ГЛАВА V

ПРОИЗВОДНИ. ПРАВИЛА ЗА ДИФЕРЕНЦИРАНЕ

Понятието производна лежи в основата на онази част от математическия анализ, която носи названието диференциално смятане. То е било въведено преди около 300 години от Нютон (1642—1727 г.) и Лайбниц (1646—1716 г.) — създателите на диференциалното и интегралното смятане. Те са дошли до това понятие независимо един от друг и по различни пътища. Лайбниц го е въвел, решавайки задачата за дефиниране на понятието допирателна към графиката на функция. У Нютон пък то се е появило, когато пожелал да въведе понятието моментна скорост на движеща се материална точка.

В тази глава ще се запознаем с дефиницията на понятието производна, както и с най-простите свойства на функциите, притежаващи производна. Ще изведем някои основни правила за намирането на производните и ще покажем как може да бъде пресметната производната на всяка елементарна функция.

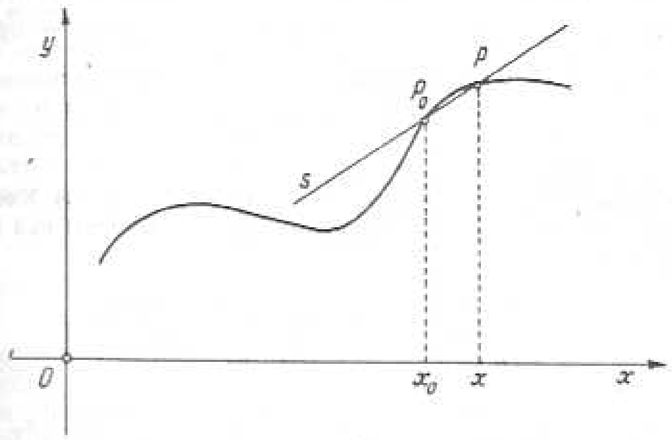
§ 27. Производна

Нека е дадена функцията $f(x)$, дефинирана в някоя околност на една точка x_0. Това ще рече, че точката x_0 притежава околност $(x_0-\delta, x_0+\delta)$, съдържаща се изцяло в дефиниционната област M на функцията $f(x)$. Такава точка ще наричаме в ъ т р е ш н а за множеството M. Специално, когато M е интервал, всички негови точки с изключение на краищата му са вътрешни съгласно тази дефиниция.

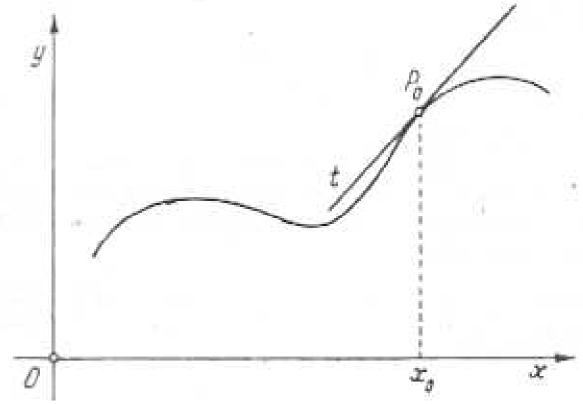
Да разгледаме графиката на функцията $f(x)$ в равнината с координатна система Oxy. На точката x_0 от оста Ox отговаря точката $P_0(x_0, f(x_0))$ от графиката на функцията. Да вземем някоя друга точка x от оста Ox, принадлежаща на дадената околност на точката x_0. На нея отговаря точката $P(x, f(x))$ от графиката. Двете точки P_0 и P определят една права s, секуща на дадената графика (черт. 14). Уравнението на тази секуща, както е известно от аналитичната геометрия, е

$$\eta - f(x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}(\xi - x_0), \tag{1}$$

където ξ и η са текущите координати в това уравнение. Ако разглеждаме точката x от оста Ox като променлива и оставим тя да се приближава към постоянната точка x_0, то точката P от графиката на функцията ще се движи, а заедно с нея ще променя положението си и секущата s. Дали тази секуща ще клони към някакво гранично положение, когато x



Черт. 14



Черт. 15

клони към x_0? Ако това е така, то можем да считаме, че тя клони към една гранична права t, която ще наречем д о п и р а т е л н а (т а н г е н т а), прекарана в точката P_0, към графиката на функцията $f(x)$ (черт. 15).

Какво значи обаче една променлива права да клони към някакво гранично положение? Нека е дадено уравнение от следния вид:

$$\eta = k(x)\xi + m(x), \tag{2}$$

където $k(x)$ и $m(x)$ са функции на x, дефинирани в някоя околност на една точка x_0. Ако дадем на x една фиксирана стойност и разглеждаме ξ и η като текущи координати, то уравнението (2) ще бъде уравнение на права. Когато x се мени, коефициентите в това уравнение ще се изменят, така че и самата права с уравнение (2) ще се мени. Ако двете функции $k(x)$ и $m(x)$ притежават граници при x, клонящо към x_0, и ако $\lim\limits_{x\to x_0} k(x)=k_0$, $\lim\limits_{x\to x_0} m(x)=m_0$, то естествено е да приемем по дефиниция, че променливата права с уравнение (2) клони към правата с уравнение

$$\eta=k_0\xi+m_0, \tag{3}$$

когато x клони към x_0.

Да се върнем сега към нашата секуща s с уравнение (1). Коефициентите в това уравнение са функции на x. Ако го напишем във вида (2), то ще изглежда така:

$$\eta=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\xi+f(x_0)-\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}x_0.$$

Тук имаме

$$k(x)=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}, \qquad m(x)=f(x_0)-\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}x_0.$$

Ясно е, че функциите $k(x)$ и $m(x)$ ще имат граници при x, клонящо към x_0, когато функцията

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \tag{4}$$

притежава граница при $x\to x_0$.

Тази граница, когато съществува, играе, както ще видим, важна роля при много въпроси в математиката. В същност ние достигнахме по този начин до основното понятие на диференциалното смятане, което се въвежда със следната

Дефиниция. *Казваме, че функцията $f(x)$ е диференцуема в дадена вътрешна точка x_0 от своята дефиниционна област, когато съществува границата*

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}. \tag{5}$$

Тази граница се нарича производна на функцията $f(x)$ в точката x_0 и се бележи с $f'(x_0)$.

Следователно графиката на една функция $f(x)$ притежава допирателна в някоя своя точка $P_0(x_0, f(x_0))$, когато функцията $f(x)$ е диференцуема в точката x_0. При това уравнението на тази допирателна ще бъде

$$\eta-f(x_0)=f'(x_0)(\xi-x_0). \tag{6}$$

Веднага можем да дадем известно геометрично тълкуване на $f'(x_0)$. Числото $f'(x_0)$ представлява т. нар. ъглов коефициент в уравнението (6) и ще бъде равно, както знаем от аналитичната геометрия, на тангенса на ъгъла, който допирателната сключва с положителната посока на оста Ox.

До понятието производна можем да стигнем и по друг път — при решаването на една задача от механиката, а именно задачата за дефинирането на понятието моментна скорост на точка, движеща се праволинейно. Нека точката P се движи върху една насочена права и нека нейното движение е еднопосочно. Положението на точката P върху правата се определя от разстоянието ѝ OP до една фиксирана точка O. Нека разстоянието OP е известно във всеки момент, т. е. нека то да бъде дадено като известна функция $f(t)$ на времето t. Ако разгледаме два различни момента t_0 и t, то частното

$$\frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0}$$

представлява отношението на изминатия от точката P път от момента t_0 до момента t към дължината на интервала от време, през който тя се е движела. Това частно се нарича, както знаем, средна скорост на движението за периода от време от момента t_0 до момента t. Естествено е тогава да потърсим границата

$$\lim_{t\to t_0}\frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0}$$

и ако тя съществува, да я наречем скорост на движението на точката P в момента t_0. Тази граница, както вече знаем, не е нищо друго освен производната $f'(t_0)$.

Нека отбележим още, че частното (4), с помощта на което дефинирахме $f'(x_0)$, често се записва и другояче. Полагаме $h=x-x_0$ и получаваме $x=x_0+h$. При това е ясно, че изискването x да клони към x_0 е равносилно с изискването h да клони към 0. Ето защо производната $f'(x_0)$ може да се дефинира и с равенството

$$f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}.$$

Ние ще си служим както с единия, тъй и с другия начин на записване.

Нека вземем един пример за пресмятане на производна. Ще покажем, че функцията $f(x)=x^2$ е диференцуема в точката $x_0=3$, и ще пресметнем нейната производна в тази точка. Имаме

$$\lim_{x\to 3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}=\lim_{x\to 3}(x+3)=6.$$

И така търсената производна съществува и е равна на 6.

Като си спомним дефинициите на границите $\lim\limits_{x\to x_0, x>x_0} \varphi(x)$ и $\lim\limits_{x\to x_0, x<x_0} \varphi(x)$, естествено идваме до следната

Дефиниция. *Казваме, че функцията $f(x)$ е* д и ф е р е н ц у е м а о т д я с н о *в точката x_0, когато съществува границата*

$$\lim_{x\to x_0,\, x>x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}, \text{ или } \lim_{h\to 0,\, h>0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}.$$

Тази граница се нарича д я с н а п р о и з в о д н а *на $f(x)$ в точката x_0 и се бележи с $f'_+(x_0)$.*

Аналогично: *казваме, че функцията $f(x)$ е* д и ф е р е н ц у е м а о т л я в о *в точката x_0, когато съществува границата*

$$\lim_{x\to x_0,\, x<x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}, \text{ или } \lim_{h\to 0,\, h<0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}.$$

Тази граница се нарича л я в а п р о и з в о д н а *на $f(x)$ в точката x_0 и се бележи с $f'_-(x_0)$.*

Ясно е, че за да говорим за дясна производна на една функция $f(x)$ в дадена точка x_0, не е нужно тази точка да бъде вътрешна за дефиниционната област на $f(x)$, т. е. $f(x)$ да бъде дефинирана непременно в някоя околност $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ на тази точка. Достатъчно е тя да бъде дефинирана в някой интервал от вида $[x_0, x_0+\delta)$. Такъв интервал ще наричаме занапред д я с н а о к о л н о с т на точката x_0. Аналогично за лява производна може да става дума винаги когато функцията $f(x)$ е дефинирана в някоя л я в а о к о л н о с т на точката x_0, т. е. в някой интервал от вида $(x_0-\delta, x_0]$.

В бъдеще понякога ще твърдим, че дадена функция $f(x)$ е дефинирана и диференцуема в някакъв затворен интервал $[a, b]$. В такива случаи диференцуемостта на $f(x)$ в крайните точки на този интервал трябва да се разбира в смисъл на едностранна (т. е. лява, съответно дясна) диференцуемост. Същото се отнася за диференцуемост на функция в интервал от вида $[a, b)$ или $(a, b]$.

Лесно се разбира, че ако една функция $f(x)$ има производна в дадена точка x_0, то тя притежава също и лява, и дясна производна в тази точка и при това

$$f'_+(x_0)=f'_-(x_0)=f'(x_0). \tag{7}$$

Обратно, ако функцията $f(x)$ има както лява, така и дясна производна в една точка x_0 и ако тези две производни са равни помежду си, то тя е диференцуема в тази точка, като, разбира се, пак е в сила равенството (7).

Някои функции обаче, както ще видим, може да притежават както лява, тъй и дясна производна в дадена точка x_0, без при това тези две производни да бъдат равни помежду си.

Съществуват ли функции, които в някоя вътрешна точка от своята дефиниционна област не са диференцуеми? Отговорът на този въпрос ще се получи съвсем естествено, след като се запознаем с връзката,

която съществува между двете важни понятия — непрекъснатост и диференцуемост. Тази връзка се дава със следната

Теорема. *Ако функцията $f(x)$ е диференцуема в дадена точка x_0, то тя е и непрекъсната в тази точка.*

Д о к а з а т е л с т в о. От условието е ясно, че функцията

$$\varphi(x)=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0},$$

дефинирана при $x\neq x_0$, притежава граница, когато x клони към x_0, и че $\lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x)=f'(x_0)$. Тогава от равенството

$$f(x)=f(x_0)+\varphi(x)(x-x_0),$$

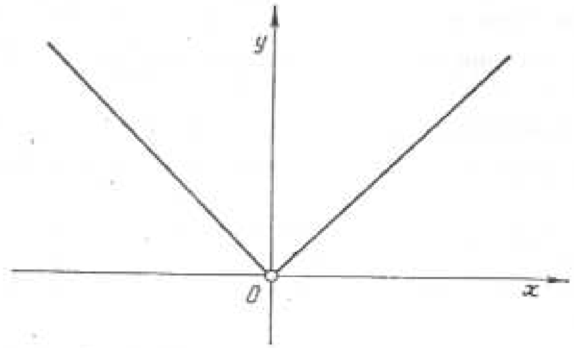
валидно при $x\neq x_0$, получаваме

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)+\lim_{x\to x_0} \varphi(x)\,.\lim_{x\to x_0}(x-x_0)=f(x_0),$$

което показва, че функцията $f(x)$ е непрекъсната в точката x_0.

Аналогично може да се докаже, че от съществуването на лява (съответно дясна) производна на една функция $f(x)$ в дадена точка x_0 следва, че $f(x)$ е непрекъсната отляво (съответно отдясно) в тази точка.

Ясно е от казаното дотук, че за да бъде една функция $f(x)$ диференцуема в една вътрешна точка x_0 от своята дефиниционна област, необходимо е тя да бъде непрекъсната в тази точка. Следователно, ако искаме да получим пример за недиференцуема функция, достатъчно е да вземем функция, която е прекъсната в някоя точка x_0.



Черт. 16

Една функция $f(x)$ обаче може да не притежава производна в дадена точка x_0 и когато е непрекъсната в тази точка. Нека вземем например функцията $f(x)=|x|$ (черт. 16) и нека $x_0=0$. Тогава

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{|x|}{x}.$$

При $x<0$ имаме $\frac{|x|}{x}=-1$, а при $x>0$ получаваме $\frac{|x|}{x}=1$. Ясно е тогава, че дадената функция притежава в точката $x_0=0$ както лява, така и дясна производна, а именно

$$f'_{-}(0)=\lim_{x\to 0,\ x<0}\frac{|x|}{x}=-1,\quad f'_{+}(0)=\lim_{x\to 0,\ x>0}\frac{|x|}{x}=1.$$

Тук обаче $f'_{-}(0)\neq f'_{+}(0)$. Следователно границата

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$$

не съществува, т. е. функцията $f(x)=|x|$ не е диференцуема в точката $x_0=0$, макар и да е непрекъсната в тази точка.

Да вземем друг пример. Функцията

$$f(x)=\begin{cases} x\sin\frac{1}{x} & \text{при}\quad x\neq 0\\ 0 & \text{при}\quad x=0,\end{cases}$$

както знаем (вж. § 21, стр. 99—100) е непрекъсната в точката $x_0=0$. За нея при $x_0=0$ имаме

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{x\sin\frac{1}{x}}{x}=\sin\frac{1}{x}.$$

Ние знаем обаче (вж. § 18, стр. 83—84), че функцията $\sin\frac{1}{x}$ не притежава граница при x, клонящо към 0. Следователно функцията $f(x)$ не е диференцуема в точката $x_0=0$. При това тя не притежава в тази точка нито лява, нито дясна производна, тъй като функцията $\sin\frac{1}{x}$, както лесно се вижда, няма граница и когато x клони само отляво или пък само отдясно към 0.

Тези примери показват, че непрекъснатостта на една функция в дадена точка x_0 не е достатъчно условие за нейната диференцуемост. И така изискването за диференцуемост е по-силно от изискването за непрекъснатост.

Накрая в този параграф нека отбележим, че освен чрез знака $f'(x)$ производната на една функция $f(x)$ се бележи още и така:

$$\frac{df(x)}{dx}\quad\text{или}\quad\frac{df}{dx},$$

а когато сме положили $y=f(x)$, също и чрез

$$y'\quad\text{или}\quad\frac{dy}{dx}.$$

§ 28. Основни формули за диференциране

Ще докажем няколко прости, но важни теореми, които дават редица правила за диференцирането на функциите. Първите четири от тях се отнасят до диференцирането на сумата, разликата, произведението и частното на две диференцуеми функции.

Теорема 1. *Ако функциите $u(x)$ и $v(x)$ са диференцуеми в точката x_0, то функцията $f(x)=u(x)+v(x)$ е също диференцуема в тази точка и*

$$f'(x_0)=u'(x_0)+v'(x_0).$$

Доказателство. Наистина

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{u(x)+v(x)-[u(x_0)+v(x_0)]}{x-x_0}$$

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{u(x)-u(x_0)}{x-x_0}+\lim_{x\to x_0}\frac{v(x)-v(x_0)}{x-x_0}=u'(x_0)+v'(x_0).$$

Теорема 2. *Ако функциите $u(x)$ и $v(x)$ са диференцуеми в точката x_0, то функцията $f(x)=u(x)-v(x)$ е също диференцуема в x_0 и*

$$f'(x_0)=u'(x_0)-v'(x_0).$$

Доказателство. Имаме

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{u(x)-v(x)-[u(x_0)-v(x_0)]}{x-x_0}$$

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{u(x)-u(x_0)}{x-x_0}-\lim_{x\to x_0}\frac{v(x)-v(x_0)}{x-x_0}=u'(x_0)-v'(x_0).$$

Теорема 3. *Ако функциите $u(x)$ и $v(x)$ са диференцуеми в точката x_0, то функцията $f(x)=u(x)\,v(x)$ е също така диференцуема в тази точка и*

$$f'(x_0)=u'(x_0)\,v(x_0)+u(x_0)\,v'(x_0).$$

Доказателство. Действително

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{u(x)\,v(x)-u(x_0)\,v(x_0)}{x-x_0}$$

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{u(x)\,v(x)-u(x_0)\,v(x)+u(x_0)\,v(x)-u(x_0)\,v(x_0)}{x-x_0}$$

$$=\lim_{x\to x_0}\left[\frac{u(x)-u(x_0)}{x-x_0}\,v(x)+u(x_0)\frac{v(x)-v(x_0)}{x-x_0}\right]$$

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{u(x)-u(x_0)}{x-x_0}\cdot\lim_{x\to x_0}v(x)+u(x_0)\cdot\lim_{x\to x_0}\frac{v(x)-v(x_0)}{x-x_0}.$$

Функцията $v(x)$, която е диференцуема в точката x_0, ще бъде, както знаем, и непрекъсната в нея. Следователно ще имаме

$$\lim_{x\to x_0} v(x)=v(x_0).$$

Ето защо получаваме

$$f'(x_0)=u'(x_0)\,v(x_0)+u(x_0)\,v'(x_0).$$

Теорема 4. *Ако функциите $u(x)$ и $v(x)$ са диференцуеми в точката x_0 и ако освен това $v(x_0)\neq 0$, то функцията $f(x)=\frac{u(x)}{v(x)}$ е също диференцуема в тази точка и при това*

$$f'(x_0)=\frac{u'(x_0)\,v(x_0)-u(x_0)\,v'(x_0)}{[v(x_0)]^2}.$$

Доказателство. Да отбележим най-напред, че функцията $v(x)$, която е в знаменателя, е непрекъсната в точката x_0 (поради това, че е диференцуема в тази точка) и следователно ще бъде различна от нула не само в точката x_0, но и в цяла една околност $(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$ на тази точка (вж. теорема 1 от § 22). Ето защо частното $\frac{u(x)}{v(x)}$ сигурно ще има смисъл в някоя околност на x_0. Да пресметнем сега производната на тази функция. Имаме

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{\frac{u(x)}{v(x)}-\frac{u(x_0)}{v(x_0)}}{x-x_0}$$

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{1}{v(x)\,.\,v(x_0)}\cdot\lim_{x\to x_0}\frac{u(x)\,v(x_0)-u(x_0)\,v(x)}{x-x_0}$$

$$=\frac{1}{[v(x_0)]^2}\lim_{x\to x_0}\frac{u(x)\,v(x_0)-u(x_0)\,v(x_0)+u(x_0)\,v(x_0)-u(x_0)\,v(x)}{x-x_0}$$

$$=\frac{1}{[v(x_0)]^2}\left[\lim_{x\to x_0}\frac{u(x)-u(x_0)}{x-x_0}\,v(x_0)-\lim_{x\to x_0}\frac{v(x)-v(x_0)}{x-x_0}\,u(x_0)\right]$$

$$=\frac{u'(x_0)\,v(x_0)-u(x_0)\,v'(x_0)}{[v(x_0)]^2}.$$

Формулите, получени в доказаните четири теореми, обикновено се записват накратко по следния начин:

$$(u+v)'=u'+v',\quad (u-v)'=u'-v',$$

$$(uv)'=u'\,v+uv',\quad \left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'\,v-uv'}{v^2}.$$

Преминаваме към извеждане на важната формула за производна на съставна функция.

