ЧАСТ II

ДИФЕРЕНЦИАЛНО И ИНТЕГРАЛНО СМЯТАНЕ НА ФУНКЦИИ НА ЕДНА НЕЗАВИСИМА ПРОМЕНЛИВА

ГЛАВА III

ФУНКЦИИ. ГРАНИЦИ НА ФУНКЦИИ

Понятието функционална зависимост е едно от най-основните в математиката. То е и едно от онези понятия, които играят главна роля в нейните приложения. В тази глава, след като разгледаме подробно дефиницията на понятието функция и след като се спрем на някои специални категории функции, ще въведем и подробно ще изучим важното понятие граница на функция, лежащо в основата на голяма част от нашата по-нататъшна работа.

§ 14. Функции

Понятието функция с течение на вековете е изменяло своето съдържание. Съгласно съвременното схващане считаме, че ни е дадена една функция, когато на всяко число x от едно числово множество M е съпоставено с помощта на някакво правило по едно реално число $f(x)$. Множеството M се нарича дефиниционно множество или дефиниционна област на дадената функция. То най-често е един интервал или пък е съставено от два или повече интервала, но може да има и по-сложен вид.

Понякога се пише още $y=f(x)$, където x е аргумент или независима променлива, която „се мени" в M и на всяка стойност на която отговаря една функционална стойност на зависимата променлива y.

И така, когато се дефинира една функция, трябва да бъдат дадени: първо, множеството M, в което тя е дефинирана (т. е. нейната дефиниционна област), и, второ, правилото, според което на всяко число x от M е съпоставено някакво число $f(x)$. Много често обаче дадена функция се записва с помощта на някой математически израз, без да се споменава изрично коя е нейната дефиниционна област. В такъв случай се подразбира, че тази функция е дефинирана за всички реални числа x, за които има смисъл написаният израз.

Така например функцията

$$f(x)=x^2 \tag{1}$$

е дефинирана за всички реални числа x, т. е. нейната дефиниционна област е интервалът $(-\infty, \infty)$. Същото се отнася за функцията

(2) $$f(x)=\sin x\,;$$

тя също е дефинирана в интервала $(-\infty,\ \infty)$. Функцията пък

(3) $$f(x)=\sqrt{x}$$

е дефинирана само за неотрицателни стойности на x, т. е. нейната дефиниционна област е интервалът $[0,\ \infty)$.

Ако разгледаме функцията

(4) $$f(x)=\frac{1}{x},$$

то тя не е дефинирана при $x=0$. Следователно нейната дефиниционна област е съставена от двата отворени интервала $(-\infty,\ 0)$ и $(0,\ \infty)$. Дефиниционната област пък на функцията

(5) $$f(x)=\frac{x^3+5}{x^2-x-2}$$

е съставена от отворените интервали $(-\infty,\ -1)$, $(-1,\ 2)$ и $(2,\ \infty)$. Тя не е дефинирана за числата -1 и 2, тъй като за тези стойности на x знаменателят на написания израз става равен на нула.

Във всички посочени примери правилото за пресмятане на функционалната стойност $f(x)$ при дадено x е записано с помощта на някакъв математически израз. То може обаче да бъде зададено и по по-сложен начин, като се използуват два или повече математически изрази или пък по някакъв друг начин. Така е например при функцията

(6) $$f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{при } x\geqq -1, \\ 1 & \text{при } x<-1, \end{cases}$$

дефинирана в интервала $(-\infty,\ \infty)$, или при функцията

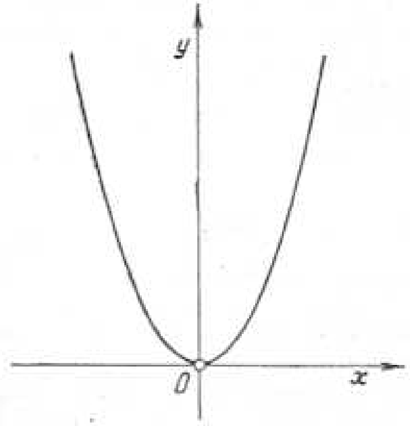
(7) $$f(x)=\begin{cases} -1 & \text{при } -1\leqq x<0, \\ 0 & \text{при } x=0, \\ 1 & \text{при } 0<x\leqq 1, \end{cases}$$

дефинирана в затворения интервал $[-1,\ 1]$.

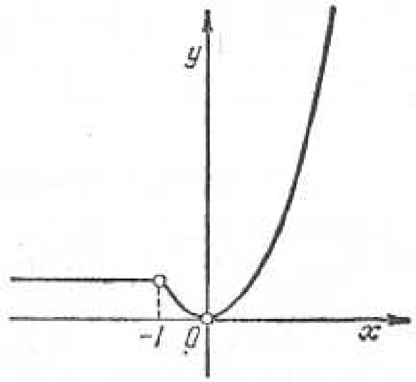
Най-сетне правилото, с помощта на което се задава една функция, може да бъде и такова, че на всяко x от дефиниционната област M да съпоставя едно и също число C, т. е. да се записва с равенството $f(x)=C$ за всяко x от M. Такава функция се нарича к о н с т а н т а.

Понякога е особено удобно т. нар. графично представяне на функциите, при което дадената функция се изобразява с помощта на крива, лежаща в една равнина. (Тук думата крива трябва да се схваща в достатъчно широк смисъл.) Това изобразяване става по следния начин: Нека е дадена една функция $f(x)$ с дефиниционна област M. Да разгледаме една равнина с правоъгълна координатна система Oxy в нея. На всяко число x от M можем да съпоставим една точка от равнината, именно

точката P с абсциса x и ордината $y=f(x)$. Когато x описва множеството M, точката P ще опише в равнината друго множество (една „крива"), което ние наричаме г р а ф и к а на дадената функция. На черт. 3 е показана графиката на функцията $f(x)=x^2$, на черт. 4 — графиката на

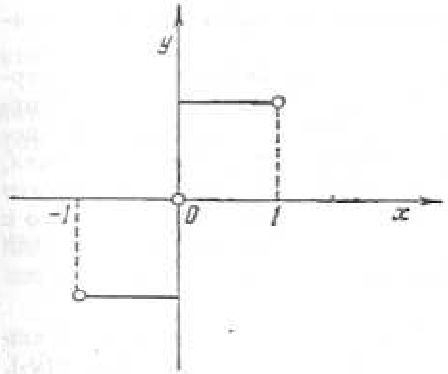


Черт. 3

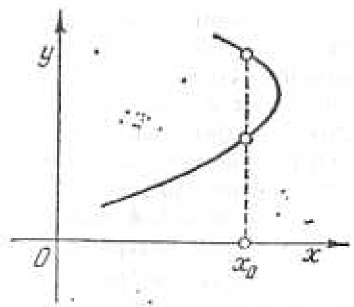


Черт. 4

функцията, дадена с равенството (6), а на черт. 5 — графиката на функцията, дефинирана с равенството (7). (По-точно на чертежи 3 и 4 са



Черт. 5



Черт. 6

построени само части от съответните графики, тъй като самите графики се простират в същност до безкрайност.)

