{k}$ и следователно по-малък от $\frac{\delta}{2}$, ще се съдържа в по-голямата нейна околност U, която беше зададена чрез неравенствата (3). Това се вижда от факта, че за всяка точка (x, y) от M_k ще имаме

$$|x-\xi| \leqq |x-x_k| + |x_k-\xi| < \frac{1}{k} + \frac{\delta}{2} < \delta$$

и

$$|y-\eta| \leqq |y-y_k| + |y_k-\eta| < \frac{1}{k} + \frac{\delta}{2} < \delta.$$

Оттук заключаваме, че за всяка точка (x, y) от M_k ще бъдат изпълнени неравенствата (4). Следователно числата $f(\xi, \eta) - \frac{\varepsilon}{3}$ и $f(\xi, \eta) + \frac{\varepsilon}{3}$ са съответно долна и горна граница на функцията $f(x, y)$ в множеството M_k, откъдето пък следва, че осцилацията на $f(x, y)$ в M_k няма да надминава числото

$$\left(f(\xi, \eta) + \frac{\varepsilon}{3}\right) - \left(f(\xi, \eta) - \frac{\varepsilon}{3}\right) = \frac{2}{3}\varepsilon,$$

т. е. ще бъде по-малка от ε. Тази осцилация обаче беше по-голяма или равна на ε. Полученото противоречие завършва доказателството на теоремата.

§ 75. Частни производни

Нека е дадена функцията $f(x, y)$ с дефиниционна област M и нека (x_0, y_0) е вътрешна точка за M. За стойности на x, близки до x_0, точките (x, y_0) сигурно принадлежат на M. Ако разгледаме функцията $f(x, y)$ за такива точки, то поради това, че втората им координата е постоянна, ще получим в същност функцията, зависеща само от x. Нека означим тази функция с $\varphi(x)$, т. е. да запишем

$$\varphi(x) = f(x, y_0).$$

Тъй като функцията $\varphi(x)$ е сигурно дефинирана в някоя околност $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ на точката x_0, то можем да поставим въпроса за нейната диференцуемост в тази точка. Ако производната $\varphi'(x_0)$ съществува, то казваме, че функцията $f(x, y)$ е диференцуема частно относно x в точката (x_0, y_0) а самата производна $\varphi'(x_0)$ наричаме частна производна относно x на функцията $f(x, y)$ в точката (x_0, y_0) и я бележим

$$f_x'(x_0, y_0) \quad \text{или} \quad \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}.$$

Когато не желаем да отбелязваме точката, в която сме диференцирали, може да пишем просто

$$f_x' \quad \text{или} \quad \frac{\partial f}{\partial x},$$

или най-сетне, ако сме положили $z=f(x, y)$, пишем

$$z_x' \quad \text{или} \quad \frac{\partial z}{\partial x}.$$

Аналогично, като излизаме от функцията

$$\psi(y)=f(x_0, y),$$

дефинираме частната производна на функцията $f(x, y)$ относно y в точката (x_0, y_0). Тя е равна на производната $\psi'(y_0)$ (когато тази производна съществува) и се бележи

$$f_y'(x_0, y_0) \quad \text{или} \quad \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y},$$

или по-кратко

$$f_y' \quad \text{или} \quad \frac{\partial f}{\partial y},$$

а ако сме положили $z=f(x, y)$, също и чрез

$$z_y', \quad \text{или} \quad \frac{\partial z}{\partial y}.$$

Като си спомним дефиницията на понятието производна на функция на една независима променлива, ще получим равенствата

$$f_x'(x_0, y_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h, y_0)-f(x_0, y_0)}{h}$$

и

$$f_y'(x_0, y_0)=\lim_{k\to 0}\frac{f(x_0, y_0+k)-f(x_0, y_0)}{k}.$$

По аналогичен начин се дефинират частните производни и при функциите на повече от две променливи. Така за функцията $u=f(x, y, z)$ те ще бъдат три на брой и ще се означават

$$f_x', f_y', f_z' \quad \text{или} \quad \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}.$$

За разлика от частните производни производните на функциите на една променлива се наричат **обикновени производни.**

Практическото намиране на частните производни на дадена функция на две или повече променливи се извършва по правилата за диференциране на функции на една променлива, като се взема пред вид само оная променлива, по отношение на която диференцираме, а останалите променливи се разглеждат като константи.

Примери: 1) Ако $z=\sin(x^2+y^2)$, то

$$z_x'=2x\cos(x^2+y^2), \quad z_y'=2y\cos(x^2+y^2).$$

2) Ако $u=x\operatorname{arctg}\frac{y}{z}$, то

$$u_x'=\operatorname{arctg}\frac{y}{z}, \qquad u_y'=\frac{xz}{y^2+z^2}, \qquad u_z'=\frac{-xy}{y^2+z^2}.$$

За функциите на една променлива беше в сила теоремата, съгласно която от диференцуемостта на една функция $f(x)$ в дадена точка x_0 следва нейната непрекъснатост в същата точка. Тук би могло да се допусне, че от съществуването на двете частни производни $f_x'(x_0, y_0)$ и $f_y'(x_0, y_0)$ ще следва непрекъснатостта на функцията $f(x, y)$ в точката (x_0, y_0). Следващият пример обаче ни показва, че това не е така.

Да разгледаме функцията $f(x, y)$, дефинирана с равенството

$$f(x, y)=\frac{xy}{x^2+y^2}$$

за всички точки в равнината с изключение на точката $(0, 0)$ и отделно дефинирана в тази точка с равенството $f(0, 0)=0$. Лесно е да се види, че тази функция е диференцуема частно както относно x, така и относно y в точката $(0, 0)$. Наистина имаме

$$f_x'(0, 0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h, 0)-f(0, 0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{0-0}{n}=0,$$

$$f_y'(0, 0)=\lim_{k\to 0}\frac{f(0, k)-f(0, 0)}{k}=\lim_{k\to 0}\frac{0-0}{h}=0.$$

От друга страна обаче, функцията $f(x, y)$ не е непрекъсната в точката $(0, 0)$. За да се убедим в това, да разгледаме редицата от точки

$$(1, 1), \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \ldots, \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right), \ldots,$$

която очевидно клони към точката $(0, 0)$. Ако допуснем, че $f(x, y)$ е непрекъсната в тази точка, то съгласно дефиницията на Хайне редицата

$$f(1, 1), f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \ldots, f\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right), \ldots,$$

ще трябва да бъде сходяща и да клони към $f(0, 0)$, т. е. към 0. Но това не е така, тъй като за всяко n имаме $f\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)=\frac{1}{2}$. Следователно функцията $f(x, y)$ е прекъсната в точката $(0, 0)$.

Упражнения. I. Намерете частните производни на следните функции:

1. $z = x^3 + y^3 - 3axy$.
2. $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.
3. $z = \ln \operatorname{tg} \dfrac{x}{y}$.
4. $z = xe^{xy}$.
5. $z = \ln (x^2 + y^2) + \operatorname{arc\,tg} \dfrac{x}{y}$.
6. $u = \operatorname{arc\,tg} \dfrac{xy}{z^2}$.
7. $u = x^2 y \sin (xyz)$.
8. $u = xy^z$.

II. Проверете, че функцията

$$z = \sqrt{\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}}$$

удовлетворява уравнението

$$\frac{\partial z}{\partial x} x + \frac{\partial z}{\partial y} y = 0.$$

§ 76. Частни производни от по-висок ред. Равенство на смесените производни

Частните производни $f_x'(x, y)$ и $f_y'(x, y)$ на дадена функция $f(x, y)$ се наричат още **първи частни производни** на тази функция. Когато съществуват във всички точки от някаква област в равнината, те представляват също така функции на x и y и като такива могат също да притежават свои частни производни. Тези производни се наричат **втори частни производни** на функцията $f(x, y)$. Те са четири на брой и се получават по следния начин: От $f_x'(x, y)$ чрез диференциране относно x получаваме $f_{x^2}''(x, y)$, а чрез диференциране относно y — производната $f_{xy}''(x, y)$. От $f_y'(x, y)$ пък получаваме съответно $f_{yx}''(x, y)$ и $f_{y^2}''(x, y)$. Те се означават още и така:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2},$$

или ако сме положили $z = f(x, y)$, така:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y\, \partial x}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

Макар че вторите частни производни на една функция на две променливи са четири на брой, две от тях, а именно т. нар. „смесени производни" $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ и $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$, се оказват, както ще видим, равни по между си във всички точки, в които те са непрекъснати. Следователно при това допускане за непрекъснатост имаме в същност само три втори частни производни. В това се състои съдържанието на следната

Теорема. *Ако частните производни $f_{xy}''(x, y)$ и $f_{yx}''(x, y)$ на дадена функция $f(x, y)$ съществуват в някоя околност на точката (x_0, y_0) и ако те са непрекъснати в тази точка, то в сила е равенството*

$$f_{xy}''(x_0, y_0) = f_{yx}''(x_0, y_0).$$

Доказателство. Ще излезем от равенството

(1) $$[f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0+h, y_0)] - [f(x_0, y_0+k) - f(x_0, y_0)]$$
$$= [f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0+k)] - [f(x_0+h, y_0) - f(x_0, y_0)],$$

в което h и k са някакви произволно взети различни от нула величини, които обаче засега ще разглеждаме като постоянни. Ако въведем функциите

$$\varphi(x) = f(x, y_0+k) - f(x, y_0),$$

и

$$\psi(y) = f(x_0+h, y) - f(x_0, y),$$

то равенството (1) може да се напише във вида

(2) $$\varphi(x_0+h) - \varphi(x_0) = \psi(y_0+k) - \psi(y_0).$$

Като приложим към двете страни на равенството (2) теоремата за крайните нараствания, получаваме

(3) $$h\varphi'(x_0+\theta_1 h) = k\psi'(y_0+\theta_2 k),$$

където θ_1 и θ_2 са числа, намиращи се между 0 и 1. Но равенството (3) може да се напише по-подробно така:

(4) $$h[f_x'(x_0+\theta_1 h, y_0+k) - f_x'(x_0+\theta_1 h, y_0)]$$
$$= k[f_y'(x_0+h, y_0+\theta_2 k) - f_y'(x_0, y_0+\theta_2 k)].$$

Нека сега разгледаме функциите

$$p(y) = f_x'(x_0+\theta_1 h, y)$$

и

$$q(x) = f_y'(x, y_0+\theta_2 k).$$

С тяхна помощ равенството (4) се превръща в следното равенство:

(5) $$h[p(y_0+k) - p(y_0)] = k[q(x_0+h) - q(x_0)].$$

Като приложим отново теоремата за крайните нараствания, този път към двете страни на равенството (5), получаваме

(6) $$hkp'(y_0+\theta_3 k) = khq'(x_0+\theta_4 h),$$

където θ_3 и θ_4 са пак числа, намиращи се между 0 и 1. Като вземем пред вид дефиницията на функциите $p(y)$ и $q(x)$, равенството (6) ще ни даде

(7) $$hkf_{xy}''(x_0+\theta_1 h, y_0+\theta_3 k) = hkf_{yx}''(x_0+\theta_4 h, y_0+\theta_2 k).$$

Нека сега съкратим множителя hk и най-сетне, като се възползуваме от обстоятелството, че h и k бяха взети произволно, да ги оставим да клонят към нула. Ще получим

(8) $$\lim_{h\to 0,\, k\to 0} f_{xy}''(x_0+\theta_1 h, y_0+\theta_3 k) = \lim_{h\to 0,\, k\to 0} f_{yx}''(x_0+\theta_4 h, y_0+\theta_2 k).$$

Поради непрекъснатостта на функциите $f''_{xy}(x, y)$ и $f''_{yx}(x, y)$ в точката (x_0, y_0) равенството (8) ни дава окончателно

$$f''_{xy}(x_0, y_0)=f''_{yx}(x_0, y_0).$$

Твърдението в тази теорема може да бъде изказано и така: При условие, че търсените частни производни на дадена функция са непрекъснати, редът на диференцирането няма значение (т. е. все едно е дали ще диференцираме най-напред относно x, а след това относно y или обратно — и в двата случая ще получим един и същ резултат).

По-нататък във всички общи разглеждания ще считаме, че условията от тази теорема са изпълнени, и ще приемаме винаги смесените производни за равни помежду си.

Частните производни на вторите частни производни на дадена функция на няколко променливи се наричат нейни трети частни производни и т. н. Разбира се, ако е изпълнено условието за непрекъснатост, правилото, според което редът на диференциране е без значение, остава в сила. В такъв случай например третите частни производни на функцията $z=f(x, y)$ ще бъдат всичко четири на брой, а именно

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3},\quad \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y},\quad \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2},\quad \frac{\partial^3 z}{\partial y^3}.$$

Всичко казано в този параграф за функции на две независими променливи по очевиден начин се пренася и за функции на повече от две променливи. Начинът на означаването на частните производни при такива функции е ясен, а що се отнася до теоремата за равенство на смесените производни, тя също остава валидна. Така, ако $f(x, y, z)$ е функция на три променливи, за която например вторите частни производни $f''_{xz}(x, y, z)$ и $f''_{zx}(x, y, z)$ съществуват в някоя околност на една вътрешна точка (x_0, y_0, z_0) от нейната дефиниционна област и са непрекъснати в тази точка, то като разглеждаме функцията $\varphi(x, z)=f(x, y_0, z)$ (получена посредством фиксиране на втората променлива) и приложим към тази функция на две променливи доказаната току-що теорема относно точката (x_0, z_0), ще получим $\varphi''_{xz}(x_0, z_0)=\varphi''_{zx}(x_0, z_0)$, което очевидно не е друго освен равенството

$$f''_{xz}(x_0, y_0, z_0)=f''_{zx}(x_0, y_0, z_0).$$

Изобщо за вторите частни производни на разглежданата функция ще имаме при предположението за непрекъснатост следните равенства:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}=\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x},\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}=\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y},\quad \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}=\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}.$$

За третите пък частни производни (пак при предположението за непрекъснатост) ще са в сила вече голям брой равенства, например равенствата

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}=\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x}=\frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2},$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial z}=\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial z \partial y}=\frac{\partial^3 f}{\partial y \partial z \partial x}=\frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x \partial z}=\frac{\partial^3 f}{\partial z \partial x \partial y}=\frac{\partial^3 f}{\partial z \partial y \partial x},$$

както и много други. Аналогични равенства могат да се напишат, разбира се, и за частните производни от по-висок ред.

Упражнения. I. Намерете вторите частни производни на следните функции:

1. $z=\sqrt{x^2+y^2}$. 2. $z=\ln(x^2+y^2)$. 3. $u=x^2y^2z^2$.

II. Намерете всички втори и трети частни производни на функциите:

1. $z=\sin(xy)$. 2. $z=\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}$. 3. $u=e^{xyz}$.

III. Проверете, че функциите:

а) $z=xe^{x+y}+yx+y^2$; б) $z=x\sin\dfrac{y}{x}+\dfrac{x}{y}$,

удовлетворяват съответно уравненията:

а) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}-2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$; б) $x^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2xy\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}+y^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$.

§ 77. Диференциране на съставни функции

Нека функцията $F(x, y)$ е дефинирана в някоя околност на една точка (x_0, y_0) от равнината и нека са дадени освен това две функции на една променлива $f(t)$ и $g(t)$, които са дефинирани и непрекъснати в някоя околност на една точка t_0 от реалната права. Ако при това са изпълнени равенствата $f(t_0)=x_0$ и $g(t_0)=y_0$, то поради непрекъснатостта на функциите $f(t)$ и $g(t)$ е ясно, че когато t е близко до t_0, стойностите на $f(t)$ и $g(t)$ ще бъдат близко съответно до x_0 и y_0. Това означава, че точката от равнината $(f(t), g(t))$ ще бъде близко до точката (x_0, y_0) и следователно ще се намира в дефиниционната област на функцията $F(x, y)$. Това ни дава възможност да си образуваме за такива стойности на t израза $F[f(t), g(t)]$, който очевидно представлява вече функция, зависеща само от t. Тази функция наричаме **съставна функция**. За съставни функции от този вид е валидна следната

Теорема. *Нека функцията $F(x, y)$ притежава непрекъснати първи частни производни в някоя околност на точката (x_0, y_0). Нека освен това двете функции $f(t)$ и $g(t)$ са диференцуеми в точката t_0 и удовлетворяват равенствата*

$$f(t_0)=x_0,\qquad g(t_0)=y_0.$$

Тогава съставната функция

$$\varphi(t)=F[f(t), g(t)]$$

е диференцуема в точката t_0 и при това

(1) $$\varphi'(t_0)=F'_x(x_0, y_0)f'(t_0)+F'_y(x_0, y_0)g'(t_0).$$

Доказателство. Знаем, че

$$\varphi'(t_0)=\lim_{h\to 0}\frac{\varphi(t_0+h)-\varphi(t_0)}{h}.$$

Като вземем пред вид дефиницията на функцията $\varphi(t)$, ще имаме

$$\frac{\varphi(t_0+h)-\varphi(t_0)}{h}=\frac{F[f(t_0+h),\ g(t_0+h)]-F[f(t_0),\ g(t_0)]}{h}.$$

Да положим

(2) $$f(t_0+h)-f(t_0)=k, \qquad g(t_0+h)-g(t_0)=l.$$

Оттук

$$f(t_0+h)=x_0+k, \qquad g(t_0+h)=y_0+l.$$

Като използуваме тези означения и направим някои прости преобразувания, ще получим

(3) $$\frac{\varphi(t_0+h)-\varphi(t_0)}{h}=\frac{F(x_0+k,\ y_0+l)-F(x_0,\ y_0)}{h}$$
$$=\frac{F(x_0+k,\ y_0+l)-F(x_0,\ y_0+l)}{h}+\frac{F(x_0,\ y_0+l)-F(x_0,\ y_0)}{h}.$$

Да въведем помощните функции

$$p(x)=F(x,\ y_0+l)$$

и

$$q(y)=F(x_0,\ y).$$

Като си послужим с тях и използуваме теоремата за крайните нараствания, получаваме следните равенства:

(4) $$F(x_0+k,\ y_0+l)-F(x_0,\ y_0+l)=p(x_0+k)-p(x_0)$$
$$=kp'(x_0+\theta_1 k)=kF_x'(x_0+\theta_1 k,\ y_0+l)$$

и

(5) $$F(x_0,\ y_0+l)-F(x_0,\ y_0)=q(y_0+l)-q(y_0)$$
$$=lq'(y_0+\theta_2 l)=lF_y'(x_0,\ y_0+\theta_2 l),$$

където θ_1 и θ_2 са две числа, намиращи се между 0 и 1.

Като вземем пред вид равенствата (3), (4) и (5), а също и равенствата (2), ще получим

(6) $$\frac{\varphi(t_0+h)-\varphi(t_0)}{h}$$
$$=F_x'(x_0+\theta_1 k,\ y_0+l)\frac{f(t_0+h)-f(t_0)}{h}+F_y'(x_0,\ y_0+\theta_2 l)\frac{g(t_0+h)-g(t_0)}{h}.$$

Функциите $f(t)$ и $g(t)$ поради условието за диференцуемост са непрекъснати в точката t_0. Оттук следва, че когато $h\to 0$, ще имаме също $k\to 0$ и $l\to 0$.

Нека сега в двете страни на равенството (6) вземем граница при h, клонящо към нула. Като си спомним, че производните $F_x'(x, y)$ и $F_y'(x, y)$ са непрекъснати в точката (x_0, y_0), а функциите $f(t)$ и $g(t)$ — диференцуеми в точката t_0, ще видим, че равенството (6) преминава в желаното равенство (1).

Резултатът, получен в тази теорема, се написва по-просто, когато не желаем да отбелязваме точките, в които са взети производните. Така, ако положим $z=F(x, y)$, $x=f(t)$, $y=g(t)$, равенството (1) ще се напише в следния вид:

(7) $$z'=\frac{\partial z}{\partial x}x'+\frac{\partial z}{\partial y}y'.$$

Ако вместо функцията $F(x, y)$ разгледаме функция на три или повече променливи, то като разсъждаваме по подобен начин, ще получим формула от сроден вид, дясната страна на която ще съдържа толкова събираеми, колкото е броят на независимите променливи. Например, ако $z=F(u, v, w)$, $u=f(t)$, $v=g(t)$, $w=h(t)$, то ще имаме

$$z'=\frac{\partial z}{\partial u}u'+\frac{\partial z}{\partial v}v'+\frac{\partial z}{\partial w}w'.$$

От друга страна, вместо функциите $f(t)$ и $g(t)$ също можем да вземем функции на две или повече променливи. В такъв случай формулата (1) (както и нейното доказателство) не се променя съществено. Трябва само при нейното записване обикновените производни да се заменят с частни. Така, ако $z=F(u, v)$, $u=f(x, y)$, $v=g(x, y)$, то ще имаме

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}.$$

Най-сетне, ако с помощта на функциите $F(u)$ и $f(x, y)$ си образуваме съставната функция $z=F[f(x, y)]$, то намирането на нейните частни производни става въз основа на теоремата за диференциране на съставни функции от глава V, § 28 (тъй като тук едната от независимите променливи считаме за постоянна величина). Ще имаме

$$\frac{\partial z}{\partial x}=F'[f(x, y)]\frac{\partial f}{\partial x} \quad \text{и} \quad \frac{\partial z}{\partial y}=F'[f(x, y)]\frac{\partial f}{\partial y},$$

или по-кратко, ако положим $u=f(x, y)$:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=F'(u)\frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{\partial z}{\partial y}=F'(u)\frac{\partial u}{\partial y}.$$

Ще отбележим още, че като приложим неколкократно правилото за диференциране на съставни функции, можем да намираме и частни производни от по-висок ред. Така например от равенството (7), като вземем пред вид, че не само функцията z, но и нейните частни производни $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ са съставни функции, ще получим

$$z''=\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}x'+\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}y'\right)x'+\frac{\partial z}{\partial x}x''$$

$$+\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}x'+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}y'\right)y'+\frac{\partial z}{\partial y}y''$$

$$=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}x'^2+2\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}x'y'+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}y'^2+\frac{\partial z}{\partial x}x''+\frac{\partial z}{\partial y}y''.$$

П р и м е р 1. Ако са дадени двете функции $F(x, y)$ и $f(x)$, с помощта на които е образувана съставната функция

$$z=F(x, f(x)),$$

ще имаме

$$z'=\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y}f'(x),$$

$$z''=\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}f'(x)+\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}f'^2(x)+\frac{\partial F}{\partial y}f''(x).$$

П р и м е р 2. Ако с помощта на функцията $F(u, v)$ си образуваме съставната функция

$$z=F(x^2+y^2, xy),$$

ще имаме

$$\frac{\partial z}{\partial x}=2x\frac{\partial F}{\partial u}+y\frac{\partial F}{\partial v},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=2y\frac{\partial F}{\partial u}+x\frac{\partial F}{\partial v}.$$

По-нататък ще получим например за $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=4x^2\frac{\partial^2 F}{\partial u^2}+4xy\frac{\partial^2 F}{\partial u\,\partial v}+y^2\frac{\partial^2 F}{\partial v^2}+2\frac{\partial F}{\partial u}.$$

Намерете останалите втори частни производни!

П р и м е р 3. Нека посредством функцията $F(u)$ си образуваме съставната функция

$$z=F\left(\frac{y}{x}\right).$$

Като положим за краткост $u=\frac{y}{x}$, ще имаме

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{y}{x^2}F'(u),\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{x}F'(u).$$

Като диференцираме $\frac{\partial z}{\partial x}$ относно x, получаваме

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=2\frac{y}{x^3}F'(u)+\frac{y^2}{x^4}F''(u).$$

Намерете другите две втори частни производни!

Упражнения. 1. Нека $z=F(x, y)$, $x=\sin^2 t$, $y=\cos^2 t$. Намерете z''!

2. Ако $z=F(u)$, $u=\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{y}$, да се намерят $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}$ и $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

3. Ако $z=F(u, v)$, $u=x+y$, $v=x-y$, намерете $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}$ и $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

4. Нека $z=F(u)$ и $u=x+y^2$. Проверете равенството

$$\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}.$$

§ 78. Тотален диференциал

Нека е дадена една функция $f(x, y)$, дефинирана в някоя околност D на точката (x_0, y_0) и непрекъсната в тази точка. Да разгледаме двете точки (x_0+h, y_0) и (x_0, y_0+k), първата от които сме получили, като сме дали на абсцисата x_0 някакво нарастване h, а втората — като сме дали на ординатата y_0 нарастване k по такъв начин, че тези две точки също да принадлежат на околността D. Ако въведем означенията

$$x_1=x_0+h,\qquad y_2=y_0+k$$

и

$$z_0=f(x_0, y_0),\qquad z_1=f(x_1, y_0),\qquad z_2=f(x_0, y_2),$$

то и трите точки (x_0, y_0, z_0), (x_1, y_0, z_1) и (x_0, y_2, z_2) ще лежат върху повърхнината S, явяваща се графика на функцията $z=f(x, y)$. От аналитичната геометрия е известно, че равнината, минаваща през тези три точки, има уравнение

$$(1)\qquad \zeta-z_0=\frac{z_1-z_0}{x_1-x_0}(\xi-x_0)+\frac{z_2-z_0}{y_2-y_0}(\eta-y_0),$$

където ξ, η и ζ са текущите координати.

Ако оставим нарастванията h и k да клонят към нула, то x_1 ще клони към x_0, а y_2 — към y_0. Поради непрекъснатостта пък на функцията $f(x, y)$ в точката (x_0, y_0) както z_1, така и z_2 ще клонят към z_0. Това ще рече, че точките (x_1, y_0, z_1) и (x_0, y_2, z_2) ще клонят към точката (x_0, y_0, z_0). Какво можем да кажем за равнината, която се дава с уравнението (1)? Тя, разбира се, ще променя своето положение, тъй като коефициентите в уравнението ѝ, които са в същност функции на h и k, ще се менят. Въпросът е: дали тези функции притежават граница, когато h и k клонят към нула. Да напишем по-подробно тези коефициенти:

$$(2)\qquad \frac{z_1-z_0}{x_1-x_0}=\frac{f(x_0+h, y_0)-f(x_0, y_0)}{h}$$

и

$$(3)\qquad \frac{z_2-z_0}{y_2-y_0}=\frac{f(x_0, y_0+k)-f(x_0, y_0)}{k}.$$

Ясно е, че изискването тези функции да притежават граници при $h\to 0$ и $k\to 0$ не е нищо друго освен изискването функцията $f(x, y)$ да притежава частни производни както относно x, тъй и относно y в точката (x_0, y_0). В такъв случай подвижната равнина, дадена с уравнението (1), ще клони към едно гранично положение — към равнината с уравнение

$$(4)\qquad \zeta-z_0=f_x'(x_0, y_0)(\xi-x_0)+f_y'(x_0, y_0)(\eta-y_0).$$

Съвсем естествено е да наречем тази равнина д о п и р а т е л н а р а в н и н а към графиката на функцията $f(x, y)$ в точката (x_0, y_0, z_0).

В близост с точката (x_0, y_0, z_0) графиката на функцията $f(x, y)$ не е твърде отдалечена от допирателната равнина, прекарана в тази точка. С известно приближение можем за някоя малка околност на точката (x_0, y_0) да заменим частта от графиката на функцията $f(x, y)$, която съответствува на тази околност, със съответната част от допирателната равнина. Това ще рече, че ако нарастванията Δx и Δy са твърде малки, ние ще заместим функционалната стойност $f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)$ със стойността на апликатата на онази точка от допирателната равнина, която съответствува на точката $(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)$. Тази стойност ние пресмятаме от уравнението (4) и получаваме

$$\zeta=z_0+f_x'(x_0, y_0)\Delta x+f_y'(x_0, y_0)\Delta y.$$

Тогава нарастването на функцията

$$\Delta z=f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)-f(x_0, y_0)$$

ще бъде заместено с приближената стойност

$$\zeta-z_0=f_x'(x_0, y_0)\Delta x+f_y'(x_0, y_0)\Delta y.$$

Тази приближена стойност ние наричаме *тотален диференциал* на функцията $z=f(x, y)$ в точката (x_0, y_0) и бележим с dz. Написан вече не специално за точката (x_0, y_0), а за произволна точка (x, y), в която съществуват частните производни $f_x'(x, y)$ и $f_y'(x, y)$, той има вида

$$dz=f_x'(x, y)\Delta x+f_y'(x, y)\Delta y.$$

При функцията $f(x, y)=x$ ще получим

$$dx=1.\Delta x+0.\Delta y,$$

а при функцията $f(x, y)=y$ получаваме

$$dx=0\,.\,\Delta x+1\,.\,\Delta y.$$

Следователно $\Delta x=dx$ и $\Delta y=dy$. Ето защо тоталният диференциал на една функция $z=f(x, y)$ обикновено се записва във вида

$$dz=f_x'(x, y)dx+f_y'(x, y)dy,$$

или по-кратко

(5) $$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy.$$

При функциите на повече от две променливи тоталният диференциал се въвежда с подобна формула, дясната страна на която съдържа толкова събираеми, колкото е броят на независимите променливи. Така за функцията $u=f(x, y, z)$ ще имаме

$$du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy+\frac{\partial u}{\partial z}dz.$$

Както при диференциалите на функциите на една променлива, и тук могат да се изведат съвсем леко формулите

(6) $$d(u+v)=du+dv,$$

(7) $$d(u-v)=du-dv,$$

(8) $$d(uv)=vdu+udv,$$

(9) $$d\,\frac{u}{v}=\frac{vdu-udv}{v^2},$$

където u и v са функции на две или повече променливи.

Да разгледаме съставната функция $z=F[f(t), g(t)]$. Нейният диференциал като диференциал на функция на една променлива ще бъде

$$dz=z'\,dt.$$

От друга страна, ако приложим $z=F(x, y)$, $x=f(t)$, $y=g(t)$, то съгласно правилото за диференциране на съставни функции ще имаме

$$z'=\frac{\partial z}{\partial x}x'+\frac{\partial z}{\partial y}y'.$$

Следователно

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}x'\,dt+\frac{\partial z}{\partial y}y'\,dt,$$

или

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy.$$

Получихме формула, която по външен вид не се различава от формулата (5), макар че сега x и y не са вече независими променливи, а функции на t.

Също така, ако имаме $z=F(u, v)$, $u=f(x, y)$, $v=g(x, y)$, то за тоталния диференциал

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy$$

на съставната функция

$$z=F[f(x, y), g(x,y)]$$

ще получим

$$dz=\left(\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\right)dx+\left(\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}\right)dy$$

$$=\frac{\partial z}{\partial u}\left(\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy\right)+\frac{\partial z}{\partial v}\left(\frac{\partial v}{\partial x}dx+\frac{\partial v}{\partial y}dy\right),$$

или окончателно

$$dz=\frac{\partial z}{\partial u}du+\frac{\partial z}{\partial v}dv.$$

Отново получихме формула от типа на формулата (5), въпреки че тук вече u и v са функции на две независими променливи и du и dv са техните тотални диференциали.

Ако пък имаме $z=F(u)$, $u=f(x, y)$, то за dz ще получим

$$dz=F'(u)\frac{\partial u}{\partial x}dx+F'(u)\frac{\partial u}{\partial y}dy=F'(u)\left(\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy\right),$$

или най-сетне

$$dz=F'(u)du,$$

формула, която по външен вид изглежда точно както формулата за диференциал на функция на една независима променлива (въпреки че тук du е тоталният диференциал на функция на две променливи).

П р и м е р. Да намерим тоталния диференциал на функцията

$$z=\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}.$$

Имаме

$$dz=\frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}}\,d\,\frac{y}{x}=\frac{x^2}{x^2+y^2}\,\frac{x\,dy-y\,dx}{x^2}$$

$$=-\frac{y}{x^2+y^2}\,dx+\frac{x}{x^2+y^2}\,dy.$$

Тоталният диференциал на функция на няколко променливи се нарича още и неин п ъ р в и т о т а л е н д и ф е р е н ц и а л. Тоталните диференциали от по-висок ред се въвеждат последователно: вторият тотален диференциал е тотален диференциал на първия, третият е тотален диференциал на втория и т. н. Те се означават съответно с d^2z, d^3z и пр. При тяхното пресмятане диференциалите на независимите променливи се приемат за константи.

Нека намерим например втория тотален диференциал на функцията $z=f(x, y)$. Имаме

$$d^2z=d(dz)=d\left(\frac{\partial z}{\partial x}\,dx+\frac{\partial z}{\partial y}\,dy\right)$$

$$=\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\,dx+\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\,dy\right)dx+\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\,dx+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\,dy\right)dy$$

$$=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\,dx^2+2\,\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\,dx\,dy+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\,dy^2.$$

С помощта на принципа на математичната индукция лесно се установява следната обща формула за n-тия тотален диференциал на функцията $z=f(x, y)$:

$$d^n z=\binom{n}{0}\frac{\partial^n z}{\partial x^n}\,dx^n+\binom{n}{1}\frac{\partial^n z}{\partial x^{n-1}\,\partial y}\,dx^{n-1}\,dy+\cdots+\binom{n}{n}\frac{\partial^n z}{\partial y^n}\,dy^n.$$

Упражнения. I. Намерете тоталния диференциал на функцията:

1. $z=x^2y-y^2x$. 2. $z=\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$. 3. $u=\operatorname{arc\,tg}\dfrac{xy}{z^2}$.

II. Намерете втория тотален диференциал на функцията:

1. $z=xe^{xy}$. 2. $z=\arcsin\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$. 3. $u=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$.

§ 79. Неявни функции

При много въпроси от анализа и неговите приложения срещаме функции, при които зависимостта между независимата променлива x и зависимата y е зададена с помощта на някакво равенство, което не искаме или не можем да решим относно y. Такива функции се наричат н е я в н и функции. Тяхното въвеждане става с помощта на следната

Дефиниция. *Нека $F(x, y)$ е функция с дефиниционна област M. Казваме, че уравнението*

(1) $$F(x, y)=0$$

определя y като неявна функция на x в едно множество D върху реалната права, ако съществува някаква функция $y=f(x)$, дефинирана в D, за която са изпълнени следните две условия:

1) *за всяко x от D точката $(x, f(x))$ принадлежи на M;*
2) *за всяко x от D имаме*

$$F(x, f(x))=0.$$

Самата функция $y=f(x)$ се нарича н е я в н а ф у н к ц и я, определена от уравнението (1). Накратко казваме, че тя у д о в л е т в о р я в а това уравнение.

Така например функцията $y=\frac{x}{1+x^2}$, дефинирана за всяко x, се определя като неявна функция от уравнението $y+x^2y-x=0$.

Функцията пък $y=\sqrt{1-x^2}$, дефинирана при $-1\leq x\leq 1$, се определя неявно от уравнението $x^2+y^2-1=0$.

Не винаги обаче една неявна функция може явно да се пресметне, както в дадените два примера. В повечето случаи това е невъзможно и именно тази е причината за въвеждането на самото понятие неявна функция. Такъв е например случаят с неявната функция $y=f(x)$, определена от уравнението $e^{xy}-y^2=0$.

При това не всяко уравнение от вида (1) определя неявна функция. Уравнението

$$x^2+y^2+1=0$$

например не се удовлетворява от никаква функция, то не определя никаква неявна функция.

От друга страна, едно уравнение може да определя не само една, а повече неявни функции. Така уравнението

$$x^2+y^2-1=0$$

се удовлетворява както от функцията $y=\sqrt{1-x^2}$, тъй и от функцията $y=-\sqrt{1-x^2}$. Те и двете са неявни функции, определени от това уравнение.

Тук няма да се спираме на въпроса, кога едно уравнение от вида (1) определя наистина една неявна функция. Отговорът на този въпрос, както и на аналогичния въпрос относно неявни функции, определени от система уравнения, ще бъде даден в § 81*. Сега ще се спрем само на въпроса за пресмятането на производните на дадена неявна функция, когато знаем, че тя съществува и е диференцуема.

Нека неявната функция $y=f(x)$, дефинирана в един интервал D върху реалната права, се определя от уравнението

(1) $$F(x, y)=0.$$

Ще предположим, че функцията $F(x, y)$ притежава непрекъснати частни производни спрямо x и спрямо y от толкова висок ред, колкото ни е необходимо за нашите по-нататъшни пресмятания, а също, че и функцията $f(x)$ притежва първа, втора и т. н. производни. От дефиницията на понятието неявна функция знаем, че ако в равенството (1) заменим променливата y с $f(x)$, то ще се превърне в тъждество, т. е. ще бъде изпълнено за всички точки x от интервала D. Това означава, че функцията, написана в лявата му страна, ще съвпада с константата 0 в този интервал. Следователно нейната производна също ще бъде нула. Като диференцираме по правилото за съставни функции и помним, че y е функция на x, получаваме

(2) $$\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y}y'=0.$$

Оттук

$$y'=-\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial y}}.$$

(Тук, разбира се, трябва още да се предположи, че $\frac{\partial F}{\partial y}\neq 0$. Условия от такъв вид ние ще считаме в разглежданията от този и следващия параграф винаги за изпълнени.)

За да намерим y'', можем да излезем от намерения израз за y' или пък да диференцираме равенството (2), което е също тъждество. Вторият от тези два начина ни дава

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}y'+\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}y'^2+\frac{\partial F}{\partial y}y''=0.$$

Оттук след заместване на y' с намерената стойност пресмятаме y''. По този начин можем да пресметнем всяка производна на функцията $y=f(x)$.

Пример 1. Нека y се определя като неявна функция на x от уравнението

$$\sin(x+y)-y=0.$$

Като диференцираме, получаваме

(3) $$\cos(x+y)(1+y')-y'=0,$$

откъдето

$$y'=\frac{\cos(x+y)}{1-\cos(x+y)}.$$

По-нататък диференцираме равенството (3):

$$-\sin(x+y)(1+y')^2+\cos(x+y)y''-y''=0,$$

откъдето след заместване на y' с намерения израз получаваме

$$y''=-\frac{\sin(x+y)}{[1-\cos(x+y)]^3}.$$

Пример 2. Нека y е неявна функция на x, определена от уравнението

(4) $$e^{2x+y}-y^2=0.$$

Като диференцираме, ще получим

$$e^{2x+y}(2+y')-2yy'=0.$$

откъдето

$$y'=\frac{2e^{2x+y}}{2y-e^{2x+y}}.$$

От уравнение (4), което неявната функция y превръща в тъждество, получаваме $e^{2x+y}=y^2$, поради което можем още да пишем

$$y'=\frac{2y}{2-y}.$$

Намерете y''!

Нека сега разгледаме уравнението

$$F(x, y, z)=0,$$

в което участвуват три променливи. Ние можем подобно на това, което имахме преди, да определим (при известни условия, на които тук няма да се спираме) едната от тези променливи — например z, като неявна функция на останалите две. Но това ще бъде вече функция на две променливи.

Дефиниция. *Уравнението*

(5) $$F(x, y, z)=0$$

определя z като неявна функция на x и y в някоя област N в равнината, ако съществува функция $z=f(x, y)$, дефинирана в N и удовлетворяваща следните условия:

1) *за всяка точка (x, y) от N точката $(x, y, f(x, y))$ принадлежи на дефиниционната област на функцията $F(x, y, z)$;*

2) *за всяка точка (x, y) от N е изпълнено равенството*

$$F(x, y, f(x, y))=0.$$

По аналогичен начин се дефинират и неявните функции на повече от две променливи.

Намирането на производните на такива неявни функции става по същия начин, както при неявните функции на една променлива, само че сега ще става дума за частни производни. Нека например намерим $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ за неявната функция z, определена от уравнението (5). Като вземем пред вид, че след заместването на z с тази функция в уравнението (5), то се превръща в тъждество, и като диференцираме това тъждество относно x, ще получим

$$\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}=0.$$

Оттук

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}.$$

Като диференцираме пък относно y, ще имаме

$$\frac{\partial F}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}=0,$$

откъдето

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}.$$

Намирането на частни производни от по-висок ред става чрез понататъшно диференциране на намерените изрази.

Пример 3. Нека z се определя като неявна функция на x и y от уравнението

$$\cos^2 x+\cos^2 y+\cos^2 z=1.$$

Диференцираме относно x и получаваме

$$-2\cos x\sin x-2\cos z\sin z\cdot\frac{\partial z}{\partial x}=0,$$

или

$$\sin 2x+\sin 2z.\frac{\partial z}{\partial x}=0,$$

откъдето

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\sin 2x}{\sin 2z}.$$

Аналогично чрез диференциране на даденото уравнение относно y получаваме

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\sin 2y}{\sin 2z}.$$

Намерете вторите частни производни на z!

Упражнения. I. Намерете y' и y'' за неявната функция y, определена от следните уравнения:

1. $x^3+3x^2y-y^3=0$. 2. $e^{\sin x}-xe^{\sin y}=0$.

3. $\ln\sqrt{x^2+y^2}-\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}=0$.

II. Намерете $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ за неявната функция z, определена от уравненията

1. $z^3-3xyz=1$. 2. $z=ye^{\frac{x}{z}}$. 3. $\frac{x}{z}=\ln\frac{z}{y}+1$.

III. Намерете всички първи и втори частни производни на неявната функция z, определена от уравненията:

1. $x^2+y^2+z^2-2xz=0$. 2. $x+y+z=e^z$.

§ 80. Неявни функции, определени от системи уравнения

Когато вместо едно уравнение, съдържащо две или повече променливи, са дадени няколко уравнения, разглеждани съвместно като система уравнения, можем при известни условия да определим от тази система вече не една, а няколко неявни функции. При това е необходимо броят на всички променливи, участвуващи в дадената система уравнения, да бъде по-голям от броя на самите уравнения. Тогава пък броят на неявните функции, които се определят от дадената система уравнения, е равен на броя на уравненията.

Ще се спрем по-подробно на най-простия случай — случая на система от две уравнения с три променливи.

Дефиниция. Нека $F(x, y, z)$ и $G(x, y, z)$ *са две функции с обща дефиниционна област* M. *Ще казваме, че системата уравнения*

(1) $$F(x, y, z)=0,\quad G(x, y, z)=0$$

определя y *и* z *като неявни функции на* x *в някое множество* D *върху реалната права, ако съществуват две функции* $y=f(x)$ и $z=g(x)$, *дефинирани в* D *и удовлетворяващи следните изисквания:*

1) *за всяко* x *от* D *точката* $(x, f(x), g(x))$ *принадлежи на* M;
2) *за всяко* x *от* D *имаме*

$$F(x, f(x), g(x))=0 \quad и \quad G(x, f(x), g(x))=0.$$

Като предположим, че функциите $F(x, y, z)$ и $G(x, y, z)$ притежават всички частни производни, които са ни необходими, и че неявните функции $y=f(x)$ и $z=g(x)$ също са диференцуеми, ще покажем как се пресмятат производните y', z', y'', z'', и т. н. Като вземем пред вид, че след заместването на променливите y и z в системата уравнения (1), съответно с неявните функции $f(x)$ и $g(x)$ двете уравнения на тази система се превръщат в тъждества, ние диференцираме тези две тъждества и получаваме

(2) $$\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y}y'+\frac{\partial F}{\partial z}z'=0,\quad \frac{\partial G}{\partial x}+\frac{\partial G}{\partial y}y'+\frac{\partial G}{\partial z}z'=0,$$

което е нова система от две уравнения. Ако разгледаме y' и z' като неизвестни, ние виждаме, че това е система от първа степен с две неизвестни, която знаем да решаваме. Така намираме y' и z'. Ако искаме да намерим сега y'' и z'', диференцираме уравненията от системата (2). Получаваме две нови уравнения, в които след заместване на y' и z' с намерените изрази ще останат като неизвестни само y'' и z''. Това ще бъде пак една система с две уравнения от първа степен с две неизвестни. Решаваме я и намираме y'' и z''.

Пример 1. Нека y и z се определят като неявни функции на x от системата уравнения

$$y^2+z^2=x^2$$
$$x+y+z=2.$$

Диференцираме и получаваме

$$yy'+zz'=x$$
$$y'+z'=-1,$$

откъдето намираме

$$y'=\frac{x+z}{y-z}, \quad z'=-\frac{x+y}{y-z}.$$

Диференцираме по-нататък и пресмятаме y'' и z''. Получаваме следните изрази:

$$y''=-2\frac{(x+z)(x+y)}{(y-z)^3}, \quad z''=2\frac{(x+y)(x+z)}{(y-z)^3}.$$

Да разгледаме още и случая на неявни функции, определени със система от две уравнения с четири неизвестни.

Дефиниция. *Нека $F(x, y, u, v)$ и $G(x, y, u, v)$ са две функции с обща дефиниционна област някакво множество M в четиримерното пространство. Ще казваме, че системата уравнения*

(3) $$F(x, y, u, v)=0, \quad G(x, y, u, v)=0$$

определя u и v като неявни функции на x и y в някоя област N в равнината, ако съществуват две функции $u=f(x, y)$ и $v=g(x, y)$, дефинирани в N, които удовлетворяват следните условия:

1) за всяка точка (x, y) от N точката $(x, y, f(x, y), g(x, y))$ принадлежи на M;

2) за всяка точка (x, y) от N имаме

$$F(x, y, f(x, y), g(x, y))=0 \quad и \quad G(x, y, f(x, y), g(x, y))=0.$$

Намирането на частните производни на дефинираните по този начин две неявни функции се извършва чрез диференциране на равенствата (3), които след заместването на u и v съответно с $f(x, y)$ и $g(x, y)$ се превръщат в тъждества. Като диференцираме относно x, ще получим

$$\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=0,$$
$$\frac{\partial G}{\partial x}+\frac{\partial G}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial G}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=0.$$

Тук неизвестни са търсените частни производни $\frac{\partial u}{\partial x}$ и $\frac{\partial v}{\partial x}$. Тъй като те

участват в една система уравнения от първа степен с две неизвестни, тяхното намиране не представлява вече, принципно казано, никаква трудност. Като диференцираме пък равенствата (3) относно y, ще получим.

$$\frac{\partial F}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}=0$$
$$\frac{\partial G}{\partial y}+\frac{\partial G}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial G}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}=0.$$

Тук неизвестни са $\frac{\partial u}{\partial y}$ и $\frac{\partial v}{\partial y}$. Остава да решим получената система уравнения относно тези неизвестни.

Що се отнася до производните от по-висок ред, пътят за тяхното пресмятане е ясен. Той води винаги до решаване на система с две уравнения от първа степен с две неизвестни.

Пример 2. От системата уравнения

$$x+y=u+v$$
$$\frac{x}{y}=\frac{\sin u}{\sin v}$$

u и v се определят като неявни функции на x и y. Като диференцираме дадените уравнения относно x, ще получим

$$1=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\frac{1}{y}=\frac{\cos u}{\sin v}\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\sin u\cos v}{\sin^2 v}\frac{\partial v}{\partial x},$$

откъдето пресмятаме

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\sin^2 v+y\sin u\cos v}{y\sin(u+v)}, \quad \frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\sin v(y\cos u-\sin v)}{y\sin(u+v)}.$$

Намерете $\frac{\partial u}{\partial y}$ и $\frac{\partial v}{\partial y}$, като диференцирате дадените уравнения относно y и решите получената система относно търсените производни.

Упражнения. I. Намерете y' и z', ако y и z са неявни функции, определени от следните системи уравнения:

1. $\begin{cases} x^3+y^3+z^3=3xyz \\ x+y+z=a. \end{cases}$ 2. $\begin{cases} \cos x+\cos y+\cos z=1 \\ x^3+y^3+z^3=1. \end{cases}$

II. Намерете първите частни производни на неявните функции u и v, определени от следните системи уравнения:

1. $\begin{cases} xy+uv=1 \\ \dfrac{x+y}{u+v}=2. \end{cases}$ 2. $\begin{cases} xe^{u+v}+2uv=1 \\ ye^{u-v}-\dfrac{u}{1+v}=2x. \end{cases}$

§ 81.* Теорема за съществуване на неявни функции

Този параграф е посветен на формулировката и доказателството на теоремата за съществуване на неявни функции. (Впрочем тя съдържа и едно твърдение за единственост, поради което може да бъде наречена теорема за съществуване и единственост на неявни функции.) Най-напред — в теорема 1, се разглежда случаят на неявна функция, определена от едно единствено уравнение, след което общата теорема за съществуване на неявни функции — теорема 2, се доказва по метода на пълната математична индукция, като се използува теорема 1. Изложеното доказателство е наистина доста дълго, но почива на твърде ясна и естествена идея. Нека забележим още, че се касае за едно твърдение от локален характер, т. е. твърдение, отнасящо се не до цялото дефиниционно множество на разглежданите функции, а само до някоя околност на една точка от това множество.

С цел да обърнем внимание върху най-характерните моменти във формулировката на теоремата, ще я изкажем най-напред в най-простия възможен случай — случая, когато една неявна функция на една променлива се определя от едно уравнение от вида $F(x, y)=0$. В този случай тя се формулира така:

Теорема. *Нека функцията $F(x, y)$ е дефинирана и непрекъсната в някоя околност D на точката (x_0, y_0), а частната ѝ производна $F_y'(x, y)$ съществува и също е непрекъсната в D, като при това $F(x_0, y_0)=0$ и $F_y'(x_0, y_0)\neq 0$. Тогава съществуват такова положително число δ и такава функция $f(x)$, че:*

а) *функцията $f(x)$ е дефинирана и непрекъсната в интервала $(x_0-\delta, x_0+\delta)$;*

б) $f(x_0)=y_0$;

в) *при $x\in(x_0-\delta, x_0+\delta)$ точката $(x, f(x))$ принадлежи на D и при това $F(x, f(x))=0$;*

г) *$f(x)$ е единствената функция, удовлетворяваща изискванията а), б) и в);*

д) *ако частната производна $F_x'(x, y)$ съществува и е непрекъсната D, то $f(x)$ е диференцуема в $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ и при това*

$$f(x)=-\frac{F_x'(x, f(x))}{F_y'(x, f(x))}.$$

Тази теорема се явява частен случай от следната

Теорема 1. *Нека функцията $F(x_1, \ldots, x_m, y)$ е дефинирана, непрекъсната и притежава непрекъсната частна производна $F_y'(x_1, \ldots, x_m, y)$ в някоя околност D на точката $(x_1^0, \ldots, x_m^0, y^0)$ в $(m+1)$-мерното пространство, и нека $F(x_1^0, \ldots, x_m^0, y^0)=0$, $F_y'(x_1^0, \ldots, x_m^0, y^0)\neq 0$. Тогава съществуват такава околност U на точката $(x_1^0, \ldots, x_m^0)$ в m-мерното пространство и такава функция $f(x_1, \ldots, x_m)$, че*

а) *функцията $f(x_1, \ldots, x_m)$ е дефинирана и непрекъсната в U;*

б) $f(x_1^0, \ldots, x_m^0)=y^0$;

в) *за $(x_1, \ldots, x_m)\in U$ имаме $(x_1, \ldots, x_m, f(x_1, \ldots, x_m))\in D$ и*

(1) $$F(x_1, \ldots, x_m, f(x_1, \ldots, x_m))=0;$$

г) *$f(x_1, \ldots, x_m)$ е единствената функция, удовлетворяваща изискванията а), б) и в);*

д) *ако частната производна $F_{x_i}'(x_1, \ldots, x_m, y)$ съществува и е непрекъсната в D, то съществува и е непрекъсната в U частната производна $f_{x_i}'(x_1, \ldots, x_m)$, като при това*

(2) $$f_{x_i}'(x_1, \ldots, x_m)=-\frac{F_{x_i}'(x_1, \ldots, x_m, f(x_1, \ldots, x_m))}{F_y'(x_1, \ldots, x_m, f(x_1, \ldots, x_m))}.$$

Доказателство. Ще считаме, че околността D е зададена с неравенствата

$$|x_1-x_1^0|<d, \ldots, |x_m-x_m^0|<d, |y-y_0|<d,$$

където $d>0$. Ще предположим освен това, че $F_y'(x_1^0, \ldots, x_m^0, y^0)>0$ (случаят $F_y'(x_1^0, \ldots, x_m^0, y^0)<0$ се разглежда аналогично). Тъй като функцията $F_y'(x_1, \ldots, x_m, y)$ е непрекъсната в точката $(x_1^0, \ldots, x_m^0, y^0)$, то ще съществува такова $\rho>0$ (можем да вземем $\rho<d$), че при

$$|x_1-x_1^0|<\rho, \ldots, |x_m-x_m^0|<\rho, \quad |y-y^0|<\rho$$

да имаме

(3) $$F_y'(x_1, \ldots, x_m, y)>0.$$

Тогава от неравенството $F_y'(x_1^0, \ldots, x_m^0, y)>0$, изпълнено при $y\in(y^0-\rho, y^0+\rho)$, заключаваме, че функцията $\varphi(y)=F(x_1^0, \ldots, x_m^0, y)$ е строго растяща в интервала $[y^0-\rho, y^0+\rho]$. Тъй като $\varphi(y^0)=0$, то ще имаме $\varphi(y^0-\rho)<0$ и $\varphi(y^0+\rho)>0$, т. е. $F(x_1^0, \ldots, x_m^0, y^0-\rho)<0$ и $F(x_1^0, \ldots, x_m^0, y^0+\rho)>0$. Поради непрекъснатостта пък на функцията $F(x_1, \ldots, x_m, y)$ в D можем да намерим такова $\delta>0$ $(\delta<\rho)$, че от неравенствата

(4) $$|x_1-x_1^0|<\delta, \ldots, |x_m-x_m^0|<\delta$$

да следват неравенствата

(5) $$F(x_1, \ldots, x_m, y^0-\rho)<0 \text{ и } F(x_1, \ldots, x_m, y^0+\rho)>0.$$

Множеството от точки $(x_1, \ldots, x_m)$ в m-мерното пространство, удовлетворяващи неравенствата (4), представлява една околност на точката $(x_1^0, \ldots, x_m^0)$. Ние ще означим тази околност с U и ще дефинираме в нея една функция $f(x_1, \ldots, x_m)$ по следния начин. Нека $(x_1', \ldots, x_m')$ е произволно взета точка от U, която ще считаме фиксирана за момента. Тогава можем да разглеждаме $F(x_1', \ldots, x_m', y)$ като функция само на y — да означим тази функция с $\chi(y)$. Неравенството (3), приложено към точката $(x_1', \ldots, x_m', y)$ сега ни дава $\chi'(y)>0$ за $y\in(y^0-\rho, y^0+\rho)$, което показва, че непрекъснатата функция $\chi(y)$ е строго растяща в интервала $[y^0-\rho, y^0+\rho]$. От неравенствата (5) обаче имаме $\chi(y^0-\rho)<0$ и $\chi(y^0+\rho)>0$. Оттук следва, че съществува, и то едно единствено число y', намиращо се между $y^0-\rho$ и $y^0+\rho$, за което е изпълнено равенството $\chi(y')=0$, т. е. $F(x_1', \ldots, x_m', y')=0$. Това число y' ще приемем за стойност на функцията $f(x_1, \ldots, x_m)$ в избраната точка $(x_1', \ldots, x_m')$.