Теорема 5. *Ако функцията $F(u)$ е диференцуема в точката u_0, а функцията $f(x)$ е диференцуема в точката x_0 и ако $f(x_0)=u_0$, то съставната функция $\varphi(x)=F[f(x)]$ е диференцуема в точката x_0 и при това*

$$\varphi'(x_0)=F'(u_0)f'(x_0). \tag{1}$$

Доказателство. Да си образуваме функцията

$$\psi(u)=\frac{F(u)-F(u_0)}{u-u_0}, \tag{2}$$

дефинирана при $u\neq u_0$. Понеже $\lim_{u\to u_0}\psi(u)=F'(u_0)$, то като дефинираме допълнително $\psi(u)$ при $u=u_0$ с равенството $\psi(u_0)=F'(u_0)$, ще получим функция, непрекъсната в точката u_0.

От равенството (2) получаваме при $u\neq u_0$ равенството

$$F(u)-F(u_0)=\psi(u)\,(u-u_0). \tag{3}$$

При това с непосредствена проверка се убеждаваме, че то е изпълнено не само при $u\neq u_0$, но и при $u=u_0$.

Да пристъпим сега към пресмятане на производната на съставната функция $\varphi(x)$. Като вземем пред вид равенството (3), ще имаме

$$\frac{\varphi(x)-\varphi(x_0)}{x-x_0}=\frac{F[f(x)]-F[f(x_0)]}{x-x_0}=\frac{\psi[f(x)]\,.\,[f(x)-f(x_0)]}{x-x_0}.$$

Оттук

$$\varphi'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{\varphi(x)-\varphi(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\psi[f(x)]\,.\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

Но функцията $\psi[f(x)]$ е съставена с помощта на двете функции $\psi(u)$ и $f(x)$, първата от които е непрекъсната в точката u_0, а втората — в точката x_0 (непрекъснатостта на функцията $f(x)$ следва от нейната диференцуемост). При това $f(x_0)=u_0$. Тогава въз основа на теоремата за непрекъснатост на съставни функции заключаваме, че функцията $\psi[f(x)]$ е непрекъсната в точката x_0 и че следователно

$$\lim_{x\to x_0}\psi[f(x)]=\psi[f(x_0)]=\psi(u_0)=F'(u_0).$$

Окончателно получаваме

$$\varphi'(x_0)=F'(u_0)f'(x_0),$$

което трябваше да се докаже.*

* Има един случай, когато доказателството на тази теорема може да се извърши значително по-просто — това е случаят, когато за точките от някоя околност на x_0 е изпълнено неравенството $f(x)\neq f(x_0)$. Този случай е налице например, когато функцията $f(x)$ е обратима — по-специално, когато тя е строго монотонна в някоя околност на точката x_0. Тогава формулата (1) следва непосредствено от очевидното равенство

$$\frac{F[f(x)]-F[f(x_0)]}{x-x_0}=\frac{F[f(x)]-F[f(x_0)]}{f(x)-f(x_0)}\cdot\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0},$$

от условието $f(x_0)=u_0$ и от забележката, че поради непрекъснатостта на функцията $f(x)$ в точката x_0 имаме $\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$.

При работа с тази формула обикновено записваме получения резултат по-кратко с помощта на следните равенства:

$$y=F(u), \quad u=f(x), \quad y'=F'(u).u'.$$

Следва една теорема, отнасяща се до пресмятане производната на обратна функция. Тук ще формулираме и докажем тази теорема само за един специален, но важен случай, въпреки че тя е вярна и при по-общи условия.

Теорема 6. *Нека функцията $f(x)$ е строго растяща (или строго намаляваща) в един интервал D. Ако тя е диференцуема в дадена вътрешна точка x_0 на този интервал и ако $f'(x_0)\neq 0$, то нейната обратна функция $\varphi(y)$ е диференцуема в точката $y_0=f(x_0)$, като при това*

$$\varphi'(y_0)=\frac{1}{f'(x_0)}.$$

Доказателство. Нека забележим, че поради строгата си монотонност функцията $f(x)$ е обратима в интервала D. Поради непрекъснатостта пък на $f(x)$ дефиниционното множество на нейната обратна функция $\varphi(y)$ (което съвпада с множеството от функционалните стойности на $f(x)$) е също един интервал D_1. От друга страна, лесно е да съобразим, като използуваме пак строгата монотонност на $f(x)$, че щом точката x_0 е вътрешна за интервала D, точката y_0 ще бъде също вътрешна за интервала D_1. Това ни позволява да разгледаме въпроса за диференцуемостта на функцията $\varphi(y)$ в точката y_0. Знаем, че

$$\varphi'(y_0)=\lim_{y\to y_0}\frac{\varphi(y)-\varphi(y_0)}{y-y_0}.$$

Нашата цел е да покажем, че написаната граница съществува и да я пресметнем. От дефиницията на понятието обратна функция следва, че за всяко y от дефиниционната област на $\varphi(y)$ имаме $y=f[\varphi(y)]$. Ето защо

$$\frac{\varphi(y)-\varphi(y_0)}{y-y_0}=\frac{\varphi(y)-\varphi(y_0)}{f[\varphi(y)]-f[\varphi(y_0)]}.$$

Функцията $\varphi(y)$ като обратна на една обратима функция е също обратима и следователно при $y\neq y_0$ ще имаме $\varphi(y)\neq\varphi(y_0)$. Това ни дава възможност да напишем последното равенство във вида

$$\frac{\varphi(y)-\varphi(y_0)}{y-y_0}=\frac{1}{\dfrac{f[\varphi(y)]-f[\varphi(y_0)]}{\varphi(y)-\varphi(y_0)}}.$$

От друга страна, условието за диференцуемост на функцията $f(x)$ в точката x_0 ни дава

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0).$$

Но функцията $\varphi(y)$, както знаем от теорема 4 на § 22, е непрекъсната в точката y_0. Ето защо

$$\lim_{y\to y_0}\varphi(y)=\varphi(y_0).$$

Най-сетне да забележим, че от равенството $y_0=f(x_0)$ получаваме $\varphi(y_0)=x_0$. Поради това ще имаме

$$\lim_{y\to y_0}\varphi(y)=x_0.$$

Всичко казано дотук ни позволява да получим следната верига от равенства:

$$\varphi'(y_0)=\lim_{y\to y_0}\frac{\varphi(y)-\varphi(y_0)}{y-y_0}=\lim_{y\to y_0}\frac{1}{\dfrac{f[\varphi(y)]-f[\varphi(y_0)]}{\varphi(y)-\varphi(y_0)}}$$

$$=\lim_{y\to y_0}\frac{1}{\dfrac{f[\varphi(y)]-f(x_0)}{\varphi(y)-x_0}}=\frac{1}{f'(x_0)},$$

с което теоремата е доказана.

Да отбележим накрая още, че равенството (4) може да се запише и така:

$$f'(x_0)=\frac{1}{\varphi'[f(x_0)]}.$$

§ 29. Производни на елементарните функции

Сега ще пристъпим към получаването на формули, които ни позволяват да пресмятаме производните на всички елементарни функции.

Най-напред ще покажем, че производната на всяка функция-константа е равна на нула. Наистина нека $f(x)=C$ за всяко x и нека x_0 е една произволна точка от реалната права. Имаме

$$f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{C-C}{h}=0.$$

И така получаваме формулата

(1) $$(C)'=0.$$

След това нека пресметнем производната на функцията $f(x)=x^n$, където степенният показател n е цяло число. Да разгледаме най-напред случая, когато n е цяло положително число. При произволно x_0 ще имаме

$$f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(x_0+h)^n-x_0^n}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{x_0^n+\binom{n}{1}x_0^{n-1}h+\dots+\binom{n}{n}h^n-x_0^n}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\left[\binom{n}{1}x_0^{n-1}+\binom{n}{2}x_0^{n-2}h+\dots+\binom{n}{n}h^{n-1}\right]=nx_0^{n-1}.$$

И така при цяло положително n за всяко x имаме

(2) $$(x^n)'=nx^{n-1}.$$

Нека сега n е цяло отрицателно число и $x \neq 0$. Като използуваме правилото за производна на частно и вземем пред вид, че числото $-n$ ще бъде в този случай положително, получаваме

$$(x^n)'=\left(\frac{1}{x^{-n}}\right)'=\frac{0\,.\,x^{-n}-(-n)\,x^{-n-1}}{x^{-2n}}=nx^{n-1}.$$

Най-сетне, ако $n=0$, то при $x \neq 0$ имаме $x^n=x^0=1$, т. е. функцията $f(x)=x^n$ е константа. Следователно тя ще има производна нула, така че и в този случай формулата (2) запазва своята валидност. И така формулата (2) е установена за всички цели значения на степенния показател n и при всяко $x \neq 0$.

Лесно е да се разбере, че с помощта на формулите (1) и (2) и на теоремите за производна на сума, разлика, произведение и частно на диференцуеми функции можем да пресметнем производната на всяка рационална функция.

Да преминем сега към тригонометричните функции. Ако $f(x)=\sin x$, то при произволно x_0 имаме

$$f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sin(x_0+h)-\sin x_0}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{2\cos\left(x_0+\frac{h}{2}\right)\sin\frac{h}{2}}{h}=\lim_{h\to 0}\cos\left(x_0+\frac{h}{2}\right)\lim_{h\to 0}\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}=\cos x_0.$$

Ако $f(x)=\cos x$, то ще получим

$$f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\cos(x_0+h)-\cos x_0}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{-2\sin\left(x_0+\frac{h}{2}\right)\sin\frac{h}{2}}{h}=-\lim_{h\to 0}\sin\left(x_0+\frac{h}{2}\right)\cdot\lim_{h\to 0}\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}=-\sin x_0.$$

И така за всяко x получаваме формулите

(3) $$(\sin x)'=\cos x, \qquad (\cos x)'=-\sin x.$$

С тяхна помощ веднага ще изведем формули за функциите $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{cotg} x$. И наистина

$$(\operatorname{tg} x)'=\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)'=\frac{(\sin x)'\cos x-(\cos x)'\sin x}{\cos^2 x}=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x},$$

$$(\operatorname{cotg} x)'=\left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)'=\frac{(\cos x)'\sin x-(\sin x)'\cos x}{\sin^2 x}$$

$$=-\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin^2 x}=-\frac{1}{\sin^2 x}.$$

Получихме формулите

(4) $$(\operatorname{tg} x)'=\frac{1}{\cos^2 x}, \quad (\operatorname{cotg} x)'=-\frac{1}{\sin^2 x}.$$

Сега можем лесно да намерим формули за производните на обратните на тригонометричните функции. За целта ще използуваме теорема 6 от § 28.

Нека $\varphi(x)=\arcsin x$ и нека x_0 е точка, удовлетворяваща неравенствата $-1<x_0<1$. Ако $\arcsin x_0=u_0$, то $x_0=\sin u_0$ и $-\frac{\pi}{2}<u_0<\frac{\pi}{2}$. Като вземем пред вид, че функцията $\varphi(x)=\arcsin x$ е обратна на функцията $f(u)=\sin u$ и че $f'(u_0)=\cos u_0>0$, ще получим

$$\varphi'(x_0)=\frac{1}{f'(u_0)}=\frac{1}{\cos u_0}=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 u_0}}=\frac{1}{\sqrt{1-x_0^2}}.$$

И така за всяко x от отворения интервал $(-1, 1)$ имаме

(5) $$(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Нека отбележим, че функцията $\arcsin x$ е дефинирана в затворения интервал $[-1, 1]$, но формулата (5) е установена само в отворения интервал $(-1, 1)$. Може да се покаже, че функцията $\arcsin x$ изобщо не е диференцуема в точките $x=-1$ и $x=1$.

Функцията $\varphi(x)=\arccos x$ е обратна на функцията $f(u)=\cos u$. Ако x_0 е отново някоя точка от отворения интервал $(-1, 1)$ и ако $\arccos x_0=u_0$, то $x_0=\cos u_0$ и $0<u_0<\pi$. Тогава $f'(u_0)=-\sin u_0 \neq 0$ и поради $\sin u_0>0$ ще имаме

$$\varphi'(x_0)=\frac{1}{f'(u_0)}=\frac{1}{-\sin u_0}=-\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 u_0}}=-\frac{1}{\sqrt{1-x_0^2}}.$$

Следователно за всяко x от отворения интервал $(-1, 1)$ е валидна формулата

(6) $$(\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

За функцията $\arccos x$, която, както знаем, е дефинирана в затворения интервал $[-1, 1]$, може също да се покаже, че не е диференцуема в точките $x=-1$ и $x=1$.

Функцията $\varphi(x)=\operatorname{arc\,tg} x$ е обратна на функцията $f(u)=\operatorname{tg} u$. Нека x_0 е произволна точка от реалната права и нека $\operatorname{arc\,tg} x_0=u_0$. Тогава $x_0=\operatorname{tg} u_0$ и $-\frac{\pi}{2}<u_0<\frac{\pi}{2}$. Ето защо ще получим

$$\varphi'(x_0)=\frac{1}{f'(u_0)}=\cos^2 u_0=\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 u_0}=\frac{1}{1+x_0^2}.$$

Следователно за всяко x имаме

(7) $$(\operatorname{arc\,tg} x)' = \frac{1}{1+x^2}.$$

Функцията $\varphi(x) = \operatorname{arc\,cotg} x$ пък е обратна на функцията $f(u) = \operatorname{cotg} u$. Ако x_0 е произволно реално число и ако $\operatorname{arc\,cotg} x_0 = u_0$, то $x_0 = \operatorname{cotg} u_0$ и $0 < u_0 < \pi$. Тогава ще имаме

$$\varphi'(x_0) = \frac{1}{f'(u_0)} = -\sin^2 u_0 = -\frac{1}{1+\operatorname{cotg}^2 u_0} = -\frac{1}{1+x_0^2}.$$

Получихме за всяко x формулата

(8) $$(\operatorname{arc\,cotg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}.$$

Нека сега се занимаем с логаритмичната функция. Най-напред да разгледаме функцията $f(x) = \ln x$ (т. нар. „естествен логаритъм", т. е. логаритъм, чиято основа е числото e). Тя е дефинирана, както знаем, в интервала $(0, \infty)$. При $x_0 > 0$ ще имаме

$$\frac{\ln(x_0+h) - \ln x_0}{h} = \frac{\ln\frac{x_0+h}{x_0}}{h} = \frac{\ln\left(1+\frac{h}{x_0}\right)}{x_0 \cdot \frac{h}{x_0}} = \frac{1}{x_0}\ln\left(1+\frac{h}{x_0}\right)^{\frac{x_0}{h}}.$$

Ако сега положим $z = \frac{x_0}{h}$, то ясно е, че при $h > 0$ и $h \to 0$ ще имаме $z \to \infty$, а при $h < 0$ и $h \to 0$ ще имаме $z \to -\infty$. Ще покажем сега, че функцията $f(x) = \ln x$ е диференцуема в точката x_0 както отляво, така и отдясно. Наистина

$$f_+'(x_0) = \lim_{h\to 0,\, h>0} \frac{\ln(x_0+h) - \ln x_0}{h} = \frac{1}{x_0} \lim_{h\to 0,\, h>0} \ln\left(1+\frac{h}{x_0}\right)^{\frac{x_0}{h}}$$
$$= \frac{1}{x_0} \lim_{z\to\infty} \ln\left(1+\frac{1}{z}\right)^z = \frac{1}{x_0}\ln e = \frac{1}{x_0},$$

$$f_-'(x_0) = \lim_{h\to 0,\, h<0} \frac{\ln(x_0+h) - \ln x_0}{h} = \frac{1}{x_0} \lim_{h\to 0,\, h<0} \ln\left(1+\frac{h}{x_0}\right)^{\frac{x_0}{h}}$$
$$= \frac{1}{x_0} \lim_{z\to-\infty} \ln\left(1+\frac{1}{z}\right)^z = \frac{1}{x_0}\ln e = \frac{1}{x_0}.$$

Тъй като дясната и лявата производна се оказаха равни, то следва, че функцията $f(x) = \ln x$ е диференцуема в точката x_0. Но x_0 беше произволно положително число. Следователно за всяко $x > 0$ е установена формулата

(9) $$(\ln x)' = \frac{1}{x}.$$

Не е трудно сега да получим формула за производната на функцията $f(x) = \log_a x$ при $a > 0$, $a \neq 1$. Достатъчно е да използуваме равенството $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$. Получаваме

(10) $$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}.$$

Функцията $\varphi(x) = e^x$ е обратна на функцията $f(u) = \ln u$. Ако x_0 е произволно число от реалната права и ако $e^{x_0} = u_0$, то $u_0 > 0$ и ще имаме

$$\varphi'(x_0) = \frac{1}{f'(u_0)} = \frac{1}{\frac{1}{u_0}} = u_0 = e^{x_0}.$$

И тъй за всяко x имаме

(11) $$(e^x)' = e^x,$$

т. е. функцията e^x се оказа равна на своята производна.

С помощта на формула (11) и на теоремата за производна на съставна функция веднага можем да изведем и формула за производната на функцията $f(x) = a^x$, където $a > 0$. За целта ще използуваме равенството $a^x = e^{x \ln a}$. Ще получим

(12) $$(a^x)' = a^x \ln a.$$

Най-сетне нека разгледаме и степенната функция $f(x) = x^n$ при $x > 0$ и при произволен степенен показател. Ще видим, че формулата (2), която бяхме извели за цели стойности на степенния показател n, остава валидна при $x > 0$ и когато n е произволно реално число. Наистина имаме $x^n = e^{n \ln x}$, откъдето

$$(x^n)' = (e^{n \ln x})' = n e^{n \ln x} (\ln x)' = n e^{n \ln x} \cdot \frac{1}{x} = n \frac{x^n}{x} = n x^{n-1}.$$

Като прилагаме формулата (2) при дробни степенни показатели, ние ще можем да пресмятаме производните на всички ирационални функции.

По такъв начин, както виждаме, ние разполагаме с формули, които ни позволяват да намерим производната на всяка елементарна функция, както и на всяка съставна функция, образувана с помощта на елементарни функции.

Ето един преглед на тези формули:

$(C)' = 0$. $\qquad (\cos x)' = -\sin x,$

$(x^n)' = n x^{n-1}$. $\qquad (\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}.$

$(\sin x)' = \cos x$. $\qquad (\operatorname{cotg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}.$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad (\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}.$$

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad (\operatorname{arccotg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}.$$

$$(e^x)' = e^x. \qquad (a^x)' = a^x \ln a.$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}. \qquad (\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}.$$

Ще добавим тук и формулите от § 28:

$$(u+v)' = u' + v'. \qquad (u-v)' = u' - v'.$$

$$(uv)' = u'v + uv'. \qquad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}, \quad v \neq 0.$$

$$y = F(u), \quad u = f(x), \quad y' = F'(u) \cdot u'.$$

Упражнения. Да се намерят производните на следните функции:

1. $y = \frac{x}{2}$.
2. $y = 2x^2 + 4x - 7$.
3. $y = \frac{1}{x}$.
4. $y = \frac{1}{1+x^2}$.
5. $y = \frac{x^2-1}{x^2+x+1}$.
6. $y = \sqrt{x}$.
7. $y = \sqrt[3]{x}$.
8. $y = \sqrt{2x+3}$.
9. $y = x \sin x$.
10. $y = \sin^2 x$.
11. $y = x^2 \sin x + \sin x^2 + \sin 2x$.
12. $y = \operatorname{tg} 2x + \operatorname{tg}^2 x$.
13. $y = \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.
14. $y = \ln \cos x$.
15. $y = \ln \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$.
16. $y = \arcsin \frac{2x}{1+x^2}$.
17. $y = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}}$.
18. $y = \operatorname{arctg} \frac{1+x}{1-x}$.
19. $y = e^{-x^2}$.
20. $y = \ln[\ln(\ln x)]$.
21. $y = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$.

22. $y = x^x$. [Решение: Имаме $\ln y = x \ln x$,

$$\frac{1}{y} y' = \ln x + x \frac{1}{x}, \quad y' = x^x (\ln x + 1).]$$

23. $y = (1+x^2)^{\operatorname{arctg} x}$.