Нека отбележим, че не всяка линия в равнината може да се разглежда като графика на някоя функция. Така например линията, която е показана на черт. 6, не е графика на никаква функция, тъй като евентуалната функция, която тя би представяла, би съпоставяла например на точката x_0 две различни функционални стойности — нещо, което противоречи на самата дефиниция на понятието функция. За да бъде една линия графика на някаква функция, необходимо е тя да притежава следното свойство: да не съдържа различни точки с еднакви абсциси. Това свойство може да се изкаже още и така: ако една права, успоредна на оста Oy, пресича дадената линия, то тя я пресича само в една точка. Лесно е впрочем да се види, че това свойство е не само необходимо, но и достатъчно, т. е. че всяка линия, притежаваща това свойство, се явява графика на някаква функция.

§ 15. Ограничени функции. Монотонни функции

Казваме, че една функция $f(x)$, дефинирана в някакво множество M, е ограничена отгоре, ако множеството от нейните функционални стойности, разглеждано като множество от реални числа, е ограничено отгоре. Всяка горна граница на това множество се нарича горна граница на дадената функция, а неговата точна горна граница — точна горна граница на функцията. Аналогично се въвежда понятието функция, ограничена отдолу, както и понятието долна граница и точна долна граница на функция. Когато една функция е ограничена както отгоре, така и отдолу, ние я наричаме накратко ограничена.

И така една функция $f(x)$ с дефиниционна област M е ограничена, когато съществуват такива числа A и B, че за всяко x от M да са изпълнени неравенствата $A \leqq f(x) \leqq B$.

Всяка функция, която не е ограничена, се нарича неограничена.

Ето някои примери. Функцията $f(x)=\sin x$, дефинирана в интервала $(-\infty, \infty)$, е ограничена, тъй като $-1 \leqq \sin x \leqq 1$ за всяко x. Функцията пък $f(x)=x^2$, дефинирана в същата област, е неограничена (поточно тя не е ограничена отгоре). Да отбележим впрочем, че функция, която е неограничена в една област, може да се окаже ограничена, когато я разгледаме в някоя по-малка област. Така функцията $f(x)=x^2$, която е неограничена в интервала $(-\infty, \infty)$, е ограничена например в интервала $[0, 3]$ — числото 0 е нейна долна граница, а числото 9 — нейна горна граница в този интервал.

Една функция $f(x)$ се нарича растяща в дадена област M, ако при $x_1<x_2$, където x_1 и x_2 са две числа от M, имаме винаги $f(x_1) \leqq f(x_2)$. Когато пък от неравенството $x_1<x_2$ следва строгото неравенство $f(x_1)<f(x_2)$, функцията се нарича строго растяща в M.

Аналогично една функция $f(x)$ се нарича намаляваща в M, ако от $x_1 \in M$, $x_2 \in M$ и $x_1<x_2$ следва, че $f(x_1) \geqq f(x_2)$, и съответно строго намаляваща, когато от $x_1<x_2$ следва $f(x_1)>f(x_2)$.

Растящите и намаляващите функции се наричат с общото име монотонни функции.

Примери. Покажете, че функцията $f(x)=x^2$ е строго растяща в интервала $[0, \infty)$, а функцията $f(x)=\frac{1}{x}$ е строго намаляваща в интервала $(0, \infty)$.

Лесно е да се види, че степенната функция $f(x)=x^\alpha$, дефинирана в интервала $(0, \infty)$, е строго растяща в този интервал, когато $\alpha>0$. Наистина нека $0<x_1<x_2$. Тогава от неравенството $\frac{x_2}{x_1}>1$ следва неравенството $\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^\alpha>1$, откъдето $x_1^\alpha<x_2^\alpha$.

Аналогично се убеждаваме, че функцията $f(x)=x^\alpha$ е строго намаляваща в интервала $(0, \infty)$ при $\alpha<0$.

Също така лесно се проверява, че показателната функция $f(x)=a^x$ при $a>1$ е строго растяща в интервала $(-\infty, \infty)$. Действително, ако $x_1<x_2$, то от неравенствата $a>1$ и $x_2-x_1>0$ следва $a^{x_2-x_1}>1$. Оттук получаваме $a^{x_2}-a^{x_1}=a^{x_1}(a^{x_2-x_1}-1)>0$, т. е. $a^{x_1}<a^{x_2}$.

Аналогично се вижда, че функцията $f(x)=a^x$ при $0<a<1$ е строго намаляваща в интервала $(-\infty, \infty)$.

Функцията $f(x)=\sin x$, където ъгълът x е измерен в радиани, е строго растяща в интервала $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Наистина, ако $-\frac{\pi}{2} \leqq x_1<x_2 \leqq \frac{\pi}{2}$, лесно се вижда, че

$$-\frac{\pi}{2}<\frac{x_1+x_2}{2}<\frac{\pi}{2} \quad \text{и} \quad 0<\frac{x_2-x_1}{2} \leqq \frac{\pi}{2}.$$

Но тогава от равенството

$$\sin x_2-\sin x_1=2\cos\frac{x_1+x_2}{2}\sin\frac{x_2-x_1}{2}$$

заключаваме, че $\sin x_2-\sin x_1>0$ или $\sin x_1<\sin x_2$.

Функцията $f(x)=\cos x$ е строго намаляваща, когато я разгледаме в интервала $[0, \pi]$. Наистина от неравенствата $0 \leqq x_1<x_2 \leqq \pi$ се получават неравенствата

$$0<\frac{x_1+x_2}{2}<\pi \quad \text{и} \quad 0<\frac{x_2-x_1}{2}<\pi.$$

Тогава

$$\cos x_2-\cos x_1=-2\sin\frac{x_1+x_2}{2}\sin\frac{x_2-x_1}{2}<0,$$

т. е. $\cos x_2<\cos x_1$.