И така вече дефинирахме функцията $f(x_1, \ldots, x_m)$ в множеството U. От самата дефиниция е ясно, че $f(x_1^0, \ldots, x_m^0)=y^0$, че за всяка точка $(x_1, \ldots, x_m)$ от U имаме $(x_1, \ldots, x_m, f(x_1, \ldots, x_m))\in D$, както и че е изпълнено равенството (1). С това са установени твърденията б) и в) на теоремата.

Сега ще покажем, че функцията $f(x_1, \ldots, x_m)$ е непрекъсната във всички точки на множеството U. Нека вземем отново една точка $(x_1', \ldots, x_m')$ от U и нека $y'=f(x_1', \ldots, x_m')$. Да вземем и едно произволно положително число ε. Можем да считаме, че сме взели ε толкова малко, че да имаме $y^0-\rho<y'-\varepsilon$ и $y'+\varepsilon<y^0+\rho$. Това е възможно, тъй като $y^0-\rho<y'<y^0+\rho$. Ако разгледаме отново функцията $\chi(y)=F(x_1', \ldots, x_m', y)$, то поради равенството $\chi(y')=0$ и поради това, че $\chi(y)$ е строго растяща, ще видим, че $\chi(y'-\varepsilon)<0$ и $\chi(y'+\varepsilon)>0$, т. е. $F(x_1', \ldots, x_m', y'-\varepsilon)<0$ и $F(x_1', \ldots, x_m', y'+\varepsilon)>0$. Използувайки още веднъж непрекъснатостта на функцията $F(x_1, \ldots, x_m, y)$ в D, ще намерим такова число $\delta'>0$, че от неравенствата

(6) $$|x_1-x_1'|<\delta', \ldots, |x_m-x_m'|<\delta'$$

да следват неравенствата

(7) $$F(x_1, \ldots, x_m, y'-\varepsilon)<0 \text{ и } F(x_1, \ldots, x_m, y'+\varepsilon)>0.$$

При това можем да считаме δ' взето толкова малко, че точките $(x_1, \ldots, x_m)$, удовлетворяващи неравенствата (6), да не напускат U. От неравенствата (7) сега заключаваме, че за всяка точка $(x_1, \ldots, x_m)$, чиито координати удовлетворяват неравенствата (6), единственото число y, намиращо се между $y^0-\rho$ и $y^0+\rho$, за което е изпълнено равенството $F(x_1, \ldots, x_m, y)=0$, се намира между $y'-\varepsilon$ и $y'+\varepsilon$. Тъй като това число y не е нищо друго освен $f(x_1, \ldots, x_m)$, то получаваме

$$|f(x_1, \ldots, x_m)-f(x_1', \ldots, x_m')|<\varepsilon.$$

С това е доказана непрекъснатостта на функцията $f(x_1, \ldots, x_m)$ в произволна точка на множеството U, т. е. доказано е и твърдението а) на теоремата.

Пристъпваме към доказателството на твърдението г). Да допуснем, че в някоя околност U^* на точката $(x_1^0, \ldots, x_m^0)$, която околност можем да считаме съдържаща се в U, е дефинирана една различна от $f(x_1, \ldots, x_m)$ непрекъсната функция $f^*(x_1, \ldots, x_m)$, такава, че да имаме $f^*(x_1^0, \ldots, x_m^0)=y^0$ и

$$F(x_1, \ldots, x_m, f^*(x_1, \ldots, x_m))=0$$

за всяка точка $(x_1, \ldots, x_m)$ от U^*. Това, че функциите $f(x_1, \ldots, x_m)$ и $f^*(x_1, \ldots, x_m)$ са различни, означава, че за някоя точка $(x_1^1, \ldots, x_m^1)$ от U^* имаме

$$f(x_1^1, \ldots, x_m^1)\neq f^*(x_1^1, \ldots, x_m^1).$$

Да разгледаме точките $(x_1^t, \ldots, x_m^t)$, където $0\leq t\leq 1$ и

$$x_k^t=x_k^0+t(x_k^1-x_k^0), \qquad k=1, 2, \ldots, m,$$

и да означим с τ точната долна граница на стойностите на t, за които

(8) $$f(x_1^t, \ldots, x_m^t)\neq f^*(x_1^t, \ldots, x_m^t).$$

Ясно е, че $\tau\geq 0$. Ако $\tau>0$, то за $0\leq t<\tau$ ще имаме $f(x_1^t, \ldots, x_m^t)=f^*(x_1^t, \ldots, x_m^t)$. Като вземем пред вид непрекъснатостта на функциите $f(x_1, \ldots, x_m)$ и $f^*(x_1, \ldots, x_m)$, заключаваме, че ще имаме също

$$f(x_1^\tau, \ldots, x_m^\tau)=f^*(x_1^\tau, \ldots, x_m^\tau).$$

Оттук е ясно, че $\tau<1$. Ако $y^\tau=f(x_1^\tau, \ldots, x_m^\tau)=f^*(x_1^\tau, \ldots, x_m^\tau)$, то $y^0-\rho<y^\tau<y^0+\rho$. Ето защо, опирайки се отново върху непрекъснатостта на двете разглеждани функции, ще можем да намерим такова $\delta_1>0$, че $\tau+\delta_1<1$ и при $\tau<t<\tau+\delta_1$ да бъдат изпълнени както неравенствата

$$y^0-\rho<f(x_1^t, \ldots, x_m^t)<y^0+\rho,$$

така и неравенствата

$$y^0-\rho<f^*(x_1^t, \ldots, x_m^t)<y^0+\rho.$$

Но тъй като при $\tau<t<\tau+\delta_1$ точките $(x_1^t, \ldots, x_m^t)$ принадлежат на U^*, а следователно и на U, то ще имаме и равенствата

$$F(x_1^t, \ldots, x_m^t, f(x_1^t, \ldots, x_m^t))=0$$

и

$$F(x_1^t, \ldots, x_m^t, f^*(x_1^t, \ldots, x_m^t))=0.$$

Както знаем обаче, за всяка точка $(x_1, \ldots, x_m)$ от U съществува между $y^0-\rho$ и $y^0+\rho$ една единствена стойност на y, за която е в сила равенството

$$F(x_1, \ldots, x_m, y)=0.$$

Оттук заключаваме, че при $\tau<t<\tau+\delta_1$ имаме

$$f(x_1^t, \ldots, x_m^t)=f^*(x_1^t, \ldots, x_m^t),$$

и следователно точната долна граница на стойностите t, за които е изпълнено неравенството (8), не може да бъде по-малка от $\tau+\delta_1$. Това противоречи обаче на определението на числото τ. Полученото противоречие показва, че нашето допускане за съществуването на функция $f^*(x_1, \ldots, x_m)$ с посочените по-горе свойства е било погрешно. С това е завършено доказателството на твърдението г) за единственост.

Най-сетне да се занимаем и с твърдението д). Да допуснем, че не само частната производна $F_y'(x_1, \ldots, x_m, y)$, но също тъй за някое i и частната производна $F_{x_i}'(x_1, \ldots, x_m, y)$ съществува и е непрекъсната в D. Ще покажем, че в такъв случай функцията $f(x_1, \ldots, x_m)$ е диференцуема частно относно x_i във всяка точка U. Нека $(x_1, \ldots, x_m)$ е произволно взета точка от U и нека точката $(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i+h, x_{i+1}, \ldots, x_m)$, където $h\neq 0$, принадлежи също на U. Ако $(x_1, \ldots, x_m)=y$ и $f(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i+h, x_{i+1}, \ldots, x_m)=y+k$, то въз основа на равенството (1) ще имаме

$$F(x_1, \ldots, x_m, y)=0$$

и

$$F(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i+h, x_{i+1}, \ldots, x_m, y+k)=0.$$

Тогава ще получим

$$0=F(x_1,\ldots,x_{i-1},x_i+h,x_{i+1},\ldots,x_m,y+k)-F(x_1,\ldots,x_m,y)$$
$$=[F(x_1,\ldots,x_{i-1},x_i+h,x_{i+1},\ldots,x_m,y+k)-F(x_1,\ldots,x_m,y+k)]$$
$$+[F(x_1,\ldots,x_m,y+k)-F(x_1,\ldots,x_m,y)]$$
$$=hF'_{x_i}(x_1,\ldots,x_{i-1},x_i+\theta_1 h,x_{i+1},\ldots,x_m,y+k)$$
$$+kF'_y(x_1,\ldots,x_m,y+\theta_2 k),$$

където $0<\theta_1<1$ и $0<\theta_2<1$ (последното равенство е получено с помощта на теоремата на крайните нараствания, приложена поотделно към двете разлики, написани в средните скоби).

Следователно ще имаме

$$\frac{k}{h}=-\frac{F'_{x_i}(x_1,\ldots,x_{i-1},x_i+\theta_1 h,x_{i+1},\ldots,x_m,y+k)}{F'_y(x_1,\ldots,x_m,y+\theta_2 k)}.$$

Като вземем пред вид, че

$$k=f(x_1,\ldots,x_{i-1},x_i+h,x_{i+1},\ldots,x_m)-f(x_1,\ldots,x_m),$$

ще получим

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_1,\ldots,x_{i-1},x_i+h,x_{i+1},\ldots,x_m)-f(x_1,\ldots,x_m)}{h}$$

$$=-\lim_{h}\frac{F'_{x_i}(x_1,\ldots,x_{i-1},x_i+\theta_1 h,x_{i+1},\ldots,x_m,y+k)}{F'_y(x_1,\ldots,x_m,y+\theta_2 k)}.$$

Оттук, като използуваме това, че поради непрекъснатостта на $f(x_1,\ldots,x_m)$ имаме $\lim\limits_{h\to 0} k=0$, заключаваме, че функцията $f(x_1,\ldots,x_m)$ е диференцуема частно спрямо x_i в произволно взетата точка $(x_1,\ldots,x_m)$ и че

$$f'_{x_i}(x_1,\ldots,x_m)=-\frac{F'_{x_i}(x_1,\ldots,x_m,y)}{F'_y(x_1,\ldots,x_m,y)}.$$

С това е доказано и равенството (2). От това равенство се вижда и непрекъснатостта на $f'_{x_i}(x_1,\ldots,x_m)$ в U. По този начин теорема 1 е доказана докрай.

Общият случай, при който срещаме неявни функции — случаят, когато няколко неявни функции се определят едновременно от една система уравнения, е предмет на следната по-обща

Теорема 2. *Нека функциите*

(9) $$F_k(x_1,\ldots,x_m,y_1,\ldots,y_n),\quad k=1,2,\ldots,n,$$

са дефинирани, непрекъснати и притежават непрекъснати частни производни относно променливите y_j $(j=1,2,\ldots,n)$ *в някоя околност* D *на точката* $(x_1^0,\ldots,x_m^0,y_1^0,\ldots,y_n^0)$ *в* $(m+n)$*-мерното пространство. Да предположим още, че*

(10) $$F_k(x_1^0,\ldots,x_m^0,y_1^0,\ldots,y_n^0)=0,\quad k=1,2,\ldots,n,$$

и

(11) $$\begin{vmatrix} F_{1,1} & \cdots & F_{1,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ F_{n,1} & \cdots & F_{n,n} \end{vmatrix} \neq 0,$$

където

$$F_{k,i}=(F_k)'_{y_i}(x_1^0,\ldots,x_m^0,y_1^0,\ldots,y_n^0),\quad k=1,\ldots,n,\ i=1,\ldots,n.$$

Тогава съществуват такава околност U *на точката* $(x_1^0,\ldots,x_m^0)$ *в* m*-мерното пространство и такива функции*

(12) $$f_k(x_1,\ldots,x_m),\quad k=1,2,\ldots,n,$$

че:

а) *функциите* (12) *са дефинирани и непрекъснати в* U;

б) $f_k(x_1^0,\ldots,x_m^0)=y_k^0$ *за* $k=1,2,\ldots,n$;

в) *за* $(x_1,\ldots,x_m)\in U$ *имаме*

(13) $$(x_1,\ldots,x_m,f_1(x_1,\ldots,x_m),\ldots,f_n(x_1,\ldots,x_m))\in D$$

и

(14) $$F_k(x_1,\ldots,x_m,f_1(x_1,\ldots,x_m),\ldots,f_n(x_1,\ldots,x_m))=0,\ k=1,2,\ldots,n,$$

г) *функциите* (12) *образуват единствената система от* n *функции удовлетворяваща изискванията* а), б) *и* в);

д) *ако за някое* i *частните производни на функциите* (9) *относно променливата* x_i *съществуват и са непрекъснати в* D, *то в* U *съществуват и са непрекъснати частните производни на функциите* (12) *относно* x_i.

Доказателство. Ще докажем теоремата по метода на пълната математична индукция, приложена относно n. При $n=1$ теорема 2 преминава, както веднага се вижда, в доказаната вече теорема 1. Нека сега $n>1$. Ще допуснем че теорема 2 е вярна винаги когато броят на функциите (9) (който е равен на броя на променливите y_i) е по-малък от n, и ще разгледаме случая, който ни е даден във формулировката на теоремата.

Ще считаме, че множеството D, за което се говори в условието на теоремата, е определено от неравенствата

$$|x_i-x_i^0|<d\ (i=1,\ldots,m),\quad |y_j-y_j^0|<d\quad (j=1,\ldots,n),$$

където $d>0$.

Тъй като детерминантата, написана в лявата страна на неравенството (11), е различна от нула, то поне един от нейните елементи ще бъде също различен от нула. Нека такъв е например $F_{n,n}$. По-подробно записано, ще имаме

$$(F_n)'_{y_n}(x_1^0,\ldots,x_m^0,y_1^0,\ldots,y_n^0)\neq 0.$$

Това неравенство ни дава възможност, прилагайки теорема 1, да намерим едно положително число δ_1, по-малко от d, и една функция $g(x_1,\dots,x_m,\ y_1,\dots,y_{n-1})$, такива, че:

1) тази функция е дефинирана и непрекъсната в $(m+n-1)$-мерната околност U_1 на точката $(x_1^0,\dots,x_m^0,\ y_1^0,\dots,y_{n-1}^0)$, определена чрез неравенствата

$$|x_i-x_i^0|<\delta_1\quad (i=1,\dots,m),\qquad |y_j-y_j^0|<\delta_1\quad (j=1,\dots,n-1);$$

2) изпълнено е равенството

(15) $$g(x_1^0,\dots,x_m^0,\ y_1^0,\dots,\ y_{n-1}^0)=y_n^0;$$

3) за всяка точка $(x_1,\dots,x_m,\ y_1,\dots,y_{n-1})$ от U_1 имаме

(16) $$(x_1,\dots,x_m,\ y_1,\dots,y_{n-1},\ g(x_1,\dots,x_m,\ y_1,\dots,y_{n-1}))\in D$$

и

(17) $$F_n(x_1,\dots,x_m,\ y_1,\dots,y_{n-1},\ g(x_1,\dots,x_m,\ y_1,\dots,y_{n-1}))=0;$$

4) функцията $g(x_1,\dots,x_m,\ y_1,\dots,y_{n-1})$ е диференцуема частно относно променливите $y_1,\dots,y_{n-1}$ в U_1 и нейните частни производни са непрекъснати в U_1, като при това имаме

(18) $$g'_{y_j}(x_1^0,\dots,x_m^0,\ y_1^0,\dots,\ y_{n-1}^0)=-\frac{F_{n,j}}{F_{n,n}}\ (j=1,\dots,n-1).$$

Да разгледаме сега при $k=1,2,\dots,n-1$ функциите

(19) $$G_k(x_1,\dots,x_m,\ y_1,\dots,y_{n-1})$$
$$=F_k(x_1,\dots,x_m,\ y_1,\dots,y_{n-1},\ g(x_1,\dots,x_m,\ y_1,\dots,y_{n-1}))$$

и да се убедим, че тези $n-1$ на брой функции удовлетворяват условията на теоремата в околността U_1 на точката $(x_1^0,\dots,x_m^0,\ y_1^0,\dots,y_{n-1}^0)$. Тяхната непрекъснатост и диференцуемост относно $y_1,\dots,y_{n-1}$, както и непрекъснатостта на техните частни производни в U_1 се виждат веднага. От равенствата (15) и (10) пък следват равенствата

$$G_k(x_1^0,\dots,\ x_m^0,\ y_1^0,\dots,\ y_{n-1}^0)=0,\qquad k=1,\dots,n-1.$$

По-нататък нека

$$G_{k,j}=(G_k)'_{y_j}(x_1^0,\dots,\ x_m^0,\ y_1^0,\dots,\ y_{n-1}^0),$$

където $k=1,\dots,n-1;\ j=1,\dots,n-1$. Вземайки пред вид равенствата (18), получаваме

$$G_{k,j}=F_{k,j}-F_{k,n}\frac{F_{n,j}}{F_{n,n}}.$$

Ето защо ще имаме

$$\begin{vmatrix} G_{1,1} & \dots & G_{1,n-1}\\ \cdot & \cdot & \cdot\\ G_{n-1,1} & \dots & G_{n-1,n-1}\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} F_{1,1}-F_{1,n}\frac{F_{n,1}}{F_{n,n}} & \dots & F_{1,n-1}-F_{1,n}\frac{F_{n,n-1}}{F_{n,n}}\\ \cdot & \cdot & \cdot\\ F_{n-1,1}-F_{n-1,n}\frac{F_{n,1}}{F_{n,n}} & \dots & F_{n-1,n-1}-F_{n-1,n}\frac{F_{n,n-1}}{F_{n,n}}\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} F_{1,1}-F_{1,n}\frac{F_{n,1}}{F_{n,n}} & \dots & F_{1,n-1}-F_{1,n}\frac{F_{n,n-1}}{F_{n,n}} & 0\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ F_{n-1,1}-F_{n-1,n}\frac{F_{n,1}}{F_{n,n}} & \dots & F_{n-1,n-1}-F_{n-1,n}\frac{F_{n,n-1}}{F_{n,n}} & 0\\ F_{n,1} & \dots & F_{n,n-1} & 1\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} F_{1,1} & \dots & F_{1,n-1} & \frac{F_{1,n}}{F_{n,n}}\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ F_{n-1,1} & \dots & F_{n-1,n-1} & \frac{F_{n-1,n}}{F_{n,n}}\\ F_{n,1} & \dots & F_{n,n-1} & 1\end{vmatrix}$$

$$=\frac{1}{F_{n,n}}\begin{vmatrix} F_{1,1} & \dots & F_{1,n}\\ \cdot & \cdot & \cdot\\ F_{n,1} & \dots & F_{n,n}\end{vmatrix}\neq 0.$$

По такъв начин виждаме, че функциите (19), чийто брой е $n-1$, наистина удовлетворяват всички условия на теорема 2 в U_1. Следователно ще съществува в m-мерното пространство някаква околност U на точката $(x_1^0,\dots,x_m^0)$, определена от неравенствата

$$|x_i-x_i^0|<\delta\qquad (i=1,\ 2,\dots,\ m),$$

в която са дефинирани $n-1$ на брой функции

(20) $$f_k(x_1,\dots,x_m),\qquad k=1,2,\dots,n-1,$$

като при това:

1) функциите (20) са непрекъснати в U;

2) в сила са равенствата

(21) $$f_k(x_1^0,\dots,\ x_m^0)=y_k^0,\quad k=1,\ 2,\dots,\ n-1;$$

3) за $(x_1,\dots,x_m)\in U$ имаме

(22) $$(x_1,\dots,x_m,\ f_1(x_1,\dots,x_m),\dots,f_{n-1}(x_1,\dots,x_m))\in U_1$$

и

(23) $$G_k(x_1,\dots,x_m,\ f_1(x_1,\dots,x_m),\dots,f_{n-1}(x_1,\dots,x_m))=0,$$
$$k=1,\dots,n-1.$$

Нека сега дефинираме в U функцията $f_n(x_1, \ldots, x_m)$ чрез равенството

(24) $f_n(x_1, \ldots, x_m) = g(x_1, \ldots, x_m, f_1(x_1, \ldots, x_m), \ldots, f_{n-1}(x_1, \ldots, x_m))$.

Ще проверим, че системата от функции $f_k(x_1, \ldots, x_m)$, $k=1, 2, \ldots, n$, в която освен функциите (20) е включена още и функцията (24), удовлетворява твърденията на теоремата 2, отнасящи се до функциите (12), в околността U на точката $(x_1^0, \ldots, x_m^0)$. Непрекъснатостта на функциите $f_k(x_1, \ldots, x_m)$ в множеството U е очевидна, значи твърдението а) е изпълнено.

Поради равенствата (15), (21) и (24) ще имаме

$$f_n(x_1^0, \ldots, x_m^0) = y_n^0.$$

Последното равенство заедно с равенствата (21) показва, че и твърдението б) е изпълнено.

За всяка точка $(x_1, \ldots, x_m)$, принадлежаща на U, от (22) и (16) следва (13), а от равенствата (19), (23), (17) и (24) следват равенствата (14). С това е доказано и твърдението в).

Що се отнася до твърдението д), неговата проверка (извършена чрез математична индукция относно n с помощта на равенство (24)) вече не представлява трудност и може да се предостави на читателя.

Най-сетне ще се спрем на твърдението г) за единственост. Неговото доказателство, което само ще скицираме, се опира на следното допълнително твърдение:

Околността U на точката $(x_1^0, \ldots, x_m^0)$, за която се говори във формулировката на теоремата (и която вече построихме по-горе), може да бъде определена по такъв начин, че да притежава следното свойство: съществува положително число ρ, такова, че за всяка точка $(x_1, \ldots, x_m)$ от U единствената n-орка числа $y_1, \ldots, y_n$, удовлетворяващи неравенствата

$$y_k^0 - \rho < y_k < y_k^0 + \rho \qquad (k=1, \ldots, n)$$

и равенствата

$$F_k(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n) = 0 \qquad (k=1, \ldots, n),$$

е n-орката, състояща се от числата

$$y_k = f_k(x_1, \ldots, x_m) \qquad (k=1, \ldots, n).$$

Изказаното твърдение може да бъде доказано по метода на пълната математична индукция (при $n=1$ то бе установено при доказателството на теорема 1). След това твърдението г) на теорема 2 се доказва с помощта на разсъждения, подобни на онези, с които доказахме твърдението г) на теорема 1.

Така доказателството на теорема 2 е завършено.

82. Формула на Тейлор за функции на две променливи

При функциите на две променливи съществува формула, носеща името формула на Тейлор, която е подобна на познатата ни формула на Тейлор за функции на една променлива и която се извежда именно с помощта на споменатата формула.

Нека функцията $f(x, y)$ е дефинирана и притежава частни производни до $(n+1)$-ви ред включително в някаква околност D на точката (x_0, y_0) и нека всичките ѝ частни производни са непрекъснати в тази околност. Да вземем друга точка (x_0+h, y_0+k), лежаща също в D. След това да образуваме функцията

$$\varphi(t) = f(x_0+ht, y_0+kt),$$

където h и k разглеждаме като постоянни, а t — като променлива. Когато променливата t се мени в интервала $[0, 1]$, точката (x_0+ht, y_0+kt) ще описва отсечката, съединяваща точките (x_0, y_0) и (x_0+h, y_0+k), и следователно също ще лежи в околността D. Поради условията, на които подчинихме функцията $f(x, y)$, оттук следва, че функцията $\varphi(t)$ ще бъде дефинирана и $n+1$ пъти диференцуема в интервала $[0, 1]$. Това ни дава право да твърдим, че формулата на Маклорен

$$\varphi(t) = \varphi(0) + \frac{t}{1!}\varphi'(0) + \frac{t^2}{2!}\varphi''(0) + \cdots + \frac{t^n}{n!}\varphi^{(n)}(0) + R_n$$

е валидна за всяко t, удовлетворяващо неравенствата $0 \leq t \leq 1$. Тук имаме

$$R_n = \frac{t^{n+1}}{(n+1)!}\varphi^{(n+1)}(\theta t),$$

където θ е число, намиращо се между 0 и 1.

При $t=1$ получаваме

$$(1) \quad \varphi(1) = \varphi(0) + \frac{1}{1!}\varphi'(0) + \frac{1}{2!}\varphi''(0) + \cdots + \frac{1}{n!}\varphi^{(n)}(0) + \frac{1}{(n+1)!}\varphi^{(n+1)}(\theta).$$

Нашата най-близка цел сега ще бъде да напишем подробно равенството (1), като изхождаме от дефиницията на функцията $\varphi(t)$:

$$\varphi(t) = f(x_0+ht, \; y_0+kt).$$

Диференцираме последователно това равенство и получаваме

$$\varphi'(t) = f_x'(x_0+ht, \; y_0+kt)h + f_y'(x_0+ht, \; y_0+kt)k,$$

$$\varphi''(t) = f_{x^2}''(x_0+ht, \; y_0+kt)h^2 + 2f_{xy}''(x_0+ht, \; y_0+kt)hk + f_{y^2}''(x_0+ht, \; y_0+kt)k^2.$$

С помощта на метода на пълната математична индукция намираме

$$\varphi^{(n)}(t) = f_{x^n}^{(n)}(x_0+ht, \; y_0+kt)h^n + \binom{n}{1}f_{x^{n-1}y}^{(n)}(x_0+ht, \; y_0+kt)h^{n-1}k + \cdots + \binom{n}{n}f_{y^n}^{(n)}(x_0+ht, \; y_0+kt)k^n.$$

От тези равенства следва, че

$$\varphi(0)=f(x_0, y_0),$$

$$\varphi'(0)=f_x'(x_0, y_0)h+f_y'(x_0, y_0)k,$$

$$\varphi''(0)=f''_{x^2}(x_0, y_0)h^2+2f''_{xy}(x_0, y_0)hk+f''_{y^2}(x_0, y_0)k^2,$$

— — — — — — — — — — — — — — — —

$$\varphi^{(n)}(0)=f^{(n)}_{x^n}(x_0, y_0)h^n+\binom{n}{1}f^{(n)}_{x^{n-1}y}(x_0, y_0)h^{n-1}k+\cdots$$

$$+\binom{n}{n}f^{(n)}_{y^n}(x_0, y_0)k^n.$$

От друга страна, имаме

$$\varphi(1)=f(x_0+h, y_0+k).$$

Следователно равенството (1) се превръща в следното:

$$f(x_0+h, y_0+k)=f(x_0, y_0)+\frac{1}{1!}[f_x'(x_0, y_0)h+f_y'(x_0, y_0)k] \tag{2}$$

$$+\frac{1}{2!}[f''_{x^2}(x_0, y_0)h^2+2f''_{xy}(x_0, y_0)hk+f''_{y^2}(x_0, y_0)k^2]$$

$$+\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+\frac{1}{n!}[f^{(n)}_{x^n}(x_0, y_0)h^n+\binom{n}{1}f^{(n)}_{x^{n-1}y}(x_0, y_0)h^{n-1}k+\cdots$$

$$+\binom{n}{n}f^{(n)}_{y^n}(x_0, y_0)k^n]+R_n.$$

Тук имаме

$$R_n=\frac{1}{(n+1)!}\Big[f^{(n+1)}_{x^{n+1}}(x_0+\theta h, y_0+\theta k)h^{n+1}$$

$$+\binom{n+1}{1}f^{(n+1)}_{x^n y}(x_0+\theta h, y_0+\theta k)h^n k$$

$$+\cdots+\binom{n+1}{n+1}f^{(n+1)}_{y^{n+1}}(x_0+\theta h, y_0+\theta k)k^{n+1}\Big],$$

където θ е някакво число, намиращо се между 0 и 1.

Формулата (2) се нарича ф о р м у л а н а Т е й л о р за функции на две независими променливи.*

* От изложеното доказателство се вижда, че за верността на формулата (2) не е необходимо точката (x_0+h, y_0+k) да лежи в някоя околност D на точката (x_0, y_0), в която околност е изпълнено условието за съществуване на частните производни; достатъчно е (стига това условие да е изпълнено за всички точки от вътрешността на дефиниционната област M на функцията $f(x, y)$) да предположим, че отсечката, съединяваща точките (x_0, y_0) и (x_0+h, y_0+k), лежи изцяло във вътрешността на M.

Ние ще направим веднага едно приложение на тази формула. Както видяхме в § 75, една функция $f(x, y)$ може да бъде диференцуема частно както спрямо x, така и спрямо y в дадена точка (x_0, y_0), без да бъде непрекъсната в тази точка. Сега можем обаче да се убедим, че ако нейните първи частни производни $f_x'(x, y)$ и $f_y'(x, y)$ съществуват в една околност на (x_0, y_0) и са непрекъснати в точката (x_0, y_0), то непрекъсната е и самата функция $f(x, y)$. Наистина от формулата (2) при $n=0$ следва, че

$$f(x_0+h, y_0+k)=f(x_0, y_0)$$

$$+\frac{1}{1!}(f_x'(x_0+\theta h, y_0+\theta k)h+f_y'(x_0+\theta h, y_0+\theta k)k.$$

Поради непрекъснатостта на $f_x'(x,y)$ и $f_y'(x, y)$ в точката (x_0, y_0) това равенство ни дава

$$\lim_{h\to 0,\, k\to 0} f(x_0+h, y_0+k)=f(x_0, y_0),$$

което именно показва, че функцията $f(x, y)$ е непрекъсната в тази точка

§ 83. Максимум и минимум на функции на две променливи

Нека е дадена една функция $f(x, y)$ с дефиниционна област M и нека точката (x_0, y_0) е вътрешна за M. *Казваме, че функцията* $f(x, y)$ *има* *л о к а л е н м а к с и м у м в точката* (x_0, y_0), *ако в някоя околност на тази точка е изпълнено неравенството*

$$f(x, y)\leqq f(x_0, y_0). \tag{1}$$

Аналогично *функцията* $f(x, y)$ *притежава л о к а л е н м и н и м у м в точката* (x_0, y_0), *ако в някоя околност на тази точка е изпълнено неравенството*

$$f(x, y)\geqq f(x_0, y_0). \tag{2}$$

Локалните максимуми и локалните минимуми на една функция и тук се наричат с общото име л о к а л н и е к с т р е м у м и.

Следващата теорема ни дава едно необходимо условие за съществуване на локален екстремум.

Теорема 1. *Ако функцията* $f(x, y)$ *има локален екстремум в точката* (x_0, y_0) *и притежава първи частни производни в тази точка, то*

$$f_x'(x_0, y_0)=f_y'(x_0, y_0)=0.$$

Д о к а з а т е л с т в о. Да разгледаме случая, когато $f(x, y)$ има локален максимум в точката (x_0, y_0). Ако образуваме функцията $\varphi(x)=f(x, y_0)$, то неравенството

$$f(x, y_0)\leqq f(x_0, y_0),$$

което е сигурно изпълнено в някоя околност $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ на x_0, може да се запише във вида

$$\varphi(x)\leqq\varphi(x_0).$$

Следователно функцията $\varphi(x)$ има локален максимум в точката x_0 и съгласно теоремата на Ферма ще имаме $\varphi'(x_0)=0$, или, което е все едно, $f_x'(x_0, y_0)=0$.

Аналогично, като разгледаме функцията $\psi(y)=f(x_0, y)$, получаваме $f_y'(x_0, y_0)=0$.

Случаят, когато $f(x, y)$ има локален минимум в точката (x_0, y_0), се разглежда по същия начин.

Анулирането на първите частни производни обаче не е достатъчно за съществуването на локален екстремум. В това можем да се убедим, като разгледаме функцията

$$f(x, y)=x^3+y^3$$

в точката $(0, 0)$. Тук имаме $f_x'(0,0)=f_y'(0, 0)=0$. Но функцията няма нито локален максимум, нито локален минимум в тази точка, тъй като при $x>0$ и $y>0$ имаме $f(x, y)>f(0, 0)$, а при $x<0, y<0$ имаме $f(x, y)<f(0,0)$ и следователно не съществува такава околност на точката $(0, 0)$, в която да бъде изпълнено неравенството (1) или пък неравенството (2).

Сега ще се запознаем с една теорема, даваща достатъчни условия за съществуването на локален екстремум:

Теорема 2. *Нека функцията $f(x, y)$ има непрекъснати първи и втори частни производни в някоя околност на точката (x_0, y_0).*
Ако

$$f_x'(x_0, y_0)=f_y'(x_0, y_0)=0 \tag{3}$$

и

$$f_{xy}''^2(x_0, y_0)-f_{x^2}''(x_0, y_0)f_{y^2}''(x_0, y_0)<0, \tag{4}$$

то $f(x, y)$ има локален екстремум в точката (x_0, y_0). При това той е минимум, когато $f_{x^2}''(x_0, y_0)>0$, и е максимум, когато $f_{x^2}''(x_0, y_0)<0$.

Доказателство. Ще разгледаме подробно случая, когато

$$f_{x^2}''(x_0, y_0)<0. \tag{5}$$

Случаят, когато $f_{x^2}''(x_0, y_0)>0$, се третира съвсем аналогично (не е възможно да имаме $f_{x^2}''(x_0, y_0)=0$, тъй като тогава би се нарушило неравенството (4)).

Да въведем за удобство функцията

$$\varphi(x, y)=f_{xy}''^2(x, y)-f_{x^2}''(x, y)f_{y^2}''(x, y).$$

Неравенствата (4) и (5) показват, че функциите $f_{x^2}''(x, y)$ и $\varphi(x, y)$ са различни от нула в точката (x_0, y_0). Съгласно предположенията на теоремата те са и непрекъснати, поради което ще запазват знака си в някоя околност D на тази точка. И така за всички точки от квадрата D ще имаме

$$f_{x^2}''(x, y)<0 \text{ и } \varphi(x, y)<0.$$

Да вземем сега една точка (x_0+h, y_0+k), принадлежаща на D.

Като приложим формулата на Тейлор при $n=1$ и вземем пред вид равенствата (3), ще получим

$$f(x_0+h, y_0+k)=f(x_0, y_0) \tag{6}$$

$$+\frac{1}{2!}\Big[f_{x^2}''(x_0+\theta h, y_0+\theta k)h^2+2f_{xy}''(x_0+\theta h, y_0+\theta k)hk$$

$$+f_{y^2}''(x_0+\theta h, y_0+\theta k)k^2\Big],$$

където $0<\theta<1$.

Нека положим за краткост

$$a=f_{x^2}''(x_0+\theta h, y_0+\theta k),\quad b=f_{xy}''(x_0+\theta h, y_0+\theta k),$$

$$c=f_{y^2}''(x_0+\theta h, y_0+\theta k).$$

Тогава равенството (6) може да се напише във вида

$$f(x_0+h, y_0+k)-f(x_0, y_0)=\frac{1}{2}[ah^2+2bhk+ck^2]. \tag{7}$$

Тъй като точката $(x_0+\theta h, y_0+\theta k)$ лежи върху отсечката, съединяваща точките (x_0, y_0) и (x_0+h, y_0+k), тя също се намира в квадрата D и следователно са изпълнени неравенствата

$$f_{x^2}''(x_0+\theta h, y_0+\theta k)<0 \text{ и } \varphi(x_0+\theta h, y_0+\theta k)<0.$$

С нашите означения последните две неравенства се записват така:

$$a<0 \text{ и } b^2-ac<0. \tag{8}$$

Нека сега преработим израза в дясната страна на равенството (7). Имаме

$$\frac{1}{2}[ah^2+2bhk+ck^2]=\frac{1}{2a}[(a^2h^2+2abhk+b^2k^2-b^2k^2+ack^2]$$

$$=\frac{1}{2a}[(ah+bk)^2+(ac-b^2)k^2].$$

Оттук, като вземем пред вид неравенствата (8), виждаме, че

$$\frac{1}{2}[ah^2-2bhk+ck^2]\leqq 0. \tag{9}$$

Най-сетне равенството (7) и неравенството (9) показват, че

$$f(x_0+h, y_0+k)-f(x_0, y_0)\leqq 0.$$

И тъй произволно взетата точка (x_0+h, y_0+k) от околността D на точката (x_0, y_0) удовлетворява неравенството

$$f(x_0+h, y_0+k)\leqq f(x_0, y_0).$$

Това показва, че функцията $f(x, y)$ има локален максимум в точката (x_0, y_0).

Нека забележим, че когато прилагаме тази теорема, можем при определянето на това, дали в точката (x_0, y_0) функцията $f(x, y)$ има максимум или минимум, да си послужим с $f''_{y^2}(x_0, y_0)$ вместо с $f''_{x^2}(x_0, y_0)$, тъй като неравенството (4) ни гарантира, че тези две числа имат един и същ знак.

Без да се спираме на доказателството, ще отбележим още, че ако са изпълнени условията на доказаната теорема, но вместо неравенството (4) имаме неравенството

(10) $$f''^2_{xy}(x_0, y_0) - f''_{x^2}(x_0, y_0) f''_{y^2}(x_0, y_0) > 0,$$

то функцията $f(x, y)$ няма локален екстремум в точката (x_0, y_0).

Ако пък имаме равенството

(11) $$f''_{xy}(x_0, y_0) - f''_{x^2}(x_0, y_0) f''_{y^2}(x_0, y_0) = 0,$$

то е възможно както да имаме, тъй и да нямаме екстремум. В това можем да се убедим, като разгледаме функциите $f(x, y) = x^3 + y^3$ и $g(x, y) = x^4 + y^4$. И за двете функции равенството (11) е изпълнено в точката $(0, 0)$. Но първата от тях, както видяхме вече в този параграф, няма локален екстремум в тази точка, докато за втората е очевидно, че притежава локален минимум в точката $(0, 0)$.

Пример 1. Да намерим локалните екстремуми на функцията

$$f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 2x - y.$$

Намираме

$$f'_x = 2x + y - 2, \quad f'_y = x + 2y - 1$$

и решаваме системата уравнения

$$\begin{aligned} 2x + y &= 2 \\ x + 2y &= 1. \end{aligned}$$

Единственото решение на тази система е $x = 1$, $y = 0$. Това ще рече, че производните $f'_x(x, y)$ и $f'_y(x, y)$ се анулират едновременно само в точката $(1, 0)$. От друга страна, имаме

$$f''_{x^2}(x, y) = 2, \quad f''_{xy}(x, y) = 1, \quad f''_{y^2}(x, y) = 2$$

и следователно за всяка точка (x, y) ще имаме

$$f''^2_{xy}(x, y) - f''_{x^2}(x, y) f''_{y^2}(x, y) = -3 < 0.$$

И така дадената функция има един-единствен локален екстремум в точката $(1, 0)$. Той е минимум, тъй като $f''_{x^2}(1, 0) > 0$. Стойността на самия минимум е $f(1, 0) = -1$.

Пример 2. Да потърсим локалните екстремуми на функцията

$$f(x, y) = x^4 + y^4 - 2x^2 - 2y^2 + 4xy.$$

Намираме

$$f'_x(x, y) = 4x^3 - 4x + 4y, \quad f'_y(x, y) = 4y^3 - 4y + 4x$$

и решаваме следната система уравнения:

(12) $$\begin{aligned} x^3 - x + y &= 0 \\ y^3 + x - y &= 0. \end{aligned}$$

Чрез почленно събиране получаваме

$$x^3 + y^3 = 0,$$

или

(13) $$(x + y)(x^2 - xy + y^2) = 0.$$

Лесно е да се убедим, че изразът

(14) $$x^2 - xy + y^2$$

става нула само при $x = y = 0$. Наистина, ако $xy \leqq 0$, то и трите събираеми в този израз са неотрицателни и той може да бъде равен на нула само ако всички те са нули. А това ще рече, че $x = y = 0$. Ако пък $xy > 0$, то от равенствата

$$x^2 - xy + y^2 = x^2 - 2xy + y^2 + xy = (x - y)^2 + xy$$

виждаме, че изразът (14) се представя като сума от две събираеми, първото от които е неотрицателно, а второто — положително, т. е. че той е различен от нула.

И така вторият множител в уравнението (13) може да стане равен на нула само в точката $(0, 0)$. Анулирането пък на първия множител ни дава

(15) $$y = -x,$$

откъдето, като заместим в първото уравнение на системата (12), получаваме

$$x^3 - 2x = 0,$$

или

$$x(x^2 - 2) = 0.$$

При $x = 0$ от равенството (15) получаваме $y = 0$, т. е. стигаме пак до точката $(0, 0)$. Най-сетне равенството

$$x^2 - 2 = 0$$

заедно с равенството (15) ни довежда до двете точки $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ и $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$.

Намираме по-нататък

$$f''_{x^2}(x, y) = 12x^2 - 4, \quad f''_{xy}(x, y) = 4, \quad f''_{y^2}(x, y) = 12y^2 - 4.$$

Ако положим

$$\varphi(x, y) = f''^2_{xy}(x, y) - f''_{xx}(x, y) f''_{y^2}(x, y),$$

ще имаме

$$\varphi(x, y) = 48(x^2 + y^2 - 3x^2y^2).$$

Оттук получаваме

$$\varphi(0, 0) = 0,$$

$$\varphi(-\sqrt{2}, \sqrt{2}) = 48(2 + 2 - 12) < 0,$$

$$\varphi(\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = 48(2+2-12) < 0.$$

И тъй в точките $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ и $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ функцията $f(x, y)$ има локални екстремуми. Те и двата са минимуми, тъй като

$$f''_{x^2}(-\sqrt{2}, \sqrt{2}) = 20 > 0, \quad f''_{x^2}(\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = 20 > 0.$$

Самата стойност на тези минимуми е

$$f(-\sqrt{2}, \sqrt{2}) = f(\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = -8.$$

Що се отнася до точката (0, 0), теоремата от този параграф не ни дава нищо. Ние можем обаче с непосредствени разсъждения да се убедим, че в тази точка функцията няма екстремум. Наистина, от една страна, имаме

$$f(0, y) = y^4 - 2y^2 = y^2(y^2 - 2)$$

— израз, който е сигурно отрицателен за малки по абсолютна стойност значения на y. От друга страна пък, при $y = x$ ще имаме

$$f(x, x) = 2x^4,$$

който израз е винаги положителен при $x \neq 0$. Оттук виждаме, че във всяка околност на точката (0, 0) функцията $f(x, y)$ приема както положителни, тъй и отрицателни стойности, докато $f(0, 0) = 0$.

Упражнения. Намерете всички локални екстремуми на функциите:

1. $z = 1 + 6x - x^2 - xy - y^2$. **2.** $z = x^3 - y^3 - 3x + 3y$. **3.** $z = x^3 + xy^2 + 6xy$.

4. $z = x^2 + xy + y^2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$, където $x > 0$, $y > 0$.

5. $z = \sin x \sin y \sin(x + y)$, където $0 < x < \pi$, $0 < y < \pi$.

6. $z = e^{-x^2-y^2}(2x^2 + y^2)$.

§ 84. Диференциране под знака на интеграла

Нека е дадена една функция $f(x, y)$, дефинирана и непрекъсната в правоъгълника D, даден с неравенствата

$$a \leq x \leq b, \qquad c \leq y \leq d. \tag{1}$$

При фиксирано y (взето произволно в интервала $[c, d]$) функцията $f(x, y)$ представлява непрекъсната функция на x в интервала $[a, b]$. Можем следователно да образуваме определения интеграл

$$\int_a^b f(x, y)\, dx.$$

Стойността на този интеграл ще зависи, разбира се, от избора на точката y и ще представлява следователно функция на y, дефинирана в интервала $[c, d]$. За тази функция ние ще докажем следната теорема, която се използува на много места в анализа и неговите приложения.

Теорема. *Нека функцията $f(x, y)$ е дефинирана и диференцуема частно спрямо y в някакво отворено множество, съдържащо правоъгълника D, зададен с неравенствата (1). Ако функциите $f(x, y)$ и $f_y'(x, y)$ са непрекъснати в D, то функцията*

$$\Phi(y) = \int_a^b f(x, y)\, dx$$

е диференцуема в интервала $[c, d]$ и при това

$$\Phi'(y) = \int_a^b f_y'(x, y)\, dx. \tag{2}$$

Доказателство. Да изберем едно произволно положително число ε и да образуваме след това числото $\frac{\varepsilon}{b-a}$. Тъй като функцията $f_y'(x, y)$ е по предположение непрекъсната в затворения правоъгълник D, то съгласно теоремата за равномерната непрекъснатост от § 72 ще съществува едно число δ, такова, че от

$$|h| < \delta, \ |k| < \delta$$

да следва неравенството

$$|f_y'(x+h, y+k) - f_y'(x, y)| < \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

Да вземем сега една произволна точка y_0 от интервала $[c, d]$. Ще покажем, че при $|k| < \delta$ имаме

$$\left| \frac{\Phi(y_0 + k) - \Phi(y_0)}{k} - \int_a^b f_y'(x, y_0)\, dx \right| < \varepsilon, \tag{3}$$

откъдето ще следва, че

$$\Phi'(y_0) = \int_a^b f_y'(x, y_0)\, dx. \tag{4}$$

Наистина имаме

$$\frac{\Phi(y_0 + k) - \Phi(y_0)}{k} = \frac{1}{k} \int_a^b [f(x, y_0 + k) - f(x, y_0)]\, dx. \tag{5}$$

Нека сега да фиксираме x, взето произволно в интервала $[a, b]$, и да разгледаме функцията $\psi(y) = f(x, y)$. Тази функция, явяваща се функция само на y, е диференцуема в интервала $[c, d]$ по предположение. Прилагаме към нея теоремата за крайните нараствания по отношение на затворения интервал, определен от y_0 и $y_0 + k$, и получаваме

$$\psi(y_0+k)-\psi(y_0)=k\psi'(y_0+\theta k),$$

или по-подробно

$$f(x,\ y_0+k)-f(x,\ y_0)=kf_y'(x,\ y_0+\theta k),$$

където $0<\theta<1$. Като заместим в равенството (5), получаваме

$$\frac{\Phi(y_0+k)-\Phi(y_0)}{k}=\int_a^b f_y'(x,\ y_0+\theta k)\,dx.$$

Тогава ще имаме

$$\left|\frac{\Phi(y_0+k)-\Phi(y_0)}{k}-\int_a^b f_y'(x,\ y_0)\,dx\right|$$

$$=\left|\int_a^b f_y'(x,\ y_0+\theta k)\,dx-\int_a^b f_y'(x,\ y_0)\,dx\right|,$$

откъдето

$$(6)\qquad \left|\frac{\Phi(y_0+k)-\Phi(y_0)}{k}-\int_a^b f_y'(x,\ y_0)\,dx\right|$$

$$\leqq\int_a^b |f_y'(x,\ y_0+\theta k)-f_y'(x,\ y_0)|\,dx.$$

Нека сега $|k|<\delta$. Очевидно е, че и $|\theta k|<\delta$. Тогава поради избора на числото δ при всяко x (между a и b) ще бъде изпълнено неравенството

$$|f_y'(x,\ y_0+\theta k)-f_y'(x,\ y_0)|<\frac{\varepsilon}{b-a}.$$

Последното неравенство показва, че в интервала $[a,\ b]$ числото $\frac{\varepsilon}{b-a}$ се явява горна граница на функцията, написана в лявата страна на това неравенство. Ето защо ще имаме

$$(7)\qquad \int_a^b |f_y'(x,\ y_0+\theta k)-f_y'(x,\ y_0)|\,dx<\frac{\varepsilon}{b-a}(b-a)=\varepsilon.$$

От неравенствата (6) и (7) заключаваме, че при $|k|<\delta$ ще бъде изпълнено неравенството (3). Оттук следва, че функцията $\Phi(y)$ е диференцуема в точката y_0 и че е в сила равенството (4). Но тъй като точката y_0 беше взета произволно в интервала $[c,\ d]$, то с това е доказано и твърдението на теоремата.

Ще отбележим, че равенството (2), което току-що доказахме, може да се запише още и по следния начин:

$$\left(\int_a^b f(x,\ y)\,dx\right)'=\int_a^b f_y'(x,\ y)\,dx.$$

Ето защо доказаната теорема се нарича **теорема за диференциране под знака на интеграла.**

Пример. Ще използуваме теоремата за диференциране под знака на интеграла, за да пресметнем стойността на несобствения интеграл

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}.$$

В § 60 видяхме, че този интеграл е сходящ (но не абсолютно сходящ). С цел да го пресметнем, нека въведем функцията

$$F(\alpha)=\int_0^\infty e^{-\alpha x}\frac{\sin x}{x}\,dx.$$

Тази функция е дефинирана за $\alpha\geqq 0$. Наистина при $\alpha>0$ написаният по-горе несобствен интеграл е абсолютно сходящ (това се вижда много лесно с помощта на критерия за сходимост на несобствени интеграли с безкрайни граници), а при $\alpha=0$ имаме

$$F(0)=\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx.$$

Преди всичко ще докажем, че функцията $F(\alpha)$ е непрекъсната при $\alpha=0$, т. е. че имаме

$$(8)\qquad \lim_{\alpha\to 0,\ \alpha>0} F(\alpha)=F(0).$$

Да вземем едно положително число ε. Като имаме пред вид, че интегралът $\int_1^\infty \frac{dx}{x^2}$ е сходящ, ще можем да намерим такова число p (по-голямо от 1), че да имаме

$$(9)\qquad \int_p^\infty \frac{dx}{x^2}<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Числото p ще считаме по-нататък фиксирано. Отчитайки, че $\left|\frac{\sin x}{x}\right|\leqq 1$ за всяко x ще получим (при $\alpha>0$)

$$|F(\alpha)-F(0)|=\left|\int_0^\infty (e^{-\alpha x}-1)\frac{\sin x}{x}\,dx\right|$$

$$\leqq\int_0^p |e^{-\alpha x}-1|\,dx+\left|\int_p^\infty (e^{-\alpha x}-1)\frac{\sin x}{x}\,dx\right|.$$

Поради неравенството $|e^{-\alpha x}-1| \leq 1-e^{-\alpha p}$, изпълнено при $0 \leq x \leq p$, ще имаме

(10) $$\int_0^p |e^{-\alpha x}-1|\, dx \leq p(1-e^{-\alpha p}).$$

От друга страна,*

$$\int_p^\infty (e^{-\alpha x}-1)\frac{\sin x}{x}\, dx = -\int_p^\infty \frac{e^{-\alpha x}-1}{x}\, d\cos x$$

$$= \left| \frac{1-e^{-\alpha x}}{x}\cos x \right|_p^\infty + \int_p^\infty \cos x\, d\,\frac{e^{-\alpha x}-1}{x}$$

$$= \frac{e^{-\alpha p}-1}{p}\cos p + \int_p^\infty \cos x\,\frac{1-e^{-\alpha x}(1+\alpha x)}{x^2}\, dx.$$

Но при $x \geq 1$ и $\alpha > 0$ имаме

$$0 \leq \frac{1+\alpha x}{e^{\alpha x}} \leq 1$$

това се вижда лесно, като се използва например маклореновото развитие на функцията $e^{\alpha x}$). Ето защо ще получим

$$\left| \int_p^\infty (e^{-\alpha x}-1)\frac{\sin x}{x}\, dx \right| \leq \frac{1}{p}(1-e^{-\alpha p}) + \int_p^\infty \frac{dx}{x^2},$$

откъдето въз основа на неравенствата (9) и (10) ще имаме

$$|F(\alpha)-F(0)| \leq \left(p+\frac{1}{p}\right)(1-e^{-\alpha p}) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Тъй като $\lim\limits_{\alpha\to 0,\ \alpha>0} e^{-\alpha p} = 1$, то за достатъчно малки положителни стойности на α ще бъде изпълнено неравенството

$$|F(\alpha)-F(0)| < \varepsilon,$$

с което е доказано равенството (8).