24. $y = \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \frac{\sqrt{2+2x^2} - x}{\sqrt{2+2x^2} + x} + \ln(x + \sqrt{1+x^2})$.

Отг. $y' = \frac{\sqrt{1+x^2}}{2+x^2}$.

25. $y = \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \frac{1 + x\sqrt{2} + x^2}{1 - x\sqrt{2} + x^2} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x\sqrt{2}}{1-x^2}$.

Отг. $y' = \frac{1}{1+x^4}$.

26. $y = e^{\arcsin x}(x + \sqrt{1-x^2})$ при $|x| < 1$.

Отг. $y' = 2e^{\arcsin x}$.

27. $y = 2 \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$ при $|x| < 1$.

Отг. $y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

28. $y = 2 \arcsin \frac{1}{2} (\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x})$ при $|x| < 1$.

Отг. $y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

29. $y = \frac{1}{6} \ln \frac{(x+1)^2}{x^2-x+1} + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x-1}{\sqrt{3}}$.

Отг. $y' = \frac{1}{x^3+1}$.

30. $y = \frac{\arccos x}{x} - \frac{1}{2} \ln \frac{1 - \sqrt{1-x^2}}{1 + \sqrt{1-x^2}}$ при $0 < x < 1$.

Отг. $y' = \frac{\arccos x}{x^2}$.

§ 30. Последователни производни

Ако функцията $f(x)$ е диференцуема в един интервал (т. е. във всяка негова точка), то нейната производна $f'(x)$, чиято стойност, разбира се, ще зависи от точката x, се явява също така функция на x, дефинирана в този интервал. Тя от своя страна може също да бъде диференцуема. Нейната производна се нарича **втора производна** на функцията $f(x)$ и се бележи с $f''(x)$ или с $\frac{d^2f(x)}{dx^2}$ (когато пишем $y=f(x)$, тя се бележи също и с y'' или с $\frac{d^2y}{dx^2}$). Производната пък на втората производна (ако съществува) се нарича **трета производна** на $f(x)$ и т. н. Изобщо n-**тата производна** на дадена функция $y=f(x)$ се дефинира като производна на нейната $(n-1)$-ва производна и се бележи чрез някой от знаците $f^{(n)}(x)$, $\frac{d^nf(x)}{dx^n}$, $y^{(n)}$ или $\frac{d^ny}{dx^n}$. Производната $f'(x)$ се нарича още **първа производна** на $f(x)$. Понякога се приема самата функция $f(x)$ да се разглежда като своя „нулева" производна, тъй че $f^{(0)}(x)=$ $=f(x)$.

В някои случаи с помощта на принципа на пълната математична индукция можем да получим формули, даващи общия вид на последователните производни на една или друга функция. Ето някои примери:

1. Нека $f(x)=e^x$. Имаме $f'(x)=e^x$ и ако $f^{(n)}(x)=e^x$ за някое n, то $f^{(n+1)}(x)=e^x$. Следователно

$$f^{(n)}(x)=e^x \quad \text{при} \quad n=1,\ 2, \ldots,$$

или даже по-общо

$$f^{(n)}(x)=e^x \quad \text{при} \quad n=0,\ 1,\ 2, \ldots$$

2. Нека $f(x)=\ln(1+x)$. Имаме $f'(x)=\frac{1}{1+x}$ при $x>-1$. Като намерим няколко последователни производни, лесно се досещаме, че общият вид на производните ще бъде

$$f^{(n)}(x)=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n} \quad \text{при } n=1,\ 2, \ldots (x>-1). \tag{1}$$

За да се убедим в правилността на тази формула, допускаме, че тя е вярна за някое n, и чрез диференциране получаваме

$$f^{(n+1)}(x)=(-1)^{n-1}(n-1)!((1+x)^{-n})'$$

$$=(-1)^{n-1}(n-1)!(-n)(1+x)^{-n-1}=(-1)^n\frac{n!}{(1+x)^{n+1}}.$$

Получихме същия резултат, до който щяхме да достигнем, ако във формулата (1) бяхме заместили n с $n+1$. С това тази формула е доказана.

3. Нека $f(x)=\sin x$. Ако диференцираме няколко пъти тази функция, ще видим, че всички намерени производни удовлетворяват равенството

$$f^{(n)}(x)=\sin\left(x+n\frac{\pi}{2}\right).$$

По-специално то е вярно при $n=1$, тъй като $(\sin x)'=\cos x=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$. Освен това веднага се проверява, че ако е изпълнено за някое цяло положително число n, то ще бъде вярно и когато заменим n с $n+1$. С това нашата формула е установена за всички цели положителни значения на n. Тя е вярна впрочем и при $n=0$, ако под $f^{(0)}(x)$ разбираме самата функция $f(x)$. И така имаме

$$f^{(n)}(x)=\sin\left(x+n\frac{\pi}{2}\right) \quad \text{при} \quad n=0,\ 1,\ 2.$$

Упражнения. Намерете формули за n-тите производни на функциите:

1. $f(x)=\frac{1}{x}$. 2. $f(x)=\sin ax$. 3. $f(x)=\cos ax$. 4. $f(x)=\sin^2 x$.

5. $f(x)=\frac{1-x}{1+x}$. 6. $f(x)=a^x$. 7. $f(x)=\log_a x$.

§ 31. Диференциал

Понятието диференциал, което на времето се е считало за едно от основните понятия на диференциалното и интегралното смятане, днес играе второстепенна роля в анализа. В известен смисъл, особено що се отнася до диференциалното смятане на функциите на една променлива, може да се каже, че неговото въвеждане изобщо не е необходимо. Понятието производна се оказва напълно достатъчно, за да бъдат формулирани всички по-съществени резултати от тази част на анализа.

Нека $f(x)$ е функция, дефинирана в някоя околност на дадена точка x. Да вземем някоя друга точка $x+h$, принадлежаща на същата околност. Числото h се нарича **нарастване на аргумента** и се бележи понякога (макар и немного удачно) с Δx. Разликата пък между функционалните стойности $f(x+h)-f(x)$ се нарича **нарастване на функцията** и се бележи с $\Delta f(x)$, а ако сме положили $y=f(x)$, също и с Δy. Следователно имаме

$$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x).$$

Ако функцията $f(x)$ е диференцуема в точката x, то, както знаем, към нейната графика може да се прекара допирателна в точката $P(x, f(x))$. В близост с тази точка графиката на функцията не се отдалечава много от своята допирателна и с известно приближение можем да считаме, че когато нарастването Δx е малко, тя съвпада с нея. Това ще рече да заменим истинската функционална стойност $f(x+\Delta x)$ с една приближена стойност, отговаряща на съответната точка от допирателната. Уравнението на допирателната е

$$\eta-f(x)=f'(x)(\xi-x),$$

където η и ξ са текущите координати. На точката $\xi = x + \Delta x$ от оста Ox отговаря точка от допирателната с ордината $\eta = f(x) + f'(x)\Delta x$. Тази именно стойност на ординатата приемаме за приближена функционална стойност. В такъв случай за нарастването на функцията получаваме следната приближена стойност:

$$f(x)+f'(x)\Delta x - f(x) = f'(x)\Delta x,$$

която наричаме **диференциал** на функцията $f(x)$ в точката x и която бележим с $df(x)$ или с dy. И така имаме

(1) $$df(x)=f'(x)\Delta x,$$

или

(2) $$dy=f'(x)\Delta x.$$

(На черт. 17 нарастването Δy се дава в отсечката $P'Q$, а диференциалът dy — с отсечката $P'T$.)

Ако вземем функцията $f(x)=x$, то равенството (1) се превръща в

(3) $$dx=\Delta x$$

— един резултат, който е съвсем очевиден и от геометрични съображения, тъй като в този случай графиката на функцията (която е права линия) съвпада със своята допирателна. Това ни дава основание да запишем равенствата (1) и (2) във вида

(4) $$df(x)=f'(x)dx,$$

или

(5) $$dy=f'(x)dx,$$

или най-просто във вида

(6) $$dy=y'dx.$$

Нека отбележим, че оттук за y' получаваме

$$y'=\frac{dy}{dx},$$

което напълно се съгласува с един от приетите по-рано от нас начини за означаване на производната.

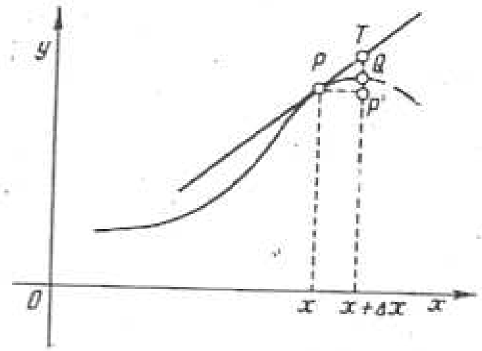
Нека още веднъж подчертаем, че макар Δx и dx да са равни помежду си, Δy и dy в общия случай не съвпадат и ние можем да заместваме Δy с dy само когато работим приближено. Връзката между Δx и Δy, от една страна, и dx и dy, от друга, се дава от дефиницията на понятието производна, която може да бъде записана така:

(7) $$\frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Това равенство означава, че разликата $\frac{\Delta y}{\Delta x}-\frac{dy}{dx}$, която е функция на Δx, клони към нула, когато $\Delta x\to 0$. С други думи, за функцията

(8) $$\varphi(\Delta x)=\frac{\Delta y}{\Delta x}-\frac{dy}{dx}$$

имаме $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\varphi(\Delta x)=0$.



Черт. 17

От равенството (8), като вземем пред вид, че $dx=\Delta x$, получаваме

(9) $$\Delta y=dy+\Delta x.\varphi(\Delta x).$$

Равенството (9) показва, че когато Δx е малко, Δy наистина твърде малко се различава от dy, тъй като разликата между тях представлява произведение, първият множител на което е Δx, а вторият е функция, която клони към нула при $\Delta x\to 0$.

За диференциалите на функциите са валидни някои формули, аналогични на съответните формули за производните. Така например, ако $u(x)$ и $v(x)$ са две диференцуеми функции, то за тяхната сума имаме

$$d[u(x)+v(x)]=[u(x)+v(x)]'dx=[u'(x)+v'(x)]dx$$
$$=u'(x)dx+v'(x)dx=du(x)+dv(x).$$

Получената формула записваме кратко така:

$$d(u+v)=du+dv.$$

Аналогично се установяват формулите

$$d(u-v)=du-dv,$$

$$d(uv)=vdu+udv,$$

$$d\frac{u}{v}=\frac{vdu-udv}{v^2}.$$

Нека сега е дадена съставната функция $y=f[\varphi(x)]$. Ако положим $u=\varphi(x)$, ще имаме

$$dy=y'dx=f'[\varphi(x)].\varphi'(x)dx=f'(u)u'dx,$$

или окончателно

$$dy=f'(u)du$$

— една формула, която по външен вид не се различава от формулата (5), въпреки че тук u не е независима променлива, а функция на x.

Диференциалът dy на една функция $y=f(x)$ се нарича още неин първи диференциал. Неговият диференциал пък се нарича втори диференциал на функцията y и се бележи с d^2y. Аналогично се дефинират диференциалите от по-висок ред, които бележим с d^3y, d^4y и т. н. При това се уславяме при намирането на втория диференциал, третия диференциал и т. н. на дадена функция да разглеждаме dx като константа. Така получаваме например

$$d^2y=d(dy)=(dy)'dx=(y'dx)'dx=(y''dx)dx=y''dx^2.$$

(Нека забележим, че изразът $(dx)^2$ се бележи за краткост с dx^2. Той не бива да се смесва с диференциала на функцията x^2, който се бележи с $d(x^2)$. Аналогично $(dx)^3$, $(dx)^4$ и т. н. се бележат съответно с dx^3, dx^4 и т. н.)

С помощта на принципа за математическата индукция лесно се установява следната формула за n-тия диференциал на една функция $y=f(x)$:

$$d^n y=y^{(n)}dx^n.$$

ГЛАВА VI

ОСНОВНИ ТЕОРЕМИ НА ДИФЕРЕНЦИАЛНОТО СМЯТАНЕ

Тази глава е посветена на няколко теореми, играещи основна роля в математическия анализ. Като се запознаем с тези теореми, ние ще се убедим във важността на понятието производна на функция. Така например ще видим как простото познаване на знака на производната (или по-общо на няколко последователни производни) на дадена функция ни дава възможност да направим заключения за характера на изменението на самата функция, за характерните особености на нейната графика. Ще се запознаем също така с формулата на Тейлор, играеща важна роля при много въпроси от анализа, както и с теоремите на Лопитал, представляващи удобно средство за намиране границите на функциите в редица случаи.

§ 32. Локални екстремуми. Теореми на Ферма и Рол

Понятията локален максимум и локален минимум се срещат при много въпроси от анализа и неговите приложения.

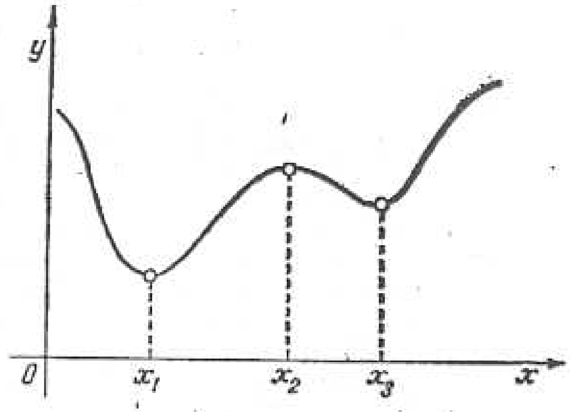
Дефиниция. *Ще казваме, че функцията $f(x)$ има локален максимум в някоя вътрешна точка x_0 от своята дефиниционна област, когато съществува такава околност $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ на x_0, съдържаща се в дефиниционната област на $f(x)$, че за всяко x от тази околност да имаме $f(x)\leqq f(x_0)$.*

Аналогично *$f(x)$ ще има локален минимум в x_0, когато x_0 е вътрешна точка за дефиниционната област на функцията и когато за всяко x от някоя околност $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ на точката x_0 е изпълнено неравенството $f(x)\geqq f(x_0)$.*

Локалните максимуми и локалните минимуми ще наричаме с общото име *локални екстремуми.*

На черт. 18 е показана графиката на една функция, която има локален максимум в точката x_2 и два локални минимума — в точките x_1 и x_3.

Нека отбележим, че ако една функция $f(x)$ има локален максимум в дадена точка x_0, то стойността ѝ в тази точка е максимална в сравнение със стойностите, които тя приема в точките от някоя околност на x_0, но не непременно в сравнение с всички нейни функционални стойности. Другояче казано, един локален максимум не е непременно най-голямата стойност на разглежданата функция. Аналогична забележка важи и за понятието локален минимум.



Черт. 18

Разбира се, една функция $f(x)$ може да притежава локален екстремум в дадена точка x_0, без да бъде непрекъсната в тази точка. Така например функцията

$$f(x)=\begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \neq 0 \\ 1 & \text{при} \quad x=0 \end{cases}$$

има очевидно локален максимум в точката $x_0=0$, като същевременно е прекъсната в тази точка.

Също така една функция, която е непрекъсната в дадена точка x_0, може да има локален екстремум в тази точка, без да бъде диференцуема в нея. Такъв е случаят например с функцията $f(x)=|x|$, която има локален минимум при $x_0=0$ (черт. 16). Както знаем, тя е непрекъсната, но не е диференцуема в тази точка.

Когато обаче една функция $f(x)$, имаща локален екстремум в някоя точка x_0, е диференцуема в същата точка, нейната производна $f'(x_0)$ не може да бъде производна. В сила е следната важна

Теорема на Ферма. *Ако функцията $f(x)$ е диференцуема в една вътрешна точка x_0 от своята дефиниционна област и ако тя има локален екстремум в тази точка, то $f'(x_0)=0$.*

Доказателство. Да разгледаме случая, когато $f(x)$ има локален максимум в точката x_0 (случаят, когато тя има локален минимум, се разглежда аналогично). Тогава ще бъде изпълнено неравенството

$$f(x) \leq f(x_0) \tag{1}$$

за всяко x от някоя околност $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ на точката x_0. Както знаем, дясната и лявата производна в точката x_0 се дефинират с равенствата

$$f'_+(x_0)=\lim_{x\to x_0,\, x>x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}, \quad f'_-(x_0)=\lim_{x\to x_0,\, x<x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

Ако разгледаме частното

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \tag{2}$$

за стойности на x, принадлежащи на интервала $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ и същевременно по-големи от x_0, ще видим, че числителят е отрицателен или нула поради неравенството (1), а знаменателят е положителен. Оттук заключаваме, че

$$f'_+(x_0) \leq 0.$$

Да разгледаме сега частното (2) за такива значения на x от интервала $(x_0-\delta, x_0+\delta)$, които са по-малки от x_0. Числителят е пак отрицателен или нула, но сега и знаменателят е отрицателен. Поради това заключаваме, че

$$f'_-(x_0) \geq 0.$$

По условие функцията $f(x)$ е диференцуема в точката x_0. Следователно $f'_+(x_0)=f'_-(x_0)=f'(x_0)$. И така имаме едновременно $f'(x_0)\leq 0$ и $f'(x_0)\geq 0$, откъдето получаваме окончателно $f'(x_0)=0$.

Като си спомним геометричното тълкуване на производната, лесно е да дадем геометрично тълкуване и на твърдението от теоремата на Ферма. Както знаем, допирателната към графиката на една функция $f(x)$, прекарана през точката $P_0(x_0, f(x_0))$, има уравнение

$$\eta-f(x_0)=f'(x_0)(\xi-x_0).$$

Теоремата на Ферма установява следователно, че допирателната, прекарана през точка от графиката на $f(x)$, в която функцията има екстремум, е успоредна на оста Ox (черт. 19) (при условие, разбира се, че тази допирателна съществува, т. е. че функцията $f(x)$ е диференцуема в съответната точка).

Теоремата на Ферма може да се формулира още така:

Ако функцията $f(x)$ е диференцуема в точката x_0, то за да притежава тя локален екстремум в тази точка, необходимо е производната ѝ $f'(x_0)$ да бъде равна на нула.

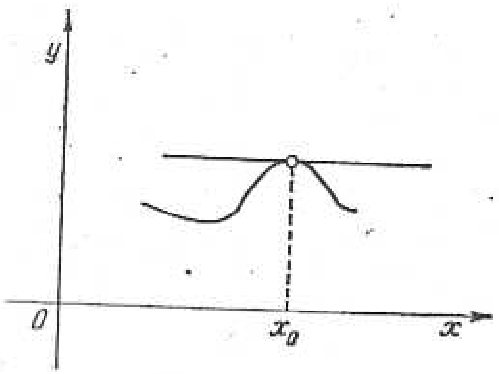
Ето защо, когато искаме да намерим локалните екстремуми на някоя диференцуема функция, ние обикновено най-напред намираме нейната производна и търсим ония точки, в които тази производна е нула. Това са единствените точки, в които е възможно да имаме екстремуми.

Анулирането на първата производна в една точка обаче не е още достатъчно условие за съществуването на локален екстремум. Така например функцията $f(x)=x^3$ има производна, равна на нула при $x_0=0$.

Въпреки това тя не притежава нито максимум, нито минимум в тази точка. Това се вижда от обстоятелството, че във всяка околност на точката $x_0=0$ се намират както положителни, така и отрицателни числа, а, от друга страна, имаме $f(x)>0$ при $x>0$ и $f(x)<0$ при $x<0$, докато $f(0)=0$ (черт. 26).

С намирането на достатъчни условия за съществуването на локален екстремум ние ще се занимаем по-нататък.

Друга основна теорема на диференциалното смятане е следната:



Черт. 19

Теорема на Рол. *Ако функцията $f(x)$ е непрекъсната в крайния и затворен интервал $[a, b]$ и е диференцуема в отворения интервал (a, b) и ако освен това $f(a)=f(b)$, то съществува поне една точка ξ, намираща се между a и b, за която $f'(\xi)=0$.*

Доказателство. Тъй като функцията $f(x)$ е непрекъсната в един краен и затворен интервал, то тя е ограничена. Да означим съответно с L и l точната ѝ горна и точната ѝ долна граница в интервала $[a, b]$.

Ако $l=L$, то поради неравенствата $l \leq f(x) \leq L$, изпълнени за всяко x от интервала $[a, b]$, функцията $f(x)$ ще бъде константа в този интервал. Тогава нейната производна е нула в целия интервал (a, b) и теоремата е доказана.