Също така лесно се вижда, че функцията $f(x)=\operatorname{tg} x$ е строго растяща в интервала $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Именно, ако $-\frac{\pi}{2}<x_1<x_2<\frac{\pi}{2}$, то $0<x_2-x_1<\pi$ и тогава ще имаме

$$\operatorname{tg}x_2-\operatorname{tg}x_1=\frac{\sin x_2}{\cos x_2}-\frac{\sin x_1}{\cos x_1}=\frac{\sin x_2\cos x_1-\sin x_1\cos x_2}{\cos x_1\cos x_2}=\frac{\sin(x_2-x_1)}{\cos x_1\cos x_2}>0,$$

откъдето $\operatorname{tg} x_1<\operatorname{tg} x_2$.

Най-сетне функцията $f(x)=\operatorname{cotg} x$ пък е строго намаляваща, когато я разглеждаме в интервала $(0, \pi)$. Това се вижда от равенствата

$$\operatorname{cotg} x_2-\operatorname{cotg} x_1=\frac{\cos x_2}{\sin x_2}-\frac{\cos x_1}{\sin x_1}=\frac{\cos x_2 \sin x_1-\cos x_1 \sin x_2}{\sin x_1 \sin x_2}=-\frac{\sin (x_2-x_1)}{\sin x_1 \sin x_2}.$$

Ясно е, че при $0<x_1<x_2<\pi$ ще имаме $0<x_2-x_1<\pi$, откъдето $\operatorname{cotg} x_2-\operatorname{cotg} x_1<0$, т. е. $\operatorname{cotg} x_2<\operatorname{cotg} x_1$.

Упражнения. 1. Покажете, че функцията $f(x)=\frac{1}{x}$ е неограничена в интервала $(0, 1)$.

2. Посочете една долна и една горна граница на функцията $f(x)=\frac{2x+5}{x^2+2}$ в интервала $[1, 3]$.

3. Монотонна ли е функцията $f(x)=\sin x$ в интервала $[0, \pi]$?

4. Покажете, че функцията $f(x)=\sin^2 x$ е строго растяща в интервала $[0, \frac{\pi}{2}]$

§ 16. Обратни функции

Една функция $f(x)$, дефинирана в някое множество M, се нарича **обратима**, ако за различни стойности на x от M приема различни стойности, т. е. когато от $x_1 \neq x_2$ следва $f(x_1) \neq f(x_2)$. Това условие, разбира се, не винаги е изпълнено. Ясно е обаче, че то ще бъде удовлетворено, ако функцията $f(x)$ е строго растяща или пък строго намаляваща в множеството M. И така всяка строго растяща, както и всяка строго намаляваща функция, е обратима.

Нека $f(x)$ е една обратима функция с дефиниционна област M и нека N е множеството от нейните функционални стойности. Да си вземем едно число y_0 от N. Съществува, и то едно единствено число x_0 от M, за което $f(x_0)=y_0$. И наистина, ако допуснем, че има и друго число x_1 от M, различно от x_0, за което $f(x_1)=y_0$, ще получим $f(x_0)=f(x_1)$, което е невъзможно. И така на всяко число y от N можем да съпоставим по едно число x от M, удовлетворяващо равенството $f(x)=y$. Това число x зависи, разбира се, от y и поради това можем да го означим с $\varphi(y)$. По този начин дефинираме в N една функция. Тази функция се нарича **обратна** на функцията $f(x)$. Множеството N от функционалните стойности на $f(x)$ служи за дефиниционна област на обратната функция $\varphi(y)$, докато пък дефиниционната област M на $f(x)$ се явява множество от функционалните стойности за $\varphi(y)$.

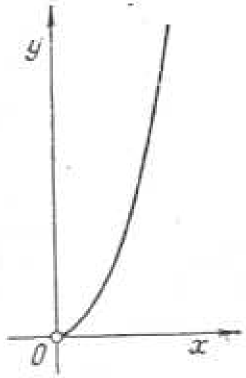
От дефиницията за обратна функция е ясно, че за всяко y от N е изпълнено равенството

$$f[\varphi(y)]=y,$$

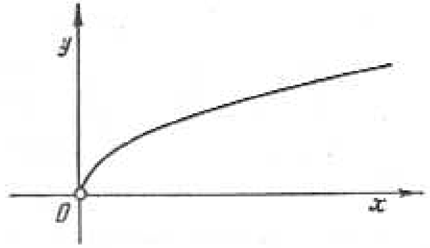
т. е. числото $\varphi(y)$ се явява решение на уравнението $f(x)=y$ относно x. От друга страна, ако x принадлежи на M и ако $f(x)=y$, то ще имаме $\varphi(y)=x$, т. е. за всяко x от M ще бъде изпълнено равенството

$$\varphi[f(x)]=x.$$

Пример. Да разгледаме функцията $f(x)=x^2$ в интервала $[0, \infty)$. Тъй като тя е строго растяща в този интервал, тя е и обратима в него. Коя е нейната обратна функция? Лесно е да се види, че това е функцията $\varphi(y)=\sqrt{y}$, дефинирана в областта $[0, \infty)$. И наистина множе-



Черт. 7



Черт. 8

ството N от функционалните стойности на функцията $f(x)=x^2$ е интервалът $[0, \infty)$ и за всяко число y от този интервал имаме $(\sqrt{y})^2=y$.

Ясно е, че ако функцията $f(x)$ е обратима и $\varphi(y)$ е нейната обратна функция, то $\varphi(y)$ от своя страна е също обратима и нейната обратна е функцията $f(x)$.

Както вече отбелязахме, всяка строго растяща функция $f(x)$ е обратима. Лесно е да се види при това, че нейната обратна функция $\varphi(y)$ е също строго растяща. Наистина нека $y_1=f(x_1)$, $y_2=f(x_2)$ и нека $y_1<y_2$. Тогава $\varphi(y_1)=x_1$ и $\varphi(y_2)=x_2$. Ако допуснем, че $x_1 \geqq x_2$, то бихме получили $f(x_1) \geqq f(x_2)$, т. е. $y_1 \geqq y_2$, което не е вярно. Следователно $x_1<x_2$, т. е. $\varphi(y_1)<\varphi(y_2)$. И така функцията $\varphi(y)$ е строго растяща.

Аналогично се установява, че обратната функция на една строго намаляваща функция е също строго намаляваща.

Да отбележим още, че ако $\varphi(y)$ е обратната функция на дадена функция $f(x)$, то очевидно графиката на $\varphi(y)$ ще получим, като вземем графиката на $f(x)$ и разменим ролите на осите Ox и Oy. (Това ще постигнем, като завъртим координатната система Oxy на ъгъл $\frac{\pi}{2}$ в посока, противна на тая на часовниковата стрелка, и вземем огледален образ на графиката относно ординатната ос.) На черт. 7 е показана графиката на функцията $f(x)=x^2$ при $x \geqq 0$, а на черт. 8 — графиката на нейната обратна функция $\varphi(x)=\sqrt{x}$.