Нека сега разгледаме функцията $F(\alpha)$ като граница (при $\alpha > 0$) на редицата от функции

(11) $$F_1(\alpha),\ F_2(\alpha), \ldots,\ F_n(\alpha), \ldots,$$

където

$$F_n(\alpha) = \int_0^n e^{-\alpha x}\frac{\sin x}{x}\, dx.$$

* Тук, както обикновено се прави в такива случаи, сме избягнали на някои места знака lim, считайки, че смисълът на написаните изрази е ясен и при този по-кратък начин на записване.

Да вземем едно произволно положително число α_0. Ще покажем, че към редицата (11) можем да приложим относно интервала $[\alpha_0, \infty)$ теоремата за почленно диференциране от § 64. За целта трябва да установим, че редицата от производните

(12) $$F_1'(\alpha),\ F_2'(\alpha), \ldots,\ F_n'(\alpha), \ldots$$

е равномерно сходяща в този интервал. Въз основа на теоремата за диференциране под знака на интеграла получаваме

$$F_n'(\alpha) = -\int_0^n e^{-\alpha x}\sin x\, dx,$$

откъдето

$$\lim_n F_n'(\alpha) = -\int_0^\infty e^{-\alpha x}\sin x\, dx$$

(написаният в дясната страна на равенството несобствен интеграл е очевидно абсолютно сходящ). Сега при $\alpha \geq \alpha_0$ ще имаме

$$\left| F_n'(\alpha) + \int_0^\infty e^{-\alpha x}\sin x\, dx \right| = \left| \int_n^\infty e^{-\alpha x}\sin x\, dx \right|$$

$$\leq \int_n^\infty e^{-\alpha x}\, dx = -\left| \frac{e^{-\alpha x}}{\alpha} \right|_n^\infty = \frac{1}{\alpha}e^{-\alpha n} \leq \frac{1}{\alpha_0}e^{-\alpha_0 n}.$$

Изразът $\frac{1}{\alpha_0}e^{-\alpha_0 n}$ обаче може да бъде направен по-малък от всяко положително число ε, стига да вземем n достатъчно голямо. Оттук заключаваме, че редицата (12) е равномерно сходяща в интервала $[\alpha_0, \infty)$. Това ни дава основание да твърдим, че функцията $F(\alpha)$ е диференцуема в този интервал и че

$$F'(\alpha) = \lim_n F_n'(\alpha) = -\int_0^\infty e^{-\alpha x}\sin x\, dx.$$

Но

$$-\int_0^\infty e^{-\alpha x}\sin x\, dx = \int_0^\infty e^{-\alpha x}\, d\cos x - \left| e^{-\alpha x}\cos x \right|_0^\infty$$

$$+ \alpha\int_0^\infty e^{-\alpha x}\cos x\, dx = -1 + \alpha\int_0^\infty e^{-\alpha x}\, d\sin x = -1 + \alpha\left| e^{-\alpha x}\sin x \right|_0^\infty$$

$$+ \alpha^2\int_0^\infty e^{-\alpha x}\sin x\, dx = -1 + \alpha^2\int_0^\infty e^{-\alpha x}\sin x\, dx,$$

откъдето

$$-\int_0^\infty e^{-\alpha x}\sin x\,dx=-\frac{1}{1+\alpha^2}.$$

Следователно при $\alpha \geqq \alpha_0$ имаме

$$F'(\alpha)=-\frac{1}{1+\alpha^2}.$$

Тъй като α_0 беше произволно положително число, последното равенство ще бъде изпълнено за всяко $\alpha>0$. Оттук следва (с помощта на основната теорема на интегралното смятане), че при $\alpha>0$ имаме

(13) $$F(\alpha)=-\operatorname{arc\,tg}\alpha+C,$$

където C е някаква константа. Това равенство ще бъде изпълнено и при $\alpha=0$ поради непрекъснатостта на функцията $F(\alpha)$ при $\alpha=0$, която установихме по-рано. За да пресметнем константата C, нека забележим, че

$$|F(\alpha)|\leq\int_0^\infty e^{-\alpha x}\,dx=\frac{1}{\alpha}.$$

Оттук е ясно, че

$$\lim_{\alpha\to\infty}F(\alpha)=0.$$

От друга страна, $\lim\limits_{\alpha\to+\infty}\operatorname{arc\,tg}\alpha=\frac{\pi}{2}$. От равенството (13) следва, че $C=\frac{\pi}{2}$. И така при $\alpha\geqq 0$ имаме

$$F(\alpha)=\frac{\pi}{2}-\operatorname{arc\,tg}\alpha,$$

откъдето получаваме $F(0)=\frac{\pi}{2}$. Следователно

$$\int_0^\infty\frac{\sin x}{x}\,dx=\frac{\pi}{2}.$$

ГЛАВА XI

МЯРКА НА РАВНИННИ МНОЖЕСТВА

Тази глава е посветена на едно обобщение на понятието лице на многоъгълник в равнината. Ще покажем, че е възможно това обобщение да бъде въведено за една достатъчно широка категория равнинни точкови множества и ще го наречем мярка (за разлика от познатото ни от елементарната геометрия понятие лице). Съществуват различни начини да бъде постигната тази цел. Пътят, който ще следваме, ще ни доведе до т. нар. мярка на Пеано—Жордан. Това понятие ще ни бъде необходимо по-нататък при дефиницията на понятието двоен интеграл.

§ 85. Някои понятия от теорията на множествата. Теореми за контурите

Преди да преминем към излагането на теорията на мярката в равнината, ще се спрем на някои дефиниции и твърдения, които ще използваме по-нататък. Те се отнасят до равнината, но имат смисъл и запазват своята валидност за произволно n-мерно пространство, а някои от тях — по-специално онези, които ще разгледаме най-напред, въобще за множества от най-общ вид.

Ще започнем с въвеждането на няколко основни понятия.

Ако са дадени две точкови множества A и B и ако всички точки от множеството A принадлежат на множеството B (черт. 58), казваме, че A е подмножество на B, и бележим това така:

$$A\subset B.$$

Нека A и B са отново две точкови множества. Точките, които принадлежат поне на едното от тези две множества, образуват множество, наречено обединение на множествата A и B (черт. 59), което се бележи с

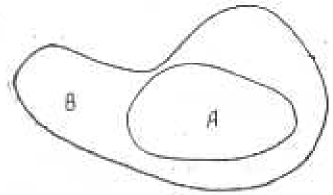
$$A\cup B.$$

Точките, принадлежащи както на множеството A, така и на множеството B, образуват множество, което се нарича сечение на множествата A и B (черт. 60) и се бележи с

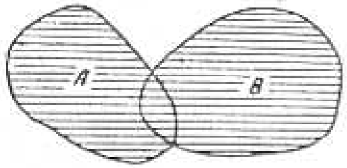
$$A\cap B.$$

Най-сетне множеството, образувано от точките, принадлежащи на A, но непринадлежащи на B (черт. 61), се нарича р а з л и к а на тези две множества и се бележи с

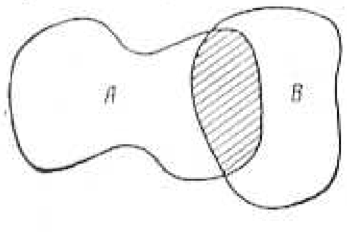
$$A—B.$$



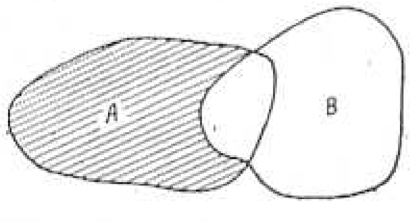
Черт. 58



Черт. 59



Черт. 60

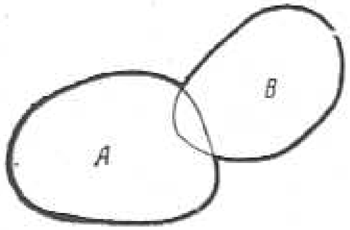


Черт. 61

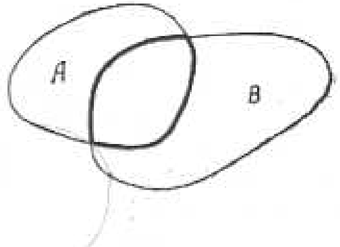
Във връзка с дефинициите на последните две понятия трябва да направим следната важна забележка: В математиката с оглед на известно удобство при разсъжденията относно множества е прието да се разглежда и т. нар. п р а з н о м н о ж е с т в о, т. е. множеството, което не съдържа никакви точки и което е прието да се счита за подмножество на всяко друго множество. Тази абстракция се оказва твърде полезна. Така например, ако не разполагахме с празното множество, въведеното по-горе понятие сечение на две множества A и B би било лишено от смисъл, когато тези две множества нямат общи точки. Също така понятието разлика на множествата A и B би изгубило смисъл, когато A е подмножество на B. Ние избягваме тази опасност, като допускаме възможността било сечението, било разликата на две множества да бъде празно множество.

Нека отбележим още, че понятието обединение на две множества по съвсем естествен начин се обобщава за произволен краен брой множества. Под о б е д и н е н и е на множествата $A_1, A_2, \ldots, A_n$ разбираме множеството A, съставено от всички точки, които принадлежат на поне едно от тези множества. Факта, че A е обединение на множествата A_1, $A_2, \ldots, A_n$, записваме така:

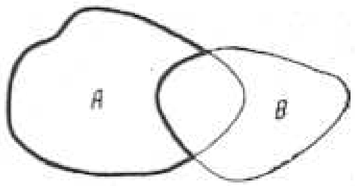
$$A=\bigcup_{i=1}^{n} A_i.$$



Черт. 62



Черт. 63



Черт. 64

Ще се обърнем сега към множествата в дадено n-мерно пространство. В § 71 ние нарекохме к о н т у р на едно множество множеството от всички негови контурни точки. Нека сега са дадени две множества A и B. Да означим с K_A контура на множеството A, а с K_B — контура на множеството B. Нека освен това означим за краткост с K обединението на контурите K_A и K_B, т. е. нека

$$K=K_A \cup K_B.$$

Ако сега означим с K' контура на множеството $A \cup B$ (черт. 62), с K'' — контура на множеството $A \cap B$ (черт. 63) и с K''' — контура на множеството $A—B$ (черт. 64), то

(1) $$K' \subset K, \quad K'' \subset K, \quad K''' \subset K.$$

За пример ще докажем първото от тези три твърдения, именно твърдението, че $K' \subset K$. Трябва да докажем, че всяка точка, която е контурна за множеството $A \cup B$, принадлежи поне на едно от множествата K_A и K_B. Да вземем произволна точка P, явяваща се контурна за $A \cup B$. Тази точка сигурно не е вътрешна нито за A, нито за B, защото, ако би била вътрешна например за множеството A, тя би притежавала околност, състояща се изцяло от точки, които принадлежат на A, а следователно и на $A \cup B$, т. е. тя би се оказала вътрешна и за множеството $A \cup B$. И така точката P е външна или контурна за A и също така външна или контурна за B. Да допуснем, че тя е външна както за A, така и за B. Тогава тя ще притежава такава околност D', която се състои изцяло от точки, непринадлежащи на A, а също и такава околност D'', която пък се състои изцяло от точки, непринадлежащи на B. Но в такъв случай по-малката от тези две околности ще бъде съставена от точки, които не принадлежат нито на A, нито на B. Това ще означава, че точката P е външна за множеството $A \cup B$, което не е вярно. Следователно тази точка трябва да бъде контурна поне за едно от двете множества A и B, т. е. да принадлежи на множеството $K_A \cup K_B$. С това е доказано, че $K' \subset K$.

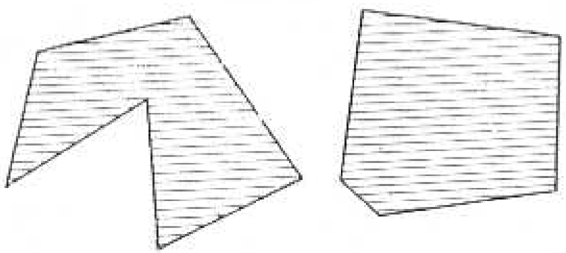
Доказателствата на твърденията $K'' \subset K$ и $K''' \subset K$, които се извършват с подобни разсъждения, ще оставим на читателя.

Тези три твърдения относно контурите на обединението, сечението и разликата на две множества, записани с формулите (1), ние ще наречем накратко т е о р е м и з а к о н т у р и т е.

§ 86. Пеано-Жорданова мярка в равнината

В следващите разсъждения ще играе основна роля понятието многоъгълна фигура в равнината, което ще въведем сега. Това понятие е малко по-сложно от познатото ни от елементарната геометрия понятие многоъгълник, което тук ще означаваме с термина п р о с т многоъгълник. А именно под м н о г о ъ г ъ л н а ф и г у р а ще разбираме всяко множество в равнината, което или е многоъгълник, или може да се разгледа като обединение на краен брой многоъгълници.

По този начин в понятието многоъгълна фигура включваме и такива фигури, които в елементарната геометрия не е прието да се

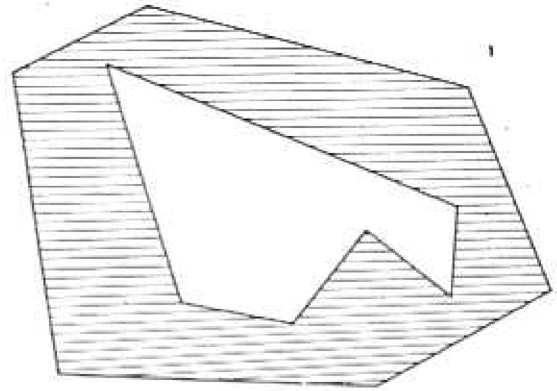


Черт. 65

разглеждат като многоъгълници. Така например на черт. 65 е показана една многоъгълна фигура, която от гледна точка на елементарната геометрия представлява не един, а два многоъгълника. Фигурата, показана на черт. 66, е също многоъгълна, тъй като тя може, както читателят лесно

ще съобрази, да бъде разделена на няколко части, всяка от които е многоъгълник. (Тя може даже да се представи, и то по няколко начина, като обединение само на два многоъгълника. Покажете как.)

Освен това за удобство в разсъжденията ще разглеждаме празното множество също като многоъгълна фигура.



Черт. 66

Важно е да отбележим, че ние познаваме лицето на всяка многоъгълна фигура — можем да пресметнем това лице, като представим дадената многоъгълна фигура като обединение на няколко прости многоъгълника, които нямат общи точки (освен контурни), и след това съберем лицата на тези многоъгълници. Ще означаваме лицето на дадена многоъгълна фигура A с $s(A)$. Тъй като се условихме празното множество да считаме също за многоъгълна фигура, ще приемем, че то има лице нула.

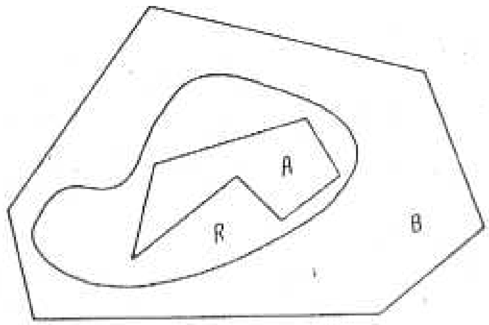
От самата дефиниция на понятието многоъгълна фигура е ясно, че обединението на две и повече многоъгълни фигури е пак многоъгълна фигура.

Сега ще преминем вече към онези разглеждания, които ще ни доведат непосредствено до дефиницията на понятието мярка в равнината — понятие, което, както вече отбелязахме, трябва да се яви като обобщение на познатото ни от елементарната геометрия понятие лице.

Нека R е ограничено множество от точки в равнината. Една многоъгълна фигура A ще наричаме в п и с а н а в R, ако тя се съдържа заедно с контура си във вътрешността* на множеството R. Многоъгълната фигура B пък ще наричаме о п и с а н а около R, ако тя съдържа множеството R заедно с неговия контур във вътрешността си (черт. 67).

* Нека напомним, че вътрешност на едно множество в равнината е множеството от неговите вътрешни точки.

Тъй като множеството R е по предположение ограничено, то сигурно съществува някакъв квадрат, описан около R. От друга страна, празното множество, което, както знаем, се съдържа във всяко друго множество, ще бъде вписано в R. Ето защо винаги можем да говорим



Черт. 67

за вписани и описани многоъгълни фигури, каквото и да бъде ограничено множество R.

Да разгледаме множеството от лицата на всички описани около R многоъгълни фигури. Това е едно множество от положителни числа и следователно то е ограничено отдолу. Неговата точна долна граница ще наричаме горна мярка на множеството R и ще я бележим с $\overline{\mu}(R)$. Ако разгледаме пък множеството от лицата на всички вписани в R многоъгълни фигури, ще видим, че то е ограничено отгоре (всички тези лица са по-малки например от лицето на даден отнапред квадрат, съдържащ R). Точната горна граница на това множество ще наричаме долна мярка на R и ще я бележиме $\underline{\mu}(R)$.

Горната и долната мярка на едно множество R удовлетворяват важно неравенство. За да го получим, ще разсъждаваме така: Да вземем произволна многоъгълна фигура A, вписана в R, и произволна многоъгълна фигура B, описана около R. Ясно е, че фигурата A ще бъде вписана и във фигурата B. Тогава лицата на тези фигури, както знаем от елементарната геометрия, ще удовлетворяват неравенството

(1) $$s(A) < s(B).$$

Ако сега разгледаме фигурата B като фиксирана, то неравенството (1), изпълнено за всяка многоъгълна фигура A, вписана в R, ще ни доведе до заключението, че

(2) $$\underline{\mu}(R) \leq s(B).$$

Като вземем пред вид след това, че B беше произволна многоъгълна фигура, описана около R, неравенството (2) пък ще ни доведе до неравенството

(3) $$\underline{\mu}(R) \leq \overline{\mu}(R).$$

Едно равнинно множество ще наречем ***измеримо*****, *ако за него неравенството* (3) *преминава в равенство, т. е. ако*

$$\underline{\mu}(R) = \overline{\mu}(R).$$

В такъв случай общата стойност на числата $\underline{\mu}(R)$ и $\overline{\mu}(R)$ ще наричаме мярка или лице на множеството R и ще я бележим с $\mu(R)$.

Лесно се вижда, че когато R е обикновен многоъгълник в равнината, както неговата долна, така и неговата горна мярка ще бъде равна на лицето му**. Следователно всеки многоъгълник R в равнината е измеримо множество и неговата мярка $\mu(R)$ не е нищо друго освен познатото ни от елементарната геометрия лице, т. е.

$$\mu(R) = s(R).$$

По такъв начин виждаме, че въведеното понятие мярка на измеримо равнинно множество е действително обобщение на понятието лице на многоъгълник.

От геометрията е известно, че лицето на един многоъгълник не се променя, ако подложим този многоъгълник на едно движение в равнината, в която той лежи. Същото, разбира се, се отнася и за лицето на всяка многоъгълна фигура, а оттук и за мярката на произволно измеримо равнинно множество.

От изложеното дотук е ясно, че мярката $\mu(R)$ на едно измеримо равнинно множество R е винаги неотрицателно число. Ние ще се спрем малко по-подробно на случая, когато това число е нула. Тъй като и долната, и горната мярка на всяко множество са неотрицателни числа, то за да покажем, че дадено равнинно множество R има мярка нула, достатъчно е поради неравенството (3) да установим, че $\overline{\mu}(R)=0$. Ето защо, като си припомним дефиницията на числото $\overline{\mu}(R)$, идваме до заключението:

Едно равнинно множество R има мярка нула, когато за всяко положително число ε може да се намери такава многоъгълна фигура, която е описана около R и която има лице, по-малко от ε.

Оттук се вижда веднага, че *всяко подмножество на едно множество с мярка нула има също мярка нула.*

Не е трудно също да се види, че *обединението на краен брой множества с мярка нула представлява също така множество с мярка нула.* Наистина нека $R_1, R_2, \dots, R_n$ са n множества с мярка нула и нека

$$R = \bigcup_{k=1}^{n} R_k.$$

* По-точно измеримо в Пеано-Жорданов смисъл, тъй като съществуват и други начини за въвеждане на понятието мярка.

** За целта е достатъчно да забележим, че когато е даден един обикновен многоъгълник, съществуват както вписани в него, така и описани около него многоъгълници (можем да разглеждаме даже подобни на дадения), лицата на които се различават колкото искаме малко от неговото лице.

Да вземем едно произволно положително число ε. Ще опишем около всяко множество R_k такава многоъгълна фигура B_k, която има лице, по-малко от $\frac{\varepsilon}{n}$. Тогава обединението $\bigcup_{k=1}^{n} B_k$ ще представлява една многоъгълна фигура, описана около R, с лице, по-малко от $n\frac{\varepsilon}{n}$, т. е. по-малко от ε.

Като примери за множества с мярка нула в равнината ще посочим: всяко множество, съставено от една или от краен брой точки; също така всяка отсечка в равнината, както и всяко множество, съставено от краен брой отсечки. Във всички тези случаи читателят лесно ще покаже, че е изпълнено формулираното по-горе условие за това, щото мярката на едно равнинно множество да бъде равна на нула.

Накрая ще посочим един важен пример за измеримо множество. Ако $f(x)$ е неотрицателна функция, непрекъсната в крайния и затворен интервал $[a, b]$, то множеството A, заключено между графиката на тази функция, оста Ox и правите с уравнения $x=a$ и $x=b$ (черт. 47) е измеримо. Читателят си спомня, че още в § 50 ние разгледахме задачата за определянето и пресмятането на лицето на тази фигура. Ако проследим отново онова, което тогава извършихме, за да определим търсеното лице, лесно ще се убедим*, че числото, до което достигнахме, а именно определения интеграл на функцията $f(x)$ в интервала $[a, b]$, не е нищо друго освен мярката на множеството A. Следователно можем да запишем

$$\mu(A)=\int_a^b f(x)\,dx. \tag{4}$$

§ 87. Условие за измеримост

Нека R е измеримо равнинно множество и нека ε е произволно положително число. Можем да намерим такава многоъгълна фигура A, която е вписана в R и лицето на която удовлетворява неравенството

$$s(A)>\underline{\mu}(R)-\frac{\varepsilon}{2}. \tag{1}$$

Също така ще съществува многоъгълна фигура B, описана около R, на която пък лицето ще удовлетворява неравенството

$$s(B)<\overline{\mu}(R)+\frac{\varepsilon}{2}. \tag{2}$$

(Съществуването на такива фигури A и B следва от дефиницията на понятията точна горна и точна долна граница на множество от реални числа.)

Тъй като R е измеримо множество, имаме $\underline{\mu}(R)=\overline{\mu}(R)$. Тогава от неравенствата (1) и (2) получаваме

$$s(B)-s(A)<\varepsilon. \tag{3}$$

И така съществуването при всяко $\varepsilon>0$ на такава описана около R многоъгълна фигура B и такава, вписана в R многоъгълна фигура A, за които е изпълнено неравенството (3), е едно необходимо условие за измеримостта на множеството R. Това условие обаче е и достатъчно. Наистина нека сега, обратно, за дадено ограничено равнинно множество R е известно, че при всеки избор на положителното число ε съществуват многоъгълна фигура A, вписана в R, и многоъгълна фигура B, описана около R, лицата на които удовлетворяват неравенството (3). Тогава от неравенствата

$$s(A)\leqq\underline{\mu}(R)\leqq\overline{\mu}(R)\leqq s(B)$$

следват неравенствата

$$0\leqq\overline{\mu}(R)-\underline{\mu}(R)\leqq s(B)-s(A)<\varepsilon.$$

Тъй като положителното число ε бе произволно, неравенствата

$$0\leqq\overline{\mu}(R)-\underline{\mu}(R)<\varepsilon$$

трябва да бъдат изпълнени за всяко положително число ε. А това е възможно само когато $\overline{\mu}(R)-\underline{\mu}(R)=0$, т. е. когато $\underline{\mu}(R)=\overline{\mu}(R)$. И така множеството R е измеримо.

Тези разглеждания лежат в основата на доказателството на следната твърде полезна

Теорема. *Необходимото и достатъчно условие, за да бъде едно ограничено равнинно множество R измеримо, е неговият контур да има мярка нула.*

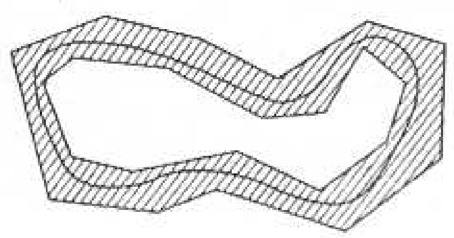
Ще скицираме доказателството на тази теорема. Нека най-напред ни е дадено, че множеството R е измеримо и че ε е едно произволно положително число. Съгласно направените по-рано бележки ще съществуват две многоъгълни фигури A и B — първата, вписана в R, а втората, описана около R, чиито лица ще удовлетворяват неравенството

$$s(B)-s(A)<\varepsilon. \tag{3}$$

Разликата $B—A$ на двете многоъгълни фигури B и A ще съдържа контура на R (черт. 68). От друга страна, лесно е да се види, че тя ще представлява многоъгълна фигура, с лице, равно на разликата от лицата на фигурите B и A, т. е. лице, по-малко от ε. Съгласно разглежданията от края на предишния параграф това означава, че контурът на множеството R има мярка нула.

* Тук трябва да се има пред вид обаче, че онези многоъгълници, които в § 50 нарекохме вписани във фигурата A, както и онези, които нарекохме описани около нея, не са вписани, съответно описани в смисъла, който вложихме в тези термини в тази глава. Ето защо при сегашните разглеждания е необходимо многоъгълниците от § 50 да бъдат заменени с други (например подобни на тях), които са вписани, съответно описани в смисъла на сегашното изложение и чиито лица са произволно близки до лицата на многоъгълниците, построени в § 50. Това очевидно може лесно да бъде направено.

Нека сега пък, обратно, е дадено, че контурът на множеството R има мярка нула. Да изберем едно произволно положително число ε и да опишем около контура на R такава многоъгълна фигура D, лицето на която е по-малко от ε. Може да се покаже — което вече не е просто и което тук няма да правим, — че фигурата D може да бъде представена



Черт. 68

като разлика на две многоъгълни фигури B и A, първата от които е описана около R, а втората — вписана в R (черт. 68). При това ясно е, че лицето на фигурата D ще бъде равно на разликата $s(B)-s(A)$. Следователно неравенството (3) ще бъде изпълнено, а това, както видяхме, е достатъчно, за да заключим, че множеството R е измеримо.

Доказаната теорема дава една твърде удобна характеристика на фамилията на измеримите множества. От нея се вижда, че *обединението на две или повече (но, разбира се, краен брой) измерими множества, както и сечението, а също така и разликата на две измерими множества са пак измерими множества.*

Наистина, ако две множества A и B са измерими, то техните контури K_A и K_B ще бъдат множества с мярка нула. Но контурът на тяхното обединение $A \cup B$ (както и този на тяхното сечение $A \cap B$ или тяхната разлика $A-B$), както знаем от § 85, ще бъде част от множеството $K_A \cup K_B$ и следователно ще има също така мярка нула.

От друга страна, сега можем да видим, че *графиката на всяка функция $f(x)$, непрекъсната в един краен и затворен интервал $[a, b]$, е множество с мярка нула.* Това е така, защото тази графика е част от контура на измеримото множество A, за което стана дума в края на предишния параграф. (Разбира се, не е съществено това, че там ставаше дума за неотрицателна функция $f(x)$.)

§ 88. Основни свойства на мярката

Ние вече отбелязахме някои основни свойства на пеано-жордановата мярка в равнината, като например това, че тя е винаги неотрицателно число, както и това, че тя се явява обобщение на понятието лице на многоъгълник. Сега ще установим още някои важни нейни свойства.

Теорема 1 (теорема за адитивност). *Ако R_1 и R_2 са две измерими множества, които нямат общи точки или имат само контурни общи точки, то за тяхното обединение имаме*

(1) $$\mu(R_1 \cup R_2)=\mu(R_1)+\mu(R_2).$$

Доказателство. Нека ε е произволно положително число. Да впишем в множеството R_1 една многоъгълна фигура A_1, а в множеството R_2 — многоъгълна фигура A_2 по такъв начин, че да имаме

(2) $$s(A_1)>\mu(R_1)-\frac{\varepsilon}{2}, \quad s(A_2)>\mu(R_2)-\frac{\varepsilon}{2}.$$

След това да опишем около множеството R_1 многоъгълна фигура B_1, а около R_2 — многоъгълна фигура B_2, така че да са изпълнени неравенствата

(3) $$s(B_1)<\mu(R_1)+\frac{\varepsilon}{2}, \quad s(B_2)<\mu(R_2)+\frac{\varepsilon}{2}.$$

Обединението $A_1 \cup A_2$ ще представлява многоъгълна фигура, вписана в множеството $R_1 \cup R_2$. При това многоъгълните фигури A_1 и A_2 сигурно нямат общи точки, поради което ще имаме

(4) $$s(A_1 \cup A_2)=s(A_1)+s(A_2).$$

От друга страна, обединението $B_1 \cup B_2$ ще бъде многоъгълна фигура, описана около $R_1 \cup R_2$, за която очевидно ще имаме

(5) $$s(B_1 \cup B_2)\leqq s(B_1)+s(B_2).$$

Множеството $R_1 \cup R_2$ като обединение на две измерими множества е също измеримо. Неговата мярка ще удовлетворява неравенствата

$$s(A_1 \cup A_2)\leqq\mu(R_1 \cup R_2)\leqq s(B_1 \cup B_2).$$

Поради равенството (4) и неравенството (5) получаваме

$$s(A_1)+s(A_2)\leqq\mu(R_1 \cup R_2)\leqq s(B_1)+s(B_2).$$

Като вземем пред вид след това неравенствата (2) и (3), ще имаме

(6) $$\mu(R_1)+\mu(R_2)-\varepsilon\leqq\mu(R_1 \cup R_2)\leqq\mu(R_1)+\mu(R_2)+\varepsilon.$$

Неравенствата (6) са равносилни с неравенството

$$|\mu(R_1 \cup R_2)-[\mu(R_1)+\mu(R_2)]|<\varepsilon,$$

от което поради произволния избор на числото ε следва, че

(7) $$\mu(R_1 \cup R_2)=\mu(R_1)+\mu(R_2).$$

Нека забележим, че равенството (1) с помощта на метода на математичната индукция може лесно да се обобщи за произволен краен брой измерими множества. А именно, ако $R_1, R_2, \ldots, R_n$ са n измерими множества, всеки две от които или нямат общи точки, или имат само контурни общи точки и ако

$$R=\bigcup_{i=1}^{n} R_i,$$

то

$$\mu(R)=\sum_{i=1}^{n}\mu(R_i).$$

Теорема 2 (теорема за монотонност). *Ако R_1 и R_2 са две измерими множества и ако $R_1\subset R_2$, то*

$$\mu(R_1)\leqq\mu(R_2).$$

Доказателство. Поради условието $R_1\subset R_2$ ще имаме

$$R_2=R_1\cup(R_2-R_1).$$

Множеството R_2-R_1 като разлика на две измерими множества ще бъде измеримо. Освен това двете множества R_1 и R_2-R_1 нямат общи точки. Следователно въз основа на предишната теорема ще бъде в сила равенството

$$\mu(R_2)=\mu(R_1)+\mu(R_2-R_1).$$

Оттук получаваме

(8) $$\mu(R_1)\leqq\mu(R_2).$$

Теорема 3 (теорема за полуадитивност). *Ако R_1 и R_2 са две измерими множества, то за тяхното обединение имаме винаги*

(9) $$\mu(R_1\cup R_2)\leqq\mu(R_1)+\mu(R_2).$$

Доказателство. С помощта на равенството

$$R_1\cup R_2=R_1\cup(R_2-R_1)$$

представяме множеството $R_1\cup R_2$ като обединение на двете измерими множества R_1 и R_2-R_1, които очевидно нямат общи точки. Ето защо въз основа на теорема 1 ще имаме

$$\mu(R_1\cup R_2)=\mu(R_1)+\mu(R_2-R_1).$$

От теорема 2 пък следва, че $\mu(R_2-R_1)\leqq\mu(R_2)$, поради което получаваме

(10) $$\mu(R_1\cup R_2)\leqq\mu(R_1)+\mu(R_2).$$

Равенството (9) може също посредством метода на математичната индукция да се обобщи за произволен краен брой измерими множества. Това значи, че ако

$$R=\bigcup_{i=1}^{n}R_i,$$

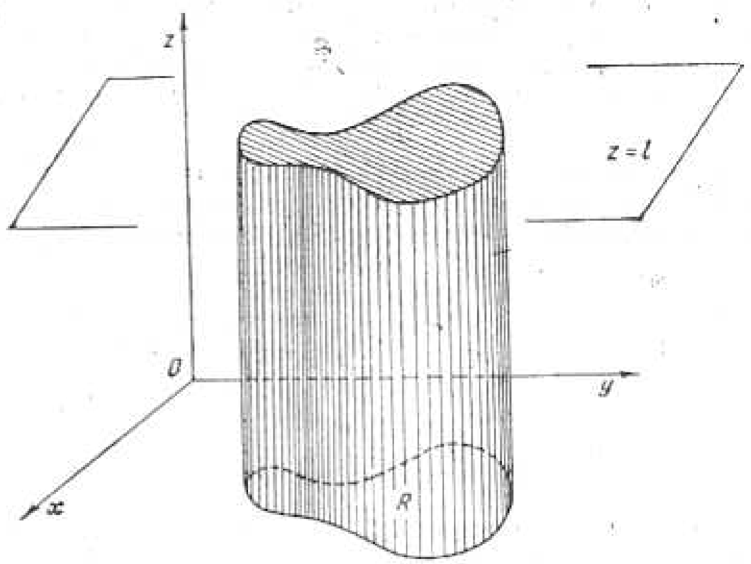
то

$$\mu(R)\leqq\sum_{i=1}^{n}\mu(R_i).$$

Свойствата адитивност, полуадитивност и монотонност на пеано-жордановата мярка, които установихме, я правят удобна за работа. От друга страна, поради тяхната естественост, която ги прави задължителни за всяко понятие от този род, те показват, че така въведеното понятие е удачно обобщение на понятието лице на многоъгълник в равнината.

§ 89. Мярка в тримерното пространство

Като разсъждаваме по същия начин, както при въвеждането на понятието мярка в равнината, можем да въведем и понятието мярка в тримерното пространство. Това е вече едно обобщение на познатото ни понятие обем на тяло (което в елементарната геометрия се въвежда за



Черт. 69

някои специални тела). Тук ролята на многоъгълните фигури се изпълнява от многостенни тела, които вписваме или описваме около дадено тримерно множество. Под многостенно тяло разбираме такова тяло, което е обединение на краен брой многостени. Полученото по този начин понятие мярка в тримерното пространство се нарича също пеано-жорданова мярка и има същите основни свойства, както пеано-жордановата мярка в равнината.*

* Съдържащата се в тези няколко реда програма има този недостатък, че ако искаме, следвайки я, да въведем понятието пеано-жорданова мярка в произволно n-мерно пространство, тя е трудно изпълнима. Тези трудности обаче могат да бъдат избягнати по следния начин. Нека под термина отворен, съответно затворен n-мерен правоъгълник разбираме множеството от онези точки $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ в n-мерното пространство, чиито координати удовлетворяват неравенства от вида

$$a_i<x_i<b_i\ (i=1, 2, \ldots, n)$$

съответно от вида

$$a_i\leqq x_i\leqq b_i\ (i=1, 2, \ldots, n),$$

където $a_i<b_i$. (Ясно е, че при тази терминология двумерният правоъгълник в същност е обикновен правоъгълник със страни, успоредни на координатните оси, а три-

С оглед на някои разглеждания от следващата глава ще отбележим следното: Нека в тримерното пространство е дадена правоъгълна координатна система $Oxyz$ и нека R е измеримо множество в равнината Oxy. Да разгледаме една равнина, успоредна на равнината Oxy и намираща се над нея на разстояние l (т. е. равнината с уравнение $z=l$, където l е положително число). Ако през всяка точка на множеството R прекараме прави, успоредни на оста Oz (т. е. перпендикулярни на равнината Oxy), то отсечките, които се отсичат от тези прави между равнината Oxy и равнината с уравнение $z=l$, ще образуват едно цилиндрично тяло (черт. 69). Това тяло се оказва измеримо и неговата тримерна пеано-жорданова мярка е равна на произведението

$$l.\mu(R),$$

където $\mu(R)$ е двумерната мярка (лицето) на равнинното множество R.

По-нататък, когато става дума за тримерната пеано-жорданова мярка, ще използуваме за това понятие също и обичайния термин о б е м

мерният е паралелепипед със стени, успоредни на координатните равнини.) Нека се условим обединението на краен брой n-мерни правоъгълници да наричаме n-мерна е л е м е н т а р н а ф и г у р а. Лесно е да се види, че ако при изграждането на теорията на пеано-жордановата мярка, което извършихме в § 86—88, вместо с многоъгълни фигури си послужим с елементарни фигури, тази теория няма да претърпи особени изменения. В същото време всички направени разглеждания могат направо да бъдат отнесени към произволно n-мерно пространство.

Ако въпреки това в подробното изложение на двумерния случай предпочетохме многоъгълните фигури, това бе продиктувано единствено от съображения за по-голяма простота и нагледност.

ГЛАВА XII

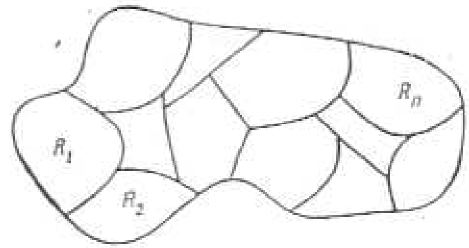
ДВОЙНИ ИНТЕГРАЛИ

Въвеждането на понятието двоен интеграл става по начин, следващ идеята за въвеждането на понятието определен интеграл. Но тук нещата се усложняват от това, че сега разглежданията се извършват не в един интервал, взет върху реалната права, а в едно равнинно точково множество. Ето защо беше необходимо предварително да се запознаем с понятието пеано-жорданова мярка на равнинни фигури.

Ще отбележим още, че за разлика от двойните и въобще многократните интеграли определените интеграли от функции на една променлива се наричат още прости интеграли.

§ 90. Дефиниция на двоен интеграл

Нека е дадена една функция $f(x, y)$, която има за дефиниционна област равнинното измеримо множество R. Ще предполагаме, че функцията $f(x, y)$ е ограничена в R.



Черт. 70

Да разделим областта R на краен брой измерими подмножества $R_1, R_2, \ldots, R_n$ по такъв начин (черт. 70), че всеки две от тях или нямат общи точки, или имат само контурни общи точки. Когато по-нататък в тази глава говорим за п р а в и л н о разделяне на някое измеримо равнинно множество на подмножества, винаги ще имаме пред вид разделяне от такъв вид. В случай на такова разделяне, както знаем, е валидно равенството

$$\mu(R)=\sum_{i=1}^{n}\mu(R_i).$$

След това означаваме с M_i и m_i съответно точната горна и точната долна граница на $f(x, y)$ в множеството R_i и образуваме следните две суми, наречени съответно малка и голяма с у м а н а Д а р б у за функцията $f(x, y)$:

$$s=\sum_{i=1}^{n}m_i\,\mu(R_i),\qquad S=\sum_{i=1}^{n}M_i\,\mu(R_i).$$

Като разглеждаме всички възможни правилни разделяния на областта R на подобласти, извършени по споменатия начин, ние ще получим безбройно много малки суми и безбройно много големи суми на Дарбу. Точната горна граница на множеството на малките суми на Дарбу ще наречем д о л е н д в о е н и н т е г р а л на функцията $f(x,y)$ в областта R и ще я означим с $\underline{I}$. Точната долна граница пък на множеството от големите суми на Дарбу ще наречем г о р е н д в о е н и н т е г р а л на $f(x, y)$ в R и ще я означим с $\overline{I}$. С помощта на разсъждения, подобни на онези, които проведохме при дефиницията на простия интеграл, ще получим неравенството

$$\underline{I}\leq\overline{I}. \tag{1}$$

При извършването на тези разсъждения ще се наложи в определен момент да се използува геометричното значение на сумите s и S в случая, когато функцията $f(x, y)$ е неотрицателна. Такова геометрично тълкуване не е трудно да се даде по подобие на това, което направихме при дефиницията на простия интеграл. Тук трябва да вземем пред вид, че всяко от събираемите в сумите s и S може да се разгледа като обем на едно тримерно цилиндрично тяло от вида, за който стана дума в края на последния параграф от предишната глава.

Функцията $f(x, y)$ ще наречем и н т е г р у е м а в множеството R, когато е изпълнено равенството

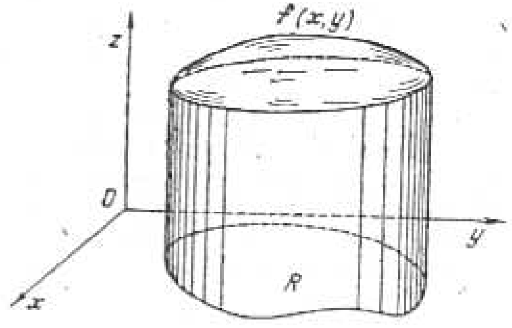
$$\underline{I}=\overline{I},$$

а общата стойност на долния и горния интеграл в този случай ще наречем д в о е н и н т е г р а л на функцията $f(x, y)$ в множеството R и ще означаваме така:

$$\iint_R f(x, y)\,dx\,dy. \tag{2}$$

(Множеството R се нарича и н т е г р а ц и о н н а о б л а с т, а функцията $f(x, y)$ — п о д и н т е г р а л н а ф у н к ц и я.)

В случая, когато функцията $f(x, y)$ е неотрицателна и интегруема в R, на двойния интеграл може да се даде следното геометрично тъл-



Черт. 71

куване: Да прекараме през всяка точка на множеството R по една права, успоредна на оста Oz, и да разгледаме тялото G, образувано от отсечките от тези прави, които са заключени между равнината Oxy и графиката на функцията $f(x, y)$ (черт. 71). Това тяло се оказва измеримо, а двойният интеграл (2) представлява неговата тримерна мярка, т. е. неговият обем.

Лесно можем да се убедим, че когато функцията $f(x, y)$ е константа, тя е интегруема във всяка измерима област R. Наистина, ако $f(x, y)=C$ за всички точки от R, то при всяко разделяне на множеството R на подобласти $R_1, R_2, \dots, R_n$ ще имаме

$$s=S=\sum_{i=1}^{n}C\,\mu(R_i)=C\sum_{i=1}^{n}\mu(R_i)=C\,\mu(R).$$

Оттук заключаваме, че за всяко измеримо равнинно множество R имаме

$$\iint_R C\,dx\,dy=C\,\mu(R).$$

Специално, когато $f(x, y)=1$, получаваме важната формула

$$\iint_R dx\,dy=\mu(R), \tag{3}$$

известна като ф о р м у л а з а п р е с м я т а н е н а л и ц а ч р е з д в о й н и и н т е г р а л и.

Лесно се вижда също, че ако множеството R има мярка нула, то всяка ограничена функция $f(x, y)$ е интегруема в R и има двоен интеграл, равен на 0. И наистина, ако $\mu(R)=0$, то при всяко разделяне на R

на подмножества $R_1, R_2, \ldots, R_n$ ще имаме $\mu(R_i)=0$ за всяко от тези подмножества. Тогава всички малки и големи суми на Дарбу ще бъдат нули и следователно ще имаме

$$\iint_R f(x, y)\,dx\,dy = 0.$$

Ще докажем следната теорема, която дава едно важно достатъчно условие за интегруемост.

Теорема. *Ако R е измеримо и затворено равнинно множество и функцията $f(x, y)$ е непрекъсната в R, то тя е интегруема в R.*

Доказателство. Ако $\mu(R)=0$, то твърдението на теоремата, както видяхме, е изпълнено. Ето защо ще предположим, че $\mu(R)>0$. Да допуснем, че между долния и горния двоен интеграл на функцията $f(x, y)$ в R имаме строгото неравенство

$$\underline{I} < \overline{I}, \tag{4}$$

и да изберем положителното число $\varepsilon = \frac{\overline{I}-\underline{I}}{\mu(R)}$. Съгласно теоремата за равномерната непрекъснатост от § 72 ще съществува такова число δ, че във всяко подмножество на R с диаметър, по-малък от δ, осцилацията на $f(x, y)$ е по-малка от ε.

Сега да разделим правилно R на подмножествата $R_1, R_2, \ldots, R_n$ по такъв начин, че диаметърът на всяко от тези подмножества да бъде по-малък от δ и да образуваме сумите на Дарбу s и S, съответстващи на това разделяне. Като вземем пред вид неравенствата

$$s \leqq \underline{I} \quad \text{и} \quad \overline{I} \leqq S,$$

получаваме

$$\overline{I}-\underline{I} \leqq S-s = \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)\,\mu(R_i).$$

Тъй като за всяко i имаме $M_i - m_i < \varepsilon$, ще получим

$$\overline{I}-\underline{I} < \varepsilon \sum_{i=1}^{n} \mu(R_i) = \varepsilon\mu(R) = \frac{\overline{I}-\underline{I}}{\mu(R)} \cdot \mu(R),$$

или

$$\overline{I}-\underline{I} < \overline{I}-\underline{I}.$$

Последното невярно неравенство ни показва, че нашето допускане за валидността на неравенството (4) е погрешно. Следователно имаме

$$\underline{I} = \overline{I},$$

т. е. функцията е интегруема.

§ 91. Суми на Риман

Нека, след като сме разделили правилно измеримото равнинно множество R на подмножествата $R_1, R_2, \ldots, R_n$, изберем по една точка във всяко от тях. Ако означим с (ξ_i, η_i) точката, която сме избрали в R_i, то сумата

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\,\mu(R_i)$$

се нарича сума на Риман. Ако s и S са сумите на Дарбу, съответствуващи на същото разделяне на R на подмножества, то лесно се вижда, че

$$s \leqq \sigma \leqq S.$$

Преди да формулираме теоремата, която е аналогична на теоремата за римановите суми при простите интеграли, ще въведем и тук понятието „издребняваща редица от разделяния" на дадено множество R.

Нека е дадена една редица от правилни разделяния на измеримото множество R на подмножества. Да означим с δ_k най-големия от диаметрите на подмножествата, които са се появили при k-тото разделяне. Ако редицата

$$\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_k, \ldots$$

клони към нула, ще казваме, че дадената редица от разделяния на множеството R е издребняваща.

По начин, подобен на онзи, чрез който доказахме теоремата от § 53, можем да установим и следната

Теорема. *Нека R е измеримо и затворено множество, а $f(x, y)$ е една функция, непрекъсната в R. Ако е дадена една издребняваща редица от разделяния на множеството R на подмножества и ако при всяко разделяне от тази редица си образуваме по една риманова сума, то редицата от тези суми*

$$\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n, \ldots$$

е сходяща и

$$\lim \sigma_n = \iint_R f(x, y)\,dx\,dy.$$

§ 92. Основни свойства на двойните интеграли

С помощта на теоремата от предишния параграф посредством разсъждения от типа на онези, които използувахме при установяването на свойствата на простите интеграли, можем да докажем следните основни свойства на двойните интеграли:

I. Ако функцията $f(x, y)$ е непрекъсната в измеримото и затворено равнинно множество R, а C е константа, то

$$\text{(I)} \qquad \iint_R Cf(x, y)\,dx\,dy = C\iint_R f(x, y)\,dx\,dy.$$

II. Ако функциите $f(x, y)$ и $g(x, y)$ са непрекъснати в измеримото и затворено множество R, то

$$\text{(II)} \qquad \iint_R [f(x, y)+g(x, y)]\,dx\,dy = \iint_R f(x, y)\,dx\,dy + \iint_R g(x, y)\,dx\,dy.$$

III. Ако функциите $f(x, y)$ и $g(x, y)$ са непрекъснати в измеримото и затворено равнинно множество R и ако те удовлетворяват за всички точки от R неравенството

$$f(x, y) \leqq g(x, y),$$

то

$$\text{(III)} \qquad \iint_R f(x, y)\,dx\,dy \leqq \iint_R g(x, y)\,dx\,dy.$$

IV. Ако функцията $f(x, y)$ е непрекъсната в измеримото и затворено равнинно множество R, то

$$\text{(IV)} \qquad \left|\iint_R f(x, y)\,dx\,dy\right| \leqq \iint_R |f(x, y)|\,dx\,dy.$$

V. Ако R_1 и R_2 са две измерими и затворени равнинни множества, които нямат общи точки или имат само контурни общи точки, и ако функцията $f(x, y)$ е непрекъсната както в R_1, така и в R_2, то

$$\text{(V)} \qquad \iint_{R_1 \cup R_2} f(x, y)\,dx\,dy = \iint_{R_1} f(x, y)\,dx\,dy + \iint_{R_2} f(x, y)\,dx\,dy.$$

Разбира се, последното равенство посредством математическа индукция се обобщава за случая на произволен краен брой множества $R_1, R_2, \ldots, R_n$, образуващи правилно разделяне на измеримото и затворено множество $R = \bigcup_{i=1}^{n} R_n$. В този случай имаме

$$\iint_R f(x, y)\,dx\,dy = \sum_{i=1}^{n} \iint_{R_i} f(x, y)\,dx\,dy.$$

VI. Ако функцията $f(x, y)$ е непрекъсната в измеримото и затворено равнинно множество R и ако за всички точки от R тя удовлетворява неравенствата

$$m \leqq f(x, y) \leqq M,$$

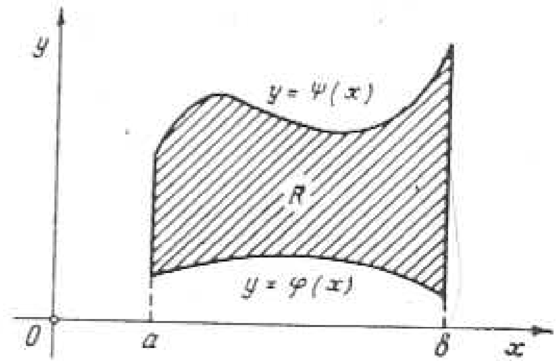
то

$$\text{(VI)} \qquad m\,\mu(R) \leqq \iint_R f(x, y)\,dx\,dy \leqq M\,\mu(R),$$

Нека подчертаем, че изложените току-що свойства на двойните интеграли в същност са валидни не само за непрекъснати, но изобщо за интегрусми функции. Впрочем доказателството на свойство VI даже в този най-общ случай се извършва съвсем просто с разсъждения, подобни на онези, посредством които установихме в края на § 51 аналогичните неравенства за простия интеграл.

§ 93. Пресмятане на двойните интеграли

Да се пресметне стойността на даден двоен интеграл, като се изхожда от самата дефиниция на това понятие, в общия случай е практически безнадеждна за решаване задача поради нейната сложност. Ето защо е извънредно важно да се запознаем с други методи, които биха ни довели по-просто до желания резултат. За съжаление ние не познаваме такива прости методи дори в случая на непрекъсната функция $f(x, y)$, ако не сме направили допълнителни предположения за вида на интеграционната област R. В този параграф ще видим обаче, че такъв метод съществува за една специална категория интеграционни области — все пак достатъчно широка за практическите нужди на математиката и нейните приложения. Чрез този метод пресмятането на даден двоен интеграл се свежда към последователното пресмятане на два прости интеграла.