Остава да разгледаме случая, когато $l<L$. Съгласно теоремата на Вайерщрас съществуват две точки x_1 и x_2 от интервала $[a, b]$, такива, че $f(x_1)=l$ и $f(x_2)=L$. Поне една от тези две точки е вътрешна за интервала $[a, b]$. И наистина, ако допуснем противното, т. е. ако имаме $x_1=a$, $x_2=b$ или пък $x_1=b$, $x_2=a$, то от условието $f(a)=f(b)$ бихме получили $l=L$. Нека x_1 е вътрешна точка за интервала $[a, b]$. Но $f(x_1)=l$. Тогава функцията $f(x)$ ще има очевидно локален минимум в точката x_1, поради което съгласно теоремата на Ферма ще имаме $f'(x_1)=0$. Ако пък x_1 е крайна точка за интервала $[a, b]$, то точката x_2 ще бъде вътрешна. В такъв случай това ще бъде една точка на локален максимум и следователно пак по теоремата на Ферма ще имаме $f'(x_2)=0$. И така във всички случаи съществува точка ξ между a и b, за която $f'(\xi)=0$.

Геометричното тълкуване на теоремата на Рол е същото, както при теоремата на Ферма. То се състои в това, че при направените в условието на теоремата предположения съществува такава точка от графиката на дадената функция, допирателната в която е успоредна на оста Ox.

§ 33. Теорема за крайните нараствания и следствия

С помощта на теоремата на Рол се установява следната теорема, заемаща важно място в диференциалното и интегралното смятане.

Теорема за крайните нараствания. *Ако функцията $f(x)$ е непрекъсната в крайния и затворен интервал $[a, b]$ и е диференцуема в отворения интервал (a, b), то съществува поне една точка ξ между a и b, за която*

$$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}. \tag{1}$$

Доказателство. Да въведем помощната функция

$$\varphi(x)=f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a).$$

Тя е също непрекъсната в интервала $[a, b]$ и диференцуема в интервала (a, b). Лесно се пресмята при това, че $\varphi(a)=f(a)$ и $\varphi(b)=f(a)$. И така имаме $\varphi(a)=\varphi(b)$. Значи функцията $\varphi(x)$ удовлетворява всички условия на теоремата на Рол и следователно ще съществува поне една точка ξ между a и b, за която $\varphi'(\xi)=0$. Но

$$\varphi'(x)=f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Оттук получаваме

$$\varphi'(\xi)=f'(\xi)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=0,$$

или

$$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a},$$

с което теоремата е доказана.

Нека отбележим, че теоремата за крайните нараствания представлява едно обобщение на теоремата на Рол, която се получава веднага в случая, когато е изпълнено равенството $f(a)=f(b)$.

Равенството (1) често се записва и другояче. За целта се полага $h=b-a$ и $\theta=\frac{\xi-a}{b-a}$. Оттук получаваме $\xi-a=\theta(b-a)$, или $\xi=a+\theta h$.

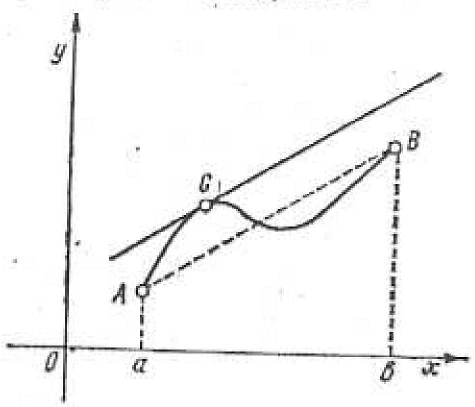
От неравенствата $a<\xi<b$ е ясно, че $0<\theta<1$. Тогава равенството (1) ще се запише така:

$$f'(a+\theta h)=\frac{f(a+h)-f(a)}{h},$$

или окончателно

$$f(a+h)-f(a)=hf'(a+\theta h), \tag{2}$$

където θ е число, намиращо се между 0 и 1.



Черт. 20

В равенството (2) h е положително число (тъй като имахме $h=b-a$). Лесно е да се убедим обаче, че разликата $f(a+h)-f(a)$ може да се представи по същия начин и когато h е отрицателно (стига, разбира се, функцията $f(x)$ да удовлетворява условията на теоремата в интервала $[a+h, a]$). И наистина да положим в този случай $a+h=a_1$, $a=a_1+h_1$, където $h_1=-h$, и следователно $h_1>0$. Тогава

$$f(a+h)-f(a)=f(a_1)-f(a_1+h_1)=-h_1f'(a_1+\theta h_1)$$
$$=hf'(a+h-\theta h)=hf'[a+(1-\theta)h].$$

Да положим още $1-\theta=\theta'$. Тогава получаваме

$$f(a+h)-f(a)=hf'(a+\theta' h).$$

При това от неравенствата $0<\theta<1$ следва, че $0<\theta'<1$. И така равенството

$$f(a+h)-f(a)=hf'(a+\theta h),$$

където θ е подходящо подбрано число, удовлетворяващо условието $0<\theta<1$, е валидно винаги когато функцията $f(x)$ е диференцуема във всички точки между a и $a+h$ и освен това е непрекъсната в самите точки a

и $a+h$ независимо от това, дали h е положително или отрицателно число.

Теоремата за крайните нараствания също може да бъде изтълкувана геометрично. Както знаем от аналитичната геометрия, правата, свързваща двете крайни точки $A(a, f(a))$ и $B(b, f(b))$ от графиката на функцията $f(x)$ (черт. 20), има уравнение

$$y-f(a)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a),$$

където x и y са текущите координати. От друга страна, допирателната към графиката на $f(x)$, прекарана в точката $C(\xi, f(\xi))$, има уравнение

$$y-f(\xi)=f'(\xi)(x-\xi).$$

От равенството (1) се вижда, че тези две прави са успоредни. И така теоремата за крайните нараствания твърди, че съществува поне една точка от графиката на функцията $f(x)$, в която допирателната е успоредна на правата, съединяваща двете крайни точки на графиката.

От теоремата за крайните нараствания могат веднага да се изведат някои твърде важни следствия.

Преди да формулираме първото от тях, нека си припомним, че производната на всяка функция-константа е нула. Сега ще разгледаме въпроса, дали е вярно обратното твърдение и кога, т. е. дали от факта, че някоя функция има производна нула, можем да направим заключение, че тя е константа и кога.

Следствие 1 (основна теорема на интегралното смятане). *Ако функцията $f(x)$ има производна, равна на нула във всички точки на един интервал D, то тя е константа в този интервал.*

И наистина нека x_0 е точка от интервала D. Ако x е произволна друга точка от този интервал, то всички точки между x_0 и x ще лежат също в интервала D. Тогава x_0 и x ще бъдат краища на един интервал, по отношение на който са изпълнени условията на теоремата за крайните нараствания. Следователно ще съществува точка ξ между x_0 и x, за която имаме

$$f'(\xi)=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

Но $f'(\xi)=0$ по условие, откъдето $f(x)=f(x_0)$. Тъй като точката x беше произволно взета в интервала D, то всички стойности на функцията съвпадат, т. е. тя е константа.

Нека отбележим, че за интервала D тук не направихме никакво ограничение — той може да бъде краен или безкраен, отворен или затворен — твърдението остава вярно. При това е ясно, че ако интервалът D е затворен (или пък полузатворен), то достатъчно е условието $f'(x)=0$ да бъде изпълнено само за вътрешните точки на този интервал, докато за неговите крайни точки изобщо не е необходимо да се изисква диференцуемостта на функцията $f(x)$ — достатъчно е в тези точки тя да бъде само непрекъсната.

Следствие 2. *Ако функцията $f(x)$ е диференцуема в един интервал D и ако $f'(x) \geqq 0$ за всяко x от D, то $f(x)$ е растяща в този интервал. Ако $f'(x)>0$ за всяка вътрешна точка x от D, то $f(x)$ е даже строго растяща.*

И наистина нека x_1 и x_2 са две произволни точки от интервала D и нека $x_1<x_2$. Като приложим теоремата за крайните нараствания по отношение на интервала $[x_1, x_2]$, получаваме

$$f(x_2)-f(x_1)=f'(\xi)(x_2-x_1),$$

където ξ е точка, намираща се между x_1 и x_2. Верността на нашето твърдение следва непосредствено от това равенство, тъй като от $f'(\xi) \geqq 0$ следва $f(x_1) \leqq f(x_2)$, а от $f'(\xi)>0$ следва $f(x_1)<f(x_2)$.

Аналогично се доказва, че ако за някоя функция $f(x)$ имаме $f'(x) \leqq 0$ за всяко x от даден интервал D, то $f(x)$ е намаляваща в този интервал, а ако $f'(x)<0$ за всяка вътрешна точка x на D, то тя е даже строго намаляваща.

Тук също можем да забележим, както и при следствие 1, че когато интервалът D е затворен (или полузатворен), не е необходимо да се изисква функцията $f(x)$ да бъде диференцуема в неговите крайни точки, достатъчно е в тези точки тя да бъде само непрекъсната.

Нека покажем веднага с някои примери как могат да се използват доказаните две следствия от теоремата за крайните нараствания.

Да разгледаме функцията

$$f(x)=\arcsin x+\arccos x,$$

дефинирана и непрекъсната в затворения интервал $[-1, 1]$. Тя е диференцуема в отворения интервал $(-1, 1)$ и нейната производна е

$$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=0.$$

Оттук с помощта на основната теорема на интегралното смятане заключаваме, че $f(x)$ е константа в затворения интервал $[-1, 1]$. За да пресметнем стойността на тази константа, достатъчно е да дадем на x някоя фиксирана стойност от този интервал, например да вземем $x=0$.

Получаваме

$$f(0)=\arcsin 0+\arccos 0=\frac{\pi}{2}.$$

По този начин за всяко x от интервала $[-1, 1]$ доказахме тъждеството

$$\arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2}.$$

Следствие 2 пък може да се използува за установяване на някои неравенства. Нека да покажем например, че

$$\operatorname{tg} x>x \quad \text{при} \quad 0<x<\frac{\pi}{2}.$$

За целта да разгледаме функцията $f(x)=\operatorname{tg} x-x$ в интервала $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Имаме

$$f'(x)=\frac{1}{\cos^2 x}-1=\frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}.$$

Ясно е, че $f'(x)>0$ при $0<x<\frac{\pi}{2}$. Следователно функцията $f(x)$ е строго растяща и за всяко x от отворения интервал $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ ще имаме $f(x)>f(0)$, т. е. $\operatorname{tg} x-x>0$, откъдето получаваме желаното неравенство.

Да вземем още един пример. Да покажем, че

$$e^x \geqq 1+x \quad \text{за всяко } x.$$

За целта образуваме функцията $f(x)=e^x-1-x$. Имаме $f'(x)=e^x-1$, $f''(x)=e^x$. Тъй като $f''(x)>0$ за всяко x, то функцията $f'(x)$ е строго растяща в интервала $(-\infty, \infty)$. Но $f'(0)=0$, следователно имаме $f'(x)<0$ при $x<0$ и $f'(x)>0$ при $x>0$. Това пък показва, че функцията $f(x)$ е строго намаляваща в интервала $(-\infty, 0]$ и строго растяща в интервала $[0, \infty)$. Следователно тя достига в точката $x=0$ своята най-малка стойност, която е $f(0)=0$. И така за всяко $x \neq 0$ имаме $f(x)>0$, т. е. $e^x-1-x>0$ или $e^x>1+x$. При $x=0$ последното неравенство преминава в равенство. По такъв начин се убеждаваме във валидността на неравенството, което трябваше да установим.

Упражнения. I. Като използувате основната теорема на интегралното смятане, докажете следните тъждества:

1. $\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}=\frac{1}{2}\arcsin x+\frac{\pi}{4}$ при $-1 \leq x<1$.

2. $\arcsin\frac{1}{2}(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})=\frac{1}{2}\arcsin x$ при $-1 \leq x \leq 1$.

3. $\arcsin(2x^2-1)=\begin{cases} 2\arcsin x-\frac{\pi}{2} & \text{при } 0 \leq x \leq 1 \\ -2\arcsin x-\frac{\pi}{2} & \text{при } 1 \leq x \leq 0. \end{cases}$

4. Също така с помощта на основната теорема на интегралното смятане докажете отново тъждествата, дадени в задачи 4, 5, 6, 7 от § 16.

II. Докажете следните неравенства:

1. $\cos x \geq 1-\frac{x^2}{2}$ за всяко x.

2. $\sin x \geq x - \frac{x^3}{6}$ при $x \geq 0$.

3. $\frac{2}{\pi} \leq \frac{\sin x}{x} \leq 1$ при $0 < x \leq \frac{\pi}{2}$.

4. $(1+x)^n \geqq 1+nx$ при $x \geqq -1$ и при произволно цяло положително число n.
5. $(1+x)^n \geqq 1+nx$ за всяко x, ако n е четно число.

§ 34. Обобщена теорема за крайните нараствания (теорема на Коши)

Теоремата за крайните нараствания може да бъде обобщена. А именно валидна е следната теорема, от която като частен случай се получава теоремата на крайните нараствания.

Теорема на Коши (обобщена теорема за крайните нараствания). *Ако функциите $f(x)$ и $g(x)$ са непрекъснати в крайния и затворен интервал $[a, b]$ и диференцуеми в отворения интервал (a, b) и ако $g'(x) \neq 0$ за всяко x от (a, b), то съществува поне една точка ξ, намираща се между a и b, за която е изпълнено равенството*

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}. \tag{1}$$

Доказателство. Преди всичко нека отбележим, че знаменателят $g(b)-g(a)$ на частното, което е в дясната страна на равенството (1), е сигурно различен от нула. Наистина, ако допуснем, че $g(a)=g(b)$, то функцията $g(x)$ би удовлетворявала условията на теоремата на Рол. Тогава би съществувала някоя точка от отворения интервал (a, b), за която производната $g'(x)$ би била равна на нула, а това противоречи на условието на теоремата.

Да преминем сега към самото доказателство на теоремата, което впрочем по своята идея не се различава много от доказателството на теоремата за крайните нараствания. Да си образуваме помощната функция

$$\varphi(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}[g(x)-g(a)].$$

Веднага се вижда, че тя е непрекъсната в интервала $[a, b]$ и диференцуема в интервала (a, b). Освен това имаме $\varphi(a)=f(a)$ и $\varphi(b)=f(a)$, т. е. получаваме $\varphi(a)=\varphi(b)$. Функцията $\varphi(x)$ удовлетворява следователно условията на теоремата на Рол. Ще съществува тогава някаква точка ξ от отворения интервал (a, b), за която $\varphi'(\xi)=0$. Но

$$\varphi'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} g'(x),$$

откъдето

$$\varphi'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} g'(\xi) = 0,$$

или най-сетне

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}.$$

Както вече споменахме, теоремата за крайните нараствания може да се получи като частен случай на току-що доказаната теорема. Наистина нека $f(x)$ е една функция, непрекъсната в интервала $[a, b]$ и диференцуема в интервала (a, b). Да разгледаме освен това и функцията $g(x)=x$. Като приложим теоремата на Коши към тези две функции и вземем пред вид, че $g(a)=a$, $g(b)=b$, както и това, че $g'(x)=1$ за всяко x, заключаваме, че съществува точка ξ от интервала (a, b), за която имаме

$$\frac{f'(\xi)}{1} = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Но това не е нищо друго освен равенството, което ни дава теоремата за крайните нараствания.

Ще дадем тук и едно следствие от теоремата на Коши, което ще използуваме по-нататък.

Следствие. *Нека $f(x)$ и $g(x)$ са две функции, дефинирани и $n+1$ пъти диференцуеми в някоя околност D на една точка a, като при това $g(x) \neq 0$, $g'(x) \neq 0, \ldots, g^{(n+1)}(x) \neq 0$ при $x \neq a$. Да предположим освен това, че*

$$f(a) = f'(a) = f''(a) = \cdots = f^{(n)}(a) = 0,$$

$$g(a) = g'(a) = g''(a) = \cdots = g^{(n)}(a) = 0.$$

Тогава за всяко x от D, различно от a, имаме

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{g^{(n+1)}(\xi)}, \tag{2}$$

където ξ е някаква точка, намираща се между a и x.

Наистина, като вземем пред вид, че $f(a)=g(a)=0$, и като приложим теоремата на Коши, ще получим

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \frac{f'(\xi_1)}{g'(\xi_1)},$$

където ξ_1 е точка, лежаща между a и x. По-нататък поради условието $f'(a)=g'(a)=0$ ще имаме

$$\frac{f'(\xi_1)}{g'(\xi_1)} = \frac{f'(\xi_1)-f'(a)}{g'(\xi_1)-g'(a)} = \frac{f''(\xi_2)}{g''(\xi_2)},$$

където ξ_2 е подходящо избрана точка, намираща се между точките a и ξ_1 и следователно между a и x.

И така чрез двукратно прилагане на теоремата на Коши получихме

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f''(\xi_2)}{g''(\xi_2)}.$$

Ако продължим да разсъждаваме по същия начин, след като приложим $n+1$ пъти теоремата на Коши, ще достигнем до равенството

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{g^{(n+1)}(\xi)},$$

където ξ е точка, която се намира между точките a и x.

§ 35. Теореми на Лопитал

Доказаната в предишния параграф теорема на Коши се използува за получаването на няколко теореми, носещи името **теореми на Лопитал.** Това са теореми, отнасящи се до намирането на границата на частното от две функции в случаи, когато не можем да приложим теорема 3 от § 18 било поради това, че функцията в знаменателя има граница нула, било пък поради това, че функциите, които разглеждаме, клонят към плюс или минус безкрайност.

Първа теорема на Лопитал. *Нека функциите $f(x)$ и $g(x)$ са дефинирани и диференцуеми в някоя околност на една точка a, като при това $g'(x)\neq 0$ при $x\neq a$. Нека освен това $f(a)=g(a)=0$. Ако границата $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ съществува, то съществува и границата $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ и е изпълнено равенството*

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Доказателство. С разсъждения, аналогични на онези, които извършихме в началото на доказателството на теоремата на Коши от предишния параграф, можем да се убедим, че $g(x)\neq 0$ при $x\neq a$. Това ни позволява да образуваме частното $\frac{f(x)}{g(x)}$ при $x\neq a$.

Нека сега x е точка, принадлежаща на дадената околност на точката a и различна от a. Поради условието $f(a)=g(a)=0$ можем да пишем

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}. \tag{1}$$

От друга страна, като приложим теоремата на Коши към интервала, определен от точките a и x, ще получим

$$\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}, \tag{2}$$

където ξ е някаква точка, намираща се между a и x. От равенствата (1) и (2) е ясно, че

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Но когато x клони към a, точката ξ също ще клони към a. Ето защо, ако $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=l$, то ще имаме $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=l$, а следователно и $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=l$. С това теоремата е доказана.

От изложеното доказателство се вижда, че в същност не е необходимо функциите $f(x)$ и $g(x)$ да бъдат диференцуеми в точката a — достатъчно е да са диференцуеми при $x\neq a$, а в точката a да са само непрекъснати. Също така е ясно, че доказателството запазва своята сила и в случая, когато функциите $f(x)$ и $g(x)$ удовлетворяват условията на теоремата само по отношение на някоя лява или пък дясна околност на точката a. В такъв случай границите, за които се говори в теоремата, трябва да бъдат взети при x, клонящо към a отляво, съответно отдясно.

Ние си служим с първата теорема на Лопитал за намиране границата на частното на две функции в случаите, при които не можем да приложим теорема 3 от § 18, тъй като функцията $g(x)$, която е в знаменателя, клони към нула при x, клонящо към a (това следва от условието $g(a)=0$ и от непрекъснатостта на $g(x)$ в точката a). Числителят $f(x)$ клони също към нула. Ето защо условно казваме, че първата теорема на Лопитал се отнася до неопределени изрази от вида $\frac{0}{0}$.

Втората теорема на Лопитал пък се отнася до неопределени изрази от вида $\frac{\infty}{\infty}$. Нейното доказателство е вече по-сложно.

Втора теорема на Лопитал. *Нека функциите $f(x)$ и $g(x)$ са дефинирани и диференцуеми поне при $x\neq a$ в някоя околност на точката a и нека при $x\neq a$ имаме $g'(x)\neq 0$. Нека освен това $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\lim\limits_{x\to a}g(x)=\pm\infty$* (това означава, че всяка от границите $\lim\limits_{x\to a}f(x)$ и $\lim\limits_{x\to a}g(x)$ може да бъде било ∞, било $-\infty$). *Ако съществува границата $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$, то съществува и границата $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ и тези две граници са равни помежду си,* т. е.