В § 15 видяхме, че функцията $f(x)=a^x$ е строго растяща при $a>1$ и строго намаляваща при $0<a<1$. Следователно винаги когато $a>0$ и $a \neq 1$, функцията a^x е обратима. Нейната обратна функция е функцията $\varphi(x)=\log_a x$. Тя очевидно е дефинирана само в интервала $(0, \infty)$, тъй като функцията $f(x)=a^x$ има, както знаем, само положителни стойности. От свойствата на обратните функции получаваме равенствата

$$a^{\log_a x}=x \text{ при } x>0,$$

$$\log_a a^x=x \text{ за всяко } x.$$

Освен това непосредствено получаваме и заключението, че функцията $\varphi(x)=\log_a x$ е строго растяща, когато $a>1$, и строго намаляваща, когато $0<a<1$.

Видяхме също, че функцията $f(x)=\sin x$, където ъгълът x е измерен в радиани, е строго растяща в интервала $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Следователно тя е обратима в този интервал. Нейната обратна функция се нарича „аркус синус от x" и се бележи така: $\arcsin x$. Като си спомним дефиницията на понятието обратна функция, можем да кажем: $\arcsin x$ е онзи ъгъл (той е единствен), който, измерен в радиани, се намира в интервала $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ и който има синус, равен на x. (Както знаем от геометрията, такъв ъгъл сигурно съществува при $|x|\leq 1$.) Като вземаме пред вид свойствата на обратните функции, идваме до следните заключения за функцията $\arcsin x$:

1) тя е дефинирана в интервала $[-1, 1]$;

2) нейните функционални стойности се намират в интервала $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$;

3) тя е строго растяща;

4) валидни са равенствата

$$\sin(\arcsin x)=x \text{ при } -1\leq x\leq 1,$$

$$\arcsin(\sin x)=x \text{ при } -\frac{\pi}{2}\leq x\leq \frac{\pi}{2}.$$

Функцията $f(x)=\cos x$, както видяхме, е строго намаляваща и следователно обратима в интервала $[0, \pi]$. Нейната обратна функция се нарича „аркус косинус от x" и се записва така: $\arccos x$. Следователно $\arccos x$ е ъгъл, който, измерен в радиани, се намира в интервала $[0, \pi]$ и който има косинус, равен на x. (Такъв ъгъл сигурно съществува при $|x|\leq 1$ и той е единствен.) Ясно е, че:

1) функцията $\arccos x$ е дефинирана в интервала $[-1, 1]$;
2) нейните функционални стойности се намират в интервала $[0, \pi]$;
3) тя е строго намаляваща;
4) валидни са равенствата:

$$\cos(\arccos x)=x \text{ при } -1\leq x\leq 1,$$

$$\arccos(\cos x)=x \text{ при } 0\leq x\leq \pi.$$

Аналогично се въвежда и функцията $\operatorname{arc\,tg} x$, обратна на функцията $\operatorname{tg} x$ в интервала $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, а също така и функцията $\operatorname{arc\,cotg} x$, обратна на функцията $\operatorname{cotg} x$ в интервала $(0, \pi)$. При това се вижда, че:

1) функцията $\operatorname{arc\,tg} x$ е дефинирана в интервала $(-\infty, \infty)$;
2) нейните функционални стойности се намират в интервала $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$;

3) тя е строго растяща;
4) изпълнени са равенствата

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arc\,tg} x)=x \text{ за всяко } x,$$

$$\operatorname{arc\,tg}(\operatorname{tg} x)=x \text{ при } -\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}.$$

За функцията пък $\operatorname{arc\,cotg} x$ имаме:
1) тя е дефинирана в интервала $(-\infty, \infty)$;
2) функционалните ѝ стойности се намират в интервала $(0, \pi)$;
3) тя е строго намаляваща;
4) валидни са равенствата

$$\operatorname{cotg}(\operatorname{arc\,cotg} x)=x \text{ за всяко } x,$$

$$\operatorname{arc\,cotg}(\operatorname{cotg} x)=x \text{ при } 0<x<\pi.$$

Упражнения. 1. Обратима ли е функцията $f(x)=\frac{1}{x}$, дефинирана при $x\neq 0$, и ако е обратима, то коя е нейната обратна функция?

2. Пресметнете в (радиани): $\arcsin\frac{1}{2}$, $\arcsin 1$, $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $\arccos 1$, $\arccos 0$, $\arccos\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$, $\operatorname{arc\,tg}(-1)$, $\operatorname{arc\,tg}\sqrt{3}$, $\operatorname{arc\,tg} 0$, $\operatorname{arc\,cotg} 0$, $\operatorname{arc\,cotg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, $\arcsin\left(\sin\frac{\pi}{3}\right)$, $\arcsin(\sin\pi)$, $\arccos(\cos 2\pi)$, $\operatorname{arc\,tg}\left(\operatorname{tg}3\frac{\pi}{4}\right)$, $\arccos\left(\cos 3\frac{\pi}{2}\right)$, $\operatorname{arc\,cotg}\left(\operatorname{cotg}\frac{\pi}{2}\right)$, $\operatorname{arc\,cotg}\left(\operatorname{cotg} 3\frac{\pi}{2}\right)$.

3. Да се изразят посредством x:
а) $\sin(\arccos x)$;

Решение. а) Полагаме $\arccos x=\alpha$. Тогава $0\leq\alpha\leq\pi$ и $\cos\alpha=x$. Имаме $\sin(\arccos x)=\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\sqrt{1-x^2}$.

б) $\sin(2\arccos x)$; в) $\cos(2\arcsin x)$; г) $\sin(\operatorname{arc\,tg} x)$;
д) $\cos(\operatorname{arc\,tg} x)$; е) $\sin(2\operatorname{arc\,tg} x)$; ж) $\cos(2\operatorname{arc\,tg} x)$.

4. Да се докаже тъждеството

$$\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}=\arcsin x \text{ при } -1<x<1.$$

Решение. Полагаме $\arcsin x = \alpha$. Тогава $-\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ и $\sin \alpha = x$. От $x \neq 1, -1$, следва $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Имаме $\operatorname{arc\,tg} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arc\,tg} \frac{\sin \alpha}{\sqrt{1-\sin^2 \alpha}} = \operatorname{arc\,tg}(\operatorname{tg} \alpha) = \alpha = \arcsin x$.