Черт. 72

Нека са дадени две функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, дефинирани и непрекъснати в един краен и затворен интервал $[a, b]$, които удовлетворяват в този интервал неравенството

$$\varphi(x) \leqq \psi(x).$$

От това неравенство следва, че графиката на функцията $\psi(x)$ ще лежи изцяло над графиката на функцията $\varphi(x)$ (макар някъде тези две графики и да могат да се допират). Да разгледаме областта R, която се огражда отдолу от графиката на функцията $\varphi(x)$, отгоре от графиката на функцията $\psi(x)$, а отстрани — от правите с уравнения $x=a$ и $x=b$ (черт. 72). Тя се състои от точките (x, y), чиито координати удовлетворяват неравенствата

$$a \leqq x \leqq b, \qquad \varphi(x) \leqq y \leqq \psi(x). \tag{1}$$

Област от такъв вид ще наричаме криволинеен трапец.

Поради непрекъснатостта на функциите $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ криволинейният трапец R ще представлява, както знаем, измеримо множество в равнината. Лесно се вижда също, че то е и затворено. Нека отбележим освен това, че мярката $\mu(R)$ на криволинейния трапец R, определен чрез неравенствата (1), се дава с равенството

$$\mu(R)=\int_a^b [\psi(x)-\varphi(x)]\,dx. \tag{2}$$

Това се вижда веднага въз основа на равенството (4), дадено в края на § 86 и на адитивността на пеано-жордановата мярка.*

Именно в случая, когато интеграционната област е криволинеен трапец, ще се запознаем с метод за пресмятане на двойните интеграли. Предварително обаче ще установим следната

Помощна теорема. *Ако функцията $f(x, y)$ е непрекъсната в криволинейния трапец R, зададен с неравенствата (1), то интегралът*

$$\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y)\,dy \tag{3}$$

съществува за всяко фиксирано x от интервала $[a, b]$ и представлява непрекъсната функция на x в този интервал.

Доказателство. При всяко фиксирано x от интервала $[a, b]$ функцията $f(x, y)$, разглеждана като функция само на y, е непрекъсната в интервала $[\varphi(x), \psi(x)]$. Ето защо тя ще бъде интегруема в този интервал и ще можем да образуваме интеграла (3). (Тази бележка, казано по-точно, се отнася за случая, когато $\varphi(x)<\psi(x)$, но ако $\varphi(x)=\psi(x)$, интегралът (3) очевидно също съществува и е равен на нула.)

Нека покажем сега, че функцията

$$F(x)=\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y)\,dy \tag{4}$$

е непрекъсната в интервала $[a, b]$. За целта ще отбележим най-напред, че функциите $\varphi(x)$, $\psi(x)$ и $f(x, y)$ са ограничени. Ето защо можем да намерим такава константа K, че да имаме $|\varphi(x)| \leqq K$ и $|\psi(x)| \leqq K$ за $x \in [a, b]$ и $|f(x, y)| \leqq K$ за $(x, y) \in R$.

Да вземем една точка x_0 от интервала $[a, b]$ и едно произволно положително число ε. Поради непрекъснатостта на функциите $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ в точката x_0 и равномерната непрекъснатост на функцията $f(x, y)$ в R ще съществува такова $\delta>0$, че от неравенството $|x-x_0|<\delta$ да следват неравенствата

$$|\varphi(x)-\varphi(x_0)|<\frac{\varepsilon}{4K}, \quad |\psi(x)-\psi(x_0)|<\frac{\varepsilon}{4K} \tag{5}$$

и

$$|f(x, y)-f(x_0, y)|<\frac{\varepsilon}{4K} \tag{6}$$

(стига точката x да принадлежи на $[a, b]$, а точките (x_0, y) и (x, y) — на R).

Нека сега x е точка от интервала $[a, b]$, за която имаме $|x-x_0|<\delta$. Ще разгледаме два случая. Първо ще се спрем на случая, когато $\varphi(x_0)=\psi(x_0)$. Тогава $F(x_0)=0$, поради което ще имаме

$$|F(x)-F(x_0)|=|F(x)|=\left|\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y)\,dy\right| \leqq K(\psi(x)-\varphi(x))$$

$$=K[(\psi(x)-\psi(x_0))+(\varphi(x_0)-\varphi(x))]<K\cdot 2\frac{\varepsilon}{4K}<\varepsilon.$$

С това непрекъснатостта на $F(x)$ в точката x_0 е установена в разглеждания случай.

Остава да разгледаме случая, когато $\varphi(x_0)<\psi(x_0)$. Сега можем да считаме, че числото δ сме взели по такъв начин, че от неравенството $|x-x_0|<\delta$ да следват освен неравенствата (5) и (6) още и неравенствата

$$\varphi(x)<\psi(x_0) \qquad \text{и} \qquad \psi(x)>\varphi(x_0). \tag{7}$$

Налага се по-нататък да се разгледат поотделно следните четири възможни подслучая:

1) $\varphi(x) \geqq \varphi(x_0)$, $\quad \psi(x) \geqq \psi(x_0)$;

2) $\varphi(x) \geqq \varphi(x_0)$, $\quad \psi(x)<\psi(x_0)$;

---

* По-точно казано, равенството (2) се получава веднага от равенството (4) в § 86, в случая, когато функцията $\varphi(x)$ (а следователно и $\psi(x)$) е неотрицателна. Когато условието за неотрицателност не е изпълнено, ще вземем такова число m, че да имаме $\varphi(x) \geqq m$ за $x \in [a, b]$ и ще разгледаме криволинейния трапец R_1, определен от неравенствата

$$a \leqq x \leqq b, \quad \varphi(x)-m \leqq y \leqq \psi(x)-m.$$

Тъй като множеството R_1 е получено чрез едно вертикално преместване на множеството R, тези две множества имат еднакви мерки. А мярката на R_1 поради неотрицателността на функциите $\varphi(x)-m$ и $\psi(x)-m$ ще се дава с интеграла

$$\int_a^b [(\psi(x)-m)-(\varphi(x)-m)]\,dx=\int_a^b [\psi(x)-\varphi(x)]\,dx.$$

3) $\varphi(x) < \varphi(x_0)$, $\psi(x) \geqq \psi(x_0)$;

4) $\varphi(x) < \varphi(x_0)$. $\psi(x) < \psi(x_0)$.

Ние ще разгледаме първия от тях. Останалите се третират по подобен начин. И така ще приемем, че са изпълнени неравенствата

(8) $$\varphi(x) \geqq \varphi(x_0) \quad \text{и} \quad \psi(x) \geqq \psi(x_0).$$

Като вземем пред вид, че поради неравенствата (7) и (8) всички написани по-нататък интеграли имат смисъл, ще имаме

$$|F(x) - F(x_0)| = \left| \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y)\,dy - \int_{\varphi(x_0)}^{\psi(x_0)} f(x_0, y)\,dy \right|$$

$$= \left| \int_{\varphi(x)}^{\psi(x_0)} f(x, y)\,dy + \int_{\psi(x_0)}^{\psi(x)} f(x, y)\,dy - \int_{\varphi(x_0)}^{\varphi(x)} f(x_0, y)\,dy - \int_{\varphi(x)}^{\psi(x_0)} f(x_0, y)\,dy \right|$$

$$\leqq \int_{\varphi(x)}^{\psi(x_0)} |f(x, y) - f(x_0, y)|\,dy + \int_{\psi(x_0)}^{\psi(x)} |f(x, y)|\,dy + \int_{\varphi(x_0)}^{\varphi(x)} |f(x_0, y)|\,dy$$

$$\leqq \frac{\varepsilon}{4K}(\psi(x_0) - \varphi(x)) + K|\psi(x) - \psi(x_0)| + K|\varphi(x) - \varphi(x_0)|$$

$$< \frac{\varepsilon}{4K} \cdot 2K + K \cdot \frac{\varepsilon}{4K} + K \cdot \frac{\varepsilon}{4K} = \varepsilon.$$

По този начин се убеждаваме в непрекъснатостта на функцията $F(x)$ в произволно взетата точка x_0 от интервала $[a, b]$. С това теоремата е доказана.

Сега вече да преминем към главната теорема на настоящия параграф, посочваща начин за пресмятане на двойни интеграли в криволинейни трапеци.

Теорема. Нека $\varphi(x)$ *и* $\psi(x)$ *са две функции, дефинирани и непрекъснати в интервала* $[a, b]$ *и удовлетворяващи в този интервал неравенството* $\varphi(x) \leqq \psi(x)$. *Ако функцията* $f(x, y)$ *е непрекъсната в криволинейния трапец* R, *зададен посредством неравенствата*

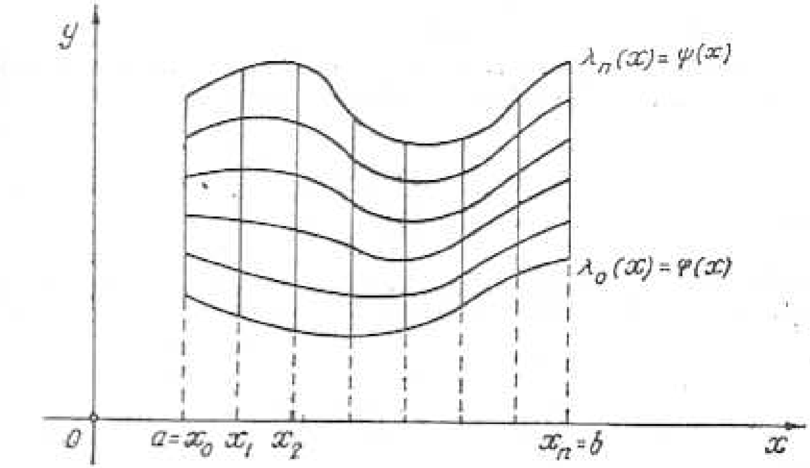
(1) $$a \leqq x \leqq b, \qquad \varphi(x) \leqq y \leqq \psi(x),$$

то

(9) $$\iint_R f(x, y)\,dx\,dy = \int_a^b \left[\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y)\,dy \right] dx.$$

Доказателство. Нека ε е произволно положително число. Тъй като функцията $f(x, y)$ е непрекъсната в ограниченото и затвореното множество R, ще можем да намерим съгласно теоремата за равномерната непрекъснатост такова положително число δ, че във всяко подмножество на R с диаметър, по-малък от δ, осцилацията на $f(x, y)$ да бъде по-малка от $\frac{\varepsilon}{\mu(R)}$. След това нека вземем едно естествено число n. Да разгледаме функциите

$$\lambda_k(x) = \varphi(x) + \frac{k}{n}[\psi(x) - \varphi(x)], \quad k = 0, 1, \ldots, n.$$



Черт. 73

Очевидно $\lambda_0(x) = \varphi(x)$ и $\lambda_n(x) = \psi(x)$. Освен това поради неравенството $\varphi(x) \leqq \psi(x)$ е ясно, че за всяко x от интервала $[a, b]$ ще имаме

$$\lambda_{k-1}(x) \leqq \lambda_k(x), \quad k = 0, 1, \ldots, n,$$

което показва, че при всяко k графиката на функцията $\lambda_k(x)$ ще се намира над графиката на $\lambda_{k-1}(x)$. Да разделим по-нататък интервала $[a, b]$ на n равни части посредством точките

$$a = x_0, \ x_1, \ldots, x_n = b$$

и да прекараме през тези точки вертикални прави. Тези прави заедно с графиките на функциите $\lambda_k(x)$ ще разделят (при това правилно) областта R на n^2 подобласти (черт. 73), всяка от които представлява един по-малък криволинеен трапец. Ще означим с R_{ik} криволинейния трапец, определен чрез неравенствата

$$x_{i-1} \leqq x \leqq x_i, \quad \lambda_{k-1}(x) \leqq y \leqq \lambda_k(x).$$

Ако вземем числото n достатъчно голямо, можем да направим диаметрите на всички R_{ik} по-малки* от избраното по-горе число δ. Тогава, означавайки с M_{ik} и m_{ik} точната горна и точната долна граница на $f(x, y)$ в множеството R_{ik}, ще имаме

$$M_{ik}-m_{ik}<\frac{\varepsilon}{\mu(R)}.$$

Да разгледаме сега функцията

$$F(x)=\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y)\,dy.$$

Както видяхме в помощната теорема, тя е непрекъсната, а следователно и интегруема в интервала $[a, b]$. Ще излезем от равенството

$$\int_a^b F(x)\,dx=\sum_{i=1}\int_{x_{i-1}}^{x_i} F(x)\,dx.$$

---

* По-подробно в това можем да се убедим по следния начин. Нека ρ е такова положително число, че от неравенството $|x'-x''|<\rho$ да следват неравенствата

$$|\varphi(x')-\varphi(x'')|<\frac{\delta}{8} \text{ и } |\psi(x')-\psi(x'')|<\frac{\delta}{8}.$$

Да означим освен това с K някаква константа, такава, че да имаме $|\varphi(x)|\leq K$ и $|\psi(x)|\leq \leq K$ за $x\in[a, b]$. Ще вземем естественото число n толкова голямо, че да са изпълнени неравенствата

$$\frac{b-a}{n}<\frac{\delta}{2}, \qquad \frac{b-a}{n}<\rho, \qquad \frac{2K}{n}<\frac{\delta}{8}.$$

Ако сега (x', y') и (x'', y'') са две точки, принадлежащи на криволинейния трапец R_{ik}, то

$$|y'-y''|\leq|y'-\lambda_k(x')|+|\lambda_k(x')-\lambda_k(x'')|+|\lambda_k(x'')-y''|$$
$$\leq\lambda_k(x')-\lambda_{k-1}(x')+|\lambda_k(x')-\lambda_k(x'')|+\lambda_k(x'')-\lambda_{k-1}(x'').$$

При това

$$\lambda_k(x')-\lambda_{k-1}(x')=\frac{1}{n}[\psi(x')-\varphi(x')]\leq\frac{2K}{n}<\frac{\delta}{8}.$$

Аналогично

$$\lambda_k(x'')-\lambda_{k-1}(x'')<\frac{\delta}{8}.$$

От друга страна, $|x'-x''|<\frac{b-a}{n}<\rho$, поради което

$$|\lambda_k(x')-\lambda_k(x'')|=\left|\left(1-\frac{k}{n}\right)(\varphi(x')-\varphi(x''))+\frac{k}{n}(\psi(x')-\psi(x''))\right|$$
$$\leq|\varphi(x')-\varphi(x'')|+|\psi(x')-\psi(x'')|<\frac{\delta}{8}+\frac{\delta}{8}=\frac{\delta}{4}.$$

От друга страна, имаме

$$F(x)=\sum_{k=1}^{n}\int_{\lambda_{k-1}(x)}^{\lambda_k(x)} f(x, y)\,dy,$$

откъдето

$$\int_a^b F(x)\,dx=\sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i}\left[\sum_{k=1}^{n}\int_{\lambda_{k-1}(x)}^{\lambda_k(x)} f(x, y)\,dy\right]dx.$$

Като вземем пред вид, че в множеството R_{ik} е изпълнено неравенството $f(x, y)\leq M_{ik}$, ще получим

$$\int_a^b F(x)\,dx=\sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i}\left[\sum_{k=1}^{n}\int_{\lambda_{k-1}(x)}^{\lambda_k(x)} f(x, y)\,dy\right]dx$$
$$\leq\sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i}\left[\sum_{k=1}^{n}M_{ik}(\lambda_k(x)-\lambda_{k-1}(x))\right]dx$$
$$=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}M_{ik}\int_{x_{i-1}}^{x_i}[\lambda_k(x)-\lambda_{k-1}(x)]\,dx.$$

Съгласно формулата (2), приложена за криволинейния трапец R_{ik}, имаме

$$\mu(R_{ik})=\int_{x_{i-1}}^{x_i}[\lambda_k(x)-\lambda_{k-1}(x)]\,dx.$$

Следователно

$$\int_a^b F(x)\,dx\leq\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}M_{ik}\,\mu(R_{ik})=S,$$

Ето защо ще имаме

$$|y'-y''|<\frac{\delta}{8}+\frac{\delta}{4}+\frac{\delta}{8}=\frac{\delta}{2}.$$

Като вземем пред вид, че $|x'-x''|<\frac{b-a}{n}<\frac{\delta}{2}$, най-сетне за разстоянието между точките (x', y') и (x'', y'') ще получим

$$\sqrt{(x'-x'')^2+(y'-y'')^2}<\sqrt{\frac{\delta^2}{4}+\frac{\delta^2}{4}}=\frac{\delta}{\sqrt{2}}.$$

Оттук заключаваме, че диаметърът на множеството R_{ik} е по-малък от δ.

където S е голямата сума на Дарбу, отговаряща на разглежданото разделяне на областта R на подобласти. Аналогично се получава

$$\int_a^b F(x)\,dx \geqq \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} m_{ik}\,\mu(R_{ik}) = s,$$

където s е малката сума на Дарбу за същото разделяне. И така изпълнени са неравенствата

$$s \leqq \int_a^b F(x)\,dx \leqq S.$$

Но в сила са също тъй и неравенствата

$$s \leqq \iint_R f(x,\ y)\,dx\,dy \leqq S.$$

Следователно ще имаме

$$\left|\iint_R f(x,\ y)\,dx\,dy - \int_a^b F(x)\,dx\right| \leqq S - s$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} (M_{ik} - m_{ik})\,\mu(R_{ik})$$

$$< \frac{\varepsilon}{\mu(R)} \cdot \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \mu(R_{ik}) = \frac{\varepsilon}{\mu(R)} \cdot \mu(R) = \varepsilon.$$

Поради произволния избор на числото ε заключаваме, че е в сила равенството

$$\iint_R f(x,\ y)\,dx\,dy = \int_a^b F(x)\,dx,$$

което не е нищо друго освен равенството (9).

П р и м е р 1. Да пресметнем двойния интеграл

$$\iint_R \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dx\,dy,$$

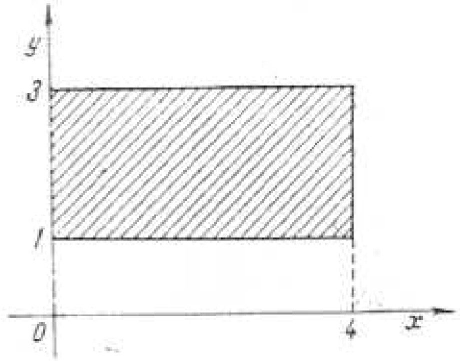
където R е правоъгълникът (черт. 74), даден с неравенствата

$$0 \leqq x \leqq 4, \qquad 1 \leqq y \leqq 3.$$

Съгласно формулата (9) ще имаме

$$\iint_R \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dx\,dy = \int_0^4 \left[\int_1^3 \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dy\right] dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^4 x \left[\int_1^3 \frac{dy^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\right] dx = \frac{1}{2}\int_0^4 x \left| 2\sqrt{x^2+y^2} \right|_1^3 dx$$



Черт. 74

$$= \int_0^4 x\left(\sqrt{x^2+9} - \sqrt{x^2+1}\right) dx = \frac{1}{2}\int_0^4 \sqrt{x^2+9}\,dx^2 - \frac{1}{2}\int_0^4 \sqrt{x^2+1}\,dx^2$$

$$= \frac{1}{3}\left|(x^2+9)^{\frac{3}{2}}\right|_0^4 - \frac{1}{3}\left|(x^2+1)^{\frac{3}{2}}\right|_0^4 = \frac{1}{3}\left(25^{\frac{3}{2}} - 9^{\frac{3}{2}}\right) - \frac{1}{3}\left(17^{\frac{3}{2}} - 1\right)$$

$$= \frac{1}{3}(125-27) - \frac{1}{3}(17\sqrt{17}-1) = 33 - \frac{17}{3}\sqrt{17}.$$

П р и м е р 2. Да пресметнем двойния интеграл

$$\iint_R xy^2\,dx\,dy,$$

където R е триъгълникът (черт. 75), образуван от пресичането на правите с уравнения

$$y=0, \quad x=1, \quad y=x.$$

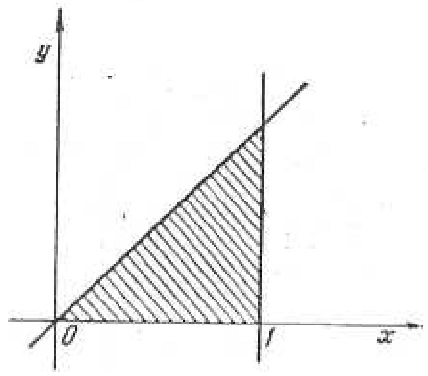
Тук областта R е криволинеен трапец, който се определя от неравенствата

$$0 \leqq x \leqq 1, \qquad 0 \leqq y \leqq x.$$

Тогава формулата (9) ще ни даде

$$\iint_R xy^2\,dx\,dy=\int_0^1\left[\int_0^x xy^2\,dy\right]dx$$

$$=\int_0^1 x\left|\frac{1}{3}y^3\right|_0^x dx=\frac{1}{3}\int_0^1 x^4\,dx=\frac{1}{15}\left|x^5\right|_0^1=\frac{1}{15}.$$



Черт. 75

Пример 3. Да пресметнем интеграла

$$\iint_R (x+y)\,dx\,dy,$$

където областта R е оградена от параболата с уравнение $y^2=x$ и правата с уравнение $x=2$ (черт. 76).

Тук криволинейният трапец R се задава с неравенствата

$$0\leqq x\leqq 2,\quad -\sqrt{x}\leqq y\leqq\sqrt{x}.$$

Тогава ще имаме

$$\iint_R (x+y)\,dx\,dy=\int_0^2\left[\int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}}(x+y)\,dy\right]dx$$

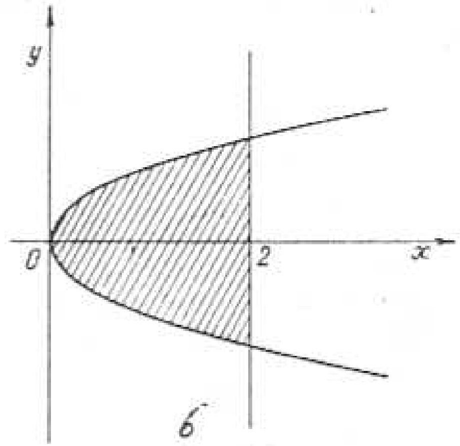
$$=\int_0^2\left(x\left|y\right|_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}}+\frac{1}{2}\left|y^2\right|_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}}\right)dx=2\int_0^2 x^{\frac{3}{2}}dx=2\cdot\frac{2}{5}\left|x^{\frac{5}{2}}\right|_0^2=\frac{16\sqrt{2}}{5}.$$

Пример 4. Да се пресметне лицето на елипсата (черт. 77), зададена с уравнението

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Съгласно формула (2) от § 87. търсеното лице се дава с двойния интеграл

$$\iint_R dx\,dy,$$



б

Черт 76

взет върху областта, заградена от дадената елипса. Тази област е един криволинеен трапец, определен от неравенствата

$$-a\leqq x\leqq a,\quad -\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\leqq y\leqq\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}.$$

Получаваме

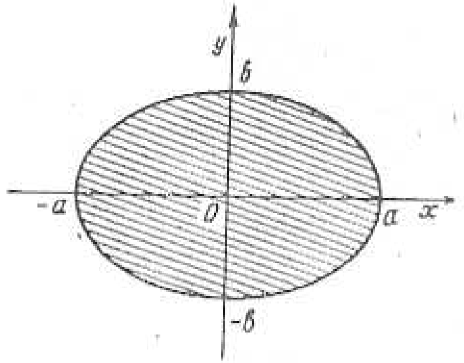
$$\iint_R dx\,dy=\int_{-a}^{a}\left[\int_{-\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}dy\right]dx=2\,\frac{b}{a}\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx.$$

В получения определен интеграл правим субституцията $x=a\sin t$:

$$\iint_R dx\,dy=2\,\frac{b}{a}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{a^2-a^2\sin^2 t}\;a\cos t\,dt$$

$$=2ab\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\,dt=ab\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2t)\,dt$$

$$=ab\left|\,t\,\right|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}+\frac{ab}{2}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos 2t\,d2t=\pi ab+\frac{ab}{2}\left|\sin 2t\right|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=\pi ab.$$



Черт. 77

П р и м е р 5. Да се пресметне обемът на тялото, оградено от повърхнините с уравнения $z=x^2+y^2$, $y=x^2$, $y^2=x$, $z=0$.

Това е едно цилиндрично тяло с образуващи, успоредни на оста Oz, което отгоре се огражда от параболоида $z=x^2+y^2$, а отдолу от онази област в равнината Oxy, която е заключена между двете параболи $y=x^2$ и $y^2=x$ (черт. 78). Тази област е един криволинеен трапец R, който може да бъде зададен с неравенствата

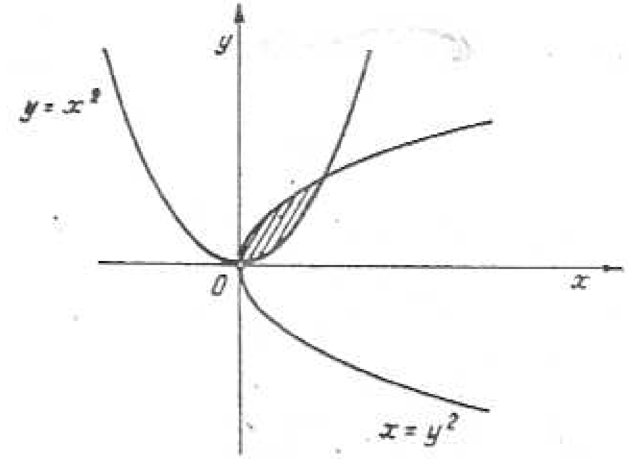
$$0\leqq x\leqq 1,\quad x^2\leqq y\leqq\sqrt{x}.$$

Следователно за търсения обем ще получим

$$\iint\limits_R (x^2+y^2)\,dx\,dy=\int\limits_0^1\left[\int\limits_{x^2}^{\sqrt{x}}(x^2+y^2)\,dy\right]dx$$

$$=\int\limits_0^1\left|x^2y+\frac{1}{3}y^3\right|_{x^2}^{\sqrt{x}}dx=\int\limits_0^1\left(x^2\sqrt{x}-x^4+\frac{1}{3}x\sqrt{x}-\frac{1}{3}x^6\right)dx$$

$$=\left|\frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}}-\frac{1}{5}x^5+\frac{2}{15}x^{\frac{5}{2}}-\frac{1}{21}x^7\right|_0^1=\frac{2}{7}-\frac{1}{5}+\frac{2}{15}-\frac{1}{21}=\frac{6}{35}.$$



Черт. 78

Нека отбележим, че един криволинеен трапец R може да бъде зададен и с две функции $\varphi(y)$ и $\psi(y)$, които са дефинирани и непрекъснати в някой интервал $[a,\ b]$, лежащ върху оста Oy, и които удовлетворяват в този интервал неравенството

$$\varphi(y)\leqq\psi(y).$$

В такъв случай областта R се задава с неравенствата

(10) $$a\leqq y\leqq b,\qquad \varphi(y)\leqq x\leqq\psi(y)$$

(черт. 79) и вместо формулата (9) имаме следната формула:

(11) $$\iint\limits_R f(x,\ y)\,dxdy=\int\limits_b^b\left[\int\limits_{\varphi(y)}^{\psi(y)}f(x,\ y)\,dx\right]dy.$$

П р и м е р 6. Да пресметнем интеграла

$$\iint\limits_R y^2\,dx\,dy,$$

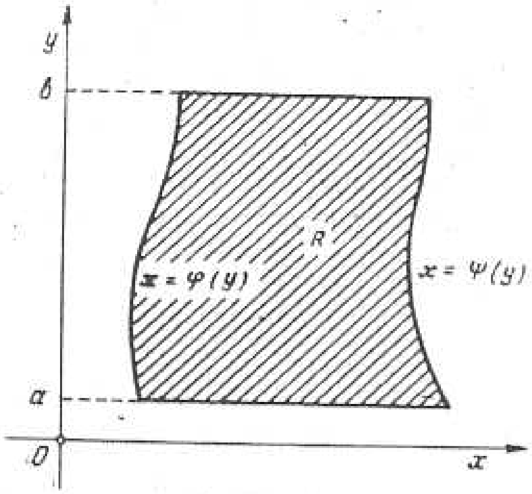
където областта R е оградена от хиперболата с уравнение $xy=1$ и правите с уравнения $x=0$, $y=1$ и $y=2$ (черт. 80).

Тук R е криволинеен трапец, определен с неравенствата

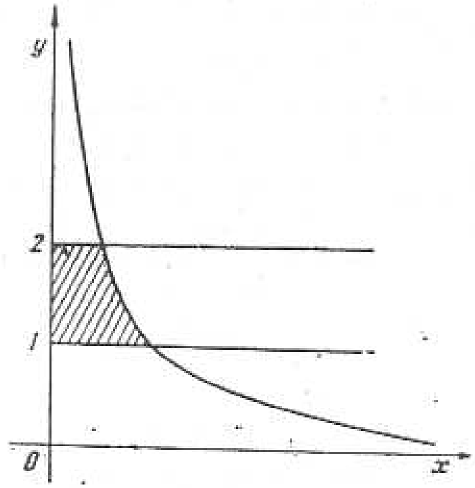
$$1\leqq y\leqq 2,\qquad 0\leqq x\leqq\frac{1}{y},$$

и формулата (11) ни дава

$$\iint_R y^2\,dx\,dy = \int_1^2 \left[\int_0^{\frac{1}{y}} y^2\,dx\right] dy = \int_1^2 y^2 \left| x \right|_0^{\frac{1}{y}} dy = \int_1^2 y\,dy = \left|\frac{y^2}{2}\right|_1^2 = \frac{3}{2}.$$



Черт. 79



Черт. 80

По-нататък за краткост ще наричаме един криволинеен трапец нормално разположен относно оста Ox, когато той е зададен с неравенства от вида (I), и нормално разположен от-

носно оста Oy, когато той е зададен с неравенства от вида (10).

Упражнения. Пресметнете следните двойни интеграли:

1. $\iint_R \frac{dx\,dy}{(x+y)^2}$, където R е областта, оградена от правите с уравнения $x = 1$, $x = 3$, $y = 0$, $y = 1$.

Отг. $\frac{5}{24}$.

2. $\iint_R xy\,dx\,dy$, където R е областта, оградена от правите с уравнения $x = 1$, $y = 1$, $x + y = 3$.

Отг. $\frac{7}{8}$.

3. $\iint_R y\,dx\,dy$, където R е областта, оградена от правите с уравнения $y = 0$, $y = x$, $y = 2 - x$.

Отг. $\frac{1}{3}$.

4. $\iint_R xy^2\,dx\,dy$, където R е кръгът, ограден от окръжността с уравнение $x^2 + y^2 = 4$.

Отг. 0.

5. $\iint_R (x + y)\,dx\,dy$, където R е частта от първия квадрант на равнината, която е оградена от елипсата с уравнение $2x^2 + y^2 = 1$.

Отг. $\frac{1+\sqrt{2}}{6}$.

6. $\iint_R (x^2 + y^2)\,dx\,dy$, където R е областта, оградена от правите с уравнения $y = x$, $x = 2$ и хиперболата с уравнение $xy = 1$.

Отг. $\frac{27}{8}$.

7. Пресметнете лицето на областта, оградена от параболата с уравнение $y = x^2$ и правата $y = 2$.

Отг. $\frac{8}{3}\sqrt{2}$.

8. Да се пресметне лицето на областта, заградена от астроидата с уравнение $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ $(a>0)$.

Отг. $\frac{3}{8}\pi a^2$.

9. Да се пресметне обемът на тялото, оградено от равнините $x=0$, $y=0$, $z=0$, цилиндъра $x^2+y^2=1$ и хиперболичния параболоид $z=xy$.

Отг. $\frac{1}{8}$.

10. Да се пресметне обемът на тялото, оградено от равнините $y=1$, $z=0$, параболичния цилиндър $y=x^2$ и параболоида $z=x^2+y^2$.

Отг. $\frac{88}{105}$.

§ 94. Смяна на променливите в двойните интеграли

Смяната на променливите в двойните интеграли е свързана с понятието за **трансформация** на едно двумерно множество (т. е. на едно множество, лежащо в равнината) в друго. Ако функциите $f(u, v)$ и $g(u, v)$ са дефинирани в едно множество R', разположено в равнината Ouv, то казваме, че равенствата

$$(1) \qquad x=f(u, v), \qquad y=g(u, v)$$

дефинират една **трансформация, изобразяваща множеството** R' **в някакво множество** R, лежащо в равнината Oxy. Когато е дадена една точка (u, v) от R', точката (x, y), чиито координати удовлетворяват равенствата (1), се нарича **образ** на точката (u, v). Множеството R, състоящо се от всички точки (x, y), получени като образи на точките (u, v) от R', се нарича **образ** на множеството R' при трансформацията (1).

Една трансформация, дефинирана с равенствата (1), се нарича **обратима** в дадено множество G' от равнината Ouv, ако всеки две различни точки от G' имат различни образи, т. е. ако винаги когато (u_1, v_1) и (u_2, v_2) са две различни точки от G', различни са и точките (x_1, y_1) и (x_2, y_2), определени от равенствата

$$x_1=(f(u_1, v_1), \quad y_1=g(u_1, v_1)$$

и

$$x_2=f(u_2, v_2), \quad y_2=g(u_2, v_2).$$

Ще казваме, че трансформацията (1) е **регулярна** в дадено множество R' от равнината Ouv, ако са изпълнени следните условия:

а) функциите $f(u, v)$ и $g(u, v)$ са непрекъснати и притежават непрекъснати първи и втори частни производни в някое отворено множество U', съдържащо R';

б) трансформацията (1) е обратима във вътрешността на множеството R';

в) детерминантата

$$\Delta(u, v)=\begin{vmatrix} f_u'(u, v) & f_v'(u, v) \\ g_u'(u, v) & g_v'(u, v) \end{vmatrix}$$

е различна от нула във вътрешността на R'.

Смяната на променливите в двойните интеграли се извършва въз основа на следната

Теорема. *Нека трансформацията*

$$(1) \qquad x=f(u, v), \qquad y=g(u, v)$$

е регулярна в измеримото и затворено множество R' от равнината Ouv, което се изобразява чрез (1) в измеримото и затворено множество R от равнината Oxy. Ако функцията $F(x, y)$ е непрекъсната в множеството R, то

$$(2) \qquad \iint_R F(x, y)\,dx\,dy=\iint_{R'} F[f(u, v), g(u, v)]\,|\Delta(u, v)|\,du\,dv.$$

Ние ще прилагаме тази теорема най-често, когато множеството R' е криволинеен трапец в равнината Ouv, в който случай знаем как да пресмятаме двойния интеграл, стоящ в дясната страна на формулата (2).

Доказателството на изказаната по-горе теорема е доста сложно и няма да го излагаме. Ще скицираме само един път за изработването на такова доказателство (далеч не единствено възможен, разбира се), който се отличава с това, че извършените за целта разсъждения ще ни помогнат да възприемем формулата (2) като естествена.

Да разделим правилно множеството R' на подмножества $R_1', R_2', \ldots, R_m'$ и да вземем по една вътрешна точка (u_i, v_i) във всяко от множествата R_i'. При фиксирано i да приложим относно точката (u_i, v_i) към функциите $f(u, v)$ и $g(u, v)$ формулата на Тейлор с остатъчен член, изразен чрез първите частни производни. Ако (u, v) е точка от R_i' и ако $h=u-u_i$, $k=v-v_i$, ще получим

$$\begin{aligned} f(u, v)&=f(u_i, v_i)+f_u'(u_i+\theta_1 h, v_i+\theta_1 k)h+f_v'(u_i+\theta_1 h, v_i+\theta_1 k)k, \\ g(u, v)&=g(u_i, v_i)+g_u'(u_i+\theta_2 h, v_i+\theta_2 k)h+g_v'(u_i+\theta_2 h, v_i+\theta_2 k)k, \end{aligned}$$

където $0<\theta_1<1$, $0<\theta_2<1$. Когато диаметърът на множеството R_i' е малък, малки ще бъдат и $|h|$ и $|k|$ и поради непрекъснатостта на частните производни стойностите на тези производни в точките $(u_i+\theta_1 h, v_i+\theta_1 k)$ и $(u_i+\theta_2 h, v_i+\theta_2 k)$ ще бъдат близки до стойностите им в точката (u_i, v_i). Ето защо образът на всяка точка (u, v) от R_i' при трансформацията (1) ще бъде точка, близка до образа на (u, v) при следната линейна трансформация:

$$(3) \qquad \begin{aligned} \lambda(u, v)&=f(u_i, v_i)+f_u'(u_i, v_i)(u-u_i)+f_v'(u_i, v_i)(v-v_i), \\ \mu(u, v)&=g(u_i, v_i)+g_u'(u_i, v_i)(u-u_i)+g_v'(u_i, v_i)(v-v_i). \end{aligned}$$

Тъй като съгласно условието в) за регулярна трансформация детерминантата

$$\Delta(u_i, v_i)=\begin{vmatrix} f_u'(u_i, v_i) & f_v'(u_i, v_i) \\ g_u'(u_i, v_i) & g_v'(u_i, v_i) \end{vmatrix}$$

е различна от нула, тази линейна трансформация е обратима и преобразува, както е известно от аналитичната геометрия, всяка многоъгълна фигура A' с лице $s(A')$ от равнината Ouv в многоъгълна фигура A в равнината Oxy с лице

$$s(A)=|\Delta(u_i, v_i)|.s(A').$$

Оттук лесно можем да заключим, че образът M на всяко измеримо множество M' в равнината (u, v) е също измеримо множество в равнината Oxy и при това

$$\mu(M)=|\Delta(u_i, v_i)|.\mu(M').$$

Нека R_i е образът на R_i' при трансформацията (1). Тъй като образите на точките от R_i' при тази трансформация, както отбелязахме, са близки до образите им при трансформацията (3), множеството R_i ще има мярка, приблизително равна на $|\Delta(u_i, v_i)|.\mu(R_i')$.

Ако сега предположим, че множествата R_i образуват от своя страна също така правилно разделяне на множеството R, и ако $f(u_i, v_i)=\xi_i$, $g(u_i, v_i)=\eta_i$, то сумата

(4) $$\sum_{i=1}^{m} F(\xi_i, \eta_i)\,\mu(R_i)$$

ще бъде приблизително равна на сумата

(5) $$\sum_{i=1}^{m} F[(f(u_i, v_i), g(u_i, v_i)]\,|\Delta(u_i, v_i)|\,\mu(R_i').$$

Но сумата (4) е една риманова сума за функцията $F(x, y)$, а сумата (5) — риманова сума за функцията $F[f(u, v), g(u, v)].|\Delta(u, v)|$. Както знаем от § 91, ако разгледаме една издребняваща редица от разделяния на множеството R', съответната редица от риманови суми (5) ще клони към двойния интеграл, написан в дясната страна на равенството (2). При това лесно може да се види, че разделянията на R' от една издребняваща редица ще преминат при трансформацията (1) в такива разделяния на множеството R, които от своя страна образуват също тъй издребняваща редица, и следователно съответните им риманови суми (4) ще клонят към двойния интеграл, написан в лявата страна на равенството (2). Най-сетне остава да покажем, че разликата между сумите (4) и (5) ще стане колкото си пожелаем малка по абсолютна стойност, стига да вземем достатъчно малки диаметрите на множествата R_i', образуващи разделяне на R'. Оттук след всичко казано ще следва и равенството (2).

Изложените тук разсъждения могат да бъдат разработени подробно до степента на редовно доказателство, но това е свързано с известни технически трудности, поради което няма да го правим.

П р и м е р 1. Да се пресметне двойният интеграл

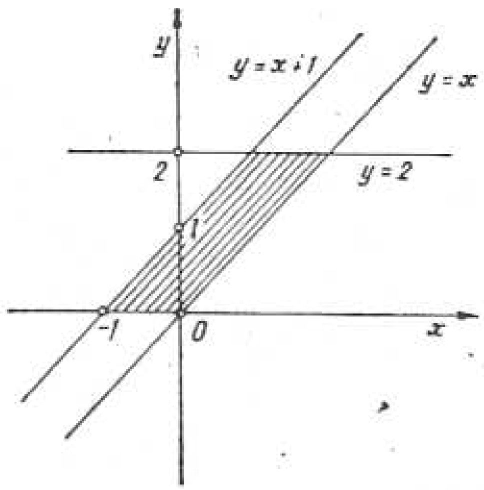
$$\iint_R \frac{dx\,dy}{\sqrt{1+x^2-2xy+y^2}},$$

където R е успоредникът, заключен между правите с уравнения $y=0$, $y=2$, $y=x$, $y=x+1$ (черт. 81). Тук областта R може да бъде зададена с неравенствата

$$0\leq y\leq 2, \qquad 0\leq y-x\leq 1.$$

От друга страна, подинтегралната функция може да бъде записана така:

$$\frac{1}{\sqrt{1+(y-x)^2}}.$$



Черт. 81

Това ни помага да съобразим, че задачата ще се опрости, ако въведем нови променливи u и v посредством равенствата $y=u$, $y-x=v$, откъдето получаваме трансформацията

(4) $$x=u-v, \qquad y=u.$$

Областта R е образ при разглежданата трансформация на правоъгълника R', зададен в равнината Ouv с неравенствата

$$0\leq u\leq 2, \qquad 0\leq v\leq 1.$$

Лесно се вижда, че трансформацията (4) е регулярна в R' (тя е регулярна във всяко множество от равнината Ouv). Тук $\Delta(u, v)=1$. Ето защо ще имаме

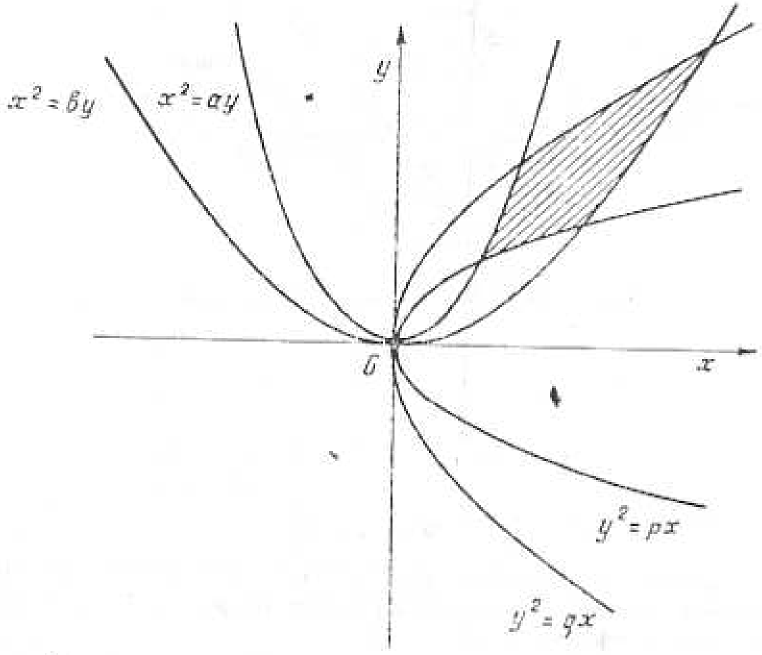
$$\iint_R \frac{dx\,dy}{\sqrt{1+x^2-2xy+y^2}}=\iint_{R'} \frac{du\,dv}{\sqrt{1+v^2}}$$

$$=\int_0^2\left[\int_0^1 \frac{dv}{\sqrt{1+v^2}}\right]du=\ln(1+\sqrt{2}).\int_0^2 du=2\ln(1+\sqrt{2}).$$

П р и м е р 2. Да пресметнем двойния интеграл

$$\iint\limits_R x^2 y^2\,dx\,dy$$

в частта R от равнината, заключена между четирите параболи с уравнения $y^2=px$, $y^2=qx$, $x^2=ay$, $x^2=by$ (където $0<p<q$, $0<a<b$) (черт. 82). Областта R може да бъде зададена посредством неравенствата



Черт. 82

$$p \leqq \frac{y^2}{x} \leqq q,\quad a \leqq \frac{x^2}{y} \leqq b.$$

Това ни навежда на мисълта да въведем нови променливи u и v с равенствата

$$\frac{y^2}{x}=u,\qquad \frac{x^2}{y}=v,$$

от които достигаме до трансформацията

(5) $$x=\sqrt[3]{uv^2},\qquad y=\sqrt[3]{u^2v}.$$

Областта R се явява при тази трансформация образ на правоъгълника R', зададен с неравенствата

$$p \leqq u \leqq q,\qquad a \leqq v \leqq b.$$

Читателят лесно ще провери, че трансформацията (5) е регулярна в R'. Също тъй лесно се пресмята, че $\Delta(u,\ v)=-\frac{1}{3}$. Ето защо ще получим

$$\iint\limits_R x^2 y^2\,dx\,dy=\frac{1}{3}\iint\limits_{R'} u^2 v^2\,du\,dv=\frac{1}{3}\int\limits_p^q\left[\int\limits_a^b v^2 dv\right]u^2\,du$$

$$=\frac{1}{27}(a^3-b^3)(q^3-p^3).$$

Упражнения. 1. Да се пресметне двойният интеграл $\iint\limits_R \frac{dx\,dy}{x^2+y^2}$, където R е областта, оградена от правите с уравнения $y=ax$, $y=bx$, $x+y=p$, $x+y=q$ $(0<a<b,\ 0<p<q)$.

Отг. $(\operatorname{arc\,tg} b-\operatorname{arc\,tg} a)\ln\frac{q}{p}$.

2. Да се пресметне лицето на областта, оградена от правите $y=ax$, $y=bx$ и хиперболите $xy=p$, $xy=q$ $(0<a<b,\ 0<p<q)$.

Отг. $\frac{1}{2}(q-p)\ln\frac{b}{a}$.

§ 95. Смяна чрез полярни координати

Една много често използувана смяна на променливите в двойните интеграли се състои във въвеждането на т. нар. полярни координати. Всяка точка $P(x,\ y)$ в равнината освен чрез своите две декартови координати x и y може да бъде определена и със следните две числа (черт. 83):

1) неотрицателното число ρ, даващо разстоянието на точката P до началото на координатната система O;

2) ъгълът θ, който сключва векторът $\overrightarrow{OP}$, наречен радиус-вектор, с положителната полуос на оста Ox, измерен в посока от оста Ox към $\overrightarrow{OP}$. Той се приема за положителен, когато е измерен в посоката на часовниковата стрелка, и за отрицателен в противния случай.

Числата ρ и θ се наричат *полярни координати* на точката P. (Когато точката P съвпада с точката O, ъгълът θ се взема произволен.)

От геометрични съображения се получава следната връзка между декартовите координати x и y на точката P и нейните полярни координати:

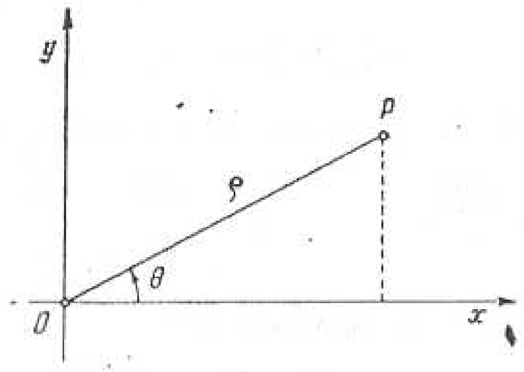
(1) $$x=\rho\cos\theta,\qquad y=\rho\sin\theta.$$

Ние ще разглеждаме равенствата (1) като една трансформация. Функциите $f(\theta,\rho)=\rho\cos\theta$ и $g(\theta,\ \rho)=\rho\sin\theta$ притежават очевидно непрекъснати първи и втори частни производни в цялата равнина $O\theta\rho$ (в която θ и ρ играят ролята на декартови координати). За детерминантата $\Delta(\theta,\ \rho)$ получаваме

$$\Delta(\theta,\ \rho)=\begin{vmatrix}\cos\theta & -\rho\sin\theta\\ \sin\theta & \rho\cos\theta\end{vmatrix}=\rho.$$

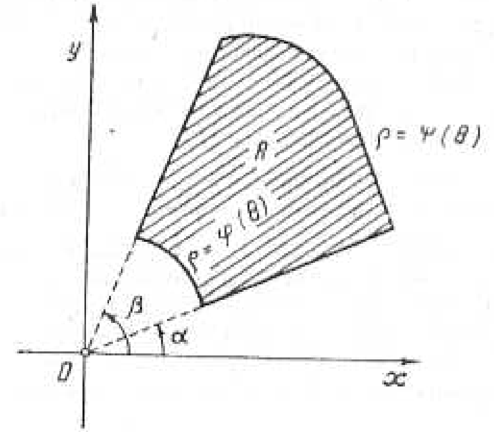
Ако $\varphi(\theta)$ и $\psi(\theta)$ са две неотрицателни функции, дефинирани и непрекъснати в някой интервал $[\alpha, \beta]$, то множеството R в равнината Oxy, състоящо се от точките, чиито полярни координати θ и ρ удовлетворяват неравенствата

$$\alpha \leqq \theta \leqq \beta, \quad \varphi(\theta) \leqq \rho \leqq \psi(\theta) \tag{2}$$



Черт. 83

(черт. 84), се явява образ (при трансформацията (1)) на един криволинеен трапец R', лежащ в равнината $O\theta\rho$ и съставен от точките, чиито декартови координати θ и ρ удовлетворяват същите неравенства (2) (черт. 85).



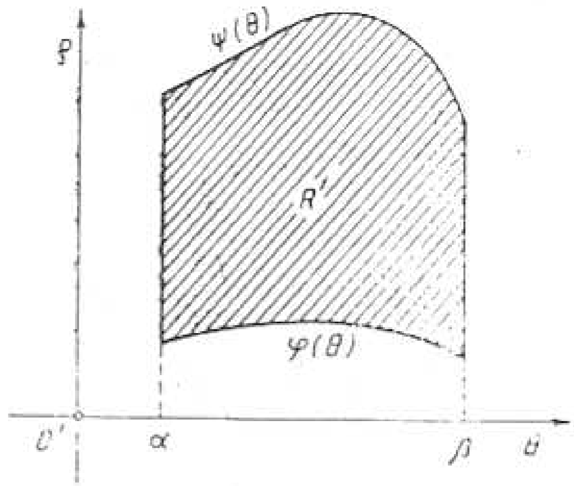
Черт. 84

В случай, че

$$\beta - \alpha \leqq 2\pi, \tag{3}$$

не е трудно да се провери, че трансформацията (1) е регулярна в криволинейния трапец R'. Ето защо винаги когато е изпълнено неравенството (3), можем да извършваме смяна на променливите чрез трансформацията (1), прилагайки теоремата към криволинеен трапец R', зададен в равнината $O\theta\rho$ чрез неравенства от вида (2).

Нека забележим, че въвеждането на полярни координати при пресмятане на даден двоен интеграл е особено целесъобразно, когато било в подинтегралната функция, било в дефиницията на интеграционната област участвува изразът x^2+y^2, тъй като този израз, както показва равенството $x^2+y^2=\rho^2$, се опростява много при тази трансформация.



Черт. 85

Пример 1. Да се пресметне двойният интеграл

$$\iint_R \frac{dx\,dy}{\sqrt{1+x^2+y^2}},$$

където R е кръгът, ограничен от окръжността с уравнение $x^2+y^2=1$ (черт. 86).

Тук областта R може да бъде зададена чрез следните неравенства относно полярните координати θ и ρ в равнината Oxy:

$$0 \leqq \theta \leqq 2\pi, \quad 0 \leqq \rho \leqq 1.$$

Същите неравенства определят в равнината $O\theta\rho$ един правоъгълник R', чийто образ се явява R. Съгласно казаното по-рано можем да приложим теоремата за смяна на променливите и да извършим трансформацията (1). Ще получим

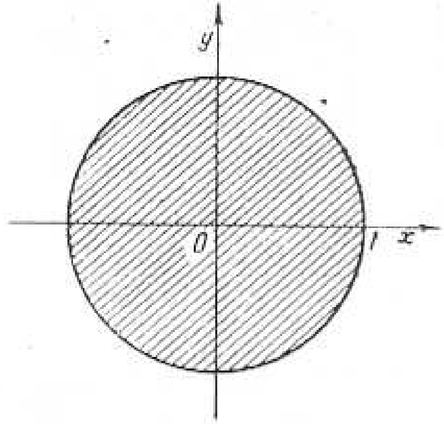
$$\iint_R \frac{dx\,dy}{\sqrt{1+x^2+y^2}} = \iint_{R'} \frac{\rho\,d\rho\,d\theta}{\sqrt{1+\rho^2}}$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[\int_0^1 \rho(1+\rho^2)^{-\frac{1}{2}} d\rho \right] d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left[\int_0^1 (1+\rho^2)^{-\frac{1}{2}} d\rho^2 \right] d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}\left|(1+\rho^2)^{\frac{1}{2}}\right|_0^1 d\theta=2(\sqrt{2}-1)\pi.$$

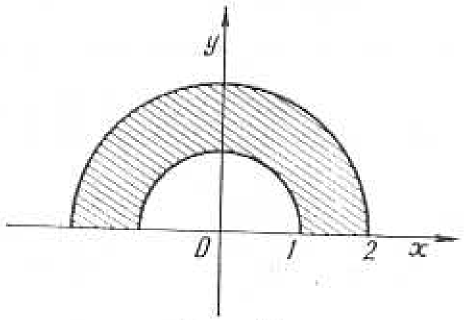
П р и м е р 2. Да пресметнем интеграла

$$\iint_R y\,dx\,dy,$$



Черт. 86

ако R е областта, която лежи над оста Ox и се намира между двете концентрични окръжности с уравнения $x^2+y^2=1$ и $x^2+y^2=4$ (черт. 87).