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Доказателство. Нека

$$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=l. \tag{3}$$

Ще разгледаме най-напред случая, когато x клони едностранно, например отдясно, към точката a. Нека ε е произволно положително число. След това да вземем друго положително число ε', което ще определим покъсно (и което ще зависи от избраното ε). Съществува такова положително число δ_1, че за $a<x<a+\delta_1$ да имаме

$$\left|\frac{f'(x)}{g'(x)}-l\right|<\varepsilon'.$$

Ако фиксираме точка x_1, удовлетворяваща неравенствата $a<x_1<a+\delta_1$, за всяко x, взето тъй, че $a<x<x_1$, ще имаме въз основа на обобщената теорема на крайните нараствания

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{g(x)-g(x_1)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}, \tag{4}$$

където ξ е точка, лежаща между x и x_1, и за която следователно също така

$$\left|\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}-l\right|<\varepsilon'. \tag{5}$$

От равенството (4) получаваме

$$\frac{f(x)}{g(x)}\cdot\frac{1-\dfrac{f(x_1)}{f(x)}}{1-\dfrac{g(x_1)}{g(x)}}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)},$$

или

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}\cdot\frac{1-\dfrac{g(x_1)}{g(x)}}{1-\dfrac{f(x_1)}{f(x)}}. \tag{6}$$

Тъй като $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\lim\limits_{x\to a}g(x)=\pm\infty$, вторият множител в дясната страна на последното равенство клони към 1, когато (при фиксирано x_1) x клони към a. Ето защо ще съществува такова $\delta>0$ (можем естествено да считаме, че $\delta<\delta_1$), че при $a<x<\delta$ да имаме

$$\left|\frac{1-\dfrac{g(x_1)}{g(x)}}{1-\dfrac{f(x_1)}{f(x)}}-1\right|<\varepsilon'. \tag{7}$$

Тогава, като преработим равенството (6) и вземем пред вид (5) и (7), получаваме

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)}-l\right|=\left|\left(\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}-l+l\right)\frac{1-\dfrac{g(x_1)}{g(x)}}{1-\dfrac{f(x_1)}{f(x)}}-l\right|$$

$$\leq\left|\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}-l\right|\cdot\left|\frac{1-\dfrac{g(x_1)}{g(x)}}{1-\dfrac{f(x_1)}{f(x)}}\right|+|l|\cdot\left|\frac{1-\dfrac{g(x_1)}{g(x)}}{1-\dfrac{f(x_1)}{f(x)}}-1\right|<\varepsilon'(1+\varepsilon')+|l|\,\varepsilon'.$$

Ако сега приемем, че ε' удовлетворява неравенствата $0<\varepsilon'<1$ и $\varepsilon'<\dfrac{\varepsilon}{|l|+2}$

(което очевидно е възможно, тъй като по този начин ε' се определя в зависимост единствено от ε), ще получим

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)}-l\right|<\varepsilon'(2+|l|)<\varepsilon$$

при $a<x<a+\delta$. Това означава, че $\lim\limits_{x\to a,\,x>a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=l$. По подобен начин се вижда, че и $\lim\limits_{x\to a,\,x<a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=l$, с което равенството (1) е установено и теоремата е доказана.

От самото доказателство е ясно, че теоремата е вярна и когато нейните условия са изпълнени само по отношение на някоя лява или пък дясна околност на точката a, а в заключението става дума за едностранна (при x клонящо отляво, съответно отдясно към a) граница.

Като следствие от изложените две теореми на Лопитал могат да се получат още две, които ние ще наречем трета и четвърта теорема на Лопитал. При тях става дума за граници на функции при x, клонящо към безкрайност или към минус безкрайност, т. е. фигуративно казано, точката a е заменена с безкрайността. Едната от тези теореми се отнася до неопределени изрази от вида $\frac{0}{0}$, а другата — до неопределени изрази от вида $\frac{\infty}{\infty}$.

Трета теорема на Лопитал. *Нека функциите $f(x)$ и $g(x)$ са дефинирани и диференцуеми в някой интервал от вида (p, ∞), като $g(x)\neq0$ и $g'(x)\neq0$ в този интервал, и нека*

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}g(x)=0. \tag{8}$$

Тогава, ако съществува границата $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$, то ще съществува и границата $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ и ще бъде изпълнено равенството

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Четвърта теорема на Лопитал. *Нека функциите $f(x)$ и $g(x)$ са дефинирани и диференцуеми в някой интервал от вида (p, ∞), като при това $g(x)\neq0$ и $g'(x)\neq0$ в този интервал. Нека освен това*

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}g(x)=\pm\infty.$$

Ако съществува границата $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$, то ще съществува и границата $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ и тези две граници са равни помежду си, т. е.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Нека покажем например как третата теорема се получава просто с помощта на първата теорема на Лопитал. Да предположим, че $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}=l$. Полагаме $x=\frac{1}{t}$ и разглеждаме функциите $F(t)$ и $G(t)$, дефинирани така: $F(t)=f\left(\frac{1}{t}\right)$ и $G(t)=g\left(\frac{1}{t}\right)$ при $t\neq 0$; $F(0)=G(0)=0$. Тъй като при t, клонящо към нула отдясно, $\frac{1}{t}$ клони към ∞, поради условието (8) ще имаме $\lim\limits_{t\to 0,\, t>0} F(t)=0=F(0)$ и $\lim\limits_{t\to 0,\, t>0} G(t)=0=G(0)$. Това означава, че функциите $F(t)$ и $G(t)$ са непрекъснати в точката 0. От друга страна, при $t\neq 0$ имаме

$$F'(t)=f'\left(\frac{1}{t}\right)\cdot\left(-\frac{1}{t^2}\right) \text{ и } G'(t)=g'\left(\frac{1}{t}\right)\cdot\left(-\frac{1}{t^2}\right),$$

поради което

$$\lim_{t\to 0,\, t>0}\frac{F'(t)}{G'(t)}=\lim_{t\to 0,\, t>0}\frac{f'\left(\frac{1}{t}\right)}{g'\left(\frac{1}{t}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}=l.$$

Тогава въз основа на първата теорема на Лопитал ще имаме $\lim\limits_{t\to 0,\, t>0}\frac{F(t)}{G(t)}=l$. Но

$$\lim_{t\to 0,\, t>0}\frac{F(t)}{G(t)}=\lim_{t\to 0,\, t>0}\frac{f\left(\frac{1}{t}\right)}{g\left(\frac{1}{t}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}.$$

С това теоремата е доказана.

Аналогично с помощта на втората теорема на Лопитал се доказва четвъртата теорема на Лопитал.

Третата и четвъртата теорема на Лопитал остават, разбира се, верни, ако условията им са изпълнени в някой интервал от вида $(-\infty, p)$ и ако навсякъде в тях границите се вземат при x, клонящо към $-\infty$.

Пример 1. Да потърсим границата $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{arc\,tg} x}{x}$. Можем да приложим първата теорема на Лопитал:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arc\,tg} x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x^2}}{1}=1.$$

Пример 2. Да намерим границата $\lim\limits_{x\to 0,\, x>0}\operatorname{tg} x\ln x$. Представяме произведението $\operatorname{tg} x\ln x$ във вида $\frac{\ln x}{\operatorname{cotg} x}$ и прилагаме втората теорема на Лопитал. Получаваме

$$\lim_{x\to 0,\, x>0}\frac{\ln x}{\operatorname{cotg} x}=\lim_{x\to 0,\, x>0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{\sin^2 x}}=-\lim_{x\to 0,\, x>0}\frac{\sin^2 x}{x}=-\lim_{x\to 0,\, x>0}\sin x\,\frac{\sin x}{x}=0.$$

Пример 3. Да намерим границата $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^{-x}}{\frac{\pi}{2}-\operatorname{arc\,tg} x}$. Прилагаме третата теорема на Лопитал и получаваме

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^{-x}}{\frac{\pi}{2}-\operatorname{arc\,tg} x}=\lim_{x\to\infty}\frac{-e^{-x}}{-\frac{1}{1+x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+x^2}{e^x},$$

след което прилагаме два пъти четвъртата теорема на Лопитал. Имаме

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1+x^2}{e^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{e^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{e^x}=0.$$

Когато две функции $f(x)$ и $g(x)$ клонят към безкрайност (при x, клонящо към някоя точка a, или пък при x, клонящо към ∞ или $-\infty$), тяхното частно $\frac{f(x)}{g(x)}$ може да има различно поведение — да притежава или да не притежава граница. Най-сетне самото то може да клони към безкрайност. Това ни дава основание да сравняваме тези две функции по отношение на „скоростта", с която всяка една от тях клони към безкрайност. По-точно даваме следната дефиниция (ще я изкажем за случая $x\to\infty$, очевидно е как трябва да се изкаже тя в случая $x\to a$ или $x\to-\infty$):

Дефиниция. *Ако за двете функции $f(x)$ и $g(x)$ имаме $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}g(x)=\infty$, ще казваме, че $f(x)$ клони по-бързо към безкрайност от $g(x)$, ако за тяхното частно имаме*

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\infty.$$

Както знаем от § 19 (примери 8, 9 и 10), за функциите $\log_a x$ (където $a>1$), x^α (където $\alpha>0$) и a^x (където $a>1$) имаме

$$\lim_{x\to\infty}\log_a x=\infty,\quad \lim_{x\to\infty}x^\alpha=\infty,\quad \lim_{x\to\infty}a^x=\infty.$$

Ще покажем сега, че при $x\to\infty$ най-бавно клони към безкрайност първата от тези три функции, а най-бързо — третата. Наистина, като използуваме четвъртата теорема на Лопитал, ще получим

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\log_a x}{x^\alpha}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{\ln a}}{\alpha x^{\alpha-1}}=\frac{1}{\alpha\ln a}\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^\alpha}=0.$$

Оттук следва, че

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^\alpha}{\log_a x} = \infty.$$

И така *функцията* x^α (където $\alpha>0$) *клони по-бързо към безкрайност от функцията* $\log_a x$ (където $a>1$).

Да сравним сега функцията x^α с функцията a^x (където $a>1$). Ако положим $a^x=z$, то ще имаме $x=\log_a z$. При това ясно е, че при $x\to\infty$ ще имаме $z\to\infty$. Ето защо, като използуваме получения вече резултат, ще имаме

$$\lim_{x\to\infty} \frac{a^x}{x^\alpha} = \lim_{z\to\infty} \frac{z}{(\log_a z)^\alpha} = \lim_{z\to\infty} \left(\frac{z^{\frac{1}{\alpha}}}{\log_a z}\right)^\alpha = \infty.$$

С това е показано, че *функцията* a^x (при $a>1$) *клони по-бързо към безкрайност от функцията* x^α (при $\alpha>0$).

Упражнения. Намерете границите:

1. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3-1}{\ln x}$. 2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x - x}{x^3}$. 3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x - x}{\sin x - x}$.

4. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{xe^{2x} + xe^x - 2e^{2x} + 2e^x}{(e^x-1)^3}$. 5. $\lim\limits_{x\to 1,\, x>1} \ln x \cdot \ln(x-1)$.

6. $\lim\limits_{x\to 0,\, x>0} x^x$. (Упътване: Предварително логаритмувайте.)

7. $\lim\limits_{x\to 0,\, x>0} \left(\ln \dfrac{1}{x}\right)^x$. 8. $\lim\limits_{x\to 0,\, x>0} x^{\operatorname{tg} x}$. 9. $\lim\limits_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}}$.

10. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)^x$. 11. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln(x^2+1) - \ln x^2}{\dfrac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,tg} x}$.

12. $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{1}{\ln x} - \dfrac{1}{x-1}\right)$. 13. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{2}{\pi} \operatorname{arc\,tg} x\right)^x$.

Отговори: **1.** 3. **2.** $-\frac{1}{6}$. **3.** -2. **4.** $\frac{1}{6}$. **5.** 0. **6.** 1. **7.** 1. **8.** 1. **9.** 1. **10.** 1. **11.** 0. **12.** $\frac{1}{2}$. **13.** $e^{-\frac{2}{\pi}}$.

§ 36. Формула на Тейлор

Нека вземем един полином от n-та степен

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0. \tag{1}$$

Ако диференцираме равенството (1) n пъти, ще получим последователно

$$\begin{cases} f'(x) = na_n x^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + \cdots + 2a_2 x + 1 \cdot a_1, \\ f''(x) = n(n-1)a_n x^{n-2} + (n-1)(n-2)a_{n-1}x^{n-3} + \cdots + 2 \cdot 1 \cdot a_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ f^{(n-1)}(x) = n(n-1)\dots 3 \cdot 2 \cdot a_n x + (n-1)(n-2)\dots 2 \cdot 1 \cdot a_{n-1}, \\ f^{(n)}(x) = n(n-1)\dots 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot a_n. \end{cases} \tag{2}$$

Като заместим в равенствата (1) и (2) x с 0, ще получим

$$f(0)=a_0,\ f'(0)=1!\,a_1,\ f''(0)=2!\,a_2, \dots,\ f^{(n-1)}(0)=(n-1)!\,a_{n-1},$$
$$f^{(n)}(0) = n!\,a_n.$$

Виждаме, че коефициентите на полинома $f(x)$ се изразяват чрез стойностите на $f(x)$ и на неговите производни в точката 0. Тогава равенството (1) може да бъде записано и по следния начин:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n. \tag{3}$$

Ние можем да обобщим тази формула, като приемем произволна точка a да играе ролята на точката 0. За целта да положим $x=a+h$ и $f(a+h)=\varphi(h)$. Функцията

$$\varphi(h) = a_n(a+h)^n + a_{n-1}(a+h)^{n-1} + \cdots + a_1(a+h) + a_0$$

е очевидно полином от n-та степен на променливата h и следователно съгласно формула (3) ще имаме

$$\varphi(h) = \varphi(0) + \frac{\varphi'(0)}{1!}h + \frac{\varphi''(0)}{2!}h^2 + \cdots + \frac{\varphi^{(n)}(0)}{n!}h^n. \tag{4}$$

От друга страна,

$$\varphi(h) = f(a+h),\ \varphi'(h) = f'(a+h),\ \varphi''(h) = f''(a+h), \dots,$$
$$\varphi^{(n)}(h) = f^{(n)}(a+h)$$

и следователно

$$\varphi(0) = f(a),\ \varphi'(0) = f'(a),\ \varphi''(0) = f''(a), \dots,\ \varphi^{(n)}(0) = f^{(n)}(a).$$

Тогава равенството (4) се написва така:

$$f(a+h) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}h + \frac{f''(a)}{2!}h^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}h^n, \tag{5}$$

или, което е все едно, така:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n. \tag{6}$$

Равенството (5), както и равносилното на него равенство (6), се нарича ф о р м у л а н а Т е й л о р. Интересно е, че тази формула може да бъде видоизменена по такъв начин, че да запази своята сила не само за полиноми, но и за твърде широка категория от функции. По-точно ще видим, че дясната страна на формулата на Тейлор може да бъде допълнена с още едно събираемо, наподобяващо по своя вид останалите, и то така, че новото равенство да бъде валидно за всяка функция, диференцуема $n+1$ пъти в някоя околност на дадена точка a. Наистина в сила е следната

Теорема на Тейлор. *Да предположим, че функцията $f(x)$ притежава първа, втора и т. н. до $(n+1)$-ва производна в някоя околност $(a-\delta, a+\delta)$ на една точка a (тази околност може в частност да съвпада с цялата реална права). Ако x е една точка от тази околност, то валидно е равенството*

$$(7)\qquad f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\dots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1},$$

където ξ е точка, намираща се между a и x.

Доказателство. Да си образуваме функцията

$$\varphi(x)=f(x)-f(a)-\frac{f'(a)}{1!}(x-a)-\dots-\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

Като диференцираме, получаваме последователно

$$\varphi'(x)=f'(x)-f'(a)-\frac{f''(a)}{1!}(x-a)-\dots-\frac{f^{(n)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1},$$

$$\varphi''(x)=f''(x)-f''(a)-\frac{f'''(a)}{1!}(x-a)-\dots-\frac{f^{(n)}(a)}{(n-2)!}(x-a)^{n-2},$$

. . . .

$$\varphi^{(n)}(x)=f^{(n)}(x)-f^{(n)}(a).$$

Ясно е тогава, че

$$\varphi(a)=\varphi'(a)=\varphi''(a)=\dots=\varphi^{(n)}(a)=0.$$

Да разгледаме също и функцията $\psi(x)=(x-a)^{n+1}$. За нея имаме

$$\psi'(x)=(n+1)(x-a)^n,\ \psi''(x)=(n+1)n(x-a)^{n-1},\ \dots,$$

$$\psi^{(n)}(x)=(n+1)!\,(x-a).$$

Следователно

$$\psi(a)=\psi'(a)=\psi''(a)=\dots=\psi^{(n)}(a)=0.$$

Като приложим към функциите $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ следствието от теоремата на Коши, което доказахме в края на § 34, ще заключим, че съществува точка ξ, намираща се между a и x, за която имаме

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}=\frac{\varphi^{(n+1)}(\xi)}{\psi^{(n+1)}(\xi)},$$

или

$$\varphi(x)=\frac{\varphi^{(n+1)}(\xi)}{\psi^{(n+1)}(\xi)}\psi(x).$$

Като вземем пред вид, че $\varphi^{(n+1)}(x)=f^{(n+1)}(x)$ и $\psi^{(n+1)}(x)=(n+1)!$, получаваме

$$f(x)-f(a)-\frac{f'(a)}{1!}(x-a)-\dots-\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1},$$

или най-сетне

$$(7)\qquad f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\dots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

Равенството (7) се нарича обща формула на Тейлор (за разлика от формулата на Тейлор за полиноми). Последното събираемо в дясната страна

$$\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

се нарича остатъчен член.

Ясно е, че формулата на Тейлор за полиноми се явява частен случай от общата формула на Тейлор. Наистина, ако $f(x)$ е полином от n-та степен, то $f^{(n+1)}(x)=0$ за всяко x, така че остатъчният член ще изчезне.

Формулата на Тейлор често се записва и другояче. Ако положим $x=a+h$ и $\theta=\frac{\xi-a}{x-a}$, ще имаме $\xi=a+\theta h$, като при това е ясно, че θ ще удовлетворява неравенствата $0<\theta<1$. Получаваме равенството

$$(8)\qquad f(a+h)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}h+\dots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}h^n+\frac{f^{(n+1)}(a+\theta h)}{(n+1)!}h^{n+1},$$

което, разбира се, също носи името формула на Тейлор.

В случая, когато $a=0$, формулата на Тейлор придобива вида

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\dots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}$$

и се нарича формула на Маклорен.

Формулата на Тейлор играе важна роля в анализа. Така например ние ще я използваме при доказателството на теоремите от следващите два параграфа. Освен това тя служи, както ще видим по-нататък, за основа на понятието Тейлоров ред на функция.

§ 37. Достатъчни условия за локален екстремум

Видяхме, че ако една функция, дефинирана в някой интервал, е диференцуема в дадена вътрешна точка от този интервал, то анулирането на нейната първа производна е необходимо условие, за да притежава тя локален екстремум в тази точка. Това условие обаче, както се убедихме, не е достатъчно. Сега ще дадем достатъчно условие за съществуване на локален екстремум.

Теорема 1. *Нека функцията $f(x)$ е дефинирана в един интервал и нека x_0 е вътрешна точка от този интервал. Да предположим, че $f(x)$ притежава първа и втора производна в някоя околност на x_0 и че втората производна $f''(x)$ е непрекъсната в точката x_0. Ако $f'(x_0)=0$, а $f''(x_0)\neq 0$, то функцията $f(x)$ притежава локален екстремум в тази точка, който при това е максимум, когато $f''(x_0)<0$, и минимум, когато $f''(x_0)>0$.*

Доказателство. Да приложим към функцията $f(x)$ формулата на Тейлор за точката x_0, като запишем остатъчния член с помощта на втората производна на функцията. Ще имаме

(1)
$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(\xi)}{2!}(x-x_0)^2,$$

където ξ е някаква точка, намираща се между x_0 и x. Поради условието $f'(x_0)=0$ ще получим

(2)
$$f(x)-f(x_0)=\frac{f''(\xi)}{2!}(x-x_0)^2.$$

Имахме по условие $f''(x_0)\neq 0$. Да разгледаме случая, когато $f''(x_0)>0$. Тъй като функцията $f''(x)$ е по условие непрекъсната в точката x_0, тя ще остава положителна в някоя околност $(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$ на тази точка. Ако сме взели x от тази околност, то ξ като точка, намираща се между x_0 и x, също ще принадлежи на този интервал. Тогава ще имаме $f''(\xi)>0$ и равенството (2) показва, че за всяко x от интервала $(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$ е изпълнено неравенството

$$f(x)\geqq f(x_0).$$

Това означава, че функцията $f(x)$ има локален минимум в точката x_0.