5. Докажете тъждеството

$$\arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \operatorname{arc\,tg} x \quad \text{при всяко } x.$$

6. Докажете, че

$$\arccos \frac{1-x^2}{1+x^2} = \begin{cases} 2 \operatorname{arc\,tg} x & \text{при } x \geq 0 \\ -2 \operatorname{arc\,tg} x & \text{при } x \leq 0. \end{cases}$$

Решение. Полагаме $\operatorname{arc\,tg} x = \alpha$. Тогава $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$ и $\operatorname{tg} \alpha = x$.

а) Ако $x \geq 0$, то $\operatorname{tg} \alpha \geq 0$ и $0 \leq \alpha < \frac{\pi}{2}$, $0 \leq 2\alpha < \pi$. Тогава имаме

$$\arccos \frac{1-x^2}{1+x^2} = \arccos \frac{1-\operatorname{tg}^2 \alpha}{1+\operatorname{tg}^2 \alpha} = \arccos(\cos 2\alpha) = 2\alpha.$$

б) Ако $x \leq 0$, то $\operatorname{tg} \alpha \leq 0$ и $-\frac{\pi}{2} < \alpha \leq 0$, $0 \leq -2\alpha < \pi$. Тогава

$$\arccos \frac{1-x^2}{1+x^2} = \arccos(\cos 2\alpha) = \arccos(\cos(-2\alpha)) = -2\alpha.$$

7. Докажете, че

$$\arcsin \frac{2x}{1+x^2} = \begin{cases} \pi - 2 \operatorname{arc\,tg} x & \text{при } x \geq 1 \\ 2 \operatorname{arc\,tg} x & \text{при } -1 \leq x \leq 1 \\ -\pi - 2 \operatorname{arc\,tg} x & \text{при } x \leq -1. \end{cases}$$

8. Докажете равенството

$$\operatorname{arc\,tg} \frac{1}{2} + \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{5} + \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{8} = \frac{\pi}{4}.$$

9. Докажете, че ако $a > 0$, $a \neq 1$, $b < 0, b \neq 1$, то

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}.$$

10. Решете уравнението

$$\log_2 x \log_2 2x = \log_2 16x.$$

§ 17. Елементарни функции

Някои от функциите, които често срещаме, са добре изучени отдавна и поради това е прието да се отделят в категорията на т. нар. елементарни функции. Тук спадат преди всичко рационалните функции.

Към класа на рационалните функции се причисляват най-напред всички функции-константи и функцията $f(x)=x$, а след това всички функции, които могат да се получат от тези два вида функции (константите и функцията x) посредством неколкократно прилагане на действията събиране, изваждане и умножение — това са целите рационални функции, или полиномите. Лесно е да се съобрази, че всеки полином има вида

$$f(x)=a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0.$$

Числата $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0$ се наричат коефициенти на дадения полином (a_0 се нарича още и свободен член). Ако $a_n \neq 0$, то полиномът е от n-та степен.

Константите се разглеждат като частен случай от полиномите, а именно като полиноми от нулева степен. Основание за това ни дава обстоятелството, че всяко число C може да се напише още и във вида Cx^0 (където x е произволно число, различно от 0).

Най-сетне ще получим всички рационални функции, ако тръгвайки от функцията $f(x)=x$ и константите, позволим да бъдат извършени не само действията събиране, изваждане и умножение, но и действието деление. Ясно е тогава, че всяка рационална функция има вида

$$(1) \qquad f(x)=\frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_0},$$

т. е. тя е частно на два полинома. Когато полиномът, който е в знаменателя на тази дроб, е най-малко от първа степен, т. е. когато той не е константа, функцията (1) се нарича дробна рационална функция.

Ако пък, тръгвайки отново от функцията $f(x)=x$ и константите, допуснем освен четирите аритметични действия (събиране, изваждане, умножение и деление) да бъде извършено и действието коренуване (или, което е все едно, действието повдигане на дробен степенен показател), ще получим фамилията на ирационалните функции. Ето някои примери за ирационални функции:

$$f(x)=\sqrt{x} \quad \text{при } x>0;$$

$$f(x)=2x^2+1+5\sqrt[3]{x+1} \quad \text{при } x>-1;$$

$$f(x)=\frac{1+\sqrt{x}}{2+x^2} \quad \text{при } x>0;$$

$$f(x)=\sqrt[3]{x^2+\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}} \quad \text{при } x<-1 \text{ и } x \geq 1.$$

Ирационалните функции също се причисляват към категорията на елементарните функции. Рационалните и ирационалните функции представляват частни случаи от т. нар. **алгебрични функции*** (те не изчерпват обаче класа на алгебричните функции).

Към категорията на елементарните функции се причисляват също и следните функции:

показателната (експоненциалната) функция a^x, където $a>0$ и $a\neq 1$, която е дефинирана за всяко x;

нейната обратна — логаритмичната функция $\log_a x$, където $a>0$, $a\neq 1$, дефинирана при $x>0$;

тригонометричните функции $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{cotg} x$;

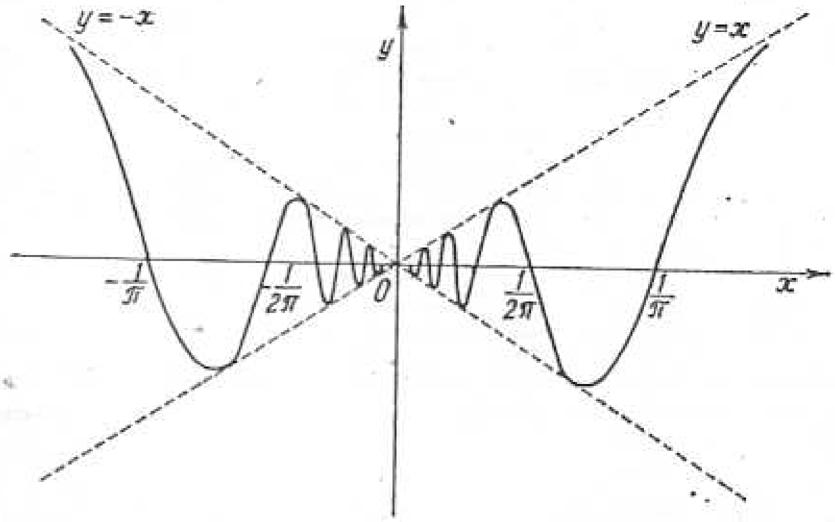
техните обратни функции $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arc\,tg} x$ и $\operatorname{arc\,cotg} x$.

Както ще видим по-нататък, всички елементарни функции притежават някои твърде „хубави" свойства, които ги правят удобни за работа.