Черт. 87

Тук областта R може да бъде зададена със следните неравенства относно полярните координати θ и ρ в равнината Oxy:

$$0\leqq\theta\leqq\pi,\qquad 1\leqq\rho\leqq 2.$$

Същите неравенства определят в равнината $O\theta\rho$ един правоъгълник R', който при трансформацията (1) се изобразява в R. Ето защо, извършвайки тази трансформация в дадения двоен интеграл, ще получим

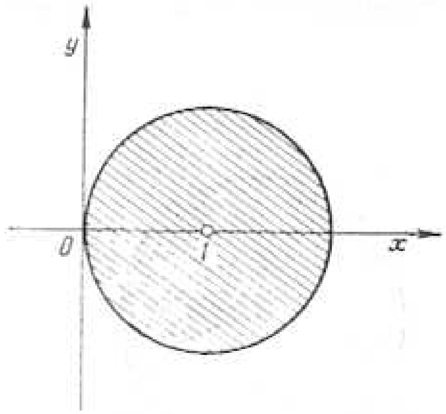
$$\iint_R y\,dx\,dy=\iint_{R'}\rho^2\sin\theta\,d\theta\,d\rho=\int_0^{\pi}\left[\int_1^2\rho^2\,d\rho\right]\sin\theta\,d\theta$$

$$=\frac{1}{3}\int_0^{\pi}\left|\rho^3\right|_1^2\sin\theta\,d\theta=\frac{7}{3}\int_0^{\pi}\sin\theta\,d\theta=-\frac{7}{3}\left|\cos\theta\right|_0^{\pi}=\frac{14}{3}.$$

П р и м е р 3. Да пресметнем двойния интеграл

$$\iint_R\sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy,$$

взет в кръга R, определен от окръжността с уравнение $x^2+y^2-2x=0$ (черт. 88).



Черт. 88

Ако въведем полярни координати, уравнението на дадената окръжност придобива вида

$$\rho=2\cos\theta.$$

Ето защо областта R може да бъде зададена с помощта на следните неравенства относно полярните координати в равнината Oxy:

$$-\frac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2},\quad 0\leqq\rho\leqq 2\cos\theta.$$

В равнината $O\theta\rho$ тези неравенства определят един криволинеен трапец R' чийто образ при трансформацията (1) се явява областта R. Ето защо, из-

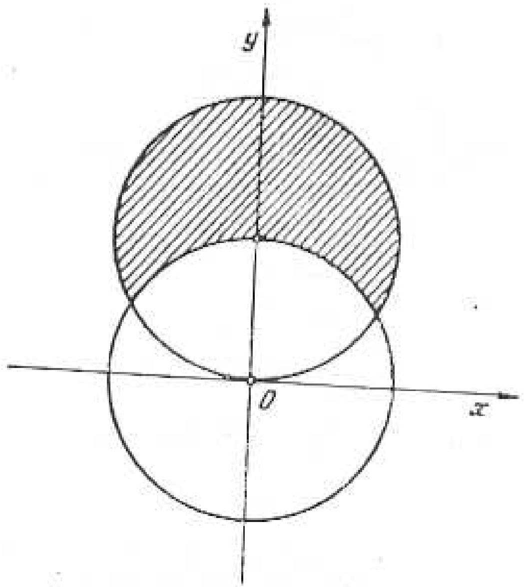
извършвайки смяна на променливите посредством тази трансформация, ще имаме

$$\iint\limits_{R}\sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy=\iint\limits_{R'}\rho^2\,d\theta\,d\rho=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left[\int\limits_{0}^{2\cos\theta}\rho^2\,d\rho\right]d\theta$$

$$=\frac{1}{3}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left|\rho^3\right|_{0}^{2\cos\theta}d\theta=\frac{8}{3}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\theta\,d\theta=\frac{8}{3}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^2\theta)\,d\sin\theta$$

$$=\frac{8}{3}\left|\sin\theta\right|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}-\frac{8}{9}\left|\sin^3\theta\right|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{16}{3}-\frac{16}{9}=\frac{32}{9}.$$

Пример 4. Да пресметнем лицето на областта R, намираща се във вътрешността на окръжността $x^2+y^2-2y=0$, но вън от окръжността $x^2+y^2=1$ (черт. 89).



Черт. 89

Уравненията на двете окръжности, написани в полярни координати, са съответно $\rho=2\sin\theta$ и $\rho=1$. За пресечните им точки ще имаме $1=2\sin\theta$,

или $\sin\theta=\frac{1}{2}$. Значи тези пресечни точки ще имат полярен ъгъл съответно $\theta_1=\frac{\pi}{6}$ и $\theta_2=\frac{5}{6}\pi$. Ето защо областта ще се задава с неравенствата

$$\frac{\pi}{6}\leqq\theta\leqq\frac{5}{6}\pi,\quad 1\leqq\rho\leqq 2\sin\theta.$$

Тези неравенства определят в равнината $O\theta\rho$ един криволинеен трапец R'. Извършвайки смяна на променливите чрез трансформацията (1), за търсеното лице ще получим

$$\iint\limits_{R}dx\,dy=\iint\limits_{R'}\rho\,d\rho\,d\theta=\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}}\left[\int\limits_{1}^{2\sin\theta}\rho\,d\rho\right]d\theta$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}}\left|\rho^2\right|_{1}^{2\sin\theta}d\theta=2\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}}\sin^2\theta\,d\theta-\frac{1}{2}\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}}d\theta$$

$$=\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}}(1-\cos 2\theta)\,d\theta-\frac{1}{3}\pi=\left|\theta-\frac{1}{2}\sin 2\theta\right|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}}-\frac{\pi}{3}$$

$$=\frac{2}{3}\pi-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Пример 5. Да пресметнем обема на тялото, оградено от параболоида с уравнение

$$x^2+y^2+z=1$$

и равнината Oxy (черт. 90).

Това тяло е оградено от равнината с уравнение $z=0$ и парболоида, чието уравнение можем да напишем във вида

$$z=1-(x^2+y^2).$$

Ето защо търсеният обем ще се дава с двойния интеграл

$$\iint\limits_{R}(1-x^2-y^2)\,dx\,dy,$$

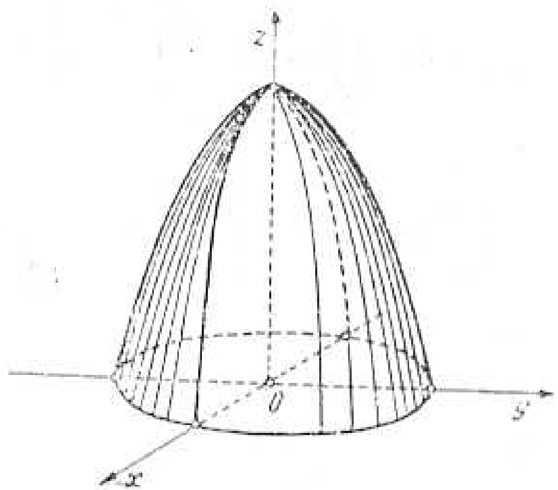
където R е областта, определена от сечението на параболоида с равнината Oxy. Това сечение е окръжността с уравнение $x^2+y^2=1$, следователно R е кръгът, определен от тази окръжност. Въвеждайки полярни координати, можем да зададем този кръг чрез неравенствата

$$0\leqq\theta\leqq 2\pi,\qquad 0\leqq\rho\leqq 1,$$

които определят в равнината $O\theta\rho$ един правоъгълник R'. Тогава, извършвайки смяна посредством трансформацията (1), ще получим

$$\iint_R (1-x^2-y^2)\,dx\,dy = \iint_{R'} (1-\rho^2)\,\rho\,d\rho\,d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\left[\int_0^1 (\rho-\rho^3)\,d\rho\right]d\theta = \int_0^{2\pi}\left|\frac{1}{2}\rho^2-\frac{1}{4}\rho^4\right|_0^1 d\theta = \frac{1}{4}\int_0^{2\pi} d\theta = \frac{\pi}{2}.$$



Черт. 90

Пример 6. Несобственият интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx$$

(който е очевидно сходящ) играе важна роля в теорията на вероятностите и носи името интеграл на Поасон. Неговото непосредствено пресмятане е невъзможно поради това, че неопределеният интеграл от функцията e^{-x^2} не може да бъде изразен с елементарни функции. Тук ще посочим един метод за пресмятане на интеграла на Поасон, при който добра услуга ни оказва теоремата за смяна на променливите в двойните интеграли.

Като представим интересуващия ни интеграл във вида

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \int_{-\infty}^{0} e^{-x^2}\,dx + \int_0^{\infty} e^{-x^2}\,dx$$

и извършим в първия от интегралите, написани в дясната страна на това равенство субституцията $x=-t$, виждаме, че

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = 2\int_0^{\infty} e^{-x^2}\,dx.$$

Поради това ще имаме

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = 2\lim_{n} I_n,$$

където

$$I_n = \int_0^n e^{-x^2}dx.$$

Умножавайки почленно равенствата

$$I_n = \int_0^n e^{-x^2}\,dx, \quad I_n = \int_0^n e^{-y^2}\,dy,$$

получаваме

$$I_n^2 = \int_0^n e^{-x^2}\,dx\int_0^n e^{-y^2}\,dy = \int_0^n\left[\int_0^n e^{-(x^2+y^2)}\,dy\right]dx.$$

Като си спомним формулата за пресмятане на двойни интеграли, можем да пишем

(4) $$I_n^2 = \iint_{R_n} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy,$$

където R_n е квадратът, зададен в равнината Oxy с неравенствата

$$0 \le x \le n, \quad 0 \le y \le n.$$

Ако в двойния интеграл от равенството (4) извършим смяна на променливите, въвеждайки полярни координати посредством трансформацията

(1) $$x=\rho\cos\theta, \qquad y=\rho\sin\theta,$$

ще получим

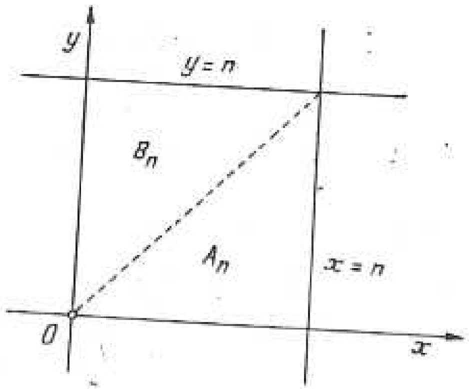
$$I_n^2 = \iint_{R_n'} e^{-\rho^2}\,\rho\,d\rho\,d\theta,$$

където R_n' е онази област в равнината $O\theta\rho$, чийто образ при трансформацията (1) се явява R_n. Тъй като уравненията на правите $x=n$ и $y=n$, записани с полярни координати, придобиват съответно вида $\rho=\frac{n}{\cos\theta}$ и $\rho=\frac{n}{\sin\theta}$, ясно е от геометрични съображения, че квадратът R_n може да се разглежда като съставен от два триъгълника A_n и B_n (черт. 91), които се задават съответно чрез следните неравенства относно полярните координати θ и ρ:

$$0 \le \theta \le \frac{\pi}{4}, \qquad 0 \le \rho \le \frac{n}{\cos\theta},$$

$$\frac{\pi}{4} \le \theta \le \frac{\pi}{2}, \qquad 0 \le \rho \le \frac{n}{\sin\theta}.$$

Тези неравенства определят в равнината $O\theta\rho$ два криволинейни трапеца A_n' и B_n', непритежаващи общи вътрешни точки. Ето защо ще имаме



Черт. 91

$$I_n^2 = \iint_{A_n'} e^{-\rho^2} d\rho\, d\theta + \iint_{B_n'} e^{-\rho^2} d\rho\, d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left[\int_0^{\frac{n}{\cos\theta}} e^{-\rho^2} \rho\, d\rho \right] d\theta + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left[\int_0^{\frac{n}{\sin\theta}} e^{-\rho^2} \rho\, d\rho \right] d\theta$$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left| e^{-\rho^2} \right|_0^{\frac{n}{\cos\theta}} d\theta - \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left| e^{-\rho^2} \right|_0^{\frac{n}{\sin\theta}} d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(1 - e^{-\frac{n^2}{\cos^2\theta}}\right) d\theta + \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - e^{-\frac{n^2}{\sin^2\theta}}\right) d\theta.$$

Извършвайки във втория от последните два интеграла субституцията $\theta = \frac{\pi}{2} - \alpha$, виждаме, че той се равнява на първия от тях. Така получаваме

$$I_n^2 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(1 - e^{-\frac{n^2}{\cos^2\theta}}\right) d\theta = \frac{\pi}{4} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-\frac{n^2}{\cos^2\theta}} d\theta.$$

От друга страна, поради очевидното неравенство $e^{-\frac{n^2}{\cos^2\theta}} \le e^{-n^2}$ имаме

$$0 < \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-\frac{n^2}{\cos^2\theta}} d\theta \le \frac{\pi}{4} e^{-n^2}.$$

Оттук заключаваме, че

$$\lim_n \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-\frac{n^2}{\cos^2\theta}} d\theta = 0,$$

откъдето

$$\lim_n I_n^2 = \frac{\pi}{4}$$

или най-сетне

$$\lim_n I_n = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Следователно

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

Упражнения. Пресметнете следните двойни интеграли:

1. $\iint_R \frac{dx\, dy}{\sqrt{1 + (x^2+y^2)^2}}$, където R е частта от кръга, определен от окръжността с уравнение $x^2+y^2=2$, която се намира над оста Ox.

Отг. $\frac{\pi}{2} \ln(2+\sqrt{5})$.

2. $\iint_R (x^2+y^2)\, dx\, dy$, където R е кръгът, определен от окръжността с уравнение $x^2+y^2-4y=0$.

Отг. 24π.

3. $\iint_R xy\, dx\, dy$, където R е частта от първия квадрант на равнината, която е заключена между правите с уравнения $y=x$ и $y=x\sqrt{3}$ и окръжностите с уравнения $x^2+y^2=1$ и $x^2+y^2=9$.

Отг. $\frac{5}{2}$.

4. $\iint_R \sqrt{x^2+y^2}\, dx\, dy$, където R е областта, заключена между двете окръжности с уравнения $x^2+y^2-2x=0$ и $x^2+y^2-4x=0$.

Отг. $\frac{224}{9}$.

5. Пресметнете лицето на областта, оградена от лемнискатата на Бернули, зададена с уравнението $(x^2+y^2)^2=2a^2(x^2-y^2)$.

Отг. $2a^2$.

6. Пресметнете обема на „тялото на Вивиани", лежащо във вътрешността на сферата $x^2+y^2+z^2=r^2$ и на цилиндъра $x^2+y^2=rx$.

Отг. $\left(\frac{2}{3}\pi-\frac{8}{9}\right)r^3$.

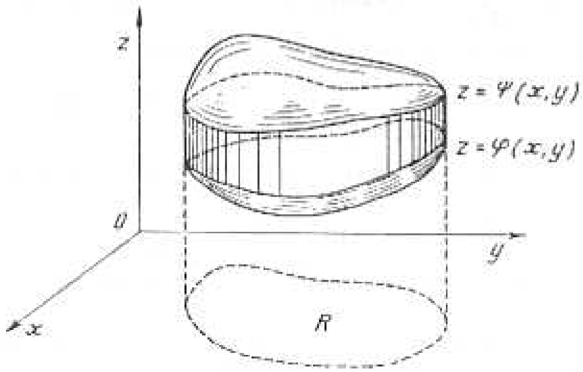
§ 96. Тройни интеграли

Нека е дадена функцията $f(x, y, z)$, дефинирана и ограничена в една измерима област Q в тримерното пространство. Като разделяме по различни начини множеството Q на краен брой измерими подобласти и образуваме след това съответните малки и големи суми на Дарбу, достигаме до понятието троен интеграл. Тройният интеграл се означава така:

$$\iiint_Q f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz,$$

и има основни свойства, напълно аналогични на свойствата на двойния интеграл. По-специално стойността на интеграла

$$\iiint_Q dx\,dy\,dz$$



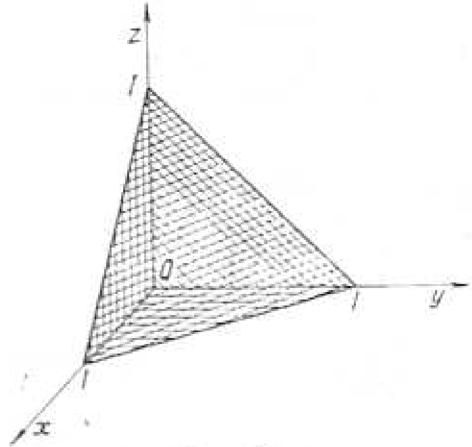
Черт. 92

е равна на обема (тримерната мярка) на областта („тялото") Q.

Функцията $f(x, y, z)$ е сигурно интегруема в множеството Q, когато тя е непрекъсната в него, а самото множество Q е измеримо и затворено.

Да се спрем на следния специален случай. В координатната равнина Oxy е дадено едно равнинно измеримо множество R. Дадени са и две функции $\varphi(x, y)$ и $\psi(x, y)$, дефинирани и непрекъснати в R и удовлетворяващи в R следното неравенство:

(1) $$\varphi(x, y) \leqq \psi(x, y).$$



Черт. 93

Да прекараме през всички точки на множеството R прави, успоредни на оста Oz, и да разгледаме множеството Q, съставено от отсечките, които се отсичат от тези прави и са заключени между графиката на функцията $\varphi(x, y)$ — отдолу, и графиката на функцията $\psi(x, y)$ — отгоре (черт. 92). Точките (x, y, z), принадлежащи на множеството Q, се характеризират със следните условия:

(2) $$(x, y)\in R, \quad \varphi(x, y)\leqq z\leqq \psi(x, y).$$

За множества от вида на описаното множество Q е в сила следната теорема, даваща метод за пресмятане на тройните интеграли.

Теорема. *Нека R е измеримо и затворено множество в равнината Oxy и нека $\varphi(x, y)$ и $\psi(x, y)$ са две функции, дефинирани и непрекъснати в R и удовлетворяващи в R неравенството (1). Ако функцията $f(x, y, z)$ е непрекъсната в областта Q, зададена посредством неравенствата (2), то определеният интеграл*

$$\int_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} f(x, y, z)\,dz$$

съществува при всяка фиксирана точка (x, y) от R и представлява непрекъсната функция в R. При това е в сила следното равенство:

(3) $$\iiint_Q f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz=\iint_R\left[\int_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} f(x, y, z)\,dz\right]dx\,dy.$$

Пример 1. Да пресметнем тройния интеграл

$$\iiint_Q \frac{dx\,dy\,dz}{(1+x+y+z)^3},$$

където Q е областта, оградена от равнините с уравнения $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x+y+z=1$ (черт. 93).

Тук Q се определя от условията

$$(x,\ y)\in R, \qquad 0\leqq z\leqq 1-x-y,$$

където R пък от своя страна се задава с неравенствата

$$0\leqq x\leqq 1, \qquad 0\leqq y\leqq 1-x.$$

Следователно формулата (3) ще ни даде

$$\iiint_Q \frac{dx\,dy\,dz}{(1+x+y+z)^3}=\iint_R\left[\int_0^{1-x-y}\frac{dz}{(1+x+y+z)^3}\right]dx\,dy$$

$$=-\frac{1}{2}\iint_R\left|\frac{1}{(1+x+y+z)^2}\right|_0^{1-x-y}dx\,dy$$

$$=-\frac{1}{8}\iint_R dx\,dy+\frac{1}{2}\iint_R\frac{dx\,dy}{(1+x+y)^2}$$

$$=-\frac{1}{8}\int_0^1\left[\int_0^{1-x}dy\right]dx+\frac{1}{2}\int_0^1\left[\int_0^{1-x}\frac{dy}{(1+x+y)^2}\right]dx$$

$$=-\frac{1}{8}\int_0^1(1-x)\,dx-\frac{1}{4}\int_0^1 dx+\frac{1}{2}\int_0^1\frac{dx}{1+x}$$

$$=-\frac{1}{8}\left(1-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\ln 2=\frac{1}{2}\ln 2-\frac{5}{16}.$$

Пример 2. Да пресметнем тройния интеграл

$$\iiint_Q z\,dx\,dy\,dz,$$

където областта Q е оградена от конуса $z^2=x^2+y^2$ и равнината $z=a$ $(a>0)$ (черт. 94).

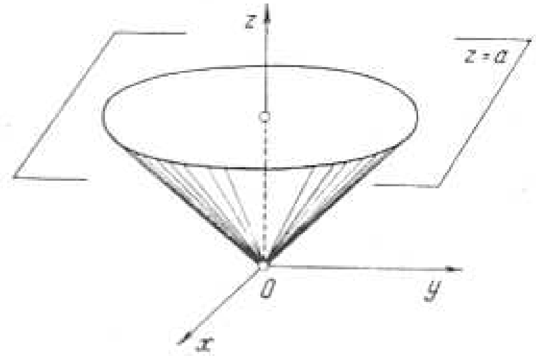
Областта Q се задава с условията

$$(x,\ y)\in R, \quad \sqrt{x^2+y^2}\leqq z\leqq a,$$

където R е кръгът в равнината Oxy, определен от окръжността $x^2+y^2=a^2$. Ето защо ще имаме

$$\iiint_Q z\,dx\,dy\,dz=\iint_R\left[\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{a}z\,dz\right]dx\,dy$$

$$=\frac{1}{2}\iint_R\left|z^2\right|_{\sqrt{x^2+y^2}}^{a}dx\,dy=\frac{1}{2}\iint_R(a^2-x^2-y^2)\,dx\,dy.$$



Черт. 94

Извършвайки в получения двоен интеграл смяна на променливите посредством трансформацията

$$x=\rho\cos\theta, \qquad y=\rho\sin\theta,$$

ще получим

$$\iiint_Q z\,dx\,dy\,dz=\frac{1}{2}\iint_{R'}(a^2-\rho^2)\,\rho\,d\rho\,d\theta,$$

където R' е правоъгълникът в равнината $O\,\theta\rho$, определен от неравенствата

$$0\leqq\theta\leqq 2\pi, \quad 0\leqq\rho\leqq a.$$

И тъй

$$\iiint_Q z\,dx\,dy\,dz=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left[\int_0^a(a^2-\rho^2)\rho\,d\rho\right]d\theta$$

$$=-\frac{1}{8}\int_0^{2\pi}\left|(a^2-\rho^2)^2\right|_0^a d\theta=\frac{a^4}{8}\int_0^{2\pi}d\theta=\frac{a^4\pi}{4}.$$

Упражнения. Да се пресметнат тройните интеграли:

1. $\iiint_Q x\,dx\,dy\,dz$, където Q е призмата, оградена от равнините $x=0$, $y=0$, $z=0$, $y=h$, $x+z=a$ $(a>0,\ h>0)$.

Отг. $\frac{a^3h}{6}$.

2. $\iiint\limits_Q z\,dx\,dy\,dz$, където Q е областта, оградена от елипсоида $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.

Отг. $\frac{\pi}{4}abc^2$.

3. $\iiint\limits_Q (x^2+y^2)z\,dx\,dy\,dz$, където Q е областта, оградена от конуса $x^2+y^2-z^2=0$ и сферата $x^2+y^2+z^2=1$ и намираща се над равнината Oxy.

Отг. $\frac{\pi}{24}$.

§ 97. Смяна на променливите в тройните интеграли

Смяната на променливите в тройните интеграли се извършва въз основа на теорема, аналогична на тази при двойните интеграли. Една трансформация

(1) $$x=f(u,\ v,\ w),\quad y=g(u,\ v,\ w),\quad z=h(u,\ v,\ w)$$

ще наричаме **регулярна** в дадено множество Q' от пространството $Ouvw$, ако: а) функциите $f(u,v,w)$, $g(u,\ v,\ w)$ и $h(u,\ v,\ w)$ са непрекъснати и притежават непрекъснати частни производни в някое отворено множество, съдържащо Q'; б) трансформацията (1) е обратима във вътрешността на Q'; в) детерминантата

$$\Delta(u,\ v,\ w)=\begin{vmatrix} f_u'(u,\ v,\ w) & f_v'(u,\ v,\ x) & f_w'(u,\ v,\ w)\\ g_u'(u,\ v,\ w) & g_v'(u,\ v,\ w) & g_w'(u,\ v,\ w)\\ h_u'(u,\ v,\ w) & h_v'(u,\ v,\ w) & h_w'(u,\ v,\ w)\end{vmatrix}$$

е различна от нула във вътрешността на Q'.

Ако трансформацията (1) е регулярна в измеримото и затворено множество Q' в пространството $Ouvw$, което се изобразява в измеримото и затворено множество Q в пространството $Oxyz$, и ако функцията $F(x,y,z)$ е непрекъсната в Q, то

$$\iiint\limits_Q F(x,\ y,\ z)\,dx\,dy\,dz$$

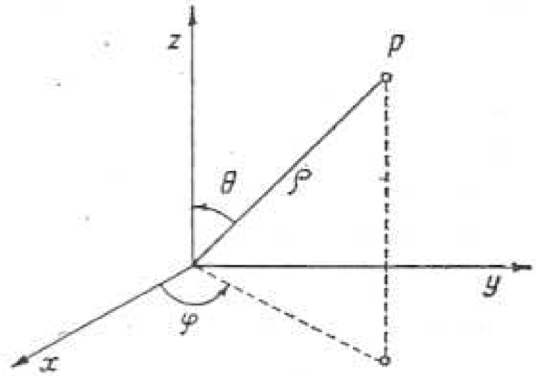
$$=\iiint\limits_{Q'} F[f(u,\ v,\ w),\ g(u,\ v,\ w),\ h(u,\ v,\ w)]\,|\Delta(u,\ v,\ w)|\,du\,dv\,dw.$$

Една често използувана смяна на променливите е въвеждането на т. нар. **полярни координати в пространството** (или **сферични координати**). Всяка точка $P(x,\ y,\ z)$ в пространството $Oxyz$ се определя от следните три числа, наречени полярни координати (черт. 95):

1) разстоянието ρ на точката P до началото O на координатната система;

2) ъгъла θ, който сключва радиус-векторът $\overrightarrow{OP}$ с положителната полуос Oz, измерен в посока от оста Oz към вектора $\overrightarrow{OP}$;

3) ъгъла φ, който сключва положителната полуос Ox с проекцията $\overrightarrow{OP'}$ на вектора $\overrightarrow{OP}$ в равнината Oxy, измерен в посока от оста Ox към вектора $\overrightarrow{OP'}$.



Черт. 95

От геометрични съображения лесно се получават следните връзки между декартовите координати $x,\ y,\ z$ и полярните координати $\rho,\ \theta,\ \varphi$ на една точка P от пространството $Oxyz$:

(2) $$x=\rho\sin\theta\cos\varphi,\quad y=\rho\sin\theta\sin\varphi,\quad z=\rho\cos\theta.$$

Равенствата (2) могат да се разглеждат като една трансформация. Тя се оказва особено удобна за пресмятане на тройните интеграли, когато било в подинтегралната функция, било в дефиницията на интеграционната област участвува изразът $x^2+y^2+z^2$, който много се опростява благодарение на равенството $x^2+y^2+z^2=\rho^2$.

За детерминантата $\Delta(\rho,\ \theta,\ \varphi)$ при трансформацията (2) получаваме

$$\Delta(\rho,\ \theta,\ \varphi)=\begin{vmatrix}\sin\theta\cos\varphi & \rho\cos\theta\cos\varphi & -\rho\sin\theta\sin\varphi\\ \sin\theta\sin\varphi & \rho\cos\theta\sin\varphi & \rho\sin\theta\cos\varphi\\ \cos\theta & -\rho\sin\theta & 0\end{vmatrix},$$

или

$$\Delta(\rho,\ \theta,\ \varphi)=\rho^2\sin\theta.$$

Пример 1. Да пресметнем тройния интеграл

$$\iiint\limits_Q \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dx\,dy\,dz$$

в кълбото Q, оградено от сферата $x^2+y^2+z^2=1$.

Кълбото Q може да бъде зададено чрез следните неравенства за полярните координати в пространството $Oxyz$:

$$0 \leq \theta \leq \pi, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad 0 \leq \rho \leq 1.$$

Тези неравенства определят един паралелепипед Q' в пространството $O\theta\varphi\rho$ (където θ, φ и ρ се разглеждат като декартови координати). Не е трудно да се провери, че трансформацията (2) е регулярна в този паралелепипед. Ето защо ще получим

$$\iiint\limits_Q \sqrt{x^2+y^2+z^2}\, dx\, dy\, dz = \iiint\limits_{Q'} \rho^3 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi\, d\rho$$

$$= \iint\limits_{R'} \left[\sin\theta \int\limits_0^1 \rho^3\, d\rho \right] d\theta\, d\varphi = \frac{1}{4} \iint\limits_{R'} \sin\theta\, d\theta\, d\varphi.$$

Тук R' е правоъгълникът, определен от неравенствата

$$0 \leq \theta \leq \pi, \qquad 0 \leq \varphi \leq 2\pi.$$

Поради това ще имаме

$$\iiint\limits_Q \sqrt{x^2+y^2+z^2}\, dx\, dy\, dz = \frac{1}{4} \int\limits_0^{2\pi} \left[\int\limits_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta \right] d\varphi$$

$$= \frac{1}{4} \int\limits_0^{2\pi} \Big| -\cos\theta \Big|_0^{\pi} d\varphi = \frac{1}{2} \int\limits_0^{2\pi} d\varphi = \pi.$$

П р и м е р 2. Да пресметнем тройния интеграл

$$\iiint\limits_Q z\, dx\, dy\, dz,$$

взет в кълбото Q, оградено от сферата $x^2+y^2+z^2-2z=0$.

Уравнението на сферата, записано с помощта на полярни координати в пространството $Oxyz$, е $\rho = 2\cos\theta$. Ето защо кълбото Q може да се зададе посредством неравенствата

$$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad 0 \leq \rho \leq 2\cos\theta.$$

Означавайки с Q' областта, която тези неравенства определят в пространството $O\theta\varphi\rho$ (където θ, φ и ρ са декартови координати), лесно е да видим, че трансформацията (2) е регулярна в Q'. Поради това ще имаме

$$\iiint\limits_Q z\, dx\, dy\, dz = \iiint\limits_{Q'} \rho^3 \sin\theta \cos\theta\, d\theta\, d\varphi\, d\rho.$$

Последният интеграл въз основа на формулата от предишния параграф ще бъде равен на

$$\iint\limits_{R'} \left[\int\limits_0^{2\cos\theta} \rho^3\, d\rho \right] \sin\theta \cos\theta\, d\theta\, d\varphi,$$

където R' е правоъгълникът, определен от неравенствата

$$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi.$$

Следователно

$$\iiint\limits_Q z\, dx\, dy\, dz = \frac{1}{4} \iint\limits_{R'} \Big| \rho^4 \Big|_0^{2\cos\theta} \sin\theta \cos\theta\, d\theta\, d\varphi$$

$$= 4 \iint\limits_{R'} \sin\theta \cos^5\theta\, d\theta\, d\varphi = 4 \int\limits_0^{2\pi} \left[\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5\theta\, d(-\cos\theta) \right] d\varphi$$

$$= \frac{2}{3} \int\limits_0^{2\pi} d\varphi = \frac{4}{3}\pi.$$

П р и м е р 3. Да пресметнем обема на тялото Q, оградено от елипсоида $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.

Търсеният обем се дава с интеграла

$$\iiint\limits_Q dx\, dy\, dz.$$

Извършвайки трансформацията

$$x = au, \qquad y = bv, \qquad z = cw,$$

за която $\Delta(u, v, w) = abc$ (и която е очевидно регулярна във всяка област), получаваме

$$\iiint\limits_Q dx\, dy\, dz = abc \iiint\limits_{Q'} du\, dv\, dw,$$

където Q' е кълбото, определено от сферата $u^2+v^2+w^2=1$. Тъй като интегралът

$$\iiint\limits_{Q'} du\, dv\, dw$$

дава в същност обема на това кълбо, той е равен на $\frac{4}{3}\pi$. Следователно търсеният обем е равен на $\frac{4}{3}\pi abc$.

Упражнения. 1. Да се пресметне тройният интеграл $\iiint\limits_{Q}\frac{dx\,dy\,dz}{x^2+y^2+z^2}$, където Q е областта, намираща се между сферите с уравнения $x^2+y^2+z^2=1$ и $x^2+y^2+z^2=9$.

Отг. 4π.

2. Да се пресметне обемът на тялото, оградено от сферите с уравнения $x^2+y^2+z^2=1$ и $x^2+y^2+z^2-2z=0$ и съдържащо се във вътрешността на всяка от тях.

Отг. $\frac{19}{12}\pi$.

ГЛАВА XIII

КРИВОЛИНЕЙНИ ИНТЕГРАЛИ

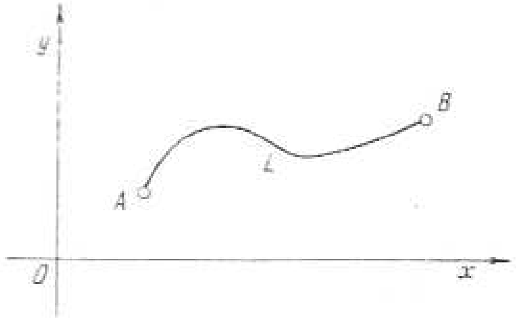
Понятието криволинеен интеграл играе важна роля в приложенията на математическия анализ — преди всичко във физиката, където редица въпроси естествено довеждат до неговото използване.

§ 98. Криви

Нека $f(t)$ и $g(t)$ са две функции, дефинирани в един интервал $[\alpha, \beta]$. Когато променливата t приема всички стойности от α до β или, както казваме, когато тя описва интервала $[\alpha, \beta]$, точката $P(x, y)$, чиито координати се определят от равенствата

(1) $$x=f(t), \qquad y=g(t),$$

ще опише в равнината Oxy едно множество от точки L, което наричаме к р и в а. Равенствата (1) се наричат п а р а м е т р и ч н и у р а в н е н и я на кривата L, а променливата t — п а р а м е т ъ р. Точките $A(f(\alpha), g(\alpha))$



Черт. 96

и $B(f(\beta), g(\beta))$ пък се наричат съответно начална и крайна точка на кривата L (черт. 96). Понякога вместо термина крива се използува и терминът д ъ г а.

Една и съща крива L може да бъде зададена с различни параметрични уравнения. Така например, ако $u(t)$ е строго растяща и непрекъсната функция, дефинирана в един интервал $[\alpha_1, \beta_1]$, за която $u(\alpha_1)=\alpha$ и $u(\beta_1)=\beta$, то уравненията

$$x=f[u(t)], \quad y=g[u(t)] \tag{2}$$

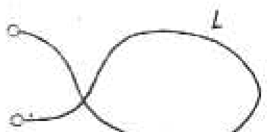
представят същата крива L, която се дава с уравненията (1).

Когато функциите $f(t)$ и $g(t)$, участвуващи в параметричните уравнения (1) на кривата L, са непрекъснати в интервала $[\alpha, \beta]$, ще наричаме и самата крива L *непрекъсната*: когато те са диференцуеми в този интервал (при което в точката α се има пред вид дясна, а в точката β — лява диференцуемост), ще наричаме кривата L *диференцуема*; когато $f(t)$ и $g(t)$ са диференцуеми, а техните производни $f'(t)$ и $g'(t)$ — непрекъснати в интервала $[\alpha, \beta]$, ще казваме, че кривата L е *непрекъснато диференцуема*; най-сетне, когато интервалът $[\alpha, \beta]$ се разпада на няколко подинтервала, във всеки от които кривата L е диференцуема, съответно непрекъснато диференцуема, ще наричаме L *частично диференцуема*, съответно *частично непрекъснато диференцуема*. Ако пък условието за диференцуемост, непрекъснатата диференцуемост или частична непрекъснатата диференцуемост се удовлетворява само от функцията $f(t)$, ще наричаме кривата L *диференцуема относно x*, съответно *непрекъснато диференцуема относно x* или *частично непрекъснато диференцуема относно x*; аналогично въвеждаме термините: крива L, *диференцуема относно y*, *непрекъснато диференцуема относно y* и *частично непрекъснато диференцуема относно y*.

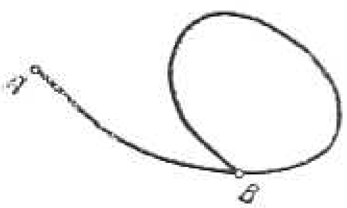
Кривата L ще наричаме *проста*, когато равенствата

$$f(t')=f(t'') \quad \text{и} \quad g(t')=g(t'') \tag{3}$$

с могат да бъдат едновременно изпълнени за две различни стойности t' и t'' на параметъра t от интервала $[\alpha, \beta]$, ако поне една от тях е



Черт. 97



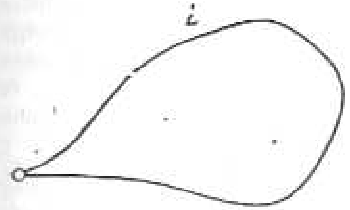
Черт. 98

различна от краищата на този интервал. Геометрично това означава, че кривата L не се самопресича, т. е. няма вид, подобен на показания на черт. 97 или пък на показания на черт. 98.

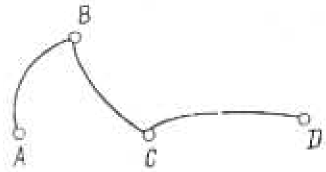
Нека обърнем внимание, че при дефиницията на понятието проста крива не се забранява равенствата (3) да бъдат изпълнени, когато $t'=\alpha$ и $t''=\beta$, т. е. допускат се равенствата

$$f(\alpha)=f(\beta), \quad g(\alpha)=g(\beta). \tag{4}$$

Такава проста крива, за която са изпълнени равенствата (4), т. е. началната и крайната точка на която съвпадат (черт. 99), се нарича



Черт. 99

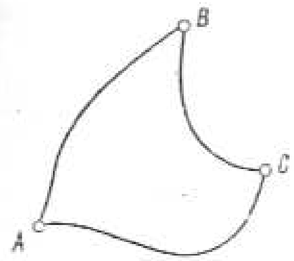


Черт. 100

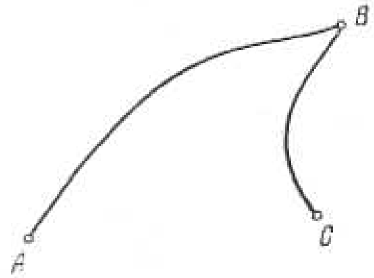
затворена (това понятие не трябва да се смесва с понятието затворено точково множество в равнината).

Ако една проста крива L не е затворена и ако A е нейната начална точка, а B — нейната крайна точка, то тя се означава също и така: $\widehat{AB}$ (макар това означение да не е съвсем точно). В такъв случай $\widehat{BA}$ ще означава същата крива, но описана в обратната посока — от B към A. Ако

$$x=f(t), \quad y=g(t) \quad (\alpha \leqq t \leqq \beta)$$



Черт. 101



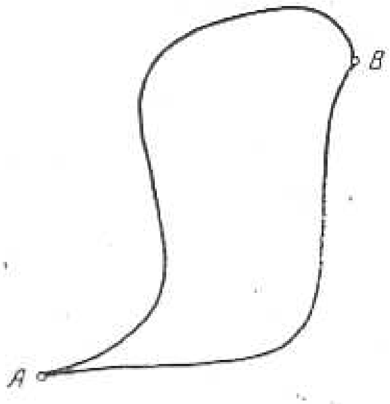
Черт. 102

са параметричните уравнения на кривата $\widehat{AB}$ (описана в посока от A към B), то лесно се съобразява, че уравненията

$$x=f(-t), \quad y=g(-t) \quad (-\beta \leqq t \leqq -\alpha)$$

ще представят кривата $\widehat{BA}$ (описана в посока от B към A).

Ако простата крива L е затворена, то също така можем да говорим за две посоки на описване на тази крива — положителна и отрицателна. Една, макар и немного точна, но нагледна дефиниция е следната: Считаме, че дадената проста и затворена крива се описва в положителна посока, когато при нейното обхождане областта, която тя загражда, остава отляво.



Черт. 103

Ако $\overset{\frown}{AB}$ и $\overset{\frown}{BC}$ са две такива незатворени криви, че крайната точка на първата от тях съвпада с началната точка на втората (черт. 102), ще считаме, че те образуват, заедно взети, една крива*, която ще означаваме с $\overset{\frown}{ABC}$ или просто с $\overset{\frown}{AC}$. Ако допуснем че началната точка A на първата крива съвпада с крайната точка C на втората, ще получим една затворена крива, която ще означаваме в този случай с $\overset{\frown}{ABA}$. Тази крива ще бъде проста, ако двете криви $\overset{\frown}{AB}$ и $\overset{\frown}{BC}$ нямат други общи точки освен точките A и B (черт. 103).

Изобщо, ако $\overset{\frown}{A_1A_2}, \overset{\frown}{A_2A_3}, \ldots, \overset{\frown}{A_nA_{n+1}}$ са n незатворени криви, взети в такъв ред, че началната точка на всяка от тях, като се започне от втората, съвпада с крайната точка на предишната крива, ще считаме, че те образуват също една крива — кривата $\overset{\frown}{A_1A_{n+1}}$. Ако при това A_1 съвпада с A_{n+1}, ще получим затворена крива. На черт. 100 простата крива $\overset{\frown}{AD}$ е съставена от простите криви $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{BC}$ и $\overset{\frown}{CD}$, а на черт. 101 простата затворена крива L е съставена от простите криви $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{BC}$ и $\overset{\frown}{CA}$.

* Основание за това ни дава обстоятелството, че в посочения случай ние лесно можем да си съставим параметрични уравнения на така получената крива. Наистина нека

$$x=f_1(t), \quad y=g_1(t) \quad (\alpha_1 \leqq t \leqq \beta_1)$$

са параметрични уравнения на кривата $\overset{\frown}{AB}$, а

$$x=f_2(t), \quad y=g_2(t) \quad (\alpha_2 \leqq t \leqq \beta_2)$$

са параметрични уравнения на кривата $\overset{\frown}{BC}$. Тогава, въвеждайки функциите

$$f(t)=\begin{cases} f_1(t) & \text{при } \alpha_1 \leqq t \leqq \beta_1, \\ f_2(t-\beta_1+\alpha_2) & \text{при } \beta_1 \leqq t \leqq \beta_1+(\beta_2-\alpha_2), \end{cases}$$

и

$$g(t)=\begin{cases} g_1(t) & \text{при } \alpha_1 \leqq t \leqq \beta_1, \\ g_2(t-\beta_1+\alpha_2) & \text{при } \beta_1 \leqq t \leqq \beta_1+(\beta_2-\alpha_2), \end{cases}$$

можем да запишем параметричните уравнения на кривата $\overset{\frown}{AC}$ във вида

$$x=f(t), \quad y=g(t),$$

където t се мени в интервала $[\alpha_1, \beta_1+(\beta_2-\alpha_2)]$.

Нека L е непрекъсната крива, зададена с параметричните уравнения

$$x=f(t), \quad y=g(t), \quad \alpha \leqq t \leqq \beta, \tag{1}$$

и нека $P_0(x_0, y_0)$ е точката от тази крива, получена за стойност на параметъра t_0, т. е. $x_0=f(t_0)$, $y_0=g(t_0)$. Ако $P(x, y)$, където $x=f(t)$, $y=g(t)$, е друга точка от кривата L, то правата, определена от точките P_0 и P, има уравнение

$$(\xi-x_0)(y-y_0)-(\eta-y_0)(x-x_0)=0$$

(тук ξ и η са текущи координати). Това уравнение може да се запише и така:

$$(\xi-f(t_0))(g(t)-g(t_0))-(\eta-g(t_0))(f(t)-f(t_0))=0,$$

или пък още така:

$$\frac{g(t)-g(t_0)}{t-t_0}(\xi-f(t_0))-\frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0}(\eta-g(t_0))=0. \tag{5}$$

Ако сега оставим точката P да се приближава към P_0 (другояче казано ако t клони към t_0), то правата P_0P ще мени своето положение. Тази права ще се стреми към едно гранично положение, когато коефициентите пред ξ и η в уравнението (5) (представляващи функции на t) притежават при t, клонящо към t_0, граници, при това такива, които не са и двете нули. Това ще бъде така, когато функциите $f(t)$ и $g(t)$ са диференцуеми в точката t_0 и $f'(t_0)$ и $g'(t_0)$ не са едновременно нули. Тогава уравнението

$$g'(t_0)(\xi-x_0)-f'(t_0)(\eta-y_0)=0 \tag{6}$$

ще бъде уравнение на една права, минаваща през точката P_0, която е естествено да наречем тангента или допирателна към кривата L в точката P_0.

Когато функциите $f(t)$ и $g(t)$ от параметричните уравнения (1) са диференцуеми и $f'(t)$ и $g'(t)$ не са едновременно нули за никое t от интервала $[\alpha, \beta]$, кривата L има допирателна във всяка своя точка. Такава крива се нарича гладка. Ако интервалът $[\alpha, \beta]$ се разпада на няколко подинтервала, във всеки от които е изпълнено условието за гладкост, кривата L ще наричаме частично гладка.

Ето няколко примера за криви:

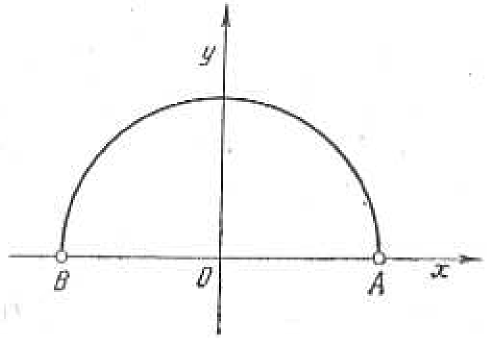
1. Параметричните уравнения

$$x=\cos t, \qquad y=\sin t \tag{7}$$

при $0 \leqq t \leqq \pi$ ни дават една проста и гладка крива, в същност една полуокръжност — онази полуокръжност L от окръжността с уравнение

$x^2+y^2=1$, която се намира над оста Ox, и то описана в посока от точката $A(1, 0)$ към точката $B(-1, 0)$ (черт. 104).

2. Същите параметрични уравнения (7) при $0 \leq t \leq 2\pi$ ни дават една проста, гладка и затворена крива — окръжността с уравнение $x^2+y^2=1$, описана в положителна посока (черт. 105).



Черт. 104

3. Параметричните уравнения

$$x=a\cos t, \qquad y=b\sin t \tag{8}$$

при $0 \leq t \leq 2\pi$ ни дават също една затворена, проста и гладка крива — елипсата с уравнение $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, описана в положителна посока (черт. 106).

4. Всяка отсечка в равнината е проста и гладка крива. Както знаем от аналитичната геометрия, отсечката, съединяваща двете различни точки $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$, притежава следното параметрично представяне:

$$x=x_1+t(x_2-x_1), \qquad y=y_1+t(y_2-y_1), \tag{9}$$

където $0 \leq t \leq 1$.

Когато отсечката AB е успоредна на оста Ox, например свързва точките $A(a, c)$ и $B(b, c)$, където $a<b$, параметричните ѝ уравнения могат да бъдат записани най-просто по следния начин:

$$x=t, \qquad y=c \qquad (a \leq t \leq b). \tag{10}$$

Когато пък отсечката AB е успоредна на оста Oy и свързва например точките $A(c, a)$ и $B(c, b)$, където $a<b$, тя може да бъде зададена с параметричните уравнения

$$x=c, \qquad y=t \qquad (a \leq t \leq b). \tag{11}$$

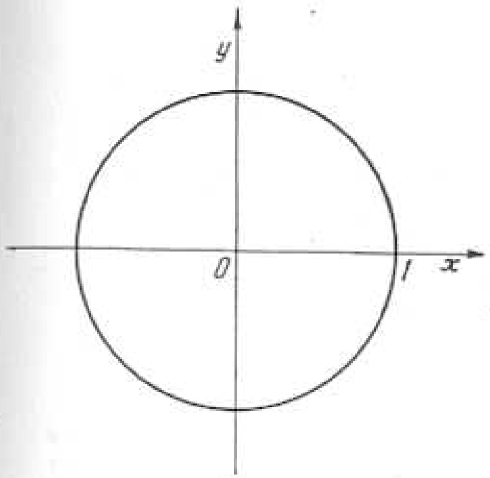
5. Графиката на всяка функция $f(x)$, дефинирана в един интервал $[a, b]$, представлява проста крива. Тази проста крива е непрекъсната и е непрекъснато диференцуема относно x, когато $f(x)$ е непрекъсната в интервала $[a, b]$. Тя е гладка, когато $f(x)$ е диференцуема с непрекъсната производна в този интервал. Наистина графиката на $f(x)$ може да бъде зададена с помощта на следните параметрични уравнения:

$$x=t, \qquad y=f(t), \tag{12}$$

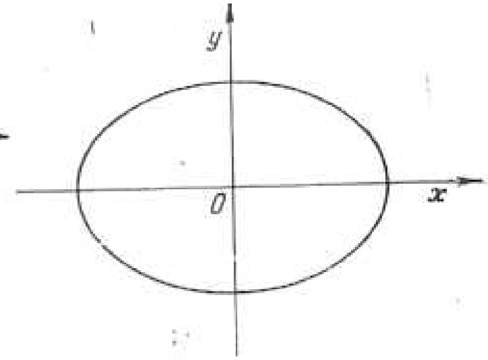
където $a \leq t \leq b$.

6. Ако $\varphi(\theta)$ е една неотрицателна функция, дефинирана в един интервал $[\alpha, \beta]$, то множеството от точките, чиито полярни координати θ и ρ удовлетворяват уравнението

$$\rho=\varphi(\theta),$$



Черт. 105



Черт. 106

представлява също една крива. Тя може да бъде зададена със следните параметрични уравнения:

$$x=\varphi(\theta)\cos\theta, \qquad y=\varphi(\theta)\sin\theta.$$

Тази крива е непрекъсната или непрекъснато диференцуема тогава, когато функцията $\varphi(\theta)$ е такава.

В заключение на настоящия параграф ще покажем как въведеното тук понятие крива позволява да пренесем за функциите на две променливи теоремата на Болцано от § 24.

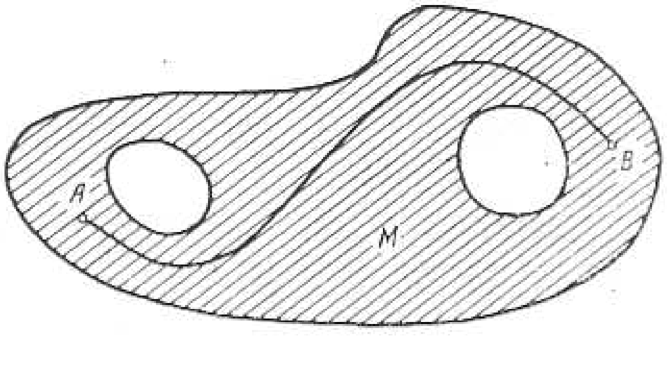
Едно множество M от точки в равнината ще наричаме л и н е й н о с в ъ р з а н о, *ако всеки две негови точки могат да бъдат свързани посредством непрекъсната крива, лежаща изцяло в M.* Това означава, по-подробно казано, че винаги когато $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$ са две точки от M, съществува такава непрекъсната крива L с начална точка A и крайна точка B, всички точки на която са точки от M (черт. 107).