В случая, когато $f''(x_0)<0$, като разсъждаваме по същия начин, ще стигнем до заключение, че $f(x)$ има локален максимум в x_0.

Тази теорема не може да ни помогне, ако за някоя функция $f(x)$ имаме $f'(x_0)=f''(x_0)=0$. Ето защо ще приведем и следната

Теорема 2. *Нека функцията $f(x)$ е дефинирана в един интервал и притежава първа, втора и трета производна в някоя околност на една вътрешна точка x_0, като при това третата ѝ производна $f'''(x)$ е непрекъсната в x_0. Ако $f'(x_0)=f''(x_0)=0$, а $f'''(x_0)\neq 0$, то $f(x)$ не притежава локален екстремум в точката x_0.*

Доказателство. Ще използуваме пак формулата на Тейлор. Имаме

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\frac{f'''(\xi)}{3!}(x-x_0)^3,$$

където ξ е точка, лежаща между x_0 и x.

Тъй като $f'(x_0)=f''(x_0)=0$, получаваме

(3)
$$f(x)-f(x_0)=\frac{f'''(\xi)}{3!}(x-x_0)^3.$$

Знаем, че $f'''(x_0)\neq 0$. Нека разгледаме случая, когато $f'''(x_0)>0$ (случаят, когато $f'''(x_0)<0$, се разглежда по същия начин). Като разсъждаваме, както в теорема 1, се убеждаваме, че съществува такава околност $(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$ на точката x_0, че когато x принадлежи на тази околност,

да имаме $f'''(\xi)>0$. Да разгледаме сега равенството (3). Когато x принадлежи на интервала $(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$, но е по-малко от x_0, ще имаме $f(x)<f(x_0)$. Когато пък x, оставайки в същия интервал, е по-голямо от x_0, изпълнено е обратното неравенство $f(x)>f(x_0)$. Това показва, че функцията $f(x)$ няма нито максимум, нито минимум в точката x_0.

Като разгледаме внимателно доказателствата на теоремите 1 и 2, става ясно, че разсъждавайки по посочения начин, можем да установим следната обща

Теорема 3. *Нека функцията $f(x)$ е дефинирана в един интервал и притежава първа, втора и т. н. до n-та производна, включително в някоя околност на една точка x_0, вътрешна за дадения интервал. Нека освен това $f^{(n)}(x)$ е непрекъсната в x_0. Да предположим, че*

$$f'(x_0)=f''(x_0)=\cdots=f^{(n-1)}(x_0)=0$$

и че $f^{(n)}(x_0)\neq 0$. Тогава:

ако n е четно, то функцията $f(x)$ има локален екстремум в точката x_0, който е максимум, когато $f^{(n)}(x_0)<0$, и минимум, когато $f^{(n)}(x_0)>0$;

ако n е нечетно, то функцията $f(x)$ няма локален екстремум в точката x_0.

Пример. Да се намерят всички локални екстремуми на функцията $f(x)=\sin^3 x$. Имаме $f'(x)=3\sin^2 x\cos x$. Тъй като $\sin x=0$ при $x=m\pi$ $(m=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\dots)$ и $\cos x=0$ при $x=(2n+1)\frac{\pi}{2}$ $(n=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\dots)$, то точките, в които $f'(x)$ става нула, са всички точки от вида $x=k\frac{\pi}{2}$ $(k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\dots)$. Но $f''(x)=6\sin x\cos^2 x-3\sin^3 x$ и лесно се проверява, че $f''\left(k\frac{\pi}{2}\right)=0$ за четни стойности на k и $f''\left(k\frac{\pi}{2}\right)\neq 0$ за нечетни стойности на k. При това $f''\left(k\frac{\pi}{2}\right)=-3$, когато k има вида $k=4s+1$, и $f''\left(k\frac{\pi}{2}\right)=3$ за стойности на k от вида $k=4s+3$. Най-сетне $f'''(x)=6\cos^3 x-21\sin^2 x\cos x$ и $f'''\left(k\frac{\pi}{2}\right)\neq 0$ при четни k. Всичко това ни дава основание да направим следното заключение: функцията $f(x)=\sin^3 x$ има локални екстремуми само в точките от вида

$$x=(2k+1)\frac{\pi}{2}\quad (k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\dots)$$

и тези екстремуми са максимуми при $k=0,\ \pm 2,\dots$ и минимуми при $k=\pm 1,\ \pm 3,\dots$ Всички максимуми са равни на 1, всички минимуми са равни на -1.

Нека забележим обаче, че намирането на локалните екстремуми на една функция може да бъде извършено и без помощта на теоремите, изложени в този параграф. Достатъчно е, когато е дадена някоя функция

$f(x)$, дефинирана и диференцуема в един интервал, да изследваме (когато това е удобно) само изменението на знака на нейната първа производна в този интервал, т. е. да определим онези подинтервали, в които тази производна е положителна, и онези, в които е отрицателна. След това остава да си спомним, че знакът на производната на една функция показва кога тази функция е растяща и кога намаляваща. Тогава лесно ще намерим точките, в които функцията има локални екстремуми.

Упражнения. I. Намерете локалните екстремуми на следните функции:

1. $f(x)=2x^3-x^2+1$. **2.** $f(x)=\sin 3x-2\sin x$. **3.** $f(x)=x^2e^{-x}$.

II.1. От всички правоъгълници с дадено лице S намерете онзи, който има най-малък периметър.

2. На какъв ъгъл трябва да отговаря един сектор от даден кръг с радиус r, щото от този кръгов сектор да може да се направи фуния с възможно най-голяма вместимост?

§ 38. Изпъкналост, вдлъбнатост, инфлексия

Когато една функция $f(x)$ е диференцуема в някоя вътрешна точка x_0 от своята дефиниционна област, нейната графика притежава допирателна в точката $P_0(x_0, f(x_0))$. Ще казваме, че $f(x)$ е **изпъкнала** в точката x_0, ако можем да намерим такава околност $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ на x_0, че частта от графиката на $f(x)$, отговаряща на точките от тази околност, да лежи **над** допирателната в P_0. Ще наричаме $f(x)$ **вдлъбната** в точката x_0, когато съществува такъв интервал $(x_0-\delta, x_0+\delta)$, че частта от графиката на $f(x)$, отговаряща на точките от този интервал, лежи **под** допирателната в P_0. Най-сетне, ако $f(x)$ не е нито изпъкнала, нито вдлъбната, ще казваме, че тя има **инфлексия** в точката x_0. Самата точка P_0 ще наричаме в този случай **инфлексна точка** на графиката на $f(x)$.

На черт. 21 е показана графиката на една функция, която е изпъкнала в точката x_1, вдлъбната в точката x_2 и има инфлексия в точката x_3.

Във връзка с въведените понятия ще докажем две теореми:

Теорема 1. *Нека функцията $f(x)$, дефинирана в един интервал, е диференцуема два пъти в някоя околност на една вътрешна точка x_0 от този интервал и нека $f''(x)$ е непрекъсната в x_0. Ако $f''(x_0)>0$, то $f(x)$ е изпъкнала, а ако $f''(x_0)<0$, тя е вдлъбната в точката x_0.*

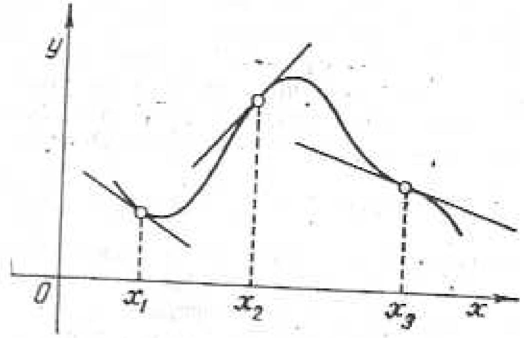
Доказателство. Нека $f''(x_0)>0$. Тъй като по условие $f''(x)$ е непрекъсната в x_0, тя ще бъде положителна във всички точки на някой интервал $(x_0-\delta, x_0+\delta)$. Да вземем сега една точка x от този интервал, различна от x_0. Съответната точка P от графиката на $f(x)$. Тази ордината ние можем да изразим чрез формулата на Тейлор по следния начин:

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(\xi)}{2!}(x-x_0)^2. \tag{1}$$

Тук ξ е число, намиращо се между x_0 и x, и следователно принадлежи също на интервала $(x_0-\delta, x_0+\delta)$. На същата точка x от реалната ос

отговаря и една точка T (черт. 22) от допирателната t, прекарана към графиката на функцията $f(x)$ в точката $P_0(x_0, f(x_0))$. Ординатата y на точката T, получена от уравнението на допирателната, е

$$y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0). \tag{2}$$

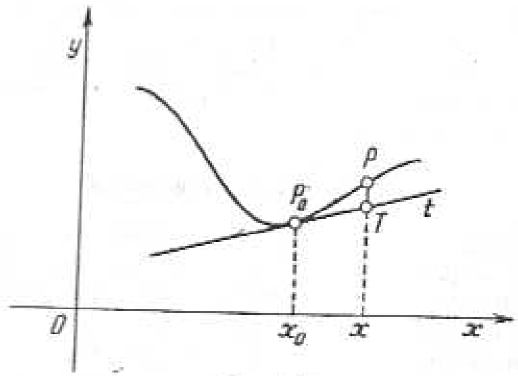


Черт. 21

Като извадим почленно равенствата (1) и (2), получаваме

$$f(x)-y=\frac{f''(\xi)}{2!}(x-x_0)^2.$$

Но $f''(\xi)>0$, следователно $f(x)>y$, което показва, че точката P се намира по-високо от точката T. Тъй като P отговаряше на произволно x от интервала $(x_0-\delta, x_0+\delta)$, заключаваме, че графиката на $f(x)$, отговаряща на този интервал, се намира над допирателната t, т. е. че функцията $f(x)$ е изпъкнала в точката x_0.



Черт. 22

Случаят, когато $f''(x_0)<0$, се разглежда аналогично. В този случай идваме до заключението, че $f(x)$ е вдлъбната в точката x_0.

Теорема 2. *Нека функцията $f(x)$ е дефинирана в един интервал и е диференцуема три пъти в една околност на вътрешната за този интервал точка x_0. Нека освен това $f'''(x)$ е непрекъсната в x_0. Ако $f''(x_0)=0$, а $f'''(x_0)\neq 0$, то функцията $f(x)$ има инфлексия в точката x_0.*

Доказателство. По условие имаме $f'''(x_0)\neq 0$. Да разгледаме случая, когато $f'''(x_0)>0$. (Случаят, когато $f'''(x_0)<0$, се третира по същия начин.) Поради непрекъснатостта на $f'''(x)$ в точката x_0 ще съществува интервал $(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$, във всички точки на който $f'''(x)$ е положителна. Ако сега вземем едно x от този интервал, то на него ще отговаря една точка P от графиката на функцията, чиято ордината $f(x)$ можем да изразим посредством формулата на Тейлор така:

(3) $$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\frac{f'''(\xi)}{3!}(x-x_0)^3.$$

Тук ξ е число, намиращо се между x_0 и x и следователно принадлежащо също така на интервала $(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$. На x отговаря една точка T от допирателната t, прекарана към графиката в точката $P_0(x_0, f(x_0))$. Ординатата на точката T, пресметната от уравнението на допирателната, ще бъде

(4) $$y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0).$$

Като вземем пред вид, че $f''(x_0)=0$, и извадим почленно равенствата (3) и (4), ще получим

$$f(x)-y=\frac{f'''(\xi)}{3!}(x-x_0)^3.$$

Първият множител от дясната страна на това равенство $\frac{f'''(\xi)}{3!}$ е постоянно положителен, докато вторият $(x-x_0)^3$ си мени знака в зависимост от това, дали имаме $x>x_0$, или $x<x_0$. Това показва, че точката P ще се намира над допирателната t, когато x се намира вдясно от x_0, и под нея, когато x е наляво от x_0. Следователно функцията $f(x)$ има инфлексия в точката x_0.

§ 39. Изследване на функции

Теоремите, с които се запознахме в тази глава, ни предоставят удобни средства за работа, когато искаме да изследваме особеностите на дадена функция $f(x)$, чиято дефиниционна област е един интервал или се състои от няколко интервала. При това ние считаме, че познаваме тези особености, когато сме определили подинтервалите от дефиниционната област на функцията $f(x)$, в които тя е монотонна, когато сме намерили нейните локални екстремуми, когато сме изследвали къде тя е изпъкнала, къде е вдлъбната, в кои точки има инфлексия и пр. Важен момент от изследването на дадена функция $f(x)$ представлява също определянето на нейното поведение при $x\to\infty$ или при $x\to-\infty$ (в случай че тя е дефинирана в безкраен интервал).

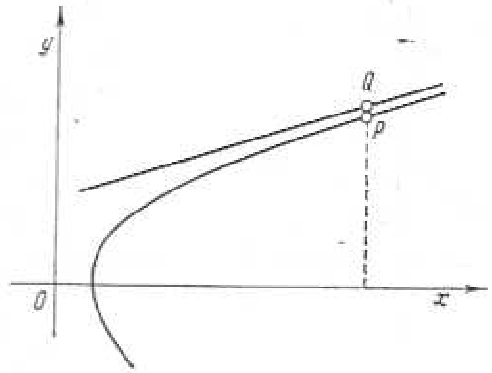
Във връзка с последния въпрос се въвежда следното понятие:

Казваме, че правата с уравнение

(1) $$y=kx+l$$

е а с и м п т о т а *на графиката на функцията $f(x)$ при $x\to\infty$, ако*

(2) $$\lim_{x\to\infty}[f(x)-(kx+l)]=0.$$



Черт. 23

Аналогично *правата с уравнение* (1) *е асимптота на графиката на $f(x)$ при $x\to-\infty$, ако*

(3) $$\lim_{x\to-\infty}[f(x)-(kx+l)]=0.$$

Геометрически равенствата (2) и (3) са равносилни с изискването разстоянието PQ (черт. 23) между една подвижна точка P с абсциса x от графиката на функцията $f(x)$ и точката Q със същата абсциса от правата с уравнение (1) да клони към нула при $x\to\infty$ (респективно при $x\to-\infty$).

Специално, когато уравнението (1) има вида

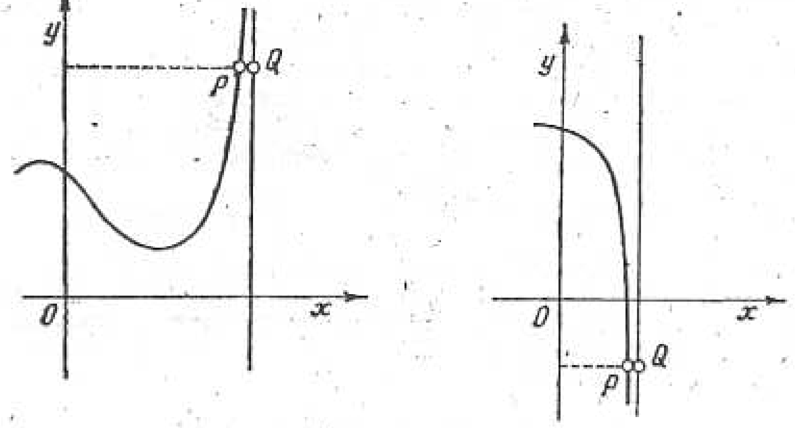
$$y=l,$$

т. е. когато правата, която то представя, е успоредна на оста Ox, говорим за хоризонтална асимптота. В този случай условието (2) или (3) се свежда до изискването да съществува границата $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$, респективно границата $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

Графиката на една функция $f(x)$ може да притежава и вертикална асимптота, т. е. да има за асимптота права, успоредна на оста Oy, с уравнение от вида

$$x=m.$$

Това се случва, когато $f(x)$ клони към ∞ или към $-\infty$ при x, клонящо отдясно или пък отляво към точката $x_0=m$. Геометрически ситуацията в случая се изразява в следното: когато абсцисата x на една подвижна точка P от графиката на функцията клони към x_0, точката P се отдалечава все повече от оста Ox (както казваме, „отива в безкрайност"), по-точно нейната ордината клони към ∞ или $-\infty$. При това разстоянието между точката P и съответната точка Q със същата ордината от верти-



Черт. 24

калната асимптота клони, разбира се, към нула (черт. 24), тъй като това разстояние е равно на $|x-x_0|$.

След тези предварителни бележки нека видим с няколко примера как практически се извършва изследването на функциите.

1. Функцията $y=x^2$. Дефиниционната ѝ област е $(-\infty, \infty)$. Имаме $y'=2x$. Тъй като $y'<0$ при $x<0$ и $y'>0$ при $x>0$, то функцията y е строго намаляваща в интервала $(-\infty, 0)$ и строго растяща в интервала $(0, \infty)$. В точката $x_0=0$ тя достига своята минимална стойност $y(0)=0$. Освен това имаме $y'(0)=0$, следователно оста Ox се явява допирателна към графиката на функцията в точката $(0, 0)$. По-нататък виждаме, че $y''=2$. Тъй като $y''>0$ за всяко x, то функцията y е изпъкнала в цялата си дефиниционна област. Най-сетне имаме $\lim\limits_{x\to\infty} y=\lim\limits_{x\to-\infty} y=\infty$. Графиката на тази функция е показана* на черт. 25. При чертането на тази графика вземаме пред вид, че функцията $y=x^2$ е четна, т. е. удовлетворява условието $y(-x)=y(x)$. Това показва, че графиката ѝ е симетрична относно оста Oy.

---

* Графиките, дадени на чертежите от този параграф, са построени така, че да се видят по-характерните особености на разглежданите функции, без да са положени специални грижи тези графики да бъдат точни. Последното чисто техническо изискване за точност читателят сам би могъл да осъществи, като изчисли координатите на достатъчно голям брой точки от съответните графики. (Нека обърнем внимание освен това, че за удобство в някои от чертежите, като например черт. 9, 10, 38, 42, са взети различни мащаби върху осите Ox и Oy.)

Забележка. Графиката на функцията $y=x^2$ е парабола. Свойствата на тази крива — една от т. нар. криви от втора степен, се изучават в аналитичната геометрия.

2. Функцията $y=x^3$. Дефиниционната ѝ област е интервалът $(-\infty, \infty)$. Имаме $y'=3x^2$. От неравенството $y'\geq 0$, изпълнено за всяко x, следва, че функцията y е растяща в целия свой дефиниционен интервал. Освен това $y''=6x$, тъй че $y''<0$ при $x<0$ и $y''>0$ при $x>0$, т. е. функцията е вдлъбната в интервала $(-\infty, 0)$ и изпъкнала в интервала $(0, \infty)$. При $x=0$ имаме $y(0)=0$, $y'(0)=0$, $y''(0)=0$. Следователно графиката на функцията минава през точката $(0, 0)$, има в тази точка за своя допирателна оста Ox и притежава инфлексия в същата точка, тъй като $y'''(0)=6\neq 0$. Графиката е симетрична спрямо началото на координатната система, тъй като функцията $y=x^3$ е нечетна, т. е. удовлетворява равенството $y(-x)=-y(x)$. Най-сетне имаме $\lim\limits_{x\to\infty} y=\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} y=-\infty$. Графиката е показана на черт. 26.

3. Функцията $y=\sqrt{x}$. Дефиниционната ѝ област е $[0, \infty)$. При $x>0$ имаме $y'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$, $y''=-\frac{1}{4\sqrt{x^3}}$. Тъй като $y'>0$ и $y''<0$, то функцията y е строго растяща и вдлъбната. Имаме $y(0)=0$. Когато x клони към 0 отдясно, y' клони към ∞, което показва, че когато се приближаваме по графиката към точката $(0, 0)$, допирателната сключва с оста Ox ъгъл все по-близък до $\frac{\pi}{2}$. Най-сетне имаме $\lim\limits_{x\to\infty} y=\infty$. Графиката е показана на черт. 27. Тя представлява част от една парабола — параболата с уравнение $y^2=x$, която е съставена от графиките на функциите $y=\sqrt{x}$ и $y=-\sqrt{x}$.