§ 18. Граници на функции

Нека разгледаме функцията $f(x)=x\sin\frac{1}{x}$. Тя не е дефинирана при $x=0$. Да си зададем обаче въпроса, какво става с нейните функционални стойности, когато даваме на x значения, все по-близки и по-близки до числото 0. Тъй като произведението $x\sin\frac{1}{x}$ се състои от два множителя, първият от които е x, а вторият получава стойности между -1 и 1, ясно е, че за всяко x (което е различно от 0) функционалната стойност $f(x)$ ще се намира между $-x$ и x. Геометрически това означава, че графиката на тази функция ще се намира между правите с уравнения $y=-x$ и $y=x$ (по-точно в ъглите, образувани от тези две прави и съдържащи оста Ox — вж. черт. 9). Ясно е тогава, че като даваме на x стойности, все по-близки до нула, на тях ще отговарят такива точки от графиката, които се приближават все повече до началото на координатната система. Графиката като че ли „се стреми" към тази точка. Функционалните стойности $f(x)$ пък „се стремят" към числото 0. Ние ще дадем на тези разсъждения строга форма, като въведем понятието граница на функция.

Преди всичко нека обърнем внимание на обстоятелството, че макар точката $x_0=0$ и да не принадлежи към дефиниционната област на разглежданата функция $f(x)=x\sin\frac{1}{x}$ (която се състои от двата отворени интервала $(-\infty, 0)$ и $(0, \infty)$), ние можем да оставим x да се приближава към тази точка. Това е така, тъй като точката $x_0=0$ има свойството, състоящо се, казано накратко и немного точно, в това, че съществуват точки от дефиниционната област на $f(x)$, намиращи се произволно близко до x_0. Ние изразяваме това свойство на точката x_0, като казваме, че тя се явява точка на сгъстяване за дефиниционната област на $f(x)$. Точното съдържание на това понятие се дава със следната



Черт. 9

Дефиниция. *Едно число x_0 ще наричаме* **точка на сгъстяване** *за дадено числово множество M, когато във всяка негова околност $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ се съдържат точки от M, различни от x_0.*

Да отбележим, че самата точка x_0 може да принадлежи, а може и да не принадлежи на множеството M. Така например, ако множеството M е отвореният интервал (a, b), то точката a, също както и точката b, ще бъде точка на сгъстяване за това множество, въпреки че тя не се съдържа в него. След тези предварителни бележки ще дадем следната

Дефиниция. *Нека $f(x)$ е една функция с дефиниционна област M и нека x_0 е точка на сгъстяване за M. Ще казваме, че числото l е* **граница на функцията** *$f(x)$ при x, клонящо към x_0 (или че $f(x)$ клони към l, когато x клони към x_0) и ще записваме това така:*

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=l,$$

---

* Алгебрична се нарича такава функция $y=f(x)$, която удовлетворява някое уравнение относно y от вида

$$P_n(x)y^n+P_{n-1}(x)y^{n-1}+\ldots+P_0(x)=0,$$

където $P_n(x)$, $P_{n-1}(x)$, …, $P_0(x)$ са полиноми на x с цели коефициенти, т. е. такава функция, която, поставена на мястото на y в това уравнение, го превръща в тъждество.

Всяка функция, която не е алгебрична, се нарича **трансцендентна**.

ако при всеки избор на положителното число ε може да се намери такова число $\delta>0$, че от условията $x\in M$, $x\neq x_0$ и $|x-x_0|<\delta$ да следва неравенството

$$|f(x)-l|<\varepsilon.$$

Тъй като числото ε е произволно, дадената дефиниция изисква, грубо казано, разликата между стойностите на функцията $f(x)$ и числото l да може да стане колкото искаме малка (по абсолютна стойност), стига да вземаме такива значения на x от M, които се намират достатъчно близко до x_0 — колко близко, това именно се определя от числото δ. (Разбира се, δ зависи от ε.)

Ясно е при това, че числото δ, за което се говори в тази дефиниция, когато то съществува при дадено $\varepsilon>0$, не е единствено. Ако намерим едно такова число δ, всяко друго положително и по-малко от него число ще има същото свойство.

Възниква веднага въпросът, възможно ли е две различни числа l_1 и l_2 да удовлетворяват разглежданата дефиниция, т. е. да бъдат и двете граници на $f(x)$ при x, клонящо към x_0. Да допуснем, че това е възможно. Тогава, вземайки $\varepsilon=\frac{|l_1-l_2|}{2}$, ще намерим такива положителни числа δ_1 и δ_2, че при $x\in M$ и $x\neq x_0$ от неравенството $|x-x_0|<\delta_1$ да следва неравенството

$$|f(x)-l_1|<\varepsilon,$$

а от неравенството $|x-x_0|<\delta_2$ да следва неравенството

$$|f(x)-l_2|<\varepsilon.$$

Тогава, ако $x\neq x_0$ е такава точка от M, за която имаме едновременно $|x-x_0|<\delta_1$ и $|x-x_0|<\delta_2$, то ще имаме

$$|l_1-l_2|=|l_1-f(x)+f(x)-l_2|\leq|l_1-f(x)|+|f(x)-l_2|<2\varepsilon=|l_1-l_2|.$$

Получаваме противоречивото неравенство $|l_1-l_2|<|l_1-l_2|$, което показва, че нашето допускане за съществуване на две различни граници на $f(x)$ е било погрешно.

И така една функция $f(x)$ не може да притежава две различни граници при x, клонящо към x_0 (където x_0 е точка на сгъстяване за дефиниционната област на $f(x)$) — тя или клони към една единствена граница l, или въобще не клони към никаква граница.