Сега можем да докажем следната

Теорема на Болцано. *Нека функцията $F(x, y)$ е непрекъсната в едно линейно свързано множество M и нека (x_1, y_1) и (x_2, y_2) са две точки от M. Ако $F(x_1, y_1) < \lambda < F(x_2, y_2)$,* то *съществува такава точка (ξ, η) от M, за която имаме $F(\xi, \eta)=\lambda$.*

Доказателство. Тъй като точките (x_1, y_1) и (x_2, y_2) принадлежат на линейно свързаното множество M, те ще могат да се свържат посредством такава непрекъсната крива L, всички точки на която принадлежат на M. Ако

$$x=f(t), \quad y=g(t),$$



Черт. 107

където $\alpha \leqq t \leqq \beta$, са параметрични уравнения на кривата L, то функциите $f(t)$ и $g(t)$ ще бъдат непрекъснати в интервала $[\alpha, \beta]$, като при това ще имаме

$$x_1=f(\alpha), \quad y_1=g(\alpha); \quad x_2=f(\beta), \quad y_2=g(\beta).$$

Тогава функцията $\varphi(t)=F[f(t), g(t)]$ ще бъде дефинирана и непрекъсната в крайния и затворен интервал $[\alpha, \beta]$. Тъй като

$$\varphi(\alpha)=F(x_1, y_1) \quad \text{и} \quad \varphi(\beta)=F(x_2, y_2),$$

то $\varphi(\alpha)<\lambda<\varphi(\beta)$ и съгласно теоремата за междинните стойности от § 24 ще съществува такава точка τ от интервала $[\alpha, \beta]$, за която ще имаме $\varphi(\tau)=\lambda$. Ако $\xi=f(\tau)$, $\eta=g(\tau)$, то

$$F(\xi, \eta)=F[f(\tau), \ g(\tau)]=\varphi(\tau)=\lambda.$$

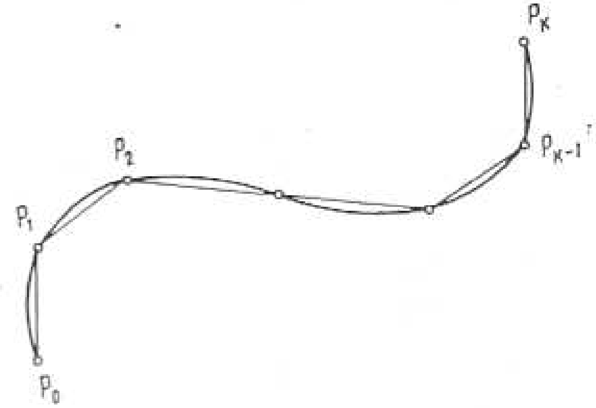
С това теоремата е доказана.

§ 99*. Дължина на крива

Нашата задача сега ще бъде да дефинираме по целесъобразен начин понятието дължина на крива и да посочим метод за нейното пресмятане. Нека L е крива, зададена с параметрични уравнения

$$x=f(t), \quad y=g(t), \quad \alpha \leqq t \leqq \beta.$$

Да разделим интервала $[\alpha, \beta]$ на подинтервали посредством точките $\alpha=t_0, t_1, t_2, \ldots, t_k=\beta$, където $t_{i-1}<t_i$ $(i=1, 2, \ldots, k)$, и за всяко i да означим с P_i точката с координати $x_i=f(t_i)$, $y_i=g(t_i)$. Ако съединим последователно точките $P_0, P_1, \ldots, P_k$ с отсечки, ще получим една начупена линия, която ще наречем вписана в кривата L (черт. 108). Желаейки да определим едно число, което да наречем дължина на кривата L, естествено е да считаме, че дължината на получената по този начин начупена линия е по-малка от дължината на кривата L, но че в същото време можем да направим дължината на вписаната начупена линия колкото пожелаем близка до „истинската" дължина на кривата L, стига да вземем точките P_i достатъчно гъсто върху L. Така по естествен начин идваме до следната



Черт. 108

Дефиниция. *За една крива L ще казваме, че има крайна дължина (или просто, че има дължина), ако множеството от дължините на вписаните в нея начупени линии е ограничено отгоре. Точната горна граница на това множество ще наричаме дължина на кривата L.*

С оглед на онова, което следва, ще направим една бележка. Нека чрез някое разделяне на интервала $[\alpha, \beta]$ на подинтервали сме получили начупената линия L', вписана в дадената крива L. Ако към взетите точки на делене добавим нови, ще стигнем до ново, по-дребно разделяне на интервала $[\alpha, \beta]$, на което ще отговаря нова начупена линия L'', също вписана в L. В такъв случай дължината на начупената линия L'' ще бъде по-голяма или равна на дължината на начупената линия L'. Това е така, защото при построяването на линията L'' всяка от отсечките $P_{i-1}P_i$, съставящи линията L', се замества с някоя начупена линия, свързваща точките P_{i-1} и P_i.

Главният резултат на настоящия параграф се съдържа в следната

Теорема. *Всяка непрекъснато диференцируема крива L има дължина. Ако*

$$(1) \qquad x=f(t), \quad y=g(t), \quad \alpha \leqq t \leqq \beta,$$

са параметричните ѝ уравнения, то нейната дължина $d(L)$ се дава с интеграла

$$d(L)=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{f'^2(t)+g'^2(t)}\,dt. \tag{2}$$

Доказателство. Нека L е непрекъснато диференцуема крива с параметрични уравнения (1). Да разделим по произволен начин интервала $[\alpha, \beta]$ на подинтервали. Ако

$$\alpha=t_0,\ t_1,\ \ldots,\ t_k=\beta,$$

където $t_{i-1}<t_i\ (i=1,\ldots,k)$ са точките на деление при това разделяне, и ако P_i за всяко i е точката от кривата L с координати $x_i=f(t_i)$, $y_i=g(t_i)$, то дължината на вписаната в L начупена линия $P_0P_1\ldots P_k$ е равна на

$$\sum_{i=1}^{k}\sqrt{(x_i-x_{i-1})^2+(y_i-y_{i-1})^2}.$$

Използувайки теоремата за крайните нараствания, можем да пишем

$$x_i-x_{i-1}=f(t_i)-f(t_{i-1})=f'(\tau_i)(t_i-t_{i-1})$$

и

$$y_i-y_{i-1}=g(t_i)-g(t_{i-1})=g'(\tau_i^*)(t_i-t_{i-1}),$$

където τ_i и τ_i^* са точки от интервала $[t_{i-1}, t_i]$. Тъй като функциите $f'(t)$ и $g'(t)$ са по предположение непрекъснати и следователно ограничени в интервала $[\alpha, \beta]$, то неравенствата $|f'(t)|\leq K$ и $|g'(t)|\leq K$ ще бъдат изпълнени за всички точки на този интервал при подходящ избор на константата K. Ето защо за дължината на начупената линия $P_0P_1\ldots P_k$ ще имаме

$$\sum_{i=1}^{k}\sqrt{(x_i-x_{i-1})^2+(y_i-y_{i-1})^2}=\sum_{i=1}^{k}\sqrt{f'^2(\tau_i)+g'^2(\tau_i^*)}\,(t_i-t_{i-1})$$

$$\leq\sqrt{2}K\sum_{i=1}^{k}(t_i-t_{i-1})=\sqrt{2}\,K(\beta-\alpha).$$

Виждаме, че дължината на вписаната в кривата L начупена линия, която получихме при едно произволно разделяне на интервала $[\alpha, \beta]$ на подинтервали, не надминава една константа, независеща от начина, по който е извършено това разделяне. Това показва, че множеството от дължините на всевъзможните начупени линии, вписани в L, е ограничено отгоре и че следователно кривата L има дължина.

Нека сега ε е произволно положително число. Поради равномерната непрекъснатост на функциите $g'(t)$ и $\sqrt{f'^2(t)+g'^2(t)}$ в интервала $[\alpha, \beta]$ можем да намерим такова положително число δ, че осцилацията на всяка от тези две функции да бъде по-малка от $\frac{\varepsilon}{\beta-\alpha}$ във всеки подинтервал на $[\alpha, \beta]$ с дължина, по-малка от δ.

От друга страна, дължината $d(L)$ на кривата L по дефиниция е точната горна граница на множеството от дължините на всички начупени линии, вписани в L. Ето защо ще съществува такова разделяне на интервала $[\alpha, \beta]$ на подинтервали, че ако означим с λ дължината на онази начупена линия, вписана в L, която се получава при това разделяне, да имаме

$$\lambda>d(L)-\varepsilon. \tag{3}$$

Нека приемем, че точките на деление при това разделяне са означени, както по-преди, с $\alpha=t_0, t_1, \ldots, t_k=\beta$, където $t_{i-1}<t_i$. При това можем да считаме, че са изпълнени още и неравенствата

$$t_i-t_{i-1}<\delta \qquad (i=1,\ldots,k). \tag{4}$$

Наистина, ако за някое разделяне на $[\alpha, \beta]$, за което е изпълнено неравенството (3), неравенствата (4) не са изпълнени, то ние винаги можем да добавим нови точки на деление, така че при новото по-дребно разделяне (4) вече да са изпълнени. В същото време дължината на новата начупена линия, вписана в L, която ще получим при новото разделяне, съгласно направената по-рано бележка ще бъде по-голяма или равна на λ и следователно по-голяма и от $d(L)-\varepsilon$.

За стойността на λ бяхме получили израза

$$\lambda=\sum_{i=1}^{k}\sqrt{f'^2(\tau_i)+g'^2(\tau_i^*)}\,(t_i-t_{i-1}),$$

където τ_i и τ_i^* са точки, принадлежащи на интервала $[t_{i-1}, t_i]$. Да образуваме и сумата

$$\sigma=\sum_{i=1}^{k}\sqrt{f'^2(\tau_i)+g'^2(\tau_i)}\,(t_i-t_{i-1}),$$

получена, като за всяко i на мястото на τ_i^* сме поставили τ_i. Ако сравним тези две суми, ще имаме*

$$|\lambda-\sigma|\leq\sum_{i=1}^{k}\left|\sqrt{f'^2(\tau_i)+g'^2(\tau_i^*)}-\sqrt{f'^2(\tau_i)+g'^2(\tau_i)}\right|(t_i-t_{i-1})$$

$$\leq\sum_{i=1}^{k}|g'(\tau_i)-g'(\tau_i^*)|(t_i-t_{i-1}).$$

---

* Тук използуваме лесното за доказване неравенство

$$\left|\sqrt{a^2+b^2}-\sqrt{a^2+c^2}\right|\leq|b-c|,$$

валидно за произволни реални числа a, b и c.

Тъй като $|\tau_i - \tau_i^*| < \delta$ за всяко i, то като си спомним как бяхме подбрали числото δ, ще заключим, че

$$(5) \qquad |\lambda - \sigma| \leqq \frac{\varepsilon}{\beta - \alpha} \sum_{i=1}^{k} (t_i - t_{i-1}) = \frac{\varepsilon}{\beta - \alpha} (\beta - \alpha) = \varepsilon.$$

От друга страна, сумата σ, както веднага се вижда, се явява една риманова сума на функцията $\sqrt{f'^2(t) + g'^2(t)}$, образувана за разглежданото разделяне на интервала $[\alpha, \beta]$ на подинтервали. Ако S и s са сумите на Дарбу, отговарящи на същото разделяне, то

$$(6) \qquad s \leqq \sigma \leqq S.$$

Също така имаме обаче и

$$(7) \qquad s \leqq \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{f'^2(t) + g'^2(t)}\, dt \leqq S.$$

Да означим с m_i и M_i точната долна и точната горна граница на функцията $\sqrt{f'^2(t) + g'^2(t)}$ в интервала $[t_{i-1}, t_i]$. Вземайки пред вид неравенствата (4) и условието, на което подчинихме δ, ще видим въз основа на неравенствата (6) и (7), че

$$\left| \sigma - \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{f'^2(t) + g'^2(t)}\, dt \right| \leqq S - s = \sum_{i=1}^{k} (M_i - m_i)(t_i - t_{i-1})$$

$$< \frac{\varepsilon}{\beta - \alpha} \sum_{i=1}^{k} (t_i - t_{i-1}) = \frac{\varepsilon}{\beta - \alpha} (\beta - \alpha) = \varepsilon.$$

Оттук поради (5) ще имаме

$$\left| \lambda - \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{f'^2(t) + g'^2(t)}\, dt \right|$$

$$\leqq |\lambda - \sigma| + \left| \sigma - \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{f'^2(t) + g'^2(t)}\, dt \right| < 2\varepsilon,$$

или

$$(8) \qquad \lambda - 2\varepsilon < \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{f'^2(t) + g'^2(t)}\, dt < \lambda + 2\varepsilon.$$

Най-сетне, като комбинираме неравенствата (8) с неравенството (3), както и с очевидното неравенство $\lambda \leqq d(L)$, ще получим

$$d(L) - 3\varepsilon < \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{f'^2(t) + g'^2(t)}\, dt < d(L) + 2\varepsilon,$$

откъдето следва, че

$$\left| d(L) - \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{f'^2(t) + g'^2(t)}\, dt \right| < 3\varepsilon.$$

Тъй като ε беше произволно взето положително число, от последното неравенство следва равенството (2). С това теоремата е доказана.

Накрая нека видим какъв вид придобива формулата (2) в два важни частни случая.

Както вече отбелязахме, ако $f(x)$ е функция, притежаваща непрекъснната производна в даден интервал $[a, b]$, нейната графика е гладка крива L, притежаваща параметричните уравнения $x = t$, $y = f(t)$, където $a \leqq t \leqq b$. Тогава за нейната дължина получаваме

$$(9) \qquad d(L) = \int_{a}^{b} \sqrt{1 + f'^2(x)}\, dx.$$

Когато пък кривата L е зададена с уравнение от вида $\rho = \varphi(\theta)$, $\alpha \leqq \theta \leqq \beta$, където θ и ρ са полярните координати, а φ е диференцуема функция с непрекъсната производна в интервала $[\alpha, \beta]$, кривата L се представя, както знаем, с параметричните уравнения $x = \varphi(\theta) \cos \theta$, $y = \varphi(\theta) \sin \theta$. Тогава

$$(\varphi(\theta) \cos \theta)'^2 + (\varphi(\theta) \sin \theta)'^2 = \varphi'^2(\theta) \cos^2 \theta + \varphi^2(\theta) \sin^2 \theta$$

$$+ \varphi'^2(\theta) \sin^2 \theta + \varphi^2(\theta) \cos^2 \theta = \varphi'^2(\theta) + \varphi^2(\theta)$$

и за дължината на L получаваме

$$(10) \qquad d(L) = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\varphi^2(\theta) + \varphi'^2(\theta)}\, d\theta.$$

Формулите (2), (9) и (10) най-кратко се записват така:

$$d(L) = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{x'^2 + y'^2}\, dt,$$

където $x = f(t)$, $y = g(t)$, $\alpha \leqq t \leqq \beta$;

$$d(L) = \int_{a}^{b} \sqrt{1 + y'^2}\, dx,$$

където $y=f(x)$, $a\leqq x\leqq b$;

$$d(L)=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{\rho^2+\rho'^2}\,d\theta,$$

където $\rho=\varphi(\theta)$, $\alpha\leqq\theta\leqq\beta$.

Упражнения. Пресметнете дължината на следните криви.

1. $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$; $0\leqq t\leqq 2\pi$ (циклоида). Отг. $8a$.
2. $\rho=a(1+\cos\theta)$ (кардиоида). Отг. $8a$.
3. $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ (астроида). Упътване. Представете кривата параметрично. Отг. $6a$.

Начертайте посочените по-горе криви.

§ 100. Дефиниция на криволинеен интеграл

Нека е дадена една крива L с параметрични уравнения

$$x=f(t),\qquad y=g(t), \tag{1}$$

където $\alpha\leqq t\leqq\beta$. Нека освен това е дадена функцията $F(x, y)$, за която ще предположим, че дефиниционната ѝ област съдържа L. Да разделим интервала $[\alpha, \beta]$ на краен брой подинтервали, например следните:

$$[t_0, t_1],\ [t_1, t_2], \ldots, [t_{k-1}, t_k], \tag{2}$$

където

$$\alpha=t_0<t_1<t_2<\ldots<t_k=\beta,$$

и във всеки от тези подинтервали $[t_{i-1}, t_i]$ да си изберем по една точка τ_i. Ще въведем следните означения:

$$x_i=f(t_i),\quad y_i=g(t_i),\qquad \xi_i=f(\tau_i),\quad \eta_i=g(\tau_i). \tag{3}$$

Точките $P_i(x_i, y_i)$ очевидно разделят кривата L на по-малки дъги, като при това за всяко i точката $Q_i(\xi_i, \eta_i)$ лежи на дъгата $\overset{\frown}{P_{i-1}P}$ (черт. 109).

Нека сега образуваме сумата

$$\lambda=\sum_{i=1}^{k}F(\xi_i, \eta_i)(x_i-x_{i-1}). \tag{4}$$

В следващия параграф ще видим, че има въпроси, при които естествено се стига до суми от такъв вид. Предмет на този параграф е следната

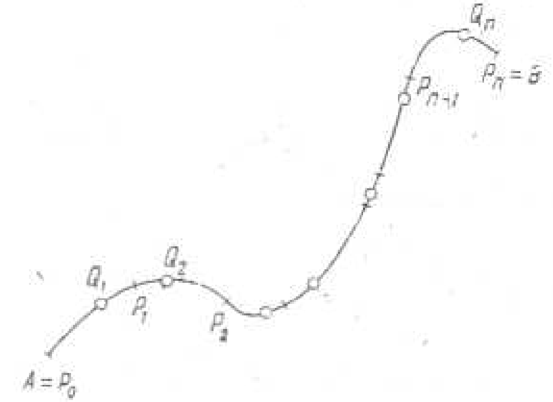
Теорема. *Нека кривата L, зададена с параметричните уравнения*

$$x=f(t),\quad y=g(t)\quad (\alpha\leqq t\leqq\beta),$$

е непрекъсната и освен това непрекъснато диференцуема относно x и нека $F(x, y)$ е функция, дефинирана и непрекъсната във всички точки на кривата L. Ако е дадена една издребняваща редица от разделяния на интервала $[\alpha, \beta]$ на подинтервали и ако за всяко от тези разделяния си образуваме по една сума λ от вида (4), то така получената редица от суми

$$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots \tag{5}$$

е сходяща и нейната граница не зависи нито от начина, по който са извършени отделните разделяния, нито от начина, по който сме избрали по една точка в отделните подинтервали при тези разделяния.



Черт. 109

Доказателство. Нека излезем от едно фиксирано разделяне на интервала $[\alpha, \beta]$ на подинтервали, имащо вида (2). Избираме по едно τ_i във всеки от подинтервалите $[t_{i-1}, t_i]$ и като използуваме отново означенията (3), образуваме сумата (4), която може по-подробно да се напише по следния начин:

$$\lambda=\sum_{i=1}^{k}F[f(\tau_i), g(\tau_i)][f(t_i)-f(t_{i-1})].$$

Като приложим теоремата за крайните нараствания към разликите $f(t_i)-f(t_{i-1})$, ще получим

$$\lambda=\sum_{i=1}^{k}F[f(\tau_i), g(\tau_i)]f'(\tau_i^*)(t_i-t_{i-1}),$$

където τ_i^* е число, което, както и τ_i, се намира в интервала $[t_{i-1}, t_i]$.

От друга страна, да разгледаме функцията

$$\varphi(t)=F[f(t), g(t)]f'(t),$$

която съгласно условията на теоремата е непрекъсната в интервала $[\alpha, \beta]$. Ако образуваме римановата сума σ за тази функция, отговаряща на разглежданото разделяне на интервала $[\alpha, \beta]$ и на направения избор на точките τ_i, ще получим

$$\sigma=\sum_{i=1}^{k} F(f(\tau_i),\ g(\tau_i))f'(\tau_i)(t_i-t_{i-1}).$$

Тогава ще имаме

$$\lambda-\sigma=\sum_{i=1}^{k} F[f(\tau_i),\ g(\tau_i)]\,[f'(\tau_i^*)-f'(\tau_i)]\,(t_i-t_{i-1}).$$

Нека K е някаква горна граница на абсолютната стойност на непрекъснатата функция $F[f(t), g(t)]$ в затворения интервал $[\alpha, \beta]$ и нека означим с ε най-голямата от осцилациите, които функцията $f'(t)$ притежава в отделните подинтервали (2). Тогава

$$|\lambda-\sigma| \leqq \sum_{i=1}^{k} |F[f(\tau_i),\ g(\tau_i)]|\,.\,|f'(\tau_i^*)-f'(\tau_i)|(t_i-t_{i-1})$$

$$\leqq \varepsilon\,.\,K\,.\sum_{i=1}^{k}(t_i-t_{i-1})=\varepsilon K(\beta-a).$$

Нека сега си спомним, че ни беше дадена една издребняваща редица от разделяния на интервала $[\alpha, \beta]$. Да вземем n-тото от тези разделяния и да образуваме за него сумите λ и σ при някакъв избор на точките τ_i. Тези две суми да означим сега съответно с λ_n и σ_n. Ако освен това означим с ε_n най-голямата от осцилациите на функцията $f'(t)$ в отделните подинтервали, участвуващи в n-тото разделяне на интервала $[\alpha, \beta]$, то съгласно това, което вече видяхме, ще имаме

$$|\lambda_n-\sigma_n| \leqq \varepsilon_n K(\beta-\alpha). \tag{6}$$

Поради непрекъснатостта на функцията $f'(t)$ в затворения интервал $[\alpha, \beta]$ можем с помощта на теоремата за осцилациите да заключим, че $\lim \varepsilon_n=0$. Ето защо от неравенството (6) следва, че

$$\lim\,(\lambda_n-\sigma_n)=0.$$

От друга страна, поради непрекъснатостта на функцията $\varphi(t)$ редицата от нейните риманови суми

$$\sigma_1,\ \sigma_2,\ \ldots,\ \sigma_n,\ \ldots$$

клони към $\int_\alpha^\beta \varphi(t)dt$. Тогава от равенството

$$\lambda_n-\int_\alpha^\beta \varphi(t)\,dt=(\lambda_n-\sigma_n)+\left(\sigma_n-\int_\alpha^\beta \varphi(t)\,dt\right)$$

заключаваме, че редицата (5) е сходяща и

$$\lim \lambda_n=\int_\alpha^\beta \varphi(t)\,dt.$$

С това теоремата е доказана, тъй като е очевидно, че намерената граница на редицата (5) зависи само от функциите $f(t)$, $g(t)$ и $F(x, y)$ и от интервала $[\alpha, \beta]$.

Нека забележим, че доказаната теорема остава валидна и ако заменим условието за непрекъсната диференцуемост на кривата L относно x с условието за частична непрекъсната диференцуемост относно x. Необходимите за случая допълнителни разглеждания могат да се предоставят на читателя.

Всичко изложено дотук ни дава основание да разглеждаме границата, към която клони редицата (5), като число, което е напълно определено, когато са дадени кривата L и функцията $F(x, y)$ (стига те да удовлетворяват условията на доказаната теорема). Това число ще наричаме **криволинеен интеграл** от $F(x, y)dx$, взет върху кривата L, и ще го означаваме така:

$$\int_L F(x,\ y)\,dx,$$

или ако A и B са съответно началната и крайната точка на кривата L:

$$\int_{\widehat{AB}} F(x,\ y)\,dx.$$

При това ние видяхме, че това число е равно на един определен интеграл. Като напишем подробно функцията $\varphi(t)$, ще получим

$$\int_{\widehat{AB}} F(x,\ y)\,dx=\int_\alpha^\beta F[f(t),\ g(t)]f'(t)\,dt. \tag{7}$$

Ако кривата L е частично непрекъснато диференцуема относно y и ако вместо от сумата (4) излезем от сумата

$$\lambda'=\sum_{i=1}^{k} F(\xi_i,\ \eta_i)(y_i-y_{i-1}),$$

то като разсъждаваме по същия начин, ще стигнем до понятието криволинеен интеграл от $F(x, y)dy$ върху кривата L, който ще означаваме така:

$$\int_L F(x,\ y)\,dy \quad \text{или} \quad \int_{\widehat{AB}} F(x,\ y)\,dy.$$

При това ще имаме равенството

(8) $$\int\limits_{\widehat{AB}} F(x,\ y)\,dy = \int\limits_{\alpha}^{\beta} F[f(t),\ g(t)]\,g'(t)\,dt.$$

Пример 1. Да пресметнем криволинейния интеграл

$$\int\limits_{L} y^2\,dx,$$

където L е полуокръжността, зададена с уравненията

$$x = a\cos t,\ y = a\sin t,\ 0 \leqq t \leqq \pi \quad (a > 0).$$

Ще имаме

$$\int\limits_{L} y^2\,dx = a^2 \int\limits_{0}^{\pi} \sin^2 t\,d a\cos t = -a^3 \int\limits_{0}^{\pi} \sin^3 t\,dt.$$

Пресмятаме този определен интеграл и получаваме

$$\int\limits_{L} y^2\,dx = -\frac{4}{3}a^3.$$

Пример 2. Да пресметнем криволинейния интеграл

$$\int\limits_{L} (x^3 + y)\,dy,$$

където L е частта от параболата с уравнение $y = x^2$, свързваща точките $(0,0)$ и $(1,1)$.

Тук имаме параметричните уравнения

$$x = t,\quad y = t^2,\quad 0 \leqq t \leqq 1.$$

Тогава

$$\int\limits_{L} (x^3 + y)\,dy = \int\limits_{0}^{1} (t^3 + t^2)\,dt^2 = 2\int\limits_{0}^{1} (t^4 + t^3)\,dt$$

$$= \frac{2}{5}\left|\, t^5 \right|_0^1 + \frac{2}{4}\left|\, t^4 \right|_0^1 = \frac{2}{5} + \frac{1}{2} = \frac{9}{10}.$$

Ако вземем кривата L, зададена с параметричните уравнения (1) но описана в обратна посока, т. е. от точката $B(f(\beta),\ g(\beta))$ към точката $A(f(\alpha),\ g(\alpha))$, то като напишем параметричните уравнения на дъгата $\widehat{BA}$ във вида

$$x = f(-t),\quad y = g(-t),$$

където $-\beta \leqq t \leqq -\alpha$, ще получим

$$\int\limits_{\widehat{BA}} F(x,\ y)\,dx = -\int\limits_{-\beta}^{-\alpha} F[f(-t),\ g(-t)]\,f'(-t)\,dt$$

$$= -\int\limits_{\alpha}^{\beta} F[f(t),\ g(t)]\,f'(t)\,dt,$$

т. е.

(9) $$\int\limits_{\widehat{BA}} F(x,\ y)\,dy = -\int\limits_{\widehat{AB}} F(x,\ y)\,dx.$$

По същия начин получаваме

(10) $$\int\limits_{\widehat{BA}} F(x,\ y)\,dy = -\int\limits_{\widehat{AB}} F(x,\ y)\,dy.$$

Ако при условията на теоремата от този параграф е дадена и една функция $u(s)$, която е строго растяща и диференцуема с непрекъсната производна в някакъв интервал $[\alpha_1,\ \beta_1]$ и за която са изпълнени равенствата $u(\alpha_1) = \alpha$, $u(\beta_1) = \beta$, то параметричните уравнения

(11) $$x = f(u(s)),\quad y = g(u(s)),$$

където $\alpha_1 \leqq s \leqq \beta_1$, представят, както имахме случай вече да отбележим, същата крива L, която бе зададена с уравненията (1). Като изхождахме от параметричните уравнения (1), получихме

$$\int\limits_{L} F(x,\ y)\,dx = \int\limits_{\alpha}^{\beta} F[f(t),\ g(t)]\,f'(t)\,dt.$$

Но ако в определения интеграл, написан в дясната страна на това равенство, извършим смяна на променливите посредством субституцията $t = u(s)$, то ще получим

$$\int\limits_{L} F(x,\ y)\,dx = \int\limits_{\alpha_1}^{\beta_1} F[f(u(s)),\ g(u(s))]\,f'(u(s))\,u'(s)\,ds,$$

т. е. ще стигнем до същия интеграл, който бихме получили, ако бяхме излезли от параметричните уравнения (11). Същата бележка се отнася, разбира се, и за криволинейния интеграл $\int\limits_{L} F(x,\ y)dy$.

Друга също почти очевидна забележка е следната: Ако $\alpha < \gamma < \beta$, то точката $C(f(\gamma),\ g(\gamma))$ разделя кривата $\widehat{AB}$, зададена с уравненията (1), на две дъги — дъгите $\widehat{AC}$ и $\widehat{CB}$. Тогава от равенството

$$\int\limits_{\alpha}^{\beta} F[f(t),\ g(t)]\,f'(t)\,dt$$

$$=\int_{\alpha}^{\gamma} F[f(t),\ g(t)]f'(t)\,dt+\int_{\gamma}^{\beta} F[f(t),\ g(t)]f'(t)\,dt$$

получаваме равенството

(12) $$\int_{\widehat{AB}} F(x,\ y)\,dx=\int_{\widehat{AC}} F(x,\ y)\,dx+\int_{\widehat{CB}} F(x,\ y)\,dx.$$

Аналогично имаме

(13) $$\int_{\widehat{AB}} F(x,\ y)\,dy=\int_{\widehat{AC}} F(x,\ y)\,dy+\int_{\widehat{CB}} F(x,\ y)\,dy.$$

От друга страна, когато една крива L е съставена от краен брой незатворени, непрекъснати и частично непрекъснато диференцуеми относно x, респективно относно y, дъги $\widehat{A_1A_2}$, $\widehat{A_2A_3}, \ldots, \widehat{A_nA_{n+1}}$ по дефиниция приемаме, че*

(14) $$\int_{\widehat{A_1A_{n+1}}} F(x,\ y)\,dx$$
$$=\int_{\widehat{A_1A_2}} F(x,\ y)\,dx+\int_{\widehat{A_2A_3}} F(x,\ y)\,dx+\cdots+\int_{\widehat{A_nA_{n+1}}} F(x,\ y)\,dx$$

и

(15) $$\int_{\widehat{A_1A_{n+1}}} F(x,\ y)\,dy$$
$$=\int_{\widehat{A_1A_2}} F(x,\ y)\,dy+\int_{\widehat{A_2A_3}} F(x,\ y)\,dy+\cdots+\int_{\widehat{A_nA_{n+1}}} F(x,\ y)\,dy.$$

Нека забележим още, че когато кривата L е затворена, означенията

$$\int_{L} F(x,\ y)\,dx \quad \text{и} \quad \int_{L} F(x,\ y)\,dy$$

трябва да бъдат придружени с указание в коя посока е описана тази крива. Ако L е една проста затворена крива и ако с L^{+} означим кривата L, описана в положителна посока, а с L^{-} — същата крива, описана в отрицателна посока, то очевидно

* Лесно се вижда, че до същите равенства бихме стигнали, ако бихме взели онова параметрично представяне на кривата $\widehat{A_1A_{n-1}}$, което се получава от параметричните представяния на кривите $\widehat{A_1A_2}$, $\widehat{A_2A_3}, \ldots, \widehat{A_nA_{n+1}}$ по начина, показан в бележката под линия на стр. 410

$$\int_{L^{+}} F(x,\ y)\,dx=-\int_{L^{-}} F(x,\ y)\,dy,\quad \int_{L^{+}} F(x,\ y)\,dy=-\int_{L^{-}} F(x,\ y)\,dy.$$

Най-сетне ще пишем по дефиниция

$$\int_{L} [P(x,\ y)\,dx+Q(x,\ y)\,dy]=\int_{L} P(x,\ y)\,dx+\int_{L} Q(x,\ y)\,dy.$$

Нека споменем специално няколко прости примера на криволинейни интеграли, които ще срещаме и по-нататък в нашата работа. Когато $\widehat{AB}$ е отсечката, свързваща двете точки $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$, използувайки параметричните ѝ уравнения

(16) $$x=x_1+t(x_2-x_1),\quad y=y_1+t(y_2-y_1),$$

където $0\leqq t\leqq 1$, ще получим

(17) $$\int_{\widehat{AB}} 1\,.\,dx=\int_{0}^{1}(x_2-x_1)\,dt=x_2-x_1$$

и

(18) $$\int_{\widehat{AB}} 1\,.\,dy=\int_{0}^{1}(y_2-y_1)\,dt=y_2-y_1.$$

Ако отсечката $\widehat{AB}$ е успоредна на оста Oy (и следователно $x_1=x_2$), то първата от двете функции, участвуващи в параметричното представяне (16), е константа. Ето защо за всяка функция $F(x,\ y)$ тогава ще имаме

(19) $$\int_{\widehat{AB}} F(x,\ y)\,dx=0;$$

когато пък отсечката $\widehat{AB}$ е успоредна на оста Ox, ще имаме

(20) $$\int_{\widehat{AB}} F(x,\ y)\,dy=0.$$

Накрая нека забележим, че ако L е непрекъснато диференцуема крива и ако $|F(x,y)|\leqq K$, то в сила е неравенството

$$\left|\int_{L} F(x,\ y)\,dx\right|\leqq K\,.\,d(L),$$

където $d(L)$ е дължината на кривата L.

Наистина, ако

$$x=f(t),\quad y=g(t)\quad (\alpha\leqq t\leqq\beta)$$

са параметричните уравнения на кривата L, ще имаме

$$\left|\int_L F(x, y)\,dx\right| = \left|\int_\alpha^\beta F[f(t),\ g(t)]\,f'(t)\,dt\right|$$

$$\leq K\int_\alpha^\beta |f'(t)|\,dt \leq K\int_\alpha^\beta \sqrt{f'^2(t)+g'^2(t)}\,dt = K\,.\,d(L).$$

Аналогично се установява и неравенството

$$\left|\int_L F(x, y)\,dy\right| \leq K\,.\,d(L).$$

Упражнения. Пресметнете следните криволинейни интеграли:

1. $\int\limits_{\widehat{AB}}(x^2+y^2)\,dx$, където $\widehat{AB}$ е частта от елипсата с уравнение $\frac{x^2}{2}+y^2=1$, свързваща точките $A(0,\ 1)$ и $B(\sqrt{2},\ 0)$ и лежаща в първия квадрант.

Отг. $\frac{4}{3}\sqrt{2}$.

2. $\int\limits_{\widehat{AB}}(1+xy)\,dy$, където $\widehat{AB}$ е отсечката, определена от точките $A(0,\ 2)$ и $B(1,\ 1)$.

Отг. $-\frac{5}{3}$.

3. $\int\limits_{\widehat{AB}}(y\,dx-x\,dy)$, където $\widehat{AB}$ е онази част от хиперболата с уравнение $xy=1$, която свързва точките $A(1,\ 1)$ и $B\left(2,\ \frac{1}{2}\right)$.

Отг. $2\ln 2$.

4. $\int\limits_L(xy\,dx+e^x\,dy)$, където L е триъгълникът, определен от точките $A(1,\ 1)$, $B(2,\ 1)$ и $C(1,\ 3)$ и описан в посока, обратна на посоката на часовниковата стрелка.

Отг. $2e^2-4e-\frac{4}{3}$.

§ 101. Един пример от физиката

Тук ще се спрем на един въпрос от физиката, при който се стига до криволинеен интеграл. Както е известно, ако върху една материална точка, движеща се праволинейно, действува постоянна сила, чиято посока съвпада с посоката на движението на материалната точка, то работата, която тази сила извършва за даден период от време, е равна на произведението от големината на силата и изминатия път. По-сложен е случаят, когато посоката на действуващата постоянна сила $\vec{F}$ не съвпада с посоката на движението на материалната точка. В такъв случай, ако P и Q са съответно проекциите на вектора $\vec{F}$ върху координатните оси Ox и Oy и ако движещата се праволинейно точка е изминала отсечката A_1A_2 в посока от точката $A_1(x_1,\ y_1)$ към точката $A_2(x_2,\ y_2)$, то извършената работа се дава с израза

$$P(x_2-x_1)+Q(y_2-y_1).$$

Тук x_2-x_1 и y_2-y_1 са съответно проекциите на вектора $\overrightarrow{A_1A_2}$ върху осите Ox и Oy.

Нека сега параметричните уравнения

$$x=f(t),\ y=g(t),\ \alpha\leq t\leq\beta \tag{1}$$

представят една проста и гладка крива L с начална точка $A(f(\alpha),\ g(\alpha))$ и крайна точка $B(f(\beta),\ g(\beta))$ и нека една материална точка описва тази крива в посока от A към B под действието на някаква сила $\vec{F}$, която не е постоянна. Тъй като силата $\vec{F}$ се мени, нейните проекции върху координатните оси Ox и Oy ще бъдат функции на двете координати x и y на подвижната точка. Да означим тези проекции съответно с $P(x,\ y)$ и $Q(x,\ y)$ и да предположим, че те са непрекъснати функции на x и y. Задачата е да се дефинира понятието работа, извършена през време на движението на материалната точка по кривата L, и да се намери начин за пресмятането на тази работа.

За да решим тази задача, ние първоначално я заместваме с една по-проста, която ни е позната. За целта разделяме интервала $[\alpha,\ \beta]$ на краен брой подинтервали. Нека тези подинтервали са

$$[t_0,\ t_1],\ \ [t_1,\ t_2],\ \dots,\ [t_{k-1},\ t_k], \tag{2}$$

където

$$\alpha=t_0<t_1<\dots<t_k=\beta,$$

и нека изберем числата $\tau_1,\ \tau_2,\ \dots,\ \tau_k$ така, че $\tau_i\in[t_{i-1},\ t_i]$ при $i=1,\ 2,\ \dots,\ k$. Да въведем означенията

$$x_i=f(t_i),\ y_i=g(t_i)\quad (i=0,\ 1,\ \dots,\ k),$$

$$\xi_i=f(\tau_i),\ \eta_i=g(\tau_i)\quad (i=0,\ 1,\ \dots,\ k) \tag{3}$$

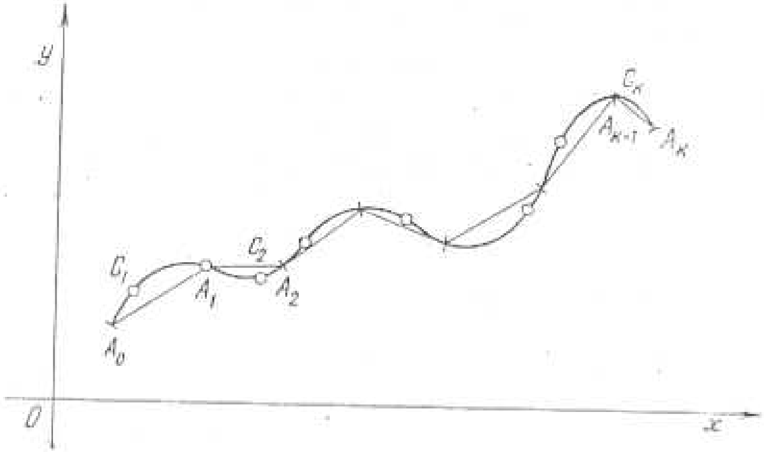
и да разгледаме точките

$$A=A_0(x_0,\ y_0),\ A_1(x_1,\ y_1),\ \dots,\ A_k(x_k,\ y_k)=B$$

и

$$C_1(\xi_1, \eta_1), \quad C_2(\xi_2, \eta_2), \dots, C_k(\xi_k, \eta_k).$$

Нашият метод се състои в това, че заместваме кривата L, по която се движи разглежданата материална точка, с начупената линия, съставена от отсечките $AA_1, A_1A_2, \dots, A_{k-1}A_k$ (черт. 110).



Черт. 110

Като считаме, че материалната точка описва тази начупена линия ще приемем освен това, че когато тя се движи по дадена отсечка $A_{i-1}A_i$, върху нея действува постоянна сила и за проекции на тази постоянна сила върху координатните оси ще приемем проекциите на силата $\vec{F}$, които отговарят на точката C_i, лежаща на дъгата $\widehat{A_{i-1}A_i}$, т. е. ще приемем, че те са съответно $P(\xi_i, \eta_i)$ и $Q(\xi_i, \eta_i)$. Тогава работата, която материалната точка извършва при движението си по отсечката $A_{i-1}A_i$, ще бъде равна на

$$P(\xi_i, \eta_i)(x_i - x_{i-1}) + Q(\xi_i, \eta_i)(y_i - y_{i-1}),$$

а работата, извършена от нея след описването на цялата начупена линия, ще се дава с израза

$$\sum_{i=1}^{k} [P(\xi_i, \eta_i)(x_i - x_{i-1}) + Q(\xi_i, \eta_i)(y_i - y_{i-1})].$$

Ние имаме основание да считаме така получената сума за приблизителна стойност на търсената работа, толкова по-близка до „истинската", колкото по-гъсто е разделянето (2) на интервала $[\alpha, \beta]$ на подинтервали. Тази сума обаче, когато вземем една издребняваща редица от разделяния на интервала $[\alpha, \beta]$, клони, както знаем, към криволинейния интеграл

$$\int_L [P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy].$$

Ето защо ние по дефиниция приемаме, че работата, която се извършва, когато материалната точка описва кривата L под действието на дадената сила $\vec{F}$, се дава с горния криволинеен интеграл.

§ 102. Случай, когато криволинейният интеграл не зависи от пътя на интегрирането

Има един важен случай, при който стойността на криволинейния интеграл

$$(1) \qquad \int_L [P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy]$$

зависи само от началната и крайната точка на непрекъснатата и частично непрекъснато диференцуема крива L, по която се извършва интегрирането, но не и от самата крива L, стига тя да лежи изцяло в някоя отнапред дадена област D в равнината Oxy. В този случай ние ще казваме накратко, че **криволинейният интеграл (1) не зависи от пътя на интегрирането в областта D.**

Ще докажем следната

Теорема. *Нека D е едно отворено и линейно свързано множество в равнината Oxy и нека функциите $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ са непрекъснати в D. За да не зависи интегралът (1) от пътя на интегрирането в областта D, е необходимо и достатъчно да съществува такава функция $\Phi(x, y)$, дефинирана и диференцуема частно както спрямо x, така и спрямо y в D, която удовлетворява в D равенствата*

$$(2) \qquad \Phi'_x(x, y) = P(x, y), \qquad \Phi'_y(x, y) = Q(x, y).$$

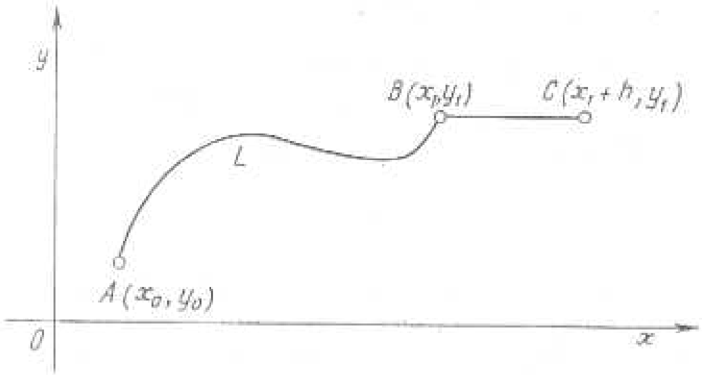
В такъв случай, ако $A(a_1, a_2)$ и $B(b_1, b_2)$ са съответно началната и крайната точка на кривата L, лежаща в D, имаме

$$(3) \qquad \int_L [P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy] = \Phi(b_1, b_2) - \Phi(a_1, a_2).$$

Доказателство. Ще установим най-напред необходимостта на условието на теоремата. Да предположим, че криволинейният интеграл (1) не зависи от пътя на интегрирането в областта D и да вземем една фиксирана точка $A(x_0, y_0)$ от тази област. Ако (x, y) е произволна точка от областта D, то криволинейният интеграл (1), взет върху която и да било непрекъсната и частично непрекъснато диференцуема крива L, свързваща тези две точки и лежаща в D, ще зависи само от точката (x, y) и може да бъде означен по следния начин:

$$\Phi(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} [P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy].$$

Ще покажем, че функцията $\Phi(x, y)$, дефинирана с помощта на това равенство в областта D, е диференцуема частно както спрямо x, тъй и спрямо y във всички точки на тази област. Наистина нека $B(x_1, y_1)$ е една произволна точка от областта D и нека числото h е взето така, че



Черт. 111

точката $C(x_1+h, y_1)$ също да лежи в D. Ще запишем стойностите $\Phi(x_1, y_1)$ и $\Phi(x_1+h, y_1)$ с помощта на равенствата

$$\Phi(x_1, y_1)=\int_{(x_0, y_0)}^{(x_1, y_1)} [P(x, y)\,dx+Q(x, y)\,dy]$$

и

$$\Phi(x_1+h, y_1)=\int_{(x_0, y_0)}^{(x_1+h, y_1)} [P(x, y)\,dx+Q(x, y)\,dy],$$

където първият криволинеен интеграл е взет по някаква диференцуема крива L, свързваща точките $A(x_0, y_0)$ и $B(x_1, y_1)$ и лежаща* в D, а вторият — по кривата, съставена от същата дъга L и от отсечката BC (черт. 111). Поради това, че отсечката BC е успоредна на оста Ox, ще имаме

$$\Phi(x_1+h, y_1)-\Phi(x_1, y_1)=\int_{BC} [P(x, y)\,dx+Q(x, y)\,dy]$$

$$=\int_{BC} P(x, y)\,dx=\int_{x_1}^{x_1+h} P(x, y_1)\,dx.$$

* Поради това, че линейно свързаното множество D е отворено, всеки две негови точки могат да бъдат свързани с крива, която е не само непрекъсната, но и диференцуема — тук обаче няма да се спираме на доказателството на този факт.

Към последния получен интеграл (който е обикновен определен интеграл, а не криволинеен) прилагаме теоремата за средните стойности и получаваме

$$\Phi(x_1+h, y_1)-\Phi(x_1, y_1)=hP(\xi, y_1),$$

където ξ е число, намиращо се между x_1 и x_1+h.

Като използуваме непрекъснатостта на функцията $P(x, y)$, ще получим

$$\Phi_x'(x_1, y_1)=\lim_{h\to 0}\frac{\Phi(x_1+h, y_1)-\Phi(x_1, y_1)}{h}=\lim_{h\to 0} P(\xi, y_1)=P(x_1, y_1).$$

Тъй като точката (x_1, y_1) беше избрана произволно в областта D, то с това равенството

$$\Phi_x'(x, y)=P(x, y)$$

е доказано за всички точки от тази област. По аналогичен начин се вижда, че

$$\Phi_y'(x, y)=Q(x, y).$$

Ще преминем сега към доказателството на достатъчността на условието на теоремата. Нека ни е известно, че съществува една функция $\Phi(x, y)$, дефинирана и диференцуема частно спрямо x и спрямо y в областта D и удовлетворяваща в тази област равенствата (2). Нека е дадена и една диференцуема крива L с параметрични уравнения

$$x=f(t), \quad y=g(t), \quad \alpha\leq t\leq\beta,$$

лежаща изцяло в областта D, началната и крайната точка на която са съответно $A(a_1, a_2)$ и $B(b_1, b_2)$. Съставната функция

$$\varphi(t)=\Phi(f(t), g(t)),$$

дефинирана в интервала $[\alpha, \beta]$, е диференцуема в този интервал и

$$\varphi'(t)=\Phi_x'(f(t), g(t))f'(t)+\Phi_y'(f(t), g(t))g'(t).$$

Като вземем пред вид равенствата (2), получаваме

$$\varphi'(t)=P(f(t), g(t))f'(t)+Q(f(t), g(t))g'(t).$$

Тогава ще имаме

$$\int_L [P(x, y)\,dx+Q(x, y)\,dy]$$

$$=\int_\alpha^\beta [P(f(t), g(t))f'(t)+Q(f(t), g(t))g'(t)]\,dt$$

$$=\int_\alpha^\beta \varphi'(t)\,dt=\varphi(\beta)-\varphi(\alpha)=\Phi(b_1, b_2)-\Phi(a_1, a_2).$$

С това равенството (3) е доказано в случая на диференцуема крива L. Ако L е непрекъсната и частично непрекъснато диференцуема крива, съставена от незатворените дъги $\widehat{A_1A_2}, \widehat{A_2A_3}, \ldots, \widehat{A_nA_{n+1}}$ (където $A_1 = A$, $A_{n+1} = B$) и лежаща изцяло в D, то като запишем всяка от точките A_i съответно чрез (a^i_1, a^i_2), ще имаме

$$\int_L [P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy] = \sum_{i=1}^{n} \int_{\widehat{A_iA_{i+1}}} [P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy]$$

$$= \sum_{i=1}^{n} [\Phi(a_1^{i+1}, a_2^{i+1}) - \Phi(a_1^i, a_2^i)]$$

$$= \Phi(a_1^{n+1}, a_2^{n+1}) - \Phi(a_1^1, a_2^1) = \Phi(b_1, b_2) - \Phi(a_1, a_2).$$

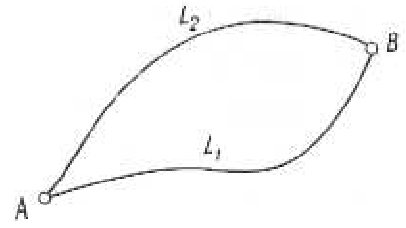
По такъв начин равенството (3) е доказано в общия случай, а от това равенство непосредствено следва, че криволинейният интеграл (1) не зависи от пътя на интегрирането в областта D. С това доказателството на теоремата е завършено.

Често, за да отбележим факта, че една функция $\Phi(x, y)$ удовлетворява равенствата (2), казваме, че изразът

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy \tag{4}$$

представлява неин пълен диференциал. Ето защо току-що доказаната теорема понякога се изказва накратко така:

За да не зависи криволинейният интеграл (1) от пътя на интегрирането в дадена отворена и линейно свързана област D, е необходимо и достатъчно подинтегралният израз (4) да представлява пълен диференциал на някоя функция.



Черт. 112

Нека отбележим още следното: Когато кривата L е затворена, началната и крайната ѝ точка съвпадат и равенството (3) ни дава

$$\int_L [P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy] = 0. \tag{5}$$

И така, ако криволинейният интеграл (1) не зависи от пътя на интегрирането в дадена област D, той е равен на нула върху всяка затворена, непрекъсната и частично непрекъснато диференцуема крива или, както казваме накратко, върху всеки затворен контур, лежащ в D. Вярно е и обратното — ако криволинейният интеграл (1) е равен на нула върху всеки затворен контур в D, той не зависи от пътя на интегрирането в областта D. Наистина нека L_1 и L_2 са две непрекъснати и частично непрекъснато диференцуеми криви с обща начална точка A и обща крайна точка B. Ако означим с L_2' кривата L_2, описана в посока от B към A, то кривите L_1 и L_2' ще образуват, заедно взети, един затворен контур L (черт. 112). Тогава ще имаме

$$0 = \int_L [P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy]$$

$$= \int_{L_1} [P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy] + \int_{L_2'} [P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy]$$

$$= \int_{L_1} [P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy] - \int_{L_2} [P(x, y)dx + Q(x, y)\,dy],$$

откъдето

$$\int_{L_1} [P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy] = \int_{L_2} [P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy]. \tag{6}$$

§ 103. Намиране на функция, пораждаща пълен диференциал

Във връзка с доказаната в предишния параграф теорема възникват следните два въпроса:

а) Когато е даден един криволинеен интеграл от вида

$$\int_L [P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy], \tag{1}$$

как може да се узнае дали подинтегралният израз представлява пълен диференциал на някоя функция, т. е. дали съществува такава функция $\Phi(x, y)$, която да удовлетворява равенствата

$$\Phi_x'(x, y) = P(x, y), \qquad \Phi_y'(x, y) = Q(x, y) \tag{2}$$

в дадената област D.

б) Ако знаем, че такава функция съществува, как може тя да се намери.

Отговорите на тези два въпроса се дават с помощта на една теорема, към която сега ще преминем. При това отговорът на първия от тях се съдържа в самата формулировка на теоремата, а що се отнася до отговора на втория въпрос, той се получава в процеса на доказателството на тази теорема. За простота ще докажем теоремата само за случая, когато областта D е правоъгълник със страни, успоредни на координатните оси, или пък съвпада с цялата равнина, въпреки че твърдението ѝ може да бъде доказано и за области от по-сложен вид.

Теорема. *Нека областта D е отворен правоъгълник, зададен с неравенствата*

$$a<x<b, \qquad c<y<d, \tag{3}$$

или пък е цялата равнина и нека са дадени две функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$, непрекъснати и притежаващи непрекъснати частни производни в областта D. За да съществува функция $\Phi(x, y)$, дефинирана и диференцуема частно спрямо x и спрямо y в D и удовлетворяваща в D равенствата

$$\Phi_x'(x, y)=P(x, y), \qquad \Phi_y'(x, y)=Q(x, y), \tag{2}$$

е необходимо и достатъчно за всички точки от D да бъде изпълнено равенството

$$P_y'(x, y)=Q_x'(x, y). \tag{4}$$

Доказателство. Необходимостта на условието (4) се вижда веднага. Наистина от равенствата (2) получаваме

$$\Phi_{xy}''=P_y'(x, y), \quad \Phi_{yx}''(x, y)=Q_x'(x, y),$$

откъдето поради непрекъснатостта на функциите $P_y'(x, y)$ и $Q_x'(x, y)$ следва равенството (4) въз основа на теоремата за равенство на смесените производни от § 76.