4. Функцията $y=\sin x$. Дефиниционната ѝ област е $(-\infty, \infty)$. Тъй като функцията е периодична с период, равен на 2π, достатъчно е да я изследваме например в интервала $[0, 2\pi]$. Имаме $y'=\cos x$, $y''=-\sin x$. Като вземем пред вид изменението на знаците на производните y' и y'' (т. е. като изследваме кога всяка от тях е положителна и кога отрицателна), заключаваме, че функцията y е растяща в интервала $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, намаляваща в интервала $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ и отново растяща в интервала $\left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$, вдлъбната е в интервала $(0, \pi)$ и изпъкнала в интервала $(\pi, 2\pi)$. В точката $x=\frac{\pi}{2}$ функцията има локален максимум, в точката $x=\frac{3\pi}{2}$ — локален минимум, в точките $x=0$, $x=\pi$ и $x=2\pi$ тя има инфлексия. (Последното твърдение проверете, като пресметнете стойностите на y'' и y''' за тези точки.) Стойностите на производната $y'(0)=1$ и $y'(\pi)=-1$ показват, че допирателна към графиката в точката $(0, 0)$ е правата с уравнение $y=x$, а в точката $(\pi, 0)$ — правата с уравнение $y=-x+\pi$. Графиката е показана на черт. 28. Тя се нарича, както е известно, с и н у с о и д а.

Изследването на функцията $\cos x$ не представлява нещо ново, тъй като от равенството $\cos x=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$ е ясно, че нейната графика е същата синусоида, отместена спрямо оста Oy на разстояние, равно на $\frac{\pi}{2}$. Графиката на функцията $\cos x$ е показана на черт. 29.

5. Функцията $y=\operatorname{tg} x$. Дефиниционната област е съставена от всички отворени интервали от вида $\left(\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+(k+1)\pi\right)$, където k взема всички цели стойности. Тъй като функцията е периодична с период π, то достатъчно е да я изследваме в кой да е интервал от горния вид, например в интервала $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Имаме $y'=\frac{1}{\cos^2 x}$, $y''=2\frac{\sin x}{\cos^3 x}$. Функцията y е растяща в интервала $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, вдлъбната е в интервала $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ и изпъкнала в интервала $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. В точката $(0, 0)$ тя има инфлексия. Допирателната в тази точка е правата с уравнение $y=x$. Освен това знаем, че $\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{2},\, x>-\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} x=-\infty$, $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2},\, x<\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} x=\infty$. Следователно графиката има вертикални асимптоти — както при точката $x=-\frac{\pi}{2}$, така и при точката $x=\frac{\pi}{2}$ (а следователно и изобщо при всички точки от вида $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$). Графиката е симетрична относно началото на координатната система, тъй като функцията $\operatorname{tg} x$ е нечетна. Тази графика е показана на черт. 30.

Изследването на функцията $\operatorname{cotg} x$ не съдържа нови моменти, тъй като $\operatorname{cotg} x=-\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$. Графиката на функцията $\operatorname{cotg} x$ е показана на черт. 31.

6. Функцията $y=\arcsin x$. Дефиниционната й област е $[-1, 1]$. При $-1<x<1$ имаме $y'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $y''=\frac{x}{(1-x^2)^{3/2}}$. Функцията е растяща. Тя е вдлъбната в интервала $(-1, 0)$ и изпъкнала в интервала $(0, 1)$. В точката $(0, 0)$ графиката й има за допирателна правата с уравнение $y=x$. Функцията $\arcsin x$ е нечетна, следователно нейната графика е симетрична относно началото на координатната система. Тази графика е показана на черт. 32.

Разбира се, изследването на функцията $\arcsin x$ би могло да се извърши и другояче — само въз основа на факта, че тя е обратна на функцията $\sin x$.

Изследването на функцията $\arccos x$ се извършва по подобен начин. Нейната графика е показана на черт. 33.

7. Функцията $y=\operatorname{arc\,tg} x$. Дефиниционната й област е $(-\infty, \infty)$. Функцията е нечетна, следователно нейната графика е симетрична относно началото на координатната система. Имаме $y'=\frac{1}{1+x^2}$, $y''=-\frac{2x}{(1+x^2)^2}$. Функцията е растяща в интервала $(-\infty, \infty)$, изпъкнала е в интервала $(-\infty, 0)$ и е вдлъбната в интервала $(0, \infty)$. В точката $x=0$ тя има инфлексия. Правата с уравнение $y=x$ е допирателна към графиката в точката $(0, 0)$. Освен това имаме $\lim\limits_{x\to-\infty} y=-\frac{\pi}{2}$, $\lim\limits_{x\to\infty} y=\frac{\pi}{2}$. Следователно графиката има две хоризонтални асимптоти — правите с уравнения $y=-\frac{\pi}{2}$ и $y=\frac{\pi}{2}$. Тази графика е показана на черт. 34. (Изследването на функцията $\operatorname{arc\,tg} x$ би могло да бъде направено и само въз основа на това, че тя е обратна на функцията $\operatorname{tg} x$.)

Функцията $\operatorname{arc\,cotg} x$ се изследва по подобен начин. Нейната графика е показана на черт. 35.

8. Функцията $y=e^x$. Дефиниционната й област е $(-\infty, \infty)$. Имаме $y'=e^x$, $y''=e^x$. Следователно функцията е винаги положителна, растяща и изпъкнала. При това имаме $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0$, $\lim\limits_{x\to\infty} e^x=\infty$. Следователно графиката има една хоризонтална асимптота — оста Ox, към която тя се приближава при $x\to-\infty$. Графиката е показана на черт. 36.

9. Функцията $y=\ln x$. Дефиниционната й област е $(0, \infty)$. Имаме $y'=\frac{1}{x}$, $y''=-\frac{1}{x^2}$. Функцията е растяща и вдлъбната. Тъй като $\lim\limits_{x\to 0,\, x>0} y=-\infty$, графиката има една вертикална асимптота — оста Oy. Имаме освен това $\lim\limits_{x\to\infty} y=\infty$. Графиката е показана на черт. 37. (Функцията е обратна на функцията e^x.)

10. Функцията $y=x^3-3x^2-9x+11$. Дефиниционната й област е $(-\infty, \infty)$. Имаме $y'=3x^2-6x-9=3(x^2-2x-3)=3(x+1)(x-3)$, $y''=6(x-1)$. Като изследваме знака на y', заключаваме, че функцията y е растяща в интервала $(-\infty, -1)$, намаляваща в интервала $(-1, 3)$ и отново растяща в интервала $(3, \infty)$. Ясно е, че тя ще има локален максимум в точката $x_1=-1$ и локален минимум в точката $x_2=3$. Като разгледаме пък y'', виждаме, че функцията y е вдлъбната в интервала $(-\infty, 1)$ и изпъкнала в интервала $(1, \infty)$. Точката $x_3=1$ е инфлексна. Най-сетне имаме $\lim\limits_{x\to-\infty} y=-\infty$ $\lim\limits_{x\to\infty} y=\infty$. Графиката е показана на черт. 38.

11. Функцията $y=\frac{x+1}{2x-3}$. Дефиниционната й област е съставена от интервалите $\left(-\infty, \frac{3}{2}\right)$ и $\left(\frac{3}{2}, \infty\right)$. Имаме $\lim\limits_{x\to\frac{3}{2},\, x<\frac{3}{2}} y=-\infty$, $\lim\limits_{x\to\frac{3}{2},\, x>\frac{3}{2}} y=\infty$. Следователно правата с уравнение $x=\frac{3}{2}$ е една вертикална асимптота на графиката на функцията. От друга страна, имаме $\lim\limits_{x\to-\infty} y=\lim\limits_{x\to\infty} y=\frac{1}{2}$, което показва, че правата с уравнение $y=\frac{1}{2}$ е хоризонтална асимптота.

По-нататък намираме $y'=\frac{-5}{(2x-3)^2}$, откъдето заключаваме, че функцията y е намаляваща и в двата интервала на своята дефиниционна област. Тъй като имаме $y''=\frac{20}{(2x-3)^3}$, функцията y ще бъде вдлъбната при $x<\frac{3}{2}$ и изпъкнала при $x>\frac{3}{2}$. Графиката е показана на черт. 39.

Забележка. Графиката на разглежданата функция е хипербола. Хиперболите са частен случай от т. нар. криви от втора степен. Техните геометрични свойства се изучават в аналитичната геометрия.

12. Функцията $y=\frac{3x}{x^2+1}$. Дефиниционната ѝ област е $(-\infty, \infty)$. Намираме $y'=\frac{3(1-x^2)}{(x^2+1)^2}=\frac{-3(x+1)(x-1)}{(x^2+1)^2}$. Като изследваме знака на y', заключаваме, че функцията y е намаляваща при $x<-1$, растяща при $-1<x<1$ и отново намаляваща при $x>1$. И така тя притежава локален минимум в точката $x_1=-1$ и локален максимум в точката $x_2=1$. По-нататък намираме $y''=6\frac{x^3-3x}{(x^2+1)^3}=6\frac{x(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})}{(x^2+1)^3}$. Следователно функцията y е вдлъбната в интервала $(-\infty, -\sqrt{3})$, изпъкнала в интервала $(-\sqrt{3}, 0)$, отново вдлъбната в интервала $(0; \sqrt{3})$ и отново изпъкнала в интервала $(\sqrt{3}, \infty)$. Освен това имаме $\lim\limits_{x\to-\infty} y=\lim\limits_{x\to\infty} y=0$, следователно оста Ox се явява асимптота на графиката при $x\to-\infty$ и при $x\to\infty$. Забелязваме също, че функцията y е нечетна, следователно графиката ѝ ще бъде симетрична относно началото на координатната система. Тази графика е показана на черт. 40.

13. Функцията $y=\frac{x+1}{x^2}$. Дефиниционната ѝ област е съставена от интервалите $(-\infty, 0)$ и $(0, \infty)$. Имаме $\lim\limits_{x\to0} y=\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} y=\lim\limits_{x\to\infty} y=0$. И така оста Oy ще бъде вертикална асимптота, а оста Ox — хоризонтална асимптота на графиката на функцията y. По-нататък намираме $y'=-\frac{x+2}{x^3}$. Като изследваме изменението на знака на y', заключаваме, че функцията y е намаляваща в интервала $(-\infty, -2)$, растяща в интервала $(-2, 0)$ и намаляваща в интервала $(0, \infty)$. В точката $x_1=-2$ тя придобива един локален минимум. Тъй като $y''=2\frac{x+3}{x^4}$, то функцията y е вдлъбната при $x<-3$ и изпъкнала при $x>-3$. Графиката е показана на черт. 41.

14. Функцията $y=\frac{x^3}{x^2-3x+2}$. Дефиниционната ѝ област е съставена от интервалите $(-\infty, 1)$, $(1, 2)$ и $(2, \infty)$. Имаме

$$y'=\frac{x^2(x^2-6x+6)}{(x^2-3x+2)^2}=\frac{x^2(x-x_1)(x-x_2)}{(x^2-3x+2)^2},$$

където $x_1=3-\sqrt{3}$, $x_2=3+\sqrt{3}$. Следователно функцията y е растяща при $x<x_1$, т. е. в интервалите $(-\infty, 1)$ и $(1, x_1)$, намаляваща е при $x_1<x<x_2$, т. е. в интервалите $(x_1, 2)$ и $(2, x_2)$, и отново растяща при $x>x_2$, т. е. в интервала (x_2, ∞). Тя има локален максимум в точката x_1 и локален минимум в точката x_2. Нека обърнем внимание още и на обстоятелството, че $y'(0)=0$, което показва, че при $x=0$, т. е. в точката $(0, 0)$, графиката има за допирателна оста Ox. После намираме $y''=\frac{2x(7x^2-18x+12)}{(x-1)^3(x-2)^3}$. Тъй като квадратният полином $7x^2-18x+12$ не се анулира за реални стойности на x и следователно е винаги положителен, то заключаваме, че функцията y е вдлъбната в интервалите $(-\infty, 0)$ и $(1, 2)$ и е изпъкнала в интервалите $(0, 1)$ и $(2, \infty)$. Имаме освен това $\lim\limits_{x\to1,\, x<1} y=\infty$, $\lim\limits_{x\to1,\, x>1} y=-\infty$, $\lim\limits_{x\to2,\, x<2} y=-\infty$, $\lim\limits_{x\to2,\, x>2} y=\infty$. Следователно правите с уравнения $x=1$ и $x=2$ са асимптоти на графиката на функцията y. Имаме също $\lim\limits_{x\to-\infty} y=-\infty$ и $\lim\limits_{x\to\infty} y=\infty$. Като извършим делението на полиномите, намиращи се в числителя и в знаменателя на функцията y, получаваме

$$y=x+3+\frac{7x-6}{x^2-3x+2}. \tag{4}$$

Тъй като $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{7x-6}{x^2-3x+2}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{7x-6}{x^2-3x+2}=0$, то равенството (4) ни показва, че правата с уравнение $y=x+3$ се явява асимптота на графиката на функцията y при $x\to-\infty$ и при $x\to\infty$. Графиката е показана на черт. 42.

15. Функцията $y=\frac{2x^3}{x^2+1}$. Дефиниционната ѝ област е $(-\infty, \infty)$. Имаме $y'=\frac{2x^2(x^2+3)}{(x^2+1)^2}$, следователно функцията е растяща. Нейната графика има в точката $(0, 0)$ за допирателна оста Ox, тъй като $y'(0)=0$. Намираме след това

$$y''=4\frac{3x-x^3}{(x^2+1)^3}=-4\frac{x(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})}{(x^2+1)^3},$$

откъдето заключаваме, че функцията y е изпъкнала в интервалите $(-\infty, -\sqrt{3})$ и $(0, \sqrt{3})$ и вдлъбната в интервалите $(-\sqrt{3}, 0)$ и $(\sqrt{3}, \infty)$. Имаме $\lim\limits_{x\to-\infty} y=-\infty$ и $\lim\limits_{x\to\infty} y=\infty$. След като извършим делението в израза $\frac{2x^3}{x^2+1}$, получаваме

$$y=2x-\frac{2x}{x^2+1}. \tag{5}$$

Тъй като $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2x}{x^2+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x}{x^2+1}=0$, от равенството (5) се вижда, че правата с уравнение $y=2x$ е асимптота на графиката на функцията y. Да отбележим накрая, че графиката е симетрична относно началото на координатната система, тъй като функцията y е нечетна. Тази графика е показана на черт. 43.

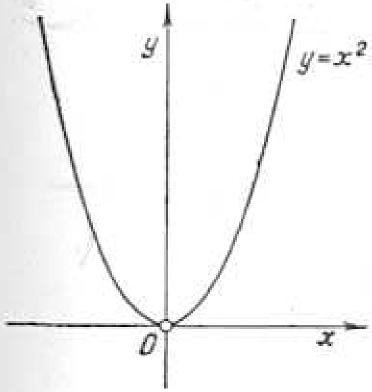
16. Функцията $y=\frac{x-2}{\sqrt{x^2+1}}$. Дефиниционната ѝ област е $(-\infty, \infty)$. Имаме $y'=\frac{2x+1}{(x^2+1)^{3/2}}$. Следователно функцията y е намаляваща в интервала $(-\infty, -\frac{1}{2})$ и растяща в интервала $(-\frac{1}{2}, \infty)$. Тя има един локален минимум — в точката $x=-\frac{1}{2}$. Намираме $y''=-\frac{4x^2+3x-2}{(x^2+1)^{5/2}}=$ $=-\frac{4(x-x_1)(x-x_2)}{(x^2+1)^{5/2}}$, където $x_1=\frac{-3-\sqrt{41}}{8}$, $x_2=\frac{-3+\sqrt{41}}{8}$. Функцията y е вдлъбната в интервала $(-\infty, x_1)$, изпъкнала в интервала (x_1, x_2) и отново вдлъбната в интервала (x_2, ∞). По-нататък виждаме, че $\lim\limits_{x\to-\infty} y=-1$ и $\lim\limits_{x\to\infty} y=1$. Следователно правите с уравнения $y=-1$ и $y=1$ са две хоризонтални асимптоти на графиката на функцията y — първата при $x\to-\infty$, а втората при $x\to\infty$. Графиката е показана на черт. 44.

17. Функцията $y=\frac{e^x}{x-2}$. Дефиниционната ѝ област се състои от интервалите $(-\infty, 2)$ и $(2, \infty)$. Имаме $y'=e^x\frac{x-3}{(x-2)^2}$; следователно функцията y е намаляваща при $x<3$, т. е. в интервалите $(-\infty, 2)$ и $(2, 3)$ и растяща при $x>3$, т. е. в интервала $(3, \infty)$. Намираме $y''=\frac{e^x(x^2-6x+10)}{(x-2)^3}$. Тъй като $e^x>0$ и $x^2-6x+10>0$ за всяко x (последното неравенство следва от това, че квадратният тричлен $x^2-6x+10$ не се анулира за реални значения на x), то знакът на y'' зависи само от знаменателя. Следователно функцията y е вдлъбната в интервала $(-\infty, 2)$ и изпъкнала в интервала $(2, \infty)$. Имаме освен това $\lim\limits_{x\to-\infty} y=0$, $\lim\limits_{x\to\infty} y=\infty$, $\lim\limits_{x\to2,\, x<2} y=-\infty$, $\lim\limits_{x\to2,\, x>2} y=\infty$. И така оста Ox е хоризонтална асимптота, а правата с уравнение $x=2$ — вертикална асимптота на графиката на функцията y. Графиката е показана на черт. 45.

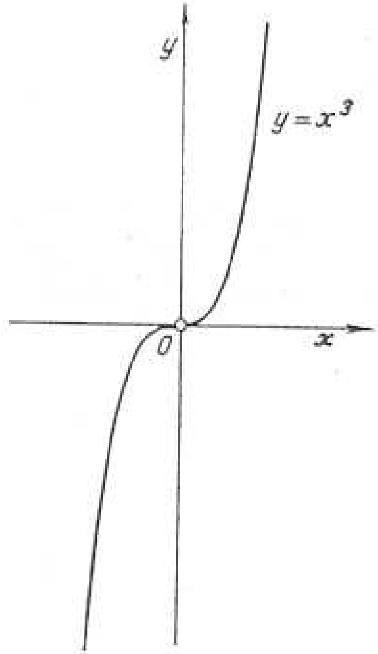
18. Функцията $y=x+\sin x$. Дефиниционната ѝ област е $(-\infty, \infty)$. Имаме $y'=1+\cos x$. Тъй като $y'\geqq0$ за всяко x, то функцията y е растяща При това $y'(x)=0$ при $x=(2k+1)\pi$ $(k=0, \pm1, \pm2, \ldots)$. В съответните точки графиката ще притежава допирателни, успоредни на оста Ox. По-нататък имаме $y''=-\sin x$. Функцията y ще бъде изпъкнала във всички интервали от вида $((2k-1)\pi, 2k\pi)$ и вдлъбната във всички интервали от вида $(2k\pi, (2k+1)\pi)$, където $k=0, \pm1, \pm2, \ldots$ Във всички точки от вида $x=n\pi$ $(n=0, \pm1, \pm2, \ldots)$ функцията y ще има инфлексия, тъй като $y''(n\pi)=0$, $y'''(n\pi)\neq0$. Графиката е показана на черт. 46.

Упражнения. Да се изследват функциите:

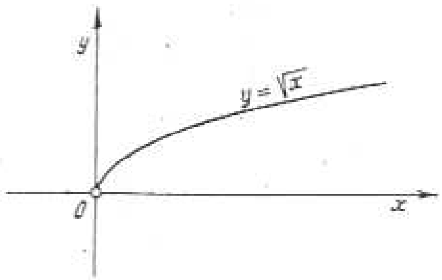
1. $y=x^3-3x$.
2. $y=\frac{x+3}{2x}$.
3. $y=\frac{x+1}{x^2+2}$.
4. $y=\left(\frac{x+2}{x-2}\right)^2$.
5. $y=\frac{(x+1)^2}{x-2}$.
6. $y=\frac{x^3-1}{x^2-5x+6}$.
7. $y=\sin x+\cos x$.
8. $y=xe^{-\frac{x^2}{2}}$.
9. $y=x+\operatorname{arc\,tg} x$.