Сега можем да покажем, че наистина функцията $f(x)=x\sin\frac{1}{x}$, дефинирана за всяко $x\neq 0$, която разгледахме преди, клони към 0, когато x клони към 0, според дадената от нас дефиниция. (Очевидно точката $x_0=0$, макар и непринадлежаща на дефиниционната област на разглежданата функция, се явява точка на сгъстяване за тази област.) За да установим, че $\lim\limits_{x\to x_0}(x\sin\frac{1}{x})=0$, трябва да покажем, че ако $\varepsilon>0$, то съществува такова положително число δ, че от неравенството $|x|<\delta$ да следва при $x\neq 0$ неравенството $|x\sin\frac{1}{x}|<\varepsilon$. Но целта ни ще бъде постигната, ако вземем $\delta=\varepsilon$, защото при $|x|<\varepsilon$ имаме

$$\left|x\sin\frac{1}{x}\right|=|x|\cdot\left|\sin\frac{1}{x}\right|\leq|x|<\varepsilon.$$

Да вземем друг пример — да разгледаме функцията $f(x)=\cos x$ и да покажем, че тя притежава граница, когато x клони към 0, и че тази граница е 1. Наистина да вземем едно произволно положително число ε. Веригата от равенства и неравенства*

$$|\cos x-1|=1-\cos x=2\sin^2\frac{x}{2}=2\left|\sin\frac{x}{2}\right|\cdot\left|\sin\frac{x}{2}\right|\leq 2\,.\,1\,.\,\frac{|x|}{2}=|x|$$

ни показва, че ако изберем $\delta=\varepsilon$, то при $|x|<\delta$, т. е. при $|x|<\varepsilon$, ще бъде изпълнено неравенството $|\cos x-1|<\varepsilon$. С това е доказано, че

$$\lim_{x\to 0}\cos x=1.$$

В току-що разгледания пример точката $x_0=0$, към която клонеше x, принадлежи на дефиниционната област на функцията $f(x)=\cos x$ (тази дефиниционна област е множеството на всички реални числа). Нещо повече, читателят навярно е забелязал, че числото 1, явяващо се граница на тази функция при x, клонящо към 0, не е нищо друго освен стойността на функцията $\cos x$ при $x=0$. До същото число бихме достигнали, ако вместо да търсим тази граница, просто бяхме заместили x с 0 в израза $\cos x$. Нека веднага да отбележим обаче, че нещата не винаги са така прости — не винаги границата на една функция, когато x клони към някоя точка x_0 от нейната дефиниционна област, може да се получи по такъв лесен начин. Така например, ако вземем функцията

$$f(x)=\begin{cases} x & \text{при } x\neq 0\\ 1 & \text{при } x=0,\end{cases}$$

дефинирана за всяко x, виждаме, че $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$ докато, от друга страна имаме $f(0)=1$. Следователно $\lim\limits_{x\to 0}f(x)\neq f(0)$.

Нека към тези първоначални бележки относно понятието граница на функция да добавим още и следното: Ако функцията $f(x)$ е константа, т. е. ако имаме $f(x)=C$ за всяко x (където C е някакво число), то веднага се вижда, че за всяка точка x_0 ще бъде изпълнено $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=C$, т. е. $\lim\limits_{x\to x_0}C=C$.

По-нататък ще ни бъдат много полезни следните две теореми:

Теорема 1. *Нека $f(x)$ е дадена функция с дефиниционна област M,*

---

* Тук използуваме познатото ни неравенство $|\sin\alpha|\leq|\alpha|$, валидно за всяко α, когато ъгълът α е измерен в радиани.

нека x_0 е точка на сгъстяване за M и нека $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=l$. Ако редицата

(1) $$x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$$

се състои от числа, принадлежащи на M и различни от x_0, и ако тя клони към x_0, то редицата

(2) $$f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n), \ldots$$

е също сходяща и клони към l.

Доказателство. За да докажем, че $f(x_n)\to l$, трябва, като изберем произволно положително число ε, да намерим такова число ν, че при $n>\nu$ да имаме $|f(x_n)-l|<\varepsilon$. Тъй като $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=l$, ние можем да намерим най-напред някакво положително число δ, за което при $x\in M$ и $x\neq x_0$ от неравенството $|x-x_0|<\delta$ да следва неравенството $|f(x)-l|<\varepsilon$. От друга страна, от сходимостта на редицата (1) пък следва, че съществува такова число ν, че при $n>\nu$ да имаме $|x_n-x_0|<\delta$. Тогава е ясно, че при $n>\nu$ ще бъде изпълнено неравенството

$$|f(x_n)-l|<\varepsilon,$$

т. е. намереното число ν има желаното свойство. С това е установено, че редицата (2) клони към l.

Валидна е също така следната теорема, която в известен смисъл е обратна на току-що доказаната.

Теорема 2. *Нека $f(x)$ е функция с дефиниционна област M и нека x_0 е точка на сгъстяване за M. Ако за всяка редица*

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots,$$

която се състои от числа, принадлежащи на M и различни от x_0, и която клони към x_0, съответната редица от функционални стойности

$$f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n), \ldots$$

е сходяща и клони към l, то границата $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ съществува и е равна на l.

Доказателство. Да вземем произволно положително число ε. Трябва да покажем, че съществува положително число δ, такова, че при $x\in M$ и $x\neq x_0$ от неравенството $|x-x_0|<\delta$ да следва неравенството $|f(x)-l|<\varepsilon$. Да допуснем, че такова число δ не съществува, т. е. че никое положително число не притежава това свойство. Няма да притежава това свойство тогава и числото 1 и следователно ще съществува поне едно число x_1 от M, различно от x_0, което удовлетворява неравенството $|x_1-x_0|<1$, но за което $|f(x_1)-l|>\varepsilon$. Аналогично ще съществува някое x_2 от M, $x_2\neq x_0$, за което имаме едновременно $|x_2-x_0|<\frac{1}{2}$ и $|f(x_2)-l|\geqq\varepsilon$. Изобщо за всяко n (където n е цяло положително число) ще съществува такова x_n от M, удовлетворяващо неравенствата $x_n\neq x_0$ и $|x_n-x_0|<\frac{1}{n}$, за което $|f(x_n)-l|\geqq\varepsilon$. Да разгледаме сега редицата

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$$

От неравенствата $|x_n-x_0|<\frac{1}{n}$ е ясно, че тя клони към x_0. Тъй като освен това имаме $x_n\in M$ и $x_n\neq x_0$ за всяко n, то от условията на теоремата следва, че редицата

$$f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n), \ldots$$

клони към l. Но това е невъзможно, тъй като неравенството $|f(x_n)-l|\geqq\varepsilon$, изпълнено за всички членове на тази редица, противоречи на дефиницията за граница на редица. И така направеното допускане, че не съществува число δ с желаното свойство, е било погрешно. С това теоремата е доказана.

Тези две теореми ни показват в същност, че за понятието граница на функция можем да дадем още и следната

Дефиниция. *Нека $f(x)$ е дефинирана в множеството M и нека x_0 е точка на сгъстяване за M. Ще казваме, че функцията $f(x)$ има граница, равна на l, при x, клонящо към x_0, когато при всеки избор на редицата*

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots,$$

състояща се от точки, принадлежащи на M и различни от x_0, която клони към x_0, съответната редица

$$f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n), \ldots$$

е сходяща и клони към l.