Ще се занимаем сега с въпроса за достатъчността на условието (4). Като предполагаме, че това условие е изпълнено в областта D, ще намерим такава функция $\Phi(x, y)$, дефинирана в D, която удовлетворява равенствата (2). При това ще имаме пред вид случая, когато областта D е правоъгълник, зададен с неравенствата (3), но разсъжденията по съвсем очевиден начин се пренасят и за случая, когато D е цялата равнина, който случай в същност е по-прост.

Да вземем едно фиксирано x_0 от интервала (a, b) и при някакво фиксирано y, взето от интервала (c, d), да образуваме определения интеграл

$$\int_{x_0}^{x} P(t, y)\, dt, \tag{5}$$

където x е произволна точка от интервала (a, b). Този интеграл представлява очевидно функция на x и y, дефинирана в областта D. Ние ще си поставим за цел да намерим една такава функция $\psi(y)$ на променливата y, дефинирана и диференцуема в интервала (c, d), че функцията

$$\Phi(x, y)=\int_{x_0}^{x} P(t, y)\, dt+\psi(y)$$

да притежава свойствата на търсената от нас функция. При това ясно е, че както и да изберем $\psi(y)$, равенството

$$\Phi_x'(x, y)=P(x, y)$$

ще бъде изпълнено във всички точки на областта D. Нека изразим сега, че в D е изпълнено и равенството

$$\Phi_y'(x, y)=Q(x, y).$$

Ще използуваме теоремата за диференциране под знака на интеграла от § 84, приложена при фиксирано x към интеграла (5), като диференцираме* относно y. Ще получим

$$Q(x, y)=\int_{x_0}^{x} P_y'(t, y)\, dt+\psi'(y). \tag{6}$$

Оттук ще намерим $\psi(y)$ като примитивна функция на разликата

$$Q(x, y)-\int_{x_0}^{x} P_y'(t, y)\, dt \tag{7}$$

в интервала (c, d). Това е възможно да бъде направено само ако разликата (7) е функция на единствената променлива y. Но случаят е именно такъв, тъй като частната производна на тази функция спрямо x е равна на

$$Q_x'(x, y)-P_y'(x, y),$$

израз, който поради равенството (4) е равен на нула за всички точки от областта D. Това показва, че функцията (7) е константа по отношение на x в интервала (a, b) при всяко фиксирано y от интервала (c, d), т. е. че тя фактически не зависи от x, а е функция само на y.

Обикновено при решаването на конкретни задачи от този вид интегралът (5) се записва като неопределен интеграл, тъй като това не довежда до никаква неяснота.

Пример. Да се намери функцията $\Phi(x, y)$, пораждаща пълния диференциал

$$(x^3+3xy^2)dx+(y^3+3x^2y)dy. \tag{8}$$

Полагаме

$$P(x, y)=x^3+3xy^2, \quad Q(x, y)=y^3+3x^2y$$

---

* По-подробно това става така. Нека допуснем, че $x>x_0$, и нека y_0 е една произволна точка от интервала (c, d). Избираме $\delta>0$ така, че интервалът $[y_0-\delta, y_0+\delta]$ да се съдържа изцяло в интервала (c, d), и разглеждаме функцията $P(t, y)$ в затворения правоъгълник, определен от неравенствата

$$x_0\leq t\leq x, \quad y_0-\delta\leq y\leq y_0+\delta.$$

Този правоъгълник лежи изцяло в D, поради което по отношение на него са изпълнени условията на теоремата за диференциране под знака на интеграла. Това ни позволява да извършим в интеграла (5) диференциране относно y в точката y_0. Но тъй като y_0 бе взето произволно от интервала (c, d), то това важи за всички точки от този интервал.

Случаят, когато $x<x_0$, се разглежда по същия начин. Що се отнася до случая $x=x_0$, то той е по-прост, тъй като тогава равенството (6) се получава, без изобщо да се прибягва към диференциране под знака на интеграла.

и виждаме, че условието (4) е изпълнено. Следователно търсената функция $\Phi(x, y)$ сигурно съществува. Съгласно описания метод за нейното намиране ще имаме

$$\Phi(x, y)=\int(x^3+3xy^2)\,dx+\psi(y)=\frac{x^4}{4}+\frac{3}{2}x^2y^2+\psi(y).$$

Ще диференцираме това равенство относно y и ще вземем пред вид, че

$$\Phi_y'(x, y)=Q(x, y).$$

Тогава ще получим

$$y^3+3x^2y=3x^2y+\psi'(y)$$

или

$$\psi'(y)=y^3,$$

откъдето

$$\psi(y)=\frac{1}{4}y^4.$$

Следователно

(9) $$\Phi(x, y)=\frac{x^4}{4}+\frac{y^4}{4}+\frac{3}{2}x^2y^2.$$

Лесно е да се провери, че така намерената функция $\Phi(x, y)$ действително поражда дадения пълен диференциал.

Като използуваме получения резултат, нека пресметнем например криволинейния интеграл

(10) $$\int_L[(x^3+3xy^2)\,dx+(y^3+3x^2y)\,dy],$$

където L е някаква гладка крива, свързваща точките $(-1, 1)$ и $(3, 0)$. Тъй като изразът (8), който стои под интеграла, представлява, както вече видяхме, пълният диференциал на функцията $\Phi(x, y)$, даваща се с равенството (9), то съгласно формулата (3) от § 102 стойността на интеграла (10) ще бъде

$$\Phi(3, 0)-\Phi(-1, 1)=\frac{81}{4}-2=\frac{74}{4}.$$

Упражнения. Пресметнете следните криволинейни интеграли, взети върху произволна гладка крива L, свързваща посочените две точки, като предварително покажете, че под интеграла стои навсякъде пълен диференциал, и намерете съответната функция, пораждаща този диференциал:

1. $\int_L[(2x+3y)\,dx+(3x-4y)\,dy]$, където L свързва точките $(0, 0)$ и $(2, 4)$.

Отг. -4.

2. $\int_L(2y\sin x\,dx-\cos 2x\,dy)$, където L свързва точките $\left(\frac{\pi}{6}, 1\right)$ и $\left(\frac{\pi}{4}, 2\right)$.

Отг. $\frac{1}{2}$.

3. $\int[yxe^x\,dx+(x-1)e^x\,dy]$, където L свързва точките $(0, 1)$ и $(1, 2)$.

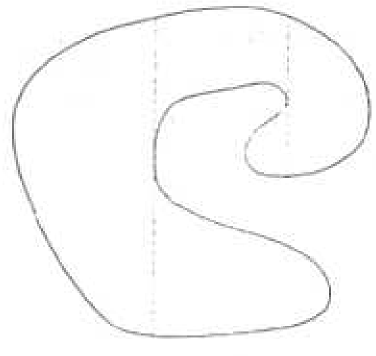
Отг. 1.

§ 104. Формула на Грин

Забележителната формула на Грин дава една връзка между понятията криволинеен и двоен интеграл.

За удобство ние ще наричаме една област в равнината *нормално разположена относно оста Ox*, ако нейният контур представлява проста затворена крива и ако тя може да бъде разделена с помощта на отсечки, успоредни на оста Oy, на краен брой подобласти, представляващи криволинейни трапеци, нормално разположени относно оста Ox, всеки два от които или нямат общи точки, или имат само контурни общи точки. (На черт. 113 е показана една такава област, която е разделена на пет криволинейни трапеца.)

Аналогично една област ще наричаме *нормално разположена относно оста Oy*, когато контурът ѝ е проста затворена крива и когато тя може да бъде разделена посредством отсечки, успоредни на оста Ox, на краен брой криволинейни трапеци, нормално разположени относно оста Oy.



Черт. 113

Когато една област в равнината е нормално разположена както относно оста Ox, така и относно оста Oy, ще я наричаме *нормално разположена в равнината*. Именно за такива области се отнася и формулата на Грин, която се основава на следната

Теорема. *Нека R е една затворена област, нормално разположена относно оста Ox, и нека функцията $P(x, y)$ е непрекъсната и притежава непрекъсната частна производна $P_y'(x, y)$ в някаква отворена област D, съдържаща R. Ако с L е означен контурът на R, описан в положителна посока, то*

(1) $$\int_L P(x, y)\,dx=-\iint_R P_y'(x, y)\,dx\,dy.$$

Ако пък областта R е нормално разположена относно оста Oy, а $Q(x, y)$ е функция, която е непрекъсната и притежава непрекъсната частна производна $Q_x'(x, y)$ в D, то

$$\int_L Q(x, y)\,dy = \iint_R Q_x'(x, y)\,dx\,dy. \tag{2}$$

Доказателство. Нека най-напред R е криволинеен трапец, нормално разположен относно оста Ox, зададен с неравенствата

$$a \leqq x \leqq b, \qquad f_1(x) \leqq y \leqq f_2(x).$$

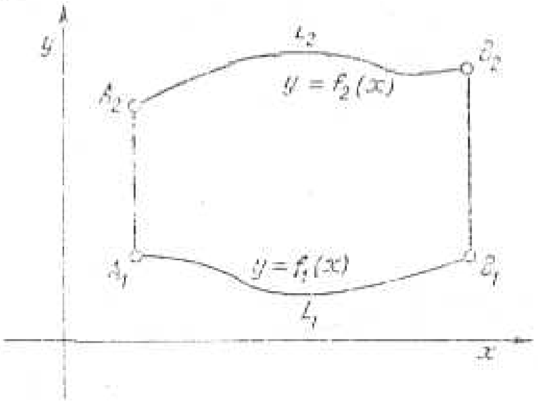
Тук $f_1(x)$ и $f_2(x)$ са две функции, непрекъснати в затворения интервал $[a, b]$.

Както знаем, имаме

$$\iint_R P_y'(x, y)\,dx\,dy = \int_a^b \left[\int_{f_1(x)}^{f_2(x)} P_y'(x, y)\,dy\right] dx \tag{3}$$

$$= \int_a^b [P(x, f_2(x)) - P(x, f_1(x))]\,dx.$$

От друга страна, ако означим с L_1 графиката на функцията $y=f_1(x)$ а с L_2 графиката на функцията $y=f_2(x)$ и ако A_1 и B_1 са съответно началната и крайната точка на L_1, а A_2 и B_2 — началната и крайната точка на L_2 (черт. 114), то



Черт. 114

$$\int_L P(x, y)\,dx - \int_{\widehat{A_1B_1}} P(x, y)\,dx + \int_{B_1B_2} P(x, y)\,dx +$$

$$+ \int_{\widehat{B_2A_2}} P(x, y)\,dx + \int_{A_2A_1} P(x, y)\,dx.$$

Като вземем пред вид, че отсечките B_1B_2 и A_2A_1 са успоредни на оста Oy, и като използуваме за кривите L_1 и L_2 параметрични уравнения от типа на уравненията (12) от § 98, получаваме

$$\int_L P(x, y)\,dx = \int_{L_1} P(x, y)\,dx - \int_{L_2} P(x, y)\,dx \tag{4}$$

$$= \int_a^b P(x, f_1(x))\,dx - \int_a^b P(x, f_2(x))\,dx.$$

Равенствата (3) и (4) ни дават равенството (1), което по този начин е доказано за случая, когато R е криволинеен трапец, разположен нормално относно оста Ox.

Нека сега R е произволна област, нормално разположена относно оста Ox. Като я разделим на криволинейни трапеци $R_1, R_2, \ldots, R_n$, ще имаме, от една страна,

$$\iint_R P_y'(x, y)\,dx\,dy = \iint_{R_1} P_y'(x, y)\,dx\,dy + \cdots + \tag{5}$$

$$+ \iint_{R_n} P_y'(x, y)\,dx\,dy.$$

От друга страна, ако с L_i означим контура на областта R_i, описан в положителна посока, ще имаме за всяко i (където $i=1, 2, \ldots, n$) съгласно формулата (1) за криволинеен трапец

$$\int_{L_i} P(x, y)\,dx = -\iint_{R_i} P_y'(x, y)\,dx\,dy. \tag{6}$$

Всеки от интегралите

$$\int_{L_i} P(x, y)\,dx$$

може да бъде представен като сума от няколко криволинейни интеграла, едни от които са взети върху отсечки, успоредни на оста Oy, и следователно са равни на нула, а други — върху части от контура L на областта R, и то в посока, съвпадаща с положителната посока на описване на затворената крива L. Ето защо ще имаме

$$\int_{L_1} P(x, y)\,dx + \cdots + \int_{L_n} P(x, y)\,dx = \int_L P(x, y)\,dx. \tag{7}$$

Като съберем равенствата (6), където $i=1, 2, \ldots, n$, и вземем пред вид (5) и (7), получаваме отново равенството (1), сега вече доказано за всяка област R, нормално разположена относно оста Ox.

По аналогичен начин се установява и равенството (2), отнасящо се за области R, нормално разположени относно оста Oy.

Най-сетне, *когато R е една област, нормално разположена в равнината, чрез събиране на равенствата* (1) *и* (2) *получаваме*

$$(8)\qquad \int_L [P(x, y)\,dx+Q(x, y)\,dy]=\iint_R [Q_x'(x, y)-P_y'(x, y)]\,dx\,dy,$$

което и представлява именно т. нар. ф о р м у л а н а Г р и н.

ДОПЪЛНЕНИЕ

РЕАЛНИ ЧИСЛА

В основата на нашия курс по математически анализ лежи понятието реално число. Основните свойства на реалните числа бяха изброени в уводната част на настоящия учебник. Сега си поставяме за задача да покажем как може да бъде построено множеството на реалните числа, предполагайки, че читателят познава добре множеството на рационалните числа. (Да припомним, че рационални наричаме ония числа, които могат да се представят като частно на две цели числа.)

И така ще считаме, че разполагаме с множеството на рационалните числа и познаваме техните свойства. Използувайки тези числа, тъй да се каже, като градивен материал, ние ще построим някакви нови обекти, които също ще наречем числа — реални числа. Отъждествявайки някои от така построените реални числа с известните ни от по-рано рационални числа, ще можем да разглеждаме множеството на реалните числа като едно разширение на множеството на рационалните числа. Същевременно ще видим, че множеството на реалните числа наистина притежава всички онези свойства, които бяха изброени в уводната част на курса. Разбира се, можем да си спестим проверката на ония свойства, които се отнасят само до естествените, целите или рационалните числа, тъй като ще считаме, че тези свойства, както вече казахме, са известни от по-рано.

Построяването на множеството на реалните числа, извършено, като се тръгне от множеството на рационалните числа, може да бъде осъществено по различни начини. Методът, който ще използуваме за целта, е известен под името метод на Дедекинд.

§ 1. Дефиниция на реално число

За две непразни множества A и B от рационални числа ще казваме, че образуват *база на реално число* или просто *база*, ако те притежават следните свойства:

1) за всяко число a от A и за всяко число b от B имаме $a\leqq b$;

2) при всеки избор на положителното (рационално) число ε съществуват такова число a от A и такова число b от B, че $b-a<\varepsilon$.

Когато две множества A и B от рационални числа образуват база на реално число, ще изразяваме това, като въведем за тази база означението (A, B). Ще считаме, че всяка база (A, B) представя едно реално число α, и ще пишем $\alpha=(A, B)$. Множеството A ще наречем л я в о, а множеството B — д я с н о множество на базата (A, B).

Ще дадем сега следната дефиниция:

Ще казваме, че две бази (A, B) и (A', B') са е к в и в а л е н т н и помежду си, и ще пишем $(A, B)=(A', B')$, ако от

$$a\in A,\ b\in B,\ a'\in A',\ b'\in B'$$

следва, че

$$a\leqq b' \quad \text{и} \quad a'\leqq b.$$

За да имаме обаче правото да пишем знака „=" между две еквивалентни бази, трябва да покажем, че ако (A, B), (A', B'), (A'', B'') са три бази и ако $(A, B)=(A', B')$, $(A, B)=(A'', B'')$, то $(A', B')=(A'', B'')$. Да допуснем, че последното равенство не е изпълнено. Тогава или ще съществуват числа a' от A' и b'' от B'', такива, че $a'>b''$, или ще съществуват числа a'' от A'' и b' от B', такива, че $a''>b'$. Да разгледаме първия от тези два случая (вторият се разглежда аналогично). Тъй като числото $\varepsilon=a'-b''$ в този случай е положително, то съгласно свойство 2) от дефиницията на база ще съществуват числа a от A и b от B, такива, че $b-a<\varepsilon$. Но от равенството $(A, B)=(A', B')$ следва, че $a'\leqq b$, а от равенството $(A, B)=(A'', B'')$ — че $a\leqq b''$. Така получаваме

$$b-a<a'-b''\leqq b-a,$$

т. е. $b-a<b-a$. Полученото противоречие показва, че $(A', B')=(A'', B'')$.

Ще считаме, че всички еквивалентни помежду си бази представят едно и също реално число. Ако например (A, B) и (A', B') са две еквивалентни помежду си бази, те представят едно и също число α и ние можем да пишем $\alpha=(A, B)$ или пък $\alpha=(A', B')$. По този начин вече сме построили множеството на реалните числа.*

Когато ни е дадена една база (A, B), има две възможности: или съществува едно рационално число r, такова, че за всяко a от A е изпълнено неравенството $a\leqq r$, а за всяко b от B — неравенството $r\leqq b$ (т. е. такова число r, което се намира, така да се каже, м е ж д у множествата A и B), или пък такова число r не съществува. Ще видим веднага с примери, че тези два случая наистина се срещат. В първия случай ще казваме, че базата (A, B) е р а ц и о н а л н а и че тя представя едно р а ц и о н а л н о число — именно онова рационално число r, което удовлетворява посочените по-горе неравенства. Във втория случай ще казваме, че базата (A, B) е и р а ц и о н а л н а и че тя представя едно и р а ц и о н а л н о число.

Необходимо е при това да отбележим, че когато една база (A, B) е рационална, тя представя едно единствено рационално число r, т. е. че не е възможно да съществуват две различни рационални числа r и r', удовлетворяващи едновременно неравенствата $a\leqq r$ и $a\leqq r'$ за всички числа a от A и неравенствата $b\geqq r$ и $b\geqq r'$ за всички b от B. Наистина, ако това би било възможно и ако например $r<r'$, то при всеки избор на числата a от A и b от B бихме имали $b-a\geqq r'-r$, което противоречи на свойството 2) от дефиницията на база.

Също така е необходимо да знаем, че ако една база (A, B) представя едно рационално число r, то всяка еквивалентна на нея база (A', B') представя същото рационално число r. Но ако това не е така, то или ще съществува число a_0' от A', за което $a_0'>r$, или ще съществува число b_0' от B', за което $b_0'<r$. Да разгледаме първия от тези два случая (във втория случай се разсъждава аналогично). Тогава от неравенството $a\leqq r$, валидно за всяко a от A, и от неравенството $b\geqq a_0'$, изпълнено за всяко b от B, ще следва, че неравенството $b-a\geqq a_0'-r$ е в сила при всеки избор на числата a от A и b от B, което отново противоречи на свойството 2) от дефиницията на база.

Ще посочим сега примери за рационални и ирационални бази. Нека r е рационално число. То може да бъде представено по различни начини чрез база на реално число. Ето няколко примера за такова представяне:

1) множеството A се състои от числата от вида $r-\frac{1}{n}$, а множеството B — от числата от вида $r+\frac{1}{n}$ $(n=1, 2, \ldots)$;

* За читателя, привикнал към по-абстрактни разсъждения и запознат с понятието релация на еквивалентност, ще отбележим следното. Въведеното по-горе понятие еквивалентност между две бази представлява наистина една релация на еквивалентност — рефлексивността и симетричността на тази релация са очевидни, а нейната транзитивност бе току-що установена. Вместо да казваме, че еквивалентните помежду си бази „представят" едно реално число, по-добре би било, разбира се,

2) множеството A се състои от всички рационални числа a, удовлетворяващи неравенството $a<r$, а множеството B — от всички рационални числа b, удовлетворяващи неравенството $b>r$;

3) множеството A е съставено от всички рационални числа a, удовлетворяващи неравенството $a\leqq r$, а множеството B — от всички рационални числа b, удовлетворяващи неравенството $b>r$;

4) множеството A е съставено от всички рационални числа a, удовлетворяващи неравенството $a<r$, а множеството B — от всички рационални числа b, удовлетворяващи неравенството $b\geqq r$;

5) множеството A се състои от всички рационални числа a, удовлетворяващи неравенството $a\leqq r$, а множеството B — от всички рационални числа b, удовлетворяващи неравенството $b\geqq r$;

6) множеството A се състои от всички рационални числа a, удовлетворяващи неравенството $a<r$, а множеството B — от единственото число r;

7) множеството A се състои от всички рационални числа a, удовлетворяващи неравенството $a\leqq r$, а множеството B — от единственото число r;

8) множеството A се състои от единственото число r, а множеството B — от всички рационални числа b, удовлетворяващи неравенството $b>r$;

9) множеството A се състои от единственото число r, а множеството B — от всички рационални числа b, удовлетворяващи неравенството $b\geqq r$;

10) множеството A се състои от единственото число r, а множеството B — също от единственото число r.

Читателят би могъл сам да продължи този списък от различни начини за построяване на бази, представящи дадено рационално число r. В същност лесно се разбира, че тези различни начини са безбройно много. Измежду всички еквивалентни помежду си бази, представящи дадено рационално число r, ще отбележим една специална — онази, която поставихме на последно място в посочените току-що примери и при която както лявото множество A, така и дясното множество B се състоят от единственото число r. Тази база, която е в известен смисъл най-проста от всички възможни, ще наричаме с т а н д а р т н а б а з а на числото r.

Нека сега разгледаме пример на ирационална база. Да означим с A множеството от всички положителни рационални числа a, за които $a^2<2$, а с B — множеството от ония положителни рационални числа b, за които $b^2>2$. Да се убедим най-напред в това, че множествата A и B образуват база. Свойството 1) от дефиницията на база е очевидно изпълнено. За да проверим свойството 2), да вземем едно произволно положително рационално число ε, а след това едно такова естествено число n, че $\frac{1}{n}<\varepsilon$, и да разгледаме числата от вида $1+\frac{i}{n}$, където $i=0, 1, 2, \ldots, n$. Тъй като тези числа са рационални, квадратът на всяко от тях е или по-малък, или по-голям от 2 (както знаем, не съществува рационално число, чийто квадрат е 2), т. е. всяко от тях принадлежи или на A, или на B. При това първото от тези числа — числото 1, очевидно принадлежи на A, а последното — числото 2, на множеството B. Нека $1+\frac{k}{n}$ е най-голямото от числата $1+\frac{i}{n}$ $(i=0, 1, 2, \ldots, n)$, което принадлежи на множеството A. Тогава $k\leqq n-1$ и числото $1+\frac{k+1}{n}$ принадлежи на B. Но

$$\left(1+\frac{k+1}{n}\right)-\left(1+\frac{k}{n}\right)=\frac{1}{n}<\varepsilon.$$

С това и свойството 2) е установено. И така множествата A и B образуват база.

Да допуснем, че така построената база (A, B) представя някое рационално число r. За числото r (което очевидно е положително) имаме две възможности — или $r^2<2$, или $r^2>2$ (равенството $r^2=2$, както знаем, е невъзможно). Нека разгледаме най-напред случая $r^2<2$. Да изберем положителното рационално число h по такъв начин,

да се каже, че реалните числа — това са просто класовете на еквивалентност, на които с помощта на тази релация за еквивалентност се разпада множеството от всички бази.

че $(r+h)^2<2$. Това е възможно, тъй като желаното неравенство

$$r^2+2rh+h^2<2$$

ще бъде удовлетворено, ако вземем $h<1$ и освен това си осигурим неравенството

$$r^2+2rh+h<2,$$

което пък е равносилно с неравенството

$$h<\frac{2-r^2}{2r+1}.$$

Тъй като в дясната страна на последното неравенство стои положително число (поради неравенството $r^2<2$), ясно е, че то може да бъде удовлетворено. Но числото $r+h$ ще принадлежи тогава на множеството A и следователно трябва да удовлетворява неравенството $r+h\leqq r$, което е невъзможно, понеже $h>0$. И така случаят $r^2<2$ е невъзможен.

Да разгледаме случая $r^2>2$. Да потърсим сега такова положително рационално число h_1, че да имаме $(r-h_1)^2>2$, или все едно

$$r^2-2rh_1+h_1{}^2>2.$$

Това неравенство сигурно ще бъде изпълнено, ако

$$r^2-2rh_1>2.$$

Последното неравенство пък е равносилно с неравенството

$$h_1<\frac{r^2-2}{2r},$$

което (поради условието $r^2>2$) очевидно може да бъде удовлетворено за някое положително число h_1. Тогава числото $r-h_1$ ще принадлежи на множеството B и следователно ще удовлетворява неравенството $r-h_1\geqq r$. Това обаче противоречи на неравенството $h_1>0$. И така случаят $r^2>2$ е също невъзможен. Всичко това показва, че нашето допускане, според което базата $(A,\ B)$ е рационална, е погрешно. Следователно тази база е ирационална — тя представя едно ирационално число. (Читателят се досеща, разбира се, че това е числото $\sqrt{2}$.)

Реалните числа ние разделихме на две категории: рационални — които се представят посредством рационални бази, и ирационални — които се представят от ирационални бази. Както вече отбелязахме, всяко рационално число r може да бъде представено посредством някоя база (фактически посредством безбройно много еквивалентни помежду си бази), т. е. всяко рационално число r поражда, така да се каже, едно реално (или, ако се изразим с горната терминология, едно рационално реално) число. Ще отъждествим рационалното число r с породеното от него реално число и ще бележим това реално число също с r, т. е. ако $(A,\ B)$ е една база, представяща рационалното число r, ще пишем $r=(A,\ B)$. По такъв начин ще разглеждаме множеството от рационалните числа като част от множеството на реалните числа. При това множеството на реалните числа, както вече се убедихме, е едно истинско разширение на множеството на рационалните числа — то не само съдържа в себе си всички рационални числа, но съдържа и такива числа, които не са рационални и които нарекохме ирационални.*

---

* Във връзка с въведената дефиниция на понятието реално число нека забележим следното: Колкото и сложна да изглежда на пръв поглед идеята, според която едно реално число се представя с помощта на безбройно много различни (но еквивалентни помежду си) бази, тази идея не би трябвало да се схваща от читателя като съвършено нова за него. В същност по подобен начин стоят нещата и при дефиницията на рационалните числа. Това, че например дробите $\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{6}, \frac{4}{8}$ и т. н. са равни помежду си, фактически означава, че едно рационално число е представено посредством безбройно много различни двойки цели числа. Разбира се, при реалните числа случаят е все пак по-сложен, тъй като базата на едно реално число вече не е двойка числа, а двойка множества, всяко от които се състои от едно или повече (в общия случай безбройно много) рационални числа.

Тъй като в по-нататъшното изложение ще срещаме както рационални числа, разбирани в стария смисъл, така и рационални реални числа, ние, макар че обикновено няма да правим разлика между тези две понятия, когато все пак се налага да ги различим, ще означаваме първото от тях с термина *аритметично рационално число*, а второто — с термина *реално рационално число*.

§ 2. Сума и разлика на реални числа

Нека $\alpha_1=(A_1,\ B_1)$ и $\alpha_2=(A_2,\ B_2)$ са две реални числа. Да означим с A множеството на всички аритметични рационални числа, имащи вида a_1+a_2, където $a_1\in A_1$, а $a_2\in A_2$, а с B — множеството на всички аритметични рационални числа от вида b_1+b_2, където $b_1\in B_1$, $b_2\in B_2$. Лесно се вижда, че множествата A и B образуват база. Наистина от неравенствата $a_1\leqq b_1$, $a_2\leqq b_2$ следва неравенството $a_1+a_2\leqq b_1+b_2$. Освен това, ако ε е произволно положително (аритметично рационално) число, ще съществуват a_1 от A_1 и b_1 от B_1, такива, че $b_1-a_1<\frac{\varepsilon}{2}$, и също тъй ще съществуват a_2 от A_2 и b_2 от B_2, такива, че $b_2-a_2<\frac{\varepsilon}{2}$. Тогава $(b_1+b_2)-(a_1+a_2)<\varepsilon$. Числото $\alpha=(A,\ B)$ ще наречем по дефиниция *сума* на числата α_1 и α_2 и ще пишем

$$\alpha=\alpha_1+\alpha_2, \quad \text{или} \quad (A,\ B)=(A_1,\ B_1)+(A_2,\ B_2).$$

Преди всичко необходимо е да се убедим, че дадената дефиниция на сума на две реални числа е коректна, т. е. че тя не зависи от избора на базите, с които сме си послужили за представянето на тези две числа. Наистина, ако

(1) $$(A_1,\ B_1)=(A_1',\ B_1'), \qquad (A_2,\ B_2)=(A_2',\ B_2'),$$

то

(2) $$(A_1,\ B_1)+(A_2,\ B_2)=(A_1',\ B_1')+(A_2',\ B_2').$$

Това се вижда веднага, тъй като при $a_1\in A_1$, $b_1\in B_1$, $a_1'\in A_1'$, $b_1'\in B_1'$, $a_2\in A_2$, $b_2\in B_2$ ($a_2'\in A_2'$, $b_2'\in B_2'$ неравенствата $a_1\leqq b_1'$, $a_1'\leqq b_1$, $a_2\leqq b_2'$, $a_2'\leqq b_2$, които са в сила поради равенствата (1), осигуряват неравенствата

$$a_1+a_2\leqq b_1'+b_2' \quad \text{и} \quad a_1'+a_2'\leqq b_1+b_2,$$

които пък означават, че е в сила равенството (2).

Да отбележим още, че, както не е трудно да се види, в случая на рационални реални числа въведената дефиниция на сума води до същия резултат, до който стигаме при събирането на аритметичните рационални числа, т. е. че ако r_1 и r_2 са две аритметични рационални числа и $r_1+r_2=r$ и ако, от друга страна,

(3) $$r_1=(A_1,\ B_1), \quad r_2=(A_2,\ B_2),$$

то

(4) $$r=(A_1,\ B_1)+(A_2,\ B_2).$$

Наистина поради равенствата (3) при $a_1 \in A_1$, $b_1 \in B_1$, $a_2 \in A_2$, $b_2 \in B_2$ ще имаме винаги

$$a_1 \leqq r_1 \leqq b_1, \quad a_2 \leqq r_2 \leqq b_2,$$

откъдето получаваме

$$a_1 + a_2 \leqq r_1 + r_2 \leqq b_1 + b_2,$$

а оттук следва равенството (4).

Като вземем пред вид, че за аритметичните рационални числа са валидни комутативният и асоциативният закон, лесно е да се убедим (ще предоставим тук подробните разсъждения на читателя), че тези закони остават в сила и за реалните числа. Комутативният закон, както е известно, се изразява с равенството

$$\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha_2 + \alpha_1,$$

а асоциативният — с равенството

$$(\alpha_1 + \alpha_2) + \alpha_3 = \alpha_1 + (\alpha_2 + \alpha_3),$$

валидни при всеки избор на реалните числа $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$. Асоциативният закон ни дава възможност да дефинираме понятието сума (посредством метода на пълната математична индукция) не само за две, а за произволен краен брой събираеми.

Нека сега $\alpha = (A, B)$ е някакво произволно взето реално число. Да означим с B^- множеството на всички числа от вида $-b$, където $b \in B$, а с A^- — множеството на всички числа от вида $-a$, където $a \in A$, и да проверим, че двойката (B^-, A^-) е една база. Наистина от неравенството $a \leqq b$, валидно винаги когато $a \in A$, $b \in B$, следва неравенството $-b \leqq -a$. Ако $\varepsilon > 0$, то съществуват $a \in A$ и $b \in B$, такива, че $b - a < \varepsilon$. Но тогава ще имаме също $(-a) - (-b) < \varepsilon$. Реалното число, определено от базата (B^-, A^-), ще наречем п р о т и в о п о л о ж н о на реалното число $\alpha = (A, B)$ и ще го бележим с $-\alpha$.

Лесно се съобразява (нека читателят сам извърши необходимите разсъждения), че:

а) дадената дефиниция на реалното число $-\alpha$ е коректна, т. е. не зависи от избора на базата, с която сме представили реалното число α;

б) за всяко рационално число r, разглеждано като реално число, неговото противоположно реално число $-r$ съвпада с онова, което се определя от аритметичното рационално число $-r$;

в) за всяко реално число α имаме $-(-\alpha) = \alpha$.

Също така лесно се вижда, че за всяко реално число е изпълнено равенството

$$\alpha + (-\alpha) = 0. \tag{5}$$

Наистина нека $\alpha = (A, B)$. Съгласно дефиницията за сума на две реални числа ще получим една база (C, D) на реалното число $\alpha + (-\alpha)$, ако означим с C множеството, което се състои от всички числа, имащи вида $a - b$, а с D — множеството, състоящо се от числата от вида $b - a$, където $a \in A$, $b \in B$. Тъй като очевидно имаме винаги

$$a - b \leqq 0 \leqq b - a,$$

базата (C, D) представя рационалното число 0. И така равенството (5) е доказано.

Друго равенство, което съгласно нашата програма от уводната част на курса следва да бъде установено за всяко реално число α, е равенството

$$\alpha + 0 = \alpha. \tag{6}$$

То обаче е очевидно, тъй като, ако $\alpha = (A, B)$ и ако съберем базата (A, B) със стандартната база, представяща числото 0, ще получим за сумата $\alpha + 0$ отново базата (A, B).

Сега вече можем да докажем и следното свойство на реалните числа: ако α и β са две реални числа, то съществува, и то едно единствено реално число ξ, удовлетворяващо равенството

$$\alpha + \xi = \beta. \tag{7}$$

Бихме могли да се изразим също и така: съществува едно единствено решение на уравнението (7), в което α и β са две дадени реални числа, а ξ е неизвестно.

Наистина да поставим на мястото на ξ реалното число $\beta + (-\alpha)$. Ще имаме

$$\alpha + [\beta + (-\alpha)] = \alpha + [(-\alpha) + \beta] = [\alpha + (-\alpha)] + \beta = 0 + \beta = \beta + 0 = \beta.$$

По този начин е показано, че реалното число $\beta + (-\alpha)$ е решение на уравнението (7). За да видим, че това уравнение няма други решения, нека означим с γ кое да е негово решение, т. е. нека $\alpha + \gamma = \beta$. Тогава ще имаме

$$\begin{aligned} \gamma = \gamma + 0 &= \gamma + [\alpha + (-\alpha)] \\ &= (\gamma + \alpha) + (-\alpha) \\ &= (\alpha + \gamma) + (-\alpha) = \beta + (-\alpha). \end{aligned}$$

И така реалното число $\beta + (-\alpha)$ е единственото решение на уравнението (7). Това число ще означаваме за по-кратко с $\beta - \alpha$ и ще наричаме *разлика* на реалните числа β и α. Следователно можем да пишем

$$\alpha + (\beta - \alpha) = \beta.$$

От дефиницията на разлика непосредствено следва например, че за всяко реално число α имаме

$$\alpha - 0 = \alpha \quad \text{и} \quad 0 - \alpha = -\alpha.$$

Лесно се вижда също, че ако α и β са две реални числа, то

$$-(\alpha + \beta) = (-\alpha) + (-\beta)$$

и

$$-(\alpha - \beta) = \beta - \alpha.$$

§ 3. Нареждане на реалните числа. Абсолютна стойност

Дадено реално число $\alpha = (A, B)$ ще наричаме по дефиниция п о л о ж и т е л н о и ще пишем $\alpha > 0$ или $(A, B) > 0$, когато множеството A съдържа поне едно положително (аритметично рационално) число a. За да се убедим, че току-що дадената дефиниция е коректна, да допуснем, че $(A, B) = (A_1, B_1)$ и че $(A, B) > 0$. Тогава съществува такова a от A, за което имаме $a > 0$. Съгласно свойството 2) от дефиницията на база ще съществуват такива a_1 от A_1 и b_1 от B_1, че $b_1 - a_1 < a$. Оттук получаваме $a_1 > b_1 - a$. Но поради равенството $(A, B) = (A_1, B_1)$ ще имаме $a \leqq b_1$, поради което заключаваме, че $a_1 > 0$. И така $(A_1, B_1) > 0$. С това коректността на дефиницията на понятието положително реално число е установена.

Ще казваме, че реалното число α е о т р и ц а т е л н о, и ще пишем $\alpha < 0$, когато имаме $-\alpha > 0$. Очевидно тази дефиниция е равносилна на следната: реалното число $\alpha = (A, B)$ ще наричаме отрицателно, когато множеството B съдържа поне едно отрицателно (аритметично рационално) число b.

От казаното е ясно, че противоположното на едно положително реално число е отрицателно и обратно, а също, че всяко различно от нула реално число е или положително, или отрицателно. Единствено числото 0 не е нито положително, нито отрицателно.

Когато са ни дадени две реални числа α и β, ще казваме, че α е п о-г о л я м о от β (или че β е п о-м а л к о от α), и ще пишем $\alpha > \beta$ или $\beta < \alpha$ тогава, когато реалното число $\alpha - \beta$ е положително.

Ясно е, че ако $\alpha \neq \beta$, то сигурно $\alpha > \beta$ или $\beta > \alpha$. По такъв начин реалните числа могат да се сравняват по големина. Това имаме пред вид, когато казваме, че в множеството на реалните числа е въведено едно *нареждане* или че това множество е *наредено*.

С цел да придадем на дефиницията на неравенството $\alpha > \beta$ такава форма, която да бъде по-удобна за работа, да предположим, че $\alpha = (A, B)$, $\beta = (C, D)$. Като си спомним дефиницията на разлика на две числа, виждаме, че реалното число $\alpha - \beta$ може да бъде представено чрез една база, лявото множество на която се състои от всички числа от вида $a - d$, където $a \in A$, $d \in D$. Тогава, вземайки пред вид дефиницията на положително реално число, можем да изкажем следното правило: ако $\alpha = (A, B)$ и $\beta = (C, D)$, то неравенството $\alpha > \beta$ означава, че съществуват поне едно a от A и поне едно d от D, такива, че $a > d$.

С помощта на изказаното правило може лесно да се покаже, че:

ако $\alpha < \beta$ и $\beta < \gamma$, то $\alpha < \gamma$;
ако $\alpha < \beta$ и $\gamma < \delta$, то $\alpha + \gamma < \beta + \delta$;
ако $\alpha < \beta$, то $-\alpha > -\beta$.

Ще казваме, че за две реални числа α и β е изпълнено нестрогото неравенство $\alpha \leqq \beta$, когато имаме или $\alpha < \beta$, или $\alpha = \beta$. Нека $\alpha = (A, B)$, $\beta = (C, D)$. Спомняйки си дефиницията на равенството $(A, B) = (C, D)$ и на строгото неравенство $(A, B) < (C, D)$, можем да заключим, че нестрогото неравенство $\alpha \leqq \beta$, или $(A, B) \leqq (C, D)$, е равносилно с изискването за всяко a от A и за всяко d от D да е изпълнено неравенството $a \leqq d$.

От последната бележка непосредствено следва, че ако $\alpha \leqq \beta$ и $\alpha \geqq \beta$, то $\alpha = \beta$.

Без труд се проверява също, че:

ако $\alpha \leqq \beta$ и $\beta \leqq \gamma$, то $\alpha \leqq \gamma$;
ако $\alpha \leqq \beta$ и $\gamma \leqq \delta$, то $\alpha + \gamma \leqq \beta + \delta$;
ако $\alpha \leqq \beta$, то $-\alpha \geqq -\beta$.

Когато едното от двете реални числа, които сравняваме, е рационално, дадените по-горе дефиниции за неравенства могат малко да се опростят. А именно ако $\alpha = (A, B)$ е едно реално, а r — едно рационално число, то неравенството $\alpha > r$ е равносилно с изискването да съществува такова a от A, за което да имаме $a > r$, а неравенството $\alpha < r$ — с изискването за някое b от B да имаме $b < r$. Нестрогото пък неравенство $\alpha \leqq r$ означава, че имаме $a \leqq r$ за всяко a от A, а нестрогото неравенство $\alpha \geqq r$ — аналогично, че имаме $b \geqq r$ за всяко b от B. Оттук между другото следва, че ако $\alpha = (A, B)$, то

$$a \leqq \alpha \leqq b$$

за всяко a от A и за всяко b от B.

Най-сетне, ако r_1 и r_2 са две реални рационални числа, то неравенството $r_1 < r_2$ (както и нестрогото неравенство $r_1 \leqq r_2$) очевидно е изпълнено тогава и само тогава, когато то е изпълнено между тях, разглеждани като аритметични рационални числа.

По-голямото от числата α и $-\alpha$ наричаме **а б с о л ю т н а с т о й н о с т** на числото α и го бележим с $|\alpha|$. Ясно е, че винаги $|\alpha| \geqq 0$, като при това $|\alpha| > 0$, ако $\alpha \neq 0$. От друга страна, $|0| = 0$.

Нека α и β са две реални числа. От неравенствата

$$\alpha \leqq |\alpha| \quad \text{и} \quad \beta \leqq |\beta|$$

следва, че

$$\alpha + \beta \leqq |\alpha| + |\beta|,$$

а от неравенствата

$$-\alpha \leqq |\alpha| \quad \text{и} \quad -\beta \leqq |\beta|$$

следва неравенството

$$-(\alpha + \beta) \leqq |\alpha| + |\beta|.$$

Оттук получаваме важното неравенство

$$|\alpha + \beta| \leqq |\alpha| + |\beta|.$$

От равенството пък

$$\alpha = (\alpha - \beta) + \beta$$

следва

$$|\alpha| \leqq |\alpha - \beta| + |\beta|,$$

откъдето получаваме

$$|\alpha - \beta| \geqq |\alpha| - |\beta|.$$

§ 4. Произведение и частно на реални числа

Като си спомним дефиницията за база на реално число, както и тази за еквивалентност на две бази, лесно можем да се убедим (подробностите предоставяме на читателя) във верността на следното твърдение:

Нека (A, B) е база и нека $a' \in A$, $b' \in B$. Ако A' е множеството от всички числа a от A, удовлетворяващи неравенството $a \geqq a'$, а B' — множеството от всички b от B, които удовлетворяват неравенството $b \leqq b'$, то двойките множества (A', B), (A, B') и (A', B') са също бази и при това бази, еквивалентни на базата (A, B).

Ако $\alpha = (A, B)$ е едно **п о л о ж и т е л н о** реално число, то, избирайки числото a', за което се говори в горното твърдение, по такъв начин, че да имаме $a' > 0$, можем да получим една база (A', B), която представя същото реално число α, но която има още следното свойство — както нейното ляво, така и нейното дясно множество се състоят само от положителни числа. Такава база ще наричаме **п о л о ж и т е л н о р е д у ц и р а н а**. И така всяко положително реално число притежава поне една положително редуцирана база.

Нека сега $\alpha_1 = (A_1, B_1)$ и $\alpha_2 = (A_2, B_2)$ са две **п о л о ж и т е л н и** реални числа, представени с някои свои положително редуцирани бази. Да означим с A множеството на всички числа от вида $a_1 a_2$, където $a_1 \in A_1$, $a_2 \in A_2$, а с B — множеството на всички числа от вида $b_1 b_2$, където $b_1 \in B_1$, $b_2 \in B_2$. Нека проверим сега, че множествата A и B образуват база. Като вземем пред вид, че (A_1, B_1) и (A_2, B_2) бяха положително редуцирани бази, веднага виждаме, че от неравенствата $a_1 \leqq b_1$, $a_2 \leqq b_2$ следва неравенството $a_1 a_2 \leqq b_1 b_2$, с което свойството 1) от дефиницията на база е проверено. За да проверим свойството 2), да вземем едно произволно положително (аритметично рационално) число ε и да фиксираме след това (също по произволен начин) едно число b_1' от B_1 и едно число b_2' от B_2. За положителното число $\varepsilon' = \dfrac{\varepsilon}{b_1' + b_2'}$ ще съществуват числа a_1 от A_1, b_1 от B_1, a_2 от A_2 и b_2 от B_2, такива, че $b_1 - a_1 < \varepsilon'$ и $b_2 - a_2 < \varepsilon'$. При това можем очевидно да считаме, че $b_1 \leqq b_1'$.

Тогава

$$b_1 b_2 - a_1 a_2 = b_1 b_2 - b_1 a_2 + b_1 a_2 - a_1 a_2$$

$$= b_1(b_2 - a_2) + a_2(b_1 - a_1) < b_1' \varepsilon' + b_2' \varepsilon' = \varepsilon'(b_1' + b_2') = \varepsilon.$$

И така множествата A и B наистина образуват база. Реалното число $\alpha = (A, B)$ ще наречем по дефиниция *произведение* на числата $\alpha_1 = (A_1, B_1)$ и $\alpha_2 = (A_2, B_2)$ и ще пишем

$$\alpha = \alpha_1 \alpha_2, \quad \text{или} \quad (A, B) = (A_1, B_1)(A_2, B_2).$$

Не е трудно да се убедим, че току-що дадената дефиниция е коректна, т. е. че тя не зависи от специалния избор на базите (A_1, B_1) и (A_2, B_2), стига те да са положително редуцирани. Наистина нека $(A_1, B_1) = (A_1', B_1')$ и $(A_2, B_2) = (A_2', B_2')$, като при това и четирите бази, които участвуват в тези равенства, са положително редуцирани. Ако $a_1 \in A_1$, $b_1 \in B_1$, $a_1' \in A_1'$, $b_1' \in B_1'$, $a_2 \in A_2$, $b_2 \in B_2$, $a_2' \in A_2'$, $b_2' \in B_2'$, то от дефиницията за равенство на две бази ще следва, че

$$a_1 \leqq b_1', \quad a_1' \leqq b_1, \quad a_2 \leqq b_2', \quad a_2' \leqq b_2,$$

откъдето ще получим

$$a_1 a_2 \leqq b_1' b_2', \quad a_1' a_2' \leqq b_1 b_2.$$

А това означава, че е в сила равенството

$$(A_1, B_1)(A_2, B_2) = (A_1', B_1')(A_2', B_2').$$

Нека отбележим веднага, че ако r_1 и r_2 са две рационални положителни реални числа, то произведението им, получено съгласно горната дефиниция, съвпада, както веднага се вижда, с реалното число, породено от аритметичното рационално число $r_1 r_2$.

(За да се убедим в това, достатъчно е да представим тези две рационални числа посредством техните стандартни бази.)

Също така лесно се установява, че:

ако $0<\alpha<\beta$ и $0<\gamma<\delta$, то $\alpha\gamma<\beta\delta$,
ако $0<\alpha\leqq\beta$ и $0<\gamma\leqq\delta$, то $\alpha\gamma\leqq\beta\delta$.

След като разполагаме с дефиницията за произведение на две положителни реални числа, произведението на две произволни реални числа ще дефинираме по следния начин:

$$(1)\qquad \alpha\beta=\begin{cases} |\alpha|.|\beta|, \text{ ако } \alpha>0,\ \beta>0 \text{ или } \alpha<0,\ \beta<0;\\ -(|\alpha|.|\beta|), \text{ ако } \alpha>0,\ \beta<0 \text{ или } \alpha<0,\ \beta>0;\\ 0, \text{ ако } \alpha=0 \text{ или } \beta=0.\end{cases}$$

От тази дефиниция следва веднага, че за всеки две реални числа α и β имаме

$$|\alpha\beta|=|\alpha|.|\beta|.$$

Лесно може да се види, че за произведението на реални числа остават в сила комутативният и асоциативният закон, изразени чрез равенствата

$$\alpha\beta=\beta\alpha$$

и

$$(\alpha\beta)\,\gamma=\alpha(\beta\gamma).$$

Най-напред тези две равенства се установяват в случая, когато всички участвуващи в тях реални числа са положителни (в този случай те се явяват следствие от факта, че комутативният, съответно асоциативният закон е в сила за произведението на аритметични рационални числа), а след това общата им валидност се проверява въз основа на дефиниционното равенство (1). Нека споменем още, че асоциативният закон ни позволява да говорим за произведение не само на две, но и на произволен краен брой реални числа.

Валиден е също и т. нар. дистрибутивен закон, изразяващ се с равенството

$$\alpha(\beta+\gamma)=\alpha\beta+\alpha\gamma.$$

Той може да бъде установен най-напред в случая, когато $\alpha>0$ и $\beta>\gamma>0$ въз основа на дистрибутивния закон при аритметичните рационални числа, и след това в общия случай с помощта на дефиниционното равенство (1).

Нека сега отново $\alpha=(A, B)$ е едно п о л о ж и т е л н о реално число и базата (A, B) е положително редуцирана. Ще означим с B^* множеството на всички аритметични рационални числа, имащи вида $\frac{1}{b}$, където $b\in B$, а с A^* — множеството на всички аритметични рационални числа от вида $\frac{1}{a}$, където $a\in A$. Лесно се вижда, че двойката (B^*, A^*) е една база на реално число. Наистина от неравенството $a\leqq b$ следва (тъй като $a>0$) неравенството $\frac{1}{b}\leqq\frac{1}{a}$ и с това е проверено свойство 1) от дефиницията на база. За да проверим свойството 2), нека иземем едно произволно положително аритметично рационално число ε и нека освен това означим с a_0 едно такова положително аритметично рационално число, което принадлежи на A. След това да вземем такова число a от A и b от B, че $b-a<\varepsilon a_0^2$. Можем при това да считаме, че $a\geqq a_0$. Но тогава

$$\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=\frac{b-a}{ab}<\frac{\varepsilon a_0^2}{a_0^2}=\varepsilon.$$

И така двойката (B^*, A^*) е база на едно реално число (което при това е очевидно положително). Това число ще наречем о б р а т н о на положителното реално число $\alpha=(A, B)$ и ще го бележим с $\frac{1}{\alpha}$.

Лесно се вижда (отново ще предоставим на читателя сам да се увери в това), че дадената дефиниция на реалното число $\frac{1}{\alpha}$ е коректна, т. е. че тя не зависи от избора на базата (A, B), с помощта на която сме представили положителното реално число α (стига тази база да е положително редуцирана).

Ако α е едно отрицателно реално число, то неговото обратно число $\frac{1}{\alpha}$ ще дефинираме с равенството

$$\frac{1}{\alpha}=-\left(\frac{1}{-\alpha}\right).$$

Очевидно обратното на едно отрицателно реално число е също отрицателно. За числото 0 не дефинираме обратно число.

Читателят лесно ще установи, че когато r е рационално реално число, различно от 0, неговото обратно реално число съвпада с онова, което се определя от аритметичното рационално число $\frac{1}{r}$.

Също така лесно се показва, че за всяко реално число $\alpha\neq0$ имаме

$$\frac{1}{\frac{1}{\alpha}}=\alpha$$

и че ако $\alpha\neq0$ и $\beta\neq0$, то

$$\frac{1}{\alpha\beta}=\frac{1}{\alpha}\cdot\frac{1}{\beta}.$$

Нека да установим сега, че ако $\alpha\neq0$, винаги имаме

$$(2)\qquad \alpha\cdot\frac{1}{\alpha}=1.$$

Най-напред ще разгледаме случая, когато $\alpha>0$. Ако $\alpha=(A, B)$, където (A, B) е някоя положително редуцирана база, то, както знаем, $\frac{1}{\alpha}=(B^*, A^*)$, където B^* и A^* са множествата, които бяха въведени по-горе. Съгласно дефиницията на произведение на положителни реални числа ще получим една база (C, D) на реалното число $\alpha\cdot\frac{1}{\alpha}$, ако означим с C множеството на всички числа от вида $\frac{a}{b}$, а с D — множеството на всички числа от вида $\frac{b}{a}$, където $a\in A$, $b\in B$. Но очевидно имаме винаги

$$\frac{a}{b}\leqq1\leqq\frac{b}{a},$$

което показва, че базата (C, D) представя рационалното число 1. С това равенството (2) е доказано, когато $\alpha>0$. Когато пък $\alpha<0$, равенството (2) се проверява по следния начин:

$$\alpha\cdot\frac{1}{\alpha}=\alpha\cdot\left[-\frac{1}{-\alpha}\right]=(-\alpha)\left(\frac{1}{-\alpha}\right)=1.$$

Друго важно за нас равенство е

(3) $$\alpha . 1 = \alpha,$$

валидно за всяко реално число α. То се проверява непосредствено в случая, когато $\alpha > 0$, като за целта представяме числото 1 чрез неговата стандартна база. Когато пък $\alpha < 0$, то се получава така:

$$\alpha . 1 = -(|\alpha| . 1) = -|\alpha| = -(-\alpha) = \alpha.$$

Най-сетне, когато $\alpha = 0$, равенството (3) е очевидно.