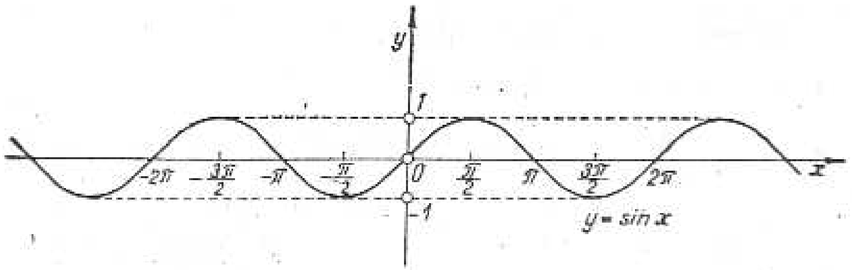
Черт. 25



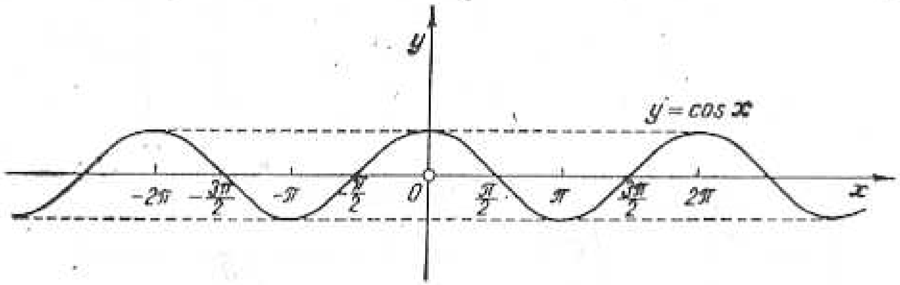
Черт. 26



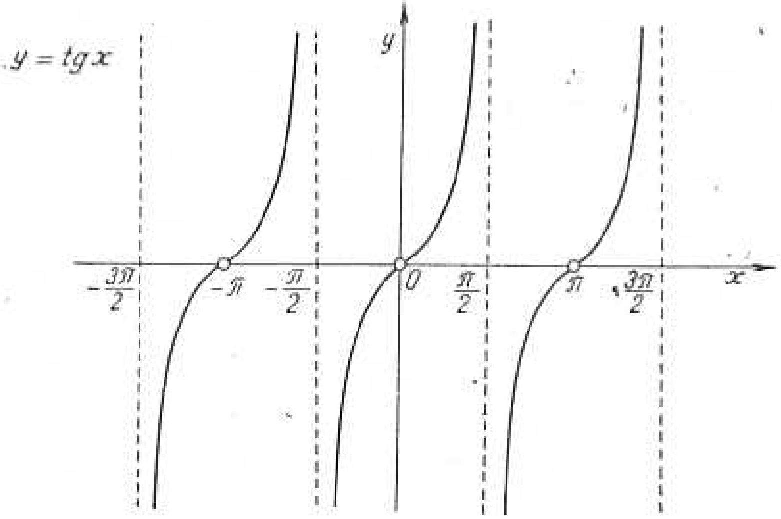
Черт. 27



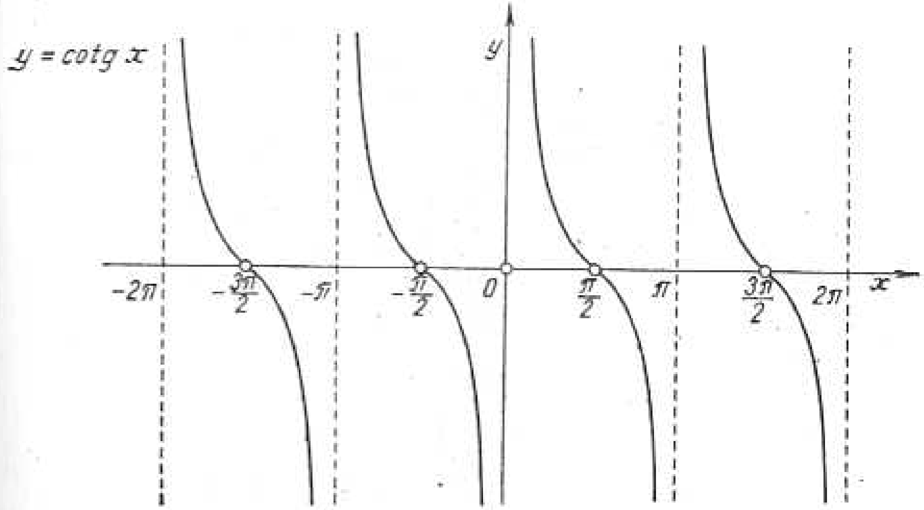
Черт. 28



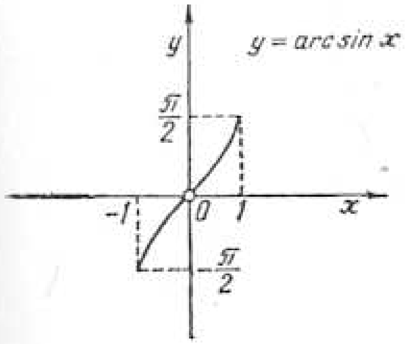
Черт. 29



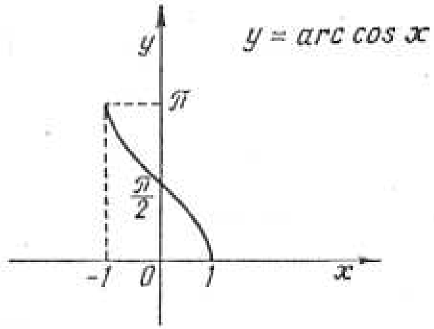
Черт. 30



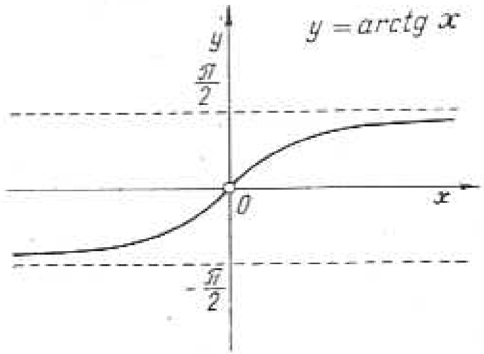
Черт. 31



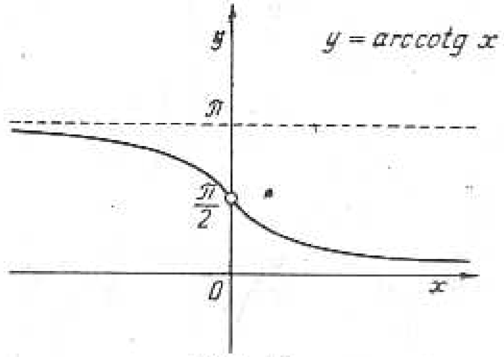
Черт. 32



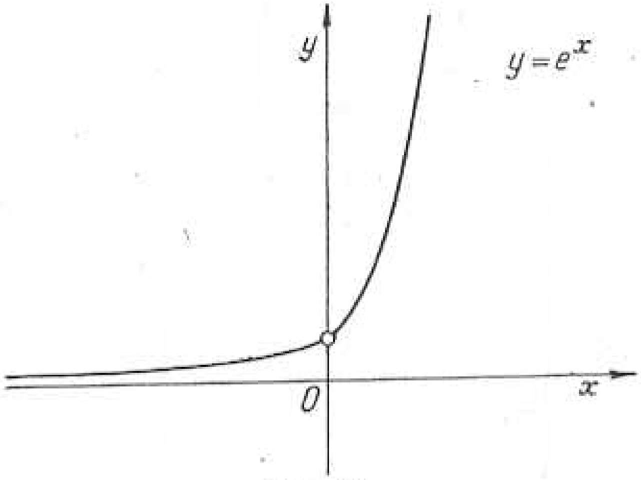
Черт. 33



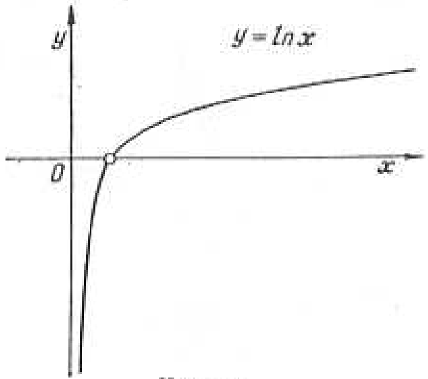
Черт. 34



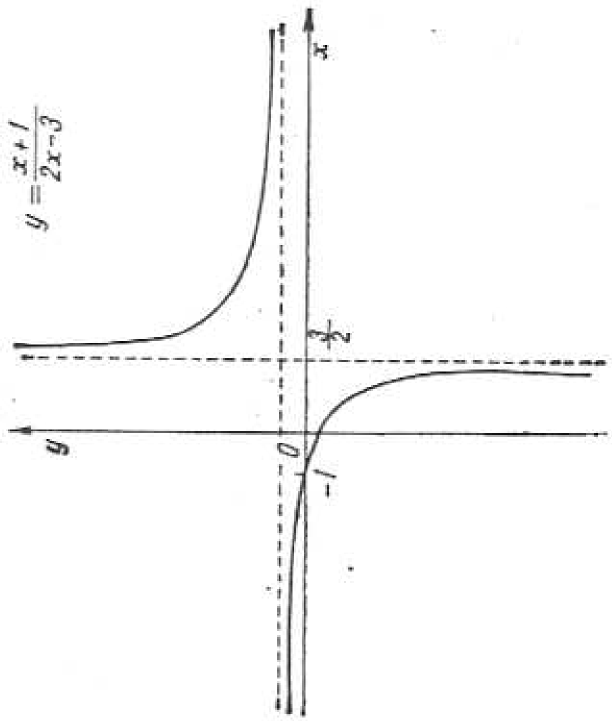
Черт. 35



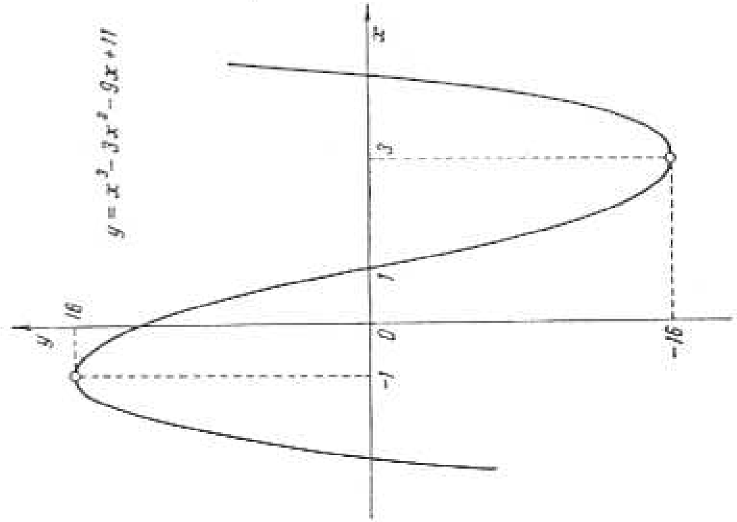
Черт. 36



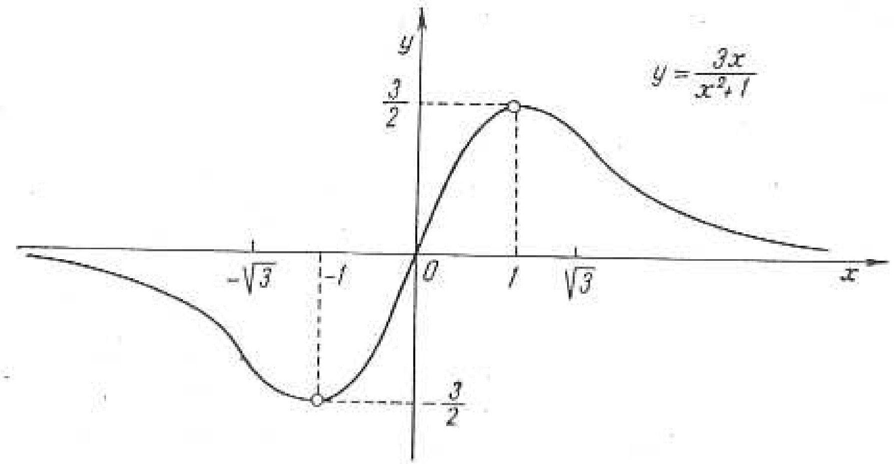
Черт. 37



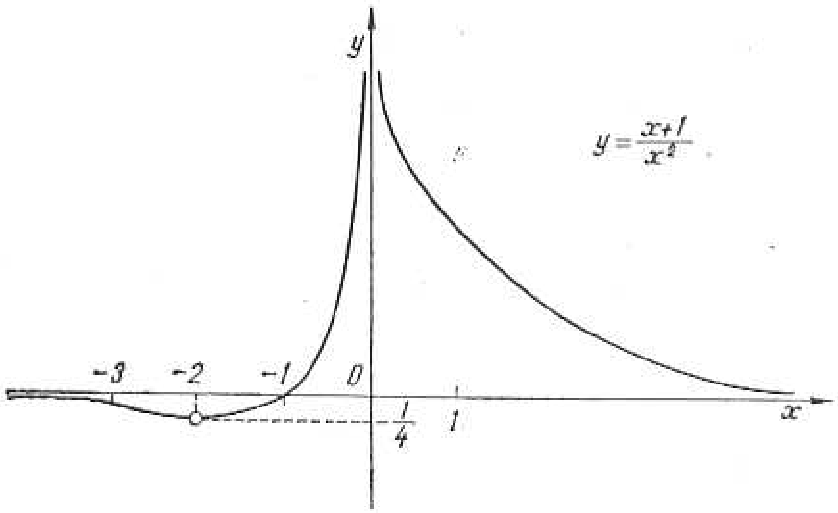
Черт. 39



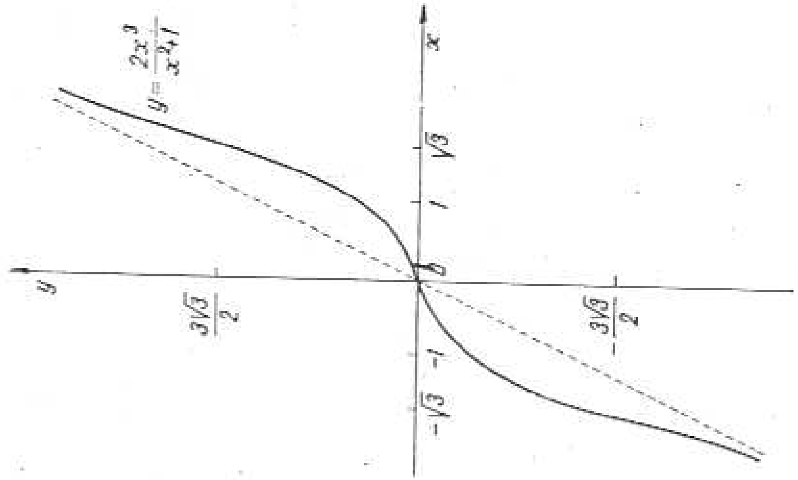
Черт. 38



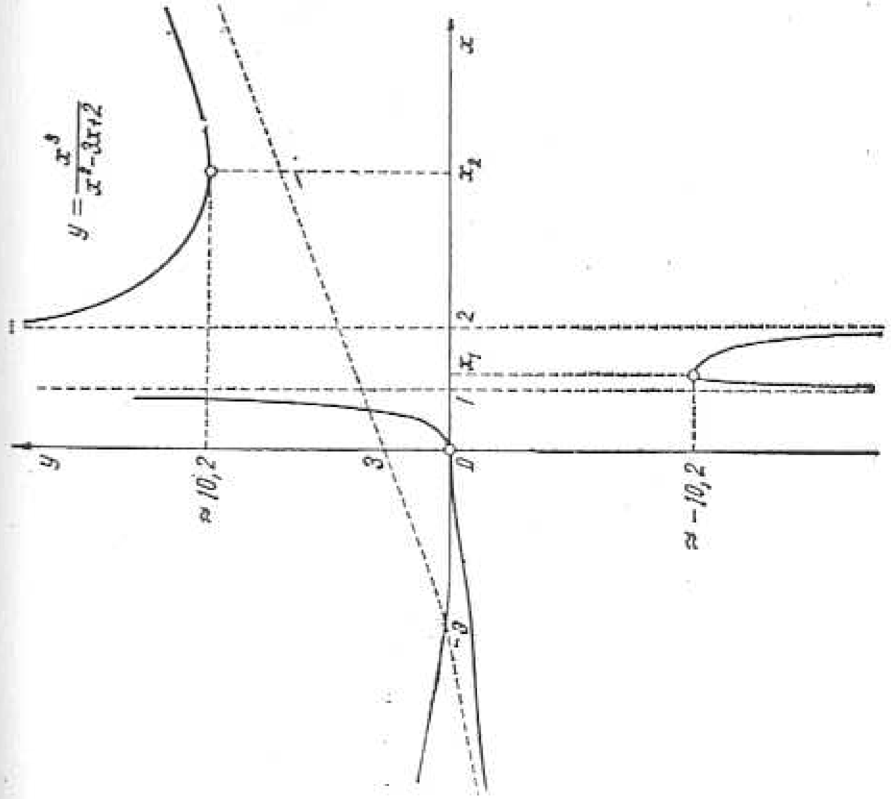
Черт. 40



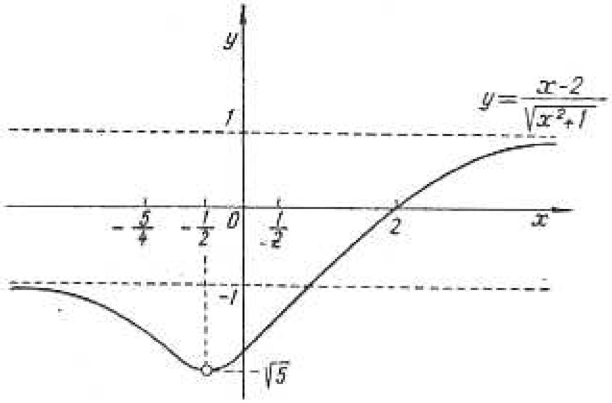
Черт. 41



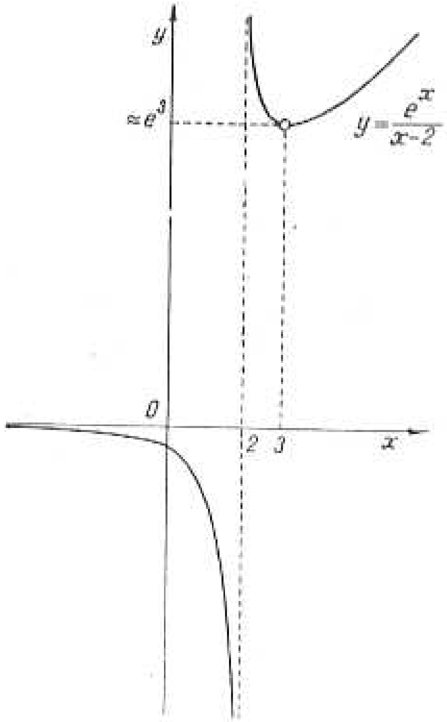
Черт. 43



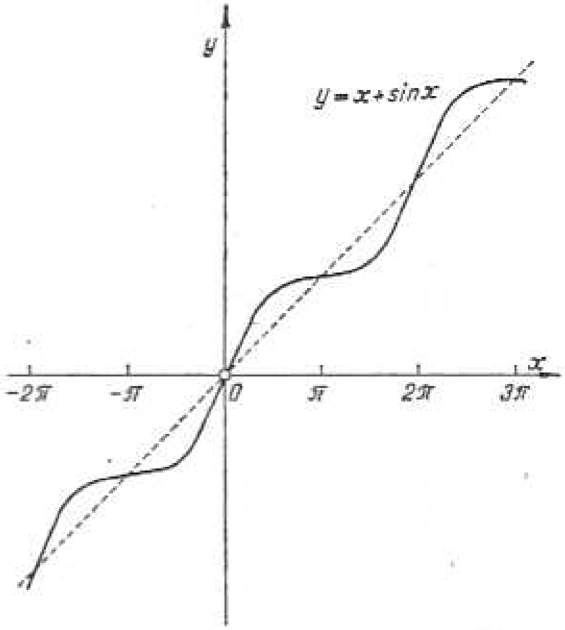
Черт. 42



Черт. 44



Черт. 45



Черт. 46