От равенството (3) лесно можем да получим за произволно реално число α и равенството

(4) $$\alpha . (-1) = -\alpha.$$

Наистина, ако $\alpha > 0$, то

$$\alpha(-1) = -(\alpha . |-1|) = -(\alpha . 1) = -\alpha,$$

а ако $\alpha < 0$, то

$$\alpha(-1) = |\alpha| . |-1| = (-\alpha) . 1 = -\alpha.$$

Когато пък $\alpha = 0$, равенството (4) е очевидно.

Да разгледаме сега уравнението

(5) $$\alpha \xi = \beta,$$

където α и β са дадени реални числа и при това $\alpha \neq 0$. Ще покажем, че това уравнение има, и то едно единствено решение относно неизвестното ξ. Наистина да поставим на мястото на ξ реалното число $\frac{1}{\alpha} \cdot \beta$. Ще имаме

$$\alpha\left(\frac{1}{\alpha} \cdot \beta\right) = \left(\alpha \cdot \frac{1}{\alpha}\right)\beta = 1 . \beta = \beta . 1 = \beta.$$

И така числото $\frac{1}{\alpha}\beta$ се оказа решение на уравнението (5). Това уравнение не притежава други решения, защото, ако γ е някакво произволно взето негово решение (т. е. такова реално число, за което е изпълнено равенството $\alpha\gamma = \beta$), то ще имаме

$$\gamma = \gamma . 1 = \gamma\left(\alpha \cdot \frac{1}{\alpha}\right) = (\gamma\alpha)\frac{1}{\alpha} = (\alpha\gamma)\frac{1}{\alpha} = \beta\frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\alpha}\beta.$$

Числото $\frac{1}{\alpha}\beta$, което, както видяхме, е единственото решение на уравнението (5), ще наречем *частно* на числата β и α и ще го бележим за по-кратко с $\frac{\beta}{\alpha}$. Ето защо можем да пишем

$$\alpha\frac{\beta}{\alpha} = \beta.$$

От дефиницията на частно следва например веднага, че за всяко реално число α имаме

$$\frac{\alpha}{1} = \alpha.$$

Лесно се вижда също, че при $\alpha \neq 0$ и $\beta \neq 0$ е в сила равенството

(6) $$\frac{1}{\frac{\alpha}{\beta}} = \frac{\beta}{\alpha}.$$

Наистина, като вземем пред вид, че $\alpha = \beta\frac{\alpha}{\beta}$, получаваме

$$\alpha \cdot \frac{1}{\frac{\alpha}{\beta}} = \left(\beta\frac{\alpha}{\beta}\right) \cdot \frac{1}{\frac{\alpha}{\beta}} = \beta\left(\frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{1}{\frac{\alpha}{\beta}}\right) = \beta . 1 = \beta,$$

откъдето следва равенството (6).

Ако $\alpha_1 \neq 0$ и $\alpha_2 \neq 0$, то при произволни реални числа β_1 и β_2 е в сила равенството

(7) $$\frac{\beta_1}{\alpha_1} \cdot \frac{\beta_2}{\alpha_2} = \frac{\beta_1\beta_2}{\alpha_1\alpha_2}.$$

Наистина равенството (7) следва веднага от това, че

$$(\alpha_1\alpha_2)\left(\frac{\beta_1}{\alpha_1} \cdot \frac{\beta_2}{\alpha_2}\right) = \left(\alpha_1 \cdot \frac{\beta_1}{\alpha_1}\right)\left(\alpha_2 \cdot \frac{\beta_2}{\alpha_2}\right) = \beta_1\beta_2.$$

Най-сетне при $\alpha_1 \neq 0$, $\alpha_2 \neq 0$ и $\beta_2 \neq 0$ имаме

(8) $$\frac{\frac{\beta_1}{\alpha_1}}{\frac{\beta_2}{\alpha_2}} = \frac{\beta_1\alpha_2}{\alpha_1\beta_2}.$$

Равенството (8) се получава като следствие от равенствата (6) и (7) по следния начин:

$$\frac{\frac{\beta_1}{\alpha_1}}{\frac{\beta_2}{\alpha_2}} = \frac{\beta_1}{\alpha_1} \cdot \frac{1}{\frac{\beta_2}{\alpha_2}} = \frac{\beta_1}{\alpha_1} \cdot \frac{\alpha_2}{\beta_2} = \frac{\beta_1\alpha_2}{\alpha_1\beta_2}.$$

§ 5. Принцип на Архимед и гъстота на рационалните и ирационалните числа

В предишните два параграфа бяха установени редица свойства на реалните числа, изразяващи се с помощта на неравенства. Това бяха свойства, даващи връзки между въведеното в § 3 нареждане на реалните числа, от една страна, и операциите събиране и умножение, от друга. Сега ще се спрем на други някои свойства, свързани също с нареждането на реалните числа.

Първото от тях, известно като *принцип на Архимед*, гласи: Не съществува реално число, което да бъде по-голямо от всички естествени числа. (Другояче казано, множеството на естествените числа, разглеждано като множество от реални числа, не е ограничено отгоре.)

Наистина нека $\alpha = (A, B)$ е произволно реално число и нека $b \in B$. Аритметичното рационално число b (което можем да считаме положително) има вида $b = \frac{p}{q}$, където p и q са естествени числа. Ясно е, че са в сила неравенствата $\alpha \leq b \leq p$, откъдето получаваме $\alpha < p + 1$. И тъй съществува естествено число, по-голямо от произволно взетото реално число α. С това принципът на Архимед е доказан.

Друго свойство на реалните числа е следното: Сред целите числа, ненадминаващи дадено реално число α, има винаги едно най-голямо.

За да се убедим в това, да вземем някое цяло число n_0, ненадминаващо α. Ако допуснем, че не съществува най-голямо цяло число, ненадминаващо α, то ще намерим безбройно много цели числа $n_1, n_2, n_3, \ldots$, такива, че да имаме

$$n_0 < n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$$

и $n_k \leqq \alpha$ $(k=1, 2, \ldots)$. Но $n_k \geqq n_0 + k$, откъдето ще следва, че неравенството $n_0 + k \leqq \alpha$, или $k \leqq \alpha - n_0$, е изпълнено за всяко естествено число k. Това обаче противоречи на доказания принцип на Архимед.

Следващото свойство, което ще установим, се нарича *гъстота на рационалните и ирационалните числа*. То се изразява чрез следното твърдение: Между всеки две реални числа се намират безбройно много рационални и безбройно много ирационални числа.

За да докажем това твърдение, достатъчно е да покажем, че е в сила следното: ако α и β са две реални числа, при което $\alpha < \beta$, то съществуват поне едно рационално число r и поне едно ирационално число ρ, които удовлетворяват неравенствата $\alpha < r < \beta$ и $\alpha < \rho < \beta$.

И така нека α и β са две реални числа и нека $\alpha < \beta$. Съгласно принципа на Архимед можем да намерим такова естествено число q, което да удовлетворява неравенството $q > \frac{1}{\beta - \alpha}$. Тогава ще имаме $q\beta - q\alpha > 1$. Лесно е да се убедим, че между числата $q\alpha$ и $q\beta$ се намира поне едно цяло число p. Ако допуснем, че такова цяло число не съществува, то означавайки с m най-голямото цяло число, ненадминаващо $q\alpha$, бихме имали $m \leqq q\alpha < q\beta < m+1$, откъдето $q\beta - q\alpha < 1$. И така съществува цяло число p, такова, че $q\alpha < p < q\beta$. Тогава за рационалното число $r = \frac{p}{q}$ ще имаме $\alpha < r < \beta$.

Да вземем сега някое ирационално число σ. Поради неравенството $\alpha < \beta$ ще имаме $\alpha - \sigma < \beta - \sigma$. Съгласно доказаното по-горе ще съществува рационално число r', удовлетворяващо неравенствата $\alpha - \sigma < r' < \beta - \sigma$. Оттук получаваме $\alpha < \sigma + r' < \beta$. Но числото $\rho = \sigma + r'$ е сигурно ирационално — ако допуснем, че то е рационално, то и числото $\sigma = \rho - r'$, явявайки се в такъв случай разлика на две рационални числа, би било също рационално.

С това гъстотата на рационалните и ирационалните числа е установена.

§ 6. Принцип за непрекъснатост

За едно множество M от реални числа казваме, че е ограничено отгоре, ако съществува такова реално число a_1, че за всяко a от M да имаме $a \leqq a_1$. Числото a_1 се нарича горна граница на множеството M. Аналогично едно множество M от реални числа се нарича ограничено отдолу, когато съществува такова реално число a_2, което удовлетворява неравенството $a \geqq a_2$ за всяко a от M. Числото a_2 се нарича в този случай долна граница на множеството M. Когато едно множество от реални числа е ограничено и отгоре, и отдолу, наричаме го накратко ограничено. Ясно е, че всяко ограничено отгоре множество от реални числа притежава безбройно много горни граници, а всяко ограничено отдолу множество — безбройно много долни граници. Ще установим сега следното важно твърдение, известно под името *принцип за непрекъснатост на реалните числа*:

Всяко ограничено отгоре множество от реални числа има една най-малка горна граница.

Наистина нека M е едно ограничено отгоре множество от реални числа. Да означим с C множеството на всички онези аритметични рационални числа c, които (разглеждани като реални числа) не са горни граници на множеството M (такива числа c очевидно има), а с D — множеството на всички аритметични рационални числа d, които (разглеждани като реални числа) са горни граници на множеството M (такива числа d също има, щом множеството M е ограничено отгоре). Ще докажем, че множествата C и D образуват база на реално число, т. е. че са налице свойствата 1) и 2) от дефиницията на база. Нека $c \in C$ и $d \in D$. Тъй като рационалното число c не е горна граница на множеството M, то ще съществува такова реално число $\alpha = (A, B)$, принадле-

жащо на M, щото $c < \alpha$. Това ще рече, че съществува число a от A, такова, че $c < a$. От друга страна, имаме $\alpha \leqq d$, откъдето $a \leqq d$. И тъй $c < d$. С това свойството 1) е проверено. За да установим свойството 2), нека вземем едно произволно положително (аритметично рационално) число ε и нека c_0 е някое число, принадлежащо на множеството C, а d_0 — някое число от множеството D. Да изберем цялото положително число n толкова голямо, че $\frac{d_0 - c_0}{n} < \varepsilon$, и да разгледаме числата $c_0 + \frac{k}{n}(d_0 - c_0)$, $k = 0, 1, \ldots, n$. Между тези числа има такива, които се съдържат в множеството D (такова е например числото d_0, което се получава при $k = n$), и такива, които не се съдържат в D (такова е например числото c_0, получаващо се при $k = 0$). Да означим с d_1 най-малкото от числата $c_0 + \frac{k}{n}(d_0 - c_0)$, принадлежащи на множеството D. Ако $d_1 = c_0 + \frac{k_1}{n}(d_0 - c_0)$, то рационалното число $c_1 = c_0 + \frac{k_1 - 1}{n}(d_0 - c_0)$ вече не принадлежи на D и следователно не е горна граница на множеството M, т. е. то принадлежи на C. И така ние намерихме едно число d_1 от D и едно число c_1 от C, за които имаме

$$d_1 - c_1 = \frac{1}{n}(d_0 - c_0) < \varepsilon.$$

С това е проверено и свойството 2) от дефиницията на база.

След като доказахме, че въведените от нас множества C и D образуват база, да разгледаме реалното число $\beta = (C, D)$. Ако $\alpha = (A, B)$ е произволно число от множеството M, то за всяко d от D имаме $\alpha \leqq d$. Оттук следва, че при $a \in A$ и $d \in D$ имаме винаги $a \leqq d$, което означава, че $\alpha \leqq \beta$. С това е показано, че реалното число $\beta = (C, D)$ е горна граница на множеството M.

От друга страна, нека реалното число $\gamma = (E, F)$ е някоя горна граница на множеството M и нека c е някое число от C. Тъй като c не е горна граница на M, ще съществува число $\alpha = (A, B)$ от M, за което $\alpha > c$. Оттук ще следва, че за някое a от A е изпълнено неравенството $a > c$. Но поради неравенството $\alpha \leqq \gamma$ ще имаме $a \leqq f$ за всяко f от F. И тъй $c \leqq f$ за произволно c от C и произволно f от F. Това пък означава, че е в сила неравенството $\beta \leqq \gamma$. И така реалното число β е най-малката горна граница на множеството M.

Най-малката горна граница на едно ограничено отгоре множество от реални числа се нарича негова точна горна граница. Аналогично най-голямата долна граница на едно ограничено отдолу множество от реални числа се нарича негова точна долна граница.

Съществуването на точна долна граница следва непосредствено от доказания принцип за непрекъснатост. Наистина нека M е едно ограничено отдолу множество от реални числа. Да разгледаме множеството M^-, съставено от всички реални числа от вида $-\alpha$, където $\alpha \in M$. Лесно се вижда, че множеството M^- е ограничено отгоре и че ако реалното число γ е неговата точна горна граница, то числото $-\gamma$ ще бъде точна долна граница на множеството M.

Нека забележим, че установеният в настоящия параграф принцип за непрекъснатост е едно характерно свойство на множеството на реалните числа. Той не е валиден например в множеството на рационалните числа. Наистина в § 1 на настоящото Допълнение ние построихме пример на база (A, B) с ляво множество A, състоящо се от всички положителни рационални числа a, за които $a^2 < 2$, и с дясно множество B, състоящо се от всички положителни рационални числа b, за които $b^2 > 2$. Множеството A е очевидно едно ограничено отгоре множество от рационални числа — всяко рационално число b от B е негова горна граница. Ако допуснем, че множеството A притежава за своя най-малка горна граница някое рационално число r, то това число тогава ще удовлетворява неравенствата $a \leqq r \leqq b$ за всяко a от A и за всяко b от B и базата (A, B) ще представя именно това рационално число r. Както видяхме обаче още при тогавашните наши разглеждания, базата (A, B) е ирационална, тя не може да представа никое рационално число. Следователно за ограниченото отгоре множество A от рационални числа никое рационално число не е точна горна граница — другояче казано, множеството A, разглеждано като подмножество на множеството на рационалните числа, не притежава точна горна граница.*

§ 7. Степен с рационален степенен показател

За всяко реално число α и всяко естествено число n, по-голямо от 1, под α^n (α в степен n) ще разбираме произведението на n множителя, всеки от които е равен на α. Дефинирайки отделно α^1 с равенството $\alpha^1=\alpha$, ние разполагаме с дефиницията на α^n при произволно α и за всички естествени (т. е. цели положителни) степенни показатели n. Когато реалното число α е различно от 0, а n е цяло отрицателно число, ще приемем по дефиниция, че

$$\alpha^n=\frac{1}{\alpha^{-n}}.$$

Най-сетне при $\alpha\neq 0$ ще приемем, че $\alpha^0=1$.

По такъв начин степента α^n е дефинирана за произволно, различно от 0 реално число α и всички цели степенни показатели n. Читателят лесно ще провери, че ако α и β са две реални числа, различни от нула, а m и n са две цели числа, то в сила са равенствата

$$(\alpha\beta)^n=\alpha^n\beta^n,$$
$$\alpha^{m+n}=\alpha^m\alpha^n,$$
$$(\alpha^m)^n=\alpha^{mn}.$$

Нека сега α е *положително* реално число, а n — естествено число. Да означим с A множеството на всички положителни аритметични рационални числа a, за които $a^n\leqq\alpha$ (такива числа има — ако например естественото число k удовлетворява неравенството $k>\frac{1}{\alpha}$, то $\left(\frac{1}{k}\right)^n\leqq\frac{1}{k}<\alpha$), а с B множеството на всички положителни аритметични рационални числа b, за които $b^n\geqq\alpha$ (такива числа също има — ако за естественото число k имаме $k>\alpha$, то $k^n\geqq k>\alpha$). Множествата A и B образуват база на реално число. Наистина неравенството $a\leqq b$ при произволни a от A и b от B е очевидно и с това е проверено първото от двете свойства, които трябва да притежава една база. За да проверим второто свойство, нека вземем най-напред едно произволно положително (аритметично рационално) число ε, а след това такова естествено число k, че $\frac{1}{k}<\varepsilon$. Можем при това да считаме, че числото k е взето толкова голямо, че да имаме едновременно $\left(\frac{1}{k}\right)^n<\alpha$ и $k^n>\alpha$. Тогава измежду аритметичните рационални числа от вида $\frac{i}{k}$, където $i=1, 2, \dots, k^2$, ще има както такива, които принадлежат на множеството A $\left(\text{такова е например числото } \frac{1}{k}\right)$, така и такива, които принадлежат на множеството B $\left(\text{такова е например числото } \frac{k^2}{k}=k\right)$. Ако $\frac{i_0}{k}$ е най-голямото от числата $\frac{i}{k}$, принадлежащи на A, то числото $\frac{i_0+1}{k}$ няма да принадлежи на A и следователно ще принадлежи на B. Но тогава ще имаме

* За читателя, запознат с основните понятия на абстрактната математика, ще отбележим, че съгласно изложеното в § 2 и § 4 на настоящото Допълнение, в които въведохме събирането и умножението на реални числа и изведохме основните свойства на тези операции, множеството на реалните числа представлява едно поле (комутативно тяло). Въведеното в § 3 нареждане на реалните числа и свойствата му, които го съгласуват с операциите събиране и умножение, превръщат това поле в наредено, поточно в напълно наредено или линейно наредено поле. Най-сетне току-що доказаният принцип за непрекъснатост относно въведеното нареждане показва, че множеството от реалните числа е едно непрекъснато линейно наредено поле.

$$\frac{i_0+1}{k}-\frac{i_0}{k}=\frac{1}{k}<\varepsilon.$$

И така множествата A и B образуват база на едно (очевидно положително) реално число.

Реалното число $\beta=(A, B)$ удовлетворява равенството $\beta^n=\alpha$. За да се убедим в това, достатъчно е да отбележим, че съгласно това, което знаем за умножението на положителни реални числа, ние ще получим една база (C, D) на реалното число β^n, ако съставим лявото множество C на тази база от всички числа, имащи вида a^n, където $a\in A$, а дясното ѝ множество D — от всички числа от вида b^n, където $b\in B$. Тогава от неравенствата $a^n\leqq\alpha\leqq b^n$, изпълнени за всяко a от A и всяко b от B, следва, че $\beta^n=\alpha$.

Нека забележим още, че β очевидно е единственото положително реално число, чиято n-та степен е равна на α — ако $\beta_1>\beta$, то $\beta_1{}^n>\beta^n=\alpha$, а ако $0<\beta_1<\beta$, то $\beta_1{}^n<\beta^n=\alpha$.

И така за всяко положително реално число α и за всяко естествено число n съществува, и то едно единствено положително реално число β, удовлетворяващо равенството $\beta^n=\alpha$. Това число β по-нататък ще наричаме *корен n-ти от* α и ще го бележим с $\alpha^{\frac{1}{n}}$ или $\sqrt[n]{\alpha}$ (при $n=2$ вместо $\sqrt[2]{\alpha}$ пишем $\sqrt{\alpha}$). Следователно имаме (при $\alpha>0$ и n — естествено число)

$$\left(\alpha^{\frac{1}{n}}\right)^n=\alpha. \tag{1}$$

От друга страна (отново при $\alpha>0$ и n — естествено число), в сила е и равенството

$$(\alpha^n)^{\frac{1}{n}}=\alpha. \tag{2}$$

То следва от обстоятелството, че числото $(\alpha^n)^{\frac{1}{n}}$ съгласно казаното по-горе е единственото положително число, чиято n-та степен е равна на α^n.

Ако $\alpha>0$ и $\beta>0$ са две реални числа, а n е естествено число, то ще имаме

$$(\alpha\beta)^{\frac{1}{n}}=\alpha^{\frac{1}{n}}\beta^{\frac{1}{n}}. \tag{3}$$

Наистина числото $(\alpha\beta)^{\frac{1}{n}}$ е единственото положително число, чиято n-та степен е равна на $\alpha\beta$, а в същото време имаме

$$\left(\alpha^{\frac{1}{n}}\beta^{\frac{1}{n}}\right)^n=\left(\alpha^{\frac{1}{n}}\right)^n\left(\beta^{\frac{1}{n}}\right)^n=\alpha\beta.$$

По-нататък, ако $\alpha>0$, а p и q са две естествени числа, в сила е и равенството

$$\alpha^{\frac{1}{pq}}=\left(\alpha^{\frac{1}{p}}\right)^{\frac{1}{q}}. \tag{4}$$

Действително числото $\alpha^{\frac{1}{pq}}$ е единственото положително число β, за което имаме $\beta^{pq}=\alpha$. Но, от друга страна, имаме

$$\left(\left(\alpha^{\frac{1}{p}}\right)^{\frac{1}{q}}\right)^{pq}=\left(\left(\left(\alpha^{\frac{1}{p}}\right)^{\frac{1}{q}}\right)^q\right)^p=\left(\alpha^{\frac{1}{p}}\right)^p=\alpha,$$

с което равенството (4) е установено.

Също тъй, ако $\alpha > 0$, p е цяло число, а q — естествено число, то валидно е и равенството

$$(\alpha^p)^{\frac{1}{q}} = \left(\alpha^{\frac{1}{q}}\right)^p. \tag{5}$$

Неговата вярност следва от това, че, от една страна, числото $(\alpha^p)^{\frac{1}{q}}$ е единственото положително реално число β, за което имаме $\beta^q = \alpha^p$, и че, от друга страна,

$$\left(\left(\alpha^{\frac{1}{q}}\right)^p\right)^q = \left(\alpha^{\frac{1}{q}}\right)^{pq} = \left(\left(\alpha^{\frac{1}{q}}\right)^q\right)^p = \alpha^p.$$

Равенството (5) ни позволява, когато α е п о л о ж и т е л н о реално число, а p и q — две цели числа, такива, че $q > 0$, да въведем означението $\alpha^{\frac{p}{q}}$, разбирайки под това означение което и да било от числата $(\alpha^p)^{\frac{1}{q}}$ и $\left(\alpha^{\frac{1}{q}}\right)^p$. Тъй като всяко рационално число r може да се представи във вида $r = \frac{p}{q}$, където p и q са цели числа и $q > 0$, по този начин стигаме до дефиницията на степента α^r, където α е положително, а r — рационално число. За да бъде тази дефиниция коректна, трябва да се убедим, че тя не зависи от представянето на рационалното число r във вид на частно на две цели числа с положителен знаменател. Това обаче е така, защото, ако p, q и s са три цели числа и ако $q > 0$ и $s > 0$, то

$$\alpha^{\frac{sp}{sq}} = \left(\alpha^{\frac{1}{sq}}\right)^{sp} = \left(\left(\left(\alpha^{\frac{1}{q}}\right)^{\frac{1}{s}}\right)^s\right)^p = \left(\alpha^{\frac{1}{q}}\right)^p = \alpha^{\frac{p}{q}}.$$

И така вече разполагаме с дефиницията на степента α^r винаги когато α е положително реално число, а r — рационално число. Нека отбележим, че числото α^r е винаги положително.

Освен това е ясно, че ако $r \geqq 0$, то при $0 < \alpha \leqq 1$ имаме $\alpha^r \leqq 1$, а при $\alpha \geqq 1$ имаме $\alpha^r \geqq 1$. (Тези неравенства се проверяват най-напред за случая $r = \frac{1}{n}$, където n е естествено число, а след това за произволно положително рационално число r. При $r = 0$ те са очевидни.) Оттук следва че:

1) ако $r_1 \leqq r_2$, то при $\alpha \geqq 1$ ще бъде изпълнено неравенството $\alpha^{r_1} \leqq \alpha^{r_2}$, а при $0 < \alpha \leqq 1$ — неравенството $\alpha^{r_1} \geqq \alpha^{r_2}$;

2) ако $r \geqq 0$ и $0 < \alpha \leqq \beta$, то $\alpha^r \leqq \beta^r$.

Лесно се вижда, че ако α и β са две положителни реални числа, а r — рационално число, то в сила е равенството

$$(\alpha\beta)^r = \alpha^r \beta^r. \tag{6}$$

Наистина, ако $r = \frac{p}{q}$, където p и q са цели числа и $q > 0$, ще имаме

$$(\alpha\beta)^r = (\alpha\beta)^{\frac{p}{q}} = \left((\alpha\beta)^{\frac{1}{q}}\right)^p = \left(\alpha^{\frac{1}{q}} \beta^{\frac{1}{q}}\right)^p$$
$$= \left(\alpha^{\frac{1}{q}}\right)^p \left(\beta^{\frac{1}{q}}\right)^p = \alpha^{\frac{p}{q}} \beta^{\frac{p}{q}} = \alpha^r \beta^r.$$

Ако α е положително реално число, а r_1 и r_2 са две рационални числа, то валидни са и равенствата

$$\alpha^{r_1 + r_2} = \alpha^{r_1} \alpha^{r_2}$$

и

$$(\alpha^{r_1})^{r_2} = \alpha^{r_1 r_2}. \tag{8}$$

Наистина нека $r_1 = \frac{p_1}{q_1}$, $r_2 = \frac{p_2}{q_2}$, където p_1 и p_2 са цели, а q_1 и q_2 — цели положителни числа. Тогава

$$\alpha^{r_1 + r_2} = \alpha^{\frac{p_1}{q_1} + \frac{p_2}{q_2}} = \alpha^{\frac{p_1 q_2 + q_1 p_2}{q_1 q_2}} = \left(\alpha^{\frac{1}{q_1 q_2}}\right)^{p_1 q_2 + q_1 p_2}$$
$$= \left(\alpha^{\frac{1}{q_1 q_2}}\right)^{p_1 q_2} \left(\alpha^{\frac{1}{q_1 q_2}}\right)^{q_1 p_2} = \alpha^{\frac{p_1 q_2}{q_1 q_2}} \alpha^{\frac{q_1 p_2}{q_1 q_2}} = \alpha^{\frac{p_1}{q_1}} \alpha^{\frac{p_2}{q_2}} = \alpha^{r_1} \alpha^{r_2},$$

с което равенството (7) е доказано. Равенството (8) пък се получава така:

$$(\alpha^{r_1})^{r_2} = \left(\alpha^{\frac{p_1}{q_1}}\right)^{\frac{p_2}{q_2}} = \left(\left(\left(\alpha^{\frac{1}{q_1}}\right)^{p_1}\right)^{\frac{1}{q_2}}\right)^{p_2} = \left(\left(\left(\alpha^{\frac{1}{q_1}}\right)^{\frac{1}{q_2}}\right)^{p_1}\right)^{p_2}$$
$$= \left(\alpha^{\frac{1}{q_1 q_2}}\right)^{p_1 p_2} = \alpha^{\frac{p_1 p_2}{q_1 q_2}} = \alpha^{r_1 r_2}.$$

В заключение на настоящия параграф нека отбележим следното. Ние дефинирахме степента $\alpha^{\frac{1}{n}}$, когато α е положително реално число, а n — произволно естествено число. Когато естественото число n е нечетно, можем да дефинираме $\alpha^{\frac{1}{n}}$ и за отрицателни реални числа и с помощта на равенството

$$\alpha^{\frac{1}{n}} = -(-\alpha)^{\frac{1}{n}}.$$

В този случай равенствата (1) и (2) отново са в сила. Наистина при $\alpha < 0$ и нечетно n имаме

$$\left(\alpha^{\frac{1}{n}}\right)^n = \left(-(-\alpha)^{\frac{1}{n}}\right)^n = (-1)^n \left((-\alpha)^{\frac{1}{n}}\right)^n = (-1)(-\alpha) = -(-\alpha) = \alpha,$$

с което равенството (1) е доказано. Преди да проверим валидността на равенството (2), нека покажем, че и равенството (3) остава в сила, когато α и β са отрицателни числа. Наистина при нечетно n и $\alpha < 0$, $\beta < 0$ ще имаме

$$\alpha^{\frac{1}{n}} \beta^{\frac{1}{n}} = \left[-(-\alpha)^{\frac{1}{n}}\right] \cdot \left[-(-\beta)^{\frac{1}{n}}\right]$$
$$= (-\alpha)^{\frac{1}{n}} \cdot (-\beta)^{\frac{1}{n}} = ((-\alpha)(-\beta))^{\frac{1}{n}} = (\alpha\beta)^{\frac{1}{n}}.$$

Сега равенството (2) при $\alpha < 0$ и n нечетно се получава така:

$$(\alpha^n)^{\frac{1}{n}} = -(-\alpha^n)^{\frac{1}{n}} = -((-1)\alpha^n)^{\frac{1}{n}} = -((-1)^n \alpha^n)^{\frac{1}{n}}$$
$$= -((-\alpha)^n)^{\frac{1}{n}} = -(-\alpha) = \alpha.$$

Читателят лесно ще се убеди, че равенствата (6), (7) и (8) остават в сила при произволни, различни от нула реални числа α и β, стига степенните показатели, които участвуват в тях, да са рационални числа, допускащи представяния във вид на дроби с положителни нечетни знаменатели.

Най-сетне, ако приемем по дефиниция, че $0^{\frac{1}{n}}=0$ за всяко естествено число n, то лесно се вижда, че равенствата (6), (7) и (8) остават валидни винаги когато α и β са две неотрицателни (а не непременно положителни) реални числа, стига степенните показатели, участвуващи в тези равенства, да са положителни рационални числа.

§ 8. Степен с произволен степенен показател

Всяка база на реално число (A, B) е съставена, както знаем, от две множества A и B, всяко от които от своя страна се състои от краен брой или безбройно много аритметични рационални числа, като при това тези множества са подчинени на две специални условия. Нека сега разгледаме две множества A и B, съставени вече от реални (а не непременно от рационални) числа, но така, че да удовлетворяват същите две условия, които участвуваха в дефиницията на база на реално число. По-точно нека A и B са две непразни множества от реални числа, такива, че:

1) за всяко α от A и всяко β от B да имаме $\alpha\leqq\beta$;

2) за всяко положително (реално) число ε да съществуват такова число α от A и такова число β от B, че $\beta-\alpha<\varepsilon$.

Ще покажем, че в такъв случай съществува едно единствено реално число γ, удовлетворяващо неравенствата $\alpha\leqq\gamma\leqq\beta$ за всяко α от A и всяко β от B. Наистина от условието 1) се вижда, че множеството A е ограничено отгоре и че всяко число β от B е горна граница за A. Да означим с γ точната горна граница на множеството A. Тогава, от една страна, $\gamma\geqq\alpha$, за всяко α от A, а, от друга страна, поради това, че γ е най-малката горна граница на A, ще имаме $\gamma\leqq\beta$ за всяко β от B. И тъй числото γ ще удовлетворява неравенствата $\alpha\leqq\gamma\leqq\beta$ за всяко α от A и за всяко β от B. Ако допуснем, че съществува друго реално число γ', удовлетворяващо неравенствата $\alpha\leqq\gamma'\leqq\beta$, би следвало, че за всяко α от A и за всяко β от B ще имаме $\beta-\alpha\geqq|\gamma-\gamma'|$, което пък противоречи на условието 2).

Нека забележим още, че числото γ, което определихме като точна горна граница на множеството A, се явява в същото време точна долна граница на множеството B. Наистина от неравенството $\gamma\leqq\beta$, валидно за всяко β от B, се вижда, че γ е долна граница на множеството B. Ако допуснем, че някоя друга долна граница γ_1 на B удовлетворява неравенството $\gamma<\gamma_1$, ще имаме $\alpha\leqq\gamma_1\leqq\beta$ за всяко α от A и всяко β от B, което, както видяхме, е невъзможно.

Въз основа на изложеното дотук, когато две множества A и B от реални числа удовлетворяват посочените по-горе условия 1) и 2), ще казваме, че тези множества определят едно реално число — числото γ, явяващо се едновременно точна горна граница на множеството A и точна долна граница на множеството B — или че A и B образуват една *определяща двойка множества* за реалното число γ. Множеството A ще наречем ляво, а множеството B — дясно множество на тази определяща двойка.

Когато две множества A и B са определяща двойка за едно *положително* реално число γ сред числата, принадлежащи на лявото множество A, има непременно положителни — ако всички числа α от A са по-малки или равни на нула, то за всяко α от A и за всяко β от B бихме получили $\beta-\alpha\geqq\gamma$, което противоречи на условието 2). Ясно е, че ако с A' означим множеството на всички положителни числа α, принадлежащи на A (това множество може да не съвпада с A — в случай че в A се съдържат и неположителни α), то множествата A' и B образуват също така определяща двойка за числото γ. Ето защо, когато ни е дадена някоя определяща двойка множества A и B за едно *положително* реално число, винаги можем да считаме, че и двете множества A и B са съставени само от положителни числа.

Като използуваме горната бележка, ще докажем следното: Ако множествата A_1 и B_1 са една определяща двойка за положителното реално число γ_1, а множествата A_2 и B_2 — определяща двойка за положителното реално число γ_2, при това такива, че множествата A_1 и A_2 се състоят само от положителни реални числа, то ще получим една определяща двойка множества A и B за реалното число $\gamma_1\gamma_2$, ако към множеството A отнесем всички реални числа от вида $\alpha_1\alpha_2$, където $\alpha_1\in A_1$ и $\alpha_2\in A_2$, а към множеството B — всички реални числа, имащи вида $\beta_1\beta_2$, където $\beta_1\in B_1$ и $\beta_2\in B_2$. Преди всичко нека се убедим, че така построените множества A и B удовлетворяват условията 1) и 2). Условието 1) е очевидно изпълнено, тъй като от неравенствата $0<\alpha_1\leqq\beta_1$ и $0<\alpha_2\leqq\beta_2$ следва неравенството $\alpha_1\alpha_2\leqq\beta_1\beta_2$. За да проверим условието 2), да вземем най-напред едно положително число ε, а след това едно число β_1^0 от B_1 и едно число β_2^0 от B_2. За положителното число $\varepsilon'=\frac{\varepsilon}{\beta_1^0+\beta_2^0}$ ще съществуват такива α_1' от A_1 и β_1' от B_1 и също такива α_2' от A_2 и β_2' от B_2, че да имаме $\beta_1'-\alpha_1'<\varepsilon'$ и $\beta_2'-\alpha_2'<\varepsilon'$. При това можем да считаме, че $\beta_1'\leqq\beta_1^0$. Тогава

$$\beta_1'\beta_2'-\alpha_1'\alpha_2'=\beta_1'\beta_2'-\beta_1'\alpha_2'+\beta_1'\alpha_2'-\alpha_1'\alpha_2'=\beta_1'(\beta_2'-\alpha_2')+\alpha_2'(\beta_1'-\alpha_1')$$
$$<\beta_1^0\varepsilon'+\beta_2^0\varepsilon'=\varepsilon.$$

И така множествата A и B са определяща двойка за някое реално число. От неравенствата $\alpha_1\alpha_2\leqq\gamma_1\gamma_2\leqq\beta_1\beta_2$ обаче, изпълнени винаги когато $\alpha_1\in A_1$, $\beta_1\in B_1$, $\alpha_2\in A_2$, $\beta_2\in B_2$, е ясно, че това число е числото $\gamma_1\gamma_2$.

Преди да преминем към дефиницията на степен с произволен степенен показател, което е непосредствената ни цел в настоящия параграф, ще докажем още едно необходимо за нас твърдение, а именно следното: За всяко положително реално число α имаме

$$\lim \alpha^{\frac{1}{n}}=1. \tag{1}$$

Да разгледаме най-напред случая, когато $\alpha\geqq1$. Тогава за всяко естествено число n имаме $\alpha^{\frac{1}{n}}-1=h_n\geqq0$. Оттук получаваме $\alpha^{\frac{1}{n}}=1+h_n$ и $\alpha=(1+h_n)^n$. Използувайки неравенството на Бернули*, получаваме

$$\alpha\geqq1+nh_n,$$

откъдето

$$0\leqq h_n\leqq\frac{\alpha-1}{n},$$

или все едно

$$0\leqq\alpha^{\frac{1}{n}}-1\leqq\frac{\alpha-1}{n}.$$

Ако сега ε е произволно положително число, то очевидно за всички естествени числа n, удовлетворяващи неравенството $n>\frac{\alpha-1}{\varepsilon}$, ще имаме

$$\left|\alpha^{\frac{1}{n}}-1\right|<\varepsilon,$$

* Неравенството

$$(1+h)^n\geqq1+nh$$

е известно под името неравенство на Бернули и е валидно за всички $h\geqq-1$ и произволно естествено число n. Читателят ще го докаже лесно с помощта на пълната математична индукция.

с което равенството (1) е установено при $\alpha \geqq 1$. В случая, когато $0<\alpha<1$, същото равенство се получава въз основа на разгледания вече случай по следния начин:

$$\lim \alpha^{\frac{1}{n}} = \lim \frac{1}{\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{\frac{1}{n}}} = 1.$$

Пристъпваме сега към дефиницията на степен с произволен степенен показател. Нека α е едно п о л о ж и т е л н о реално число, а ρ — произволно реално число и нека $\rho=(A, B)$, т. е. (A, B) е една база на реалното число ρ. Да означим с A^* множеството от всички реални числа от вида α^a, където $a\in A$, а с B^* — множеството от всички реални числа от вида α^b, където $b\in B$. (Тук степените α^a и α^b са дефинирани вече от нас, тъй като a и b са аритметични рационални числа.) Ще покажем, че множествата A^* и B^* образуват определяща двойка множества за някое реално число. При това, ако $\alpha\geqq 1$, то A^* е лявото, а B^* — дясното множество на тази определяща двойка, а ако $\alpha\leqq 1$, то обратно, B^* е лявото, а A^* — дясното ѝ множество. (Когато $\alpha=1$, както множеството A^*, така и множеството B^* се състоят очевидно от единственото число 1.) Ще разглеждаме случая, когато $\alpha\geqq 1$. (Случаят $0<\alpha\leqq 1$ се разглежда аналогично и се предоставя на читателя.) От неравенството $a\leqq b$, изпълнено за всяко a от A и всяко b от B, следва неравенството $\alpha^a\leqq\alpha^b$, с което условието 1) е проверено. За да проверим условието 2), да вземем най-напред едно положително число ε, а след това — едно число b_0 от B. Поради това, че $\lim \alpha^{\frac{1}{n}}=1$, ще съществува такова естествено число n, за което $\alpha^{\frac{1}{n}}-1<\alpha^{-b_0}\varepsilon$. Ако сега числата a от A и b от B са взети така, че $b-a<\frac{1}{n}$, то ще имаме

$$\alpha^b-\alpha^a=\alpha^a(\alpha^{b-a}-1)<\alpha^{b_0}\left(\alpha^{\frac{1}{n}}-1\right)<\varepsilon.$$

И така множествата A^* и B^* определят едно очевидно положително реално число γ. Това число ще наречем с т е п е н н а α с ъ с т е п е н е н п о к а з а т е л ρ и ще го бележим с α^ρ. За да бъде обаче тази дефиниция коректна, трябва да се убедим, че тя не зависи от базата (A, B), с помощта на която сме представили числото ρ. Наистина, ако (A_1, B_1) е някоя друга база на реалното число ρ, то с нейна помощ ще дефинираме, както по-горе, две множества A_1^* и B_1^* от реални числа, които ще определят едно реално число γ_1. Тогава от неравенствата $\alpha^a\leqq\alpha^{b_1}$, изпълнени за всяко a от A и всяко b_1 от B_1, ще заключим, вземайки пред вид, че γ е точната горна граница на A^*, а γ_1 — точната долна граница на B_1^*, че е в сила неравенството $\gamma\leqq\gamma_1$. От неравенствата пък $\alpha^{a_1}\leqq\alpha^b$, валидни за всяко a_1 от A_1 и всяко b от B, ще следва, че $\gamma_1\leqq\gamma$. И тъй $\gamma=\gamma_1$, с което коректността на дефиницията на α^ρ е доказана.

По този начин направихме последната стъпка в разширяването на понятието степен, осъществено последователно от началото на предишния параграф. Сега вече разполагаме с такава дефиниция, която ни позволява да говорим за степента α^ρ винаги когато основата ѝ α е положително реално число, и то при произволно реално число ρ за степенен показател. Както вече отбелязахме, числото α^ρ е винаги положително. При това, ако $\rho\geqq 0$, то

2) $$\alpha^\rho\geqq 1 \text{ при } \alpha\geqq 1 \text{ и } \alpha^\rho\leqq 1 \text{ при } 0<\alpha\leqq 1.$$

Остава да докажем основните свойства на степенуването.

Нека α е положително реално число, а ρ_1 и ρ_2 са две реални числа. Ако $\rho_1=(A_1, B_1)$, $\rho_2=(A_2, B_2)$, да означим с A_1^*, B_1^*, A_2^*, B_2^* множествата, състоящи се съответно от числата от вида α^{a_1}, α^{b_1}, α^{a_2}, α^{b_2}, където $a_1\in A_1$, $b_1\in B_1$, $a_2\in A_2$, $b_2\in B_2$. Тогава A_1^* и B_1^* са една определяща двойка множества за числото α^{ρ_1}, а A_2^* и B_2^* — определяща двойка множества за числото α^{ρ_2}. От друга страна, ясно е, че множеството A^*, съставено от числата, имащи вида $\alpha^{a_1+a_2}$, където $a_1\in A_1$, $a_2\in A_2$, и множеството B^* от числата от вида $\alpha^{b_1+b_2}$, където $b_1\in B_1$, $b_2\in B_2$, образуват пък определяща двойка за числото $\alpha^{\rho_1+\rho_2}$. Следователно при предположение, че $\alpha\geqq 1$, ще имаме, от една страна,

$$\alpha^{a_1}\alpha^{a_2}\leqq\alpha^{\rho_1}\alpha^{\rho_2}\leqq\alpha^{b_1}\alpha^{b_2},$$

от друга —

$$\alpha^{a_1+a_2}\leqq\alpha^{\rho_1+\rho_2}\leqq\alpha^{b_1+b_2}.$$

(В случай че $\alpha<1$, всички тези неравенства трябва да бъдат написани в обратна посока.) Но тъй като $\alpha^{a_1+a_2}=\alpha^{a_1}\alpha^{a_2}$ и $\alpha^{b_1+b_2}=\alpha^{b_1}\alpha^{b_2}$, оттук следва равенството

(3) $$\alpha^{\rho_1+\rho_2}=\alpha^{\rho_1}\alpha^{\rho_2}.$$

Сега можем да отбележим и следното: Ако $\rho_1\leqq\rho_2$, то при $\alpha\geqq 1$ е изпълнено неравенството $\alpha^{\rho_1}\leqq\alpha^{\rho_2}$, а при $0<\alpha\leqq 1$ — неравенството $\alpha^{\rho_1}\geqq\alpha^{\rho_2}$.

За да се убедим в тези неравенства, достатъчно е да разгледаме частното $\frac{\alpha^{\rho_1}}{\alpha^{\rho_2}}$, което въз основа на равенството (3) може да се напише във вида $\alpha^{\rho_1-\rho_2}$, и да вземем пред вид неравенствата (2).

Да преминем към доказателство на равенството

(4) $$(\alpha\beta)^\rho=\alpha^\rho\beta^\rho,$$

изпълнено винаги когато α и β са положителни, а ρ — произволно реално число. Нека $\rho=(A, B)$. Да разгледаме най-напред случая, когато $\alpha\geqq 1$ и $\beta\geqq 1$. В този случай множеството от числата α^a, където $a\in A$, и множеството от числата α^b, където $b\in B$, определят реалното число α^ρ, докато множеството от числата β^a, където $a\in A$, и множеството от числата β^b, където $b\in B$, определят реалното число β^ρ. Оттук пък следва, че множеството от числата $\alpha^a\beta^a$ и множеството от числата $\alpha^b\beta^b$ образуват определяща двойка за реалното число $\alpha^\rho\beta^\rho$. Но за всяко a от A и всяко b от B имаме

$$\alpha^a\beta^a=(\alpha\beta)^a\leqq(\alpha\beta)^\rho\leqq(\alpha\beta)^b=\alpha^b\beta^b.$$

Оттук следва равенството (4). Случаят, когато $0<\alpha<1$ и $0<\beta<1$, се разглежда аналогично.

Остава да разгледаме случая, когато $\alpha\geqq 1$, но $0<\beta<1$. Сега за реалното число $\alpha^\rho\beta^\rho$ ще получим една определяща двойка множества, ако за ляво множество на тази двойка вземем множеството на числата от вида $\alpha^a\beta^b$, а за дясно нейно множество — множеството на числата от вида $\alpha^b\beta^a$, където $a\in A$, $b\in B$. При това, ако $\alpha\beta\geqq 1$, ще имаме неравенствата

$$\alpha^a\beta^b\leqq\alpha^a\beta^a=(\alpha\beta)^a\leqq(\alpha\beta)^\rho\leqq(\alpha\beta)^b=\alpha^b\beta^b\leqq\alpha^b\beta^a,$$

а ако $\alpha\beta<1$ — неравенствата

$$\alpha^a\beta^b\leqq\alpha^b\beta^b=(\alpha\beta)^b\leqq(\alpha\beta)^\rho\leqq(\alpha\beta)^a=\alpha^a\beta^a\leqq\alpha^b\beta^a.$$

И в двата случая заключаваме отново, че е в сила равенството (4).

Най-сетне ще докажем и равенството

(5) $$(\alpha^\rho)^\sigma=\alpha^{\rho\sigma},$$

където α е положително, а ρ и σ са произволни реални числа. Нека $\rho=(A, B)$, $\sigma=(C, D)$ и нека предположим, че $\alpha\geqq 1$ (ако $\alpha<1$, неравенствата, които ще следват, трябва да бъдат написани в обратна посока). От дефиницията на числото α^{ρ} е ясно, че при $a\in A$ и $b\in B$ имаме

$$\alpha^{a} \leqq \alpha^{\rho} \leqq \alpha^{b}.$$

Оттук следва, че при $c\in C$ и $d\in D$ ще имаме

$$\alpha^{ac} = (\alpha^{a})^{c} \leqq (\alpha^{\rho})^{c} \leqq (\alpha^{\rho})^{\sigma} \leqq (\alpha^{\rho})^{d} \leqq (\alpha^{b})^{d} = \alpha^{bd}.$$

Обаче множеството, състоящо се от числата от вида α^{ac}, където $a\in A$, $c\in C$, и множеството, съставено от числата от вида α^{bd}, където $b\in B$, $d\in D$, образуват една определяща двойка за числото $\alpha^{\rho\sigma}$. Оттук поради неравенствата $\alpha^{ac}\leqq(\alpha^{\rho})^{\sigma}\leqq\alpha^{bd}$, които доказахме по-горе, следва, че числото $\alpha^{\rho\sigma}$ съвпада с числото $(\alpha^{\rho})^{\sigma}$. С това равенството (5) е доказано.

§ 9. Логаритми на реални числа

Нека α и β са две реални числа. Ще докажем, че ако $\alpha>0$, $\alpha\neq 1$ и $\beta>0$, то уравнението

$$\alpha^{\xi} = \beta \tag{1}$$

има, и то едно единствено решение относно ξ.

Ако $\alpha>1$, то от равенството

$$\alpha^{n} = (1+(\alpha-1))^{n}$$

и от неравенството

$$(1+(\alpha-1))^{n} \geqq 1+n(\alpha-1)$$

виждаме, че числото α^{n} може да стане колкото пожелаем голямо, стига да вземем достатъчно голямо естествено число n. Да изберем n така, че да имаме $\alpha^{n}>\beta$ и $\alpha^{n}>\frac{1}{\beta}$. Виждаме, че за достатъчно големи естествени числа n са изпълнени неравенствата

$$\alpha^{n}>\beta \quad \text{и} \quad \alpha^{-n}<\beta.$$

Ако пък $0<\alpha<1$, то, вземайки естественото число n така, че да са валидни неравенствата $\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{n}>\beta$ и $\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{-n}<\beta$, заключаваме, че за достатъчно големи n имаме

$$\alpha^{n}<\beta \quad \text{и} \quad \alpha^{-n}>\beta.$$

По-нататък ще считаме, че $\alpha>1$ (случаят, когато от $0<\alpha<1$, се третира аналогично и се предоставя на читателя). Да разгледаме множеството A, съставено от всички аритметични рационални числа a, за които $\alpha^{a}\leqq\beta$, и множеството B, състоящо се от всички аритметични рационални числа b, за които $\alpha^{b}\geqq\beta$. Извършените по-горе разглеждания ни убеждават, че нито едно от тези две множества не е празно. Ние ще покажем, че множествата A и B образуват база на едно реално число. Наистина за всяко a от A и всяко b от B имаме $a\leqq b$ (понеже $\alpha>1$, от неравенството $a>b$ би следвало $\alpha^{a}>\alpha^{b}$). Да вземем едно произволно положително число ε, след което да изберем естественото число n толкова голямо, че да имаме $\alpha^{-n}<\beta$, $\alpha^{n}>\beta$ и освен това $\frac{1}{n}<\varepsilon$. Да разгледаме сега рационалните числа от вида $\frac{k}{n}$, където $k=-n^{2}$, $-n^{2}+1, \ldots, -1, 0, 1, 2, \ldots, n^{2}$. Поради избора на n числото $\frac{-n^{2}}{n}=-n$ принадлежи на A, а числото $\frac{n^{2}}{n}=n$ принадлежи на B. Ето защо ще съществува едно най-голямо цяло число k (където $-n^{2}\leqq k\leqq n^{2}$), за което $\frac{k}{n}$ принадлежи на A. Да означим тази стойност с k_0. Тогава $\frac{k_0}{n}\in A$, $\frac{k_0+1}{n}\in B$ и

$$\frac{k_0+1}{n}-\frac{k_0}{n}=\frac{1}{n}<\varepsilon.$$

С това е показано, че множествата A и B образуват база на едно реално число γ. Но в такъв случай, както знаем от предишния параграф, множеството A^{*}, съставено от числата от вида α^{a}, където $a\in A$, и множеството B^{*} от числата α^{b}, където $b\in B$, образуват определяща двойка за числото α^{γ}. От друга страна, при $a\in A$ и $b\in B$ имаме

$$\alpha^{a}\leqq\beta\leqq\alpha^{b},$$

което показва, че

$$\alpha^{\gamma}=\beta.$$

И така числото γ е решение на уравнението (1). Разбира се, това уравнение не може да има друго решение, тъй като при $\gamma'>\gamma$ ще бъде изпълнено неравенството $\alpha^{\gamma'}>\alpha^{\gamma}$, а при $\gamma'<\gamma$ — неравенството $\alpha^{\gamma'}<\alpha^{\gamma}$.

Числото γ, явяващо се единствено решение на уравнението (1), ще наричаме **логаритъм на числото β при основа α** и ще го означаваме с $\log_{\alpha}\beta$.

Свойствата на логаритмите се извеждат лесно от свойствата на степените на реалните числа. Така, ако β_1 и β_2 са две положителни реални числа, а α е положително и различно от 1 реално число и ако $\gamma_1=\log_{\alpha}\beta_1$, $\gamma_2=\log_{\alpha}\beta_2$, то от равенството

$$\alpha^{\gamma_1+\gamma_2}=\alpha^{\gamma_1}\alpha^{\gamma_2}$$

и от равенствата

$$\alpha^{\gamma_1}=\beta_1 \quad \text{и} \quad \alpha^{\gamma_2}=\beta_2$$

следва равенството

$$\log_{\alpha}\beta_1\beta_2=\log_{\alpha}\beta_1+\log_{\alpha}\beta_2.$$

Също така, ако α е положително и различно от 1, β е положително, а ρ е произволно реално число и ако $\gamma=\log_{\alpha}\beta$, то от равенствата

$$(\alpha^{\gamma})^{\rho}=\alpha^{\gamma\rho}$$

и

$$\alpha^{\gamma}=\beta$$

следва равенството

$$\log_{\alpha}\beta^{\rho}=\rho\log_{\alpha}\beta.$$

Привършихме изложението и доказателството на основните свойства на реалните числа. На читателя предоставяме педантично да провери верността на всички техни свойства, които бяхме изложили в уводната част на курса. При това нека напомним отново, че свойствата, отнасящи се само до естествените, целите и рационалните числа, предполагаме за известни от по-рано.

СЪДЪРЖАНИЕ

Глава IX

Редици и редове от функции. Степенни редове

ЧАСТ III

ДИФЕРЕНЦИАЛНО И ИНТЕГРАЛНО СМЯТАНЕ НА ФУНКЦИИ НА ДВЕ НЕЗАВИСИМИ ПРОМЕНЛИВИ

Глава X

Диференциално смятане на функции на две променливи

Глава XI

Мярка на равнинни множества

Глава XII

Двойни интеграли

Глава XIII

Криволинейни интеграли

ДОПЪЛНЕНИЕ

Реални числа