Ясно е от изложеното, че тази нова дефиниция на понятието граница на функция, която ще наричаме дефиниция на Хайне, е еквивалентна на първоначалната дефиниция, която ще наричаме дефиниция на Коши.*

Като използуваме дефиницията на Хайне, лесно можем сега да посочим пример за функция, която не притежава граница. Да разгледаме функцията $f(x)=\sin\frac{1}{x}$ (черт. 10) и да се запитаме има ли тя граница, когато x клони към 0. Да допуснем, че тази граница съществува и че е равна на някакво число l. Тогава, като образуваме редицата

$$\frac{2}{\pi}, \frac{2}{3\pi}, \ldots, \frac{2}{(2n-1)\pi}, \ldots,$$

която очевидно клони към 0, ще заключим, че редицата от съответните функционални стойности

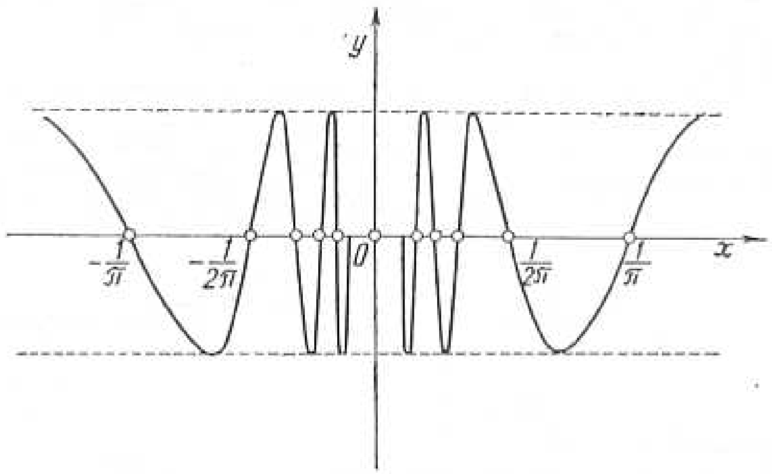
$$\sin\frac{\pi}{2}, \sin\frac{3\pi}{2}, \ldots, \sin\frac{(2n-1)\pi}{2}, \ldots$$

* Коши (1789—1857) и Хайне (1821—1881) са известни математици, имащи големи заслуги за изграждането на съвременните понятия на математическия анализ

е сходяща и клони към l. Но тази редица е в същност редицата

$$1, -1, 1, -1, \ldots,$$

която, както знаем, е разходяща. И така достигнахме до противоречие. Следователно $\lim\limits_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}$ не съществува.



Черт. 10

Дефиницията на Хайне за граница на функция ни позволява лесно да установим верността на следната теорема, която многократно ще използваме по-нататък.

Теорема 3. *Нека са дадени две функции $f(x)$ и $g(x)$, които имат една и съща дефиниционна област M, и нека x_0 е точка на сгъстяване за множеството M. Ако функциите $f(x)$ и $g(x)$ имат граници, когато x клони към x_0, то функциите $f(x)+g(x)$, $f(x)-g(x)$, $f(x)g(x)$ също притежават граница при x, клонящо към x_0. Същото се отнася и за функцията $\frac{f(x)}{g(x)}$ в случая, когато $g(x)\neq 0$ при $x\neq x_0$ и $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)\neq 0$. Освен това, ако $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=l$ и $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=m$, то валидни са следните равенства*

$$\lim_{x\to x_0}[f(x)+g(x)]=l+m,$$

$$\lim_{x\to x_0}[f(x)-g(x)]=l-m,$$

$$\lim_{x\to x_0}[f(x)g(x)]=lm,$$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{l}{m}.$$

Наистина да разгледаме например случая на сумата $f(x)+g(x)$. Да вземем произволна редица

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots,$$

състояща се от точки, принадлежащи на M и различни от x_0, която клони към x_0. Тъй като $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=l$ и $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=m$, то двете редици

$$f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n), \ldots,$$

$$g(x_1), g(x_2), \ldots, g(x_n), \ldots$$

са сходящи и при това първата от тях клони към l, а втората — към m. Тогава редицата

$$f(x_1)+g(x_1), f(x_2)+g(x_2), \ldots, f(x_n)+g(x_n), \ldots$$

ще бъде сходяща и ще клони към $l+m$. А това означава, че

$$\lim_{x\to x_0}[f(x)+g(x)]=l+m.$$

Аналогично се третират и останалите случаи на теоремата.

Също така просто се установяват, като се използува пак дефиницията на Хайне, и следните две теореми:

Теорема 4. *Нека $f(x)$ и $g(x)$ имат една и съща дефиниционна област M и нека x_0 е точка на сгъстяване за M. Ако за всяко x от M е изпълнено неравенството $f(x)\leqq g(x)$ и ако границите $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ съществуват, то*

$$\lim_{x\to x_0} f(x)\leqq \lim_{x\to x_0} g(x).$$

Теорема 5. *Нека трите функции $f(x)$, $g(x)$ и $h(x)$ имат една и съща дефиниционна област M и нека за всяко x от M имаме*

$$f(x)\leqq g(x)\leqq h(x).$$

Ако x_0 е точка на сгъстяване за M и ако границите $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to x_0} h(x)$ съществуват, като при това имаме

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\lim_{x\to x_0} h(x)=l,$$

то съществува и границата $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$, за която също имаме

$$\lim_{x\to x_0} g(x)=l.$$

Нека добавим още една полезна

Теорема 6. *Ако $f(x)$ и $g(x)$ са две функции с обща дефиниционна област M, а x_0 е точка на сгъстяване за M и ако $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$, а функцията $g(x)$ е ограничена в някоя околност на x_0, то $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\,g(x)=0$.*

Д о к а з а т е л с т в о. Преди всичко нека уточним, че когато говорим за ограниченост на функцията $g(x)$ в някоя околност на точката x_0, ние имаме пред вид, разбира се, само ония точки от тая околност, които принадлежат на нейната дефиниционна област. Ето защо условието за ограниченост на $g(x)$ тук означава, че съществува такова положително число δ_1, щото при $x\in M$ и $|x-x_0|<\delta_1$ е изпълнено неравенството $|g(x)|\leq K$, където K е някаква положителна константа. Да вземем едно произволно положително число ε. Тогава числото $\frac{\varepsilon}{K}$ е също положително. Тъй като $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$, то съществува число $\delta_2>0$, такова, че от неравенството $|x-x_0|<\delta_2$ и от условията $x\in M$ и $x\neq x_0$ да следва неравенството $|f(x)|<\frac{\varepsilon}{K}$. Ако δ е по-малкото от числата δ_1 и δ_2, то при $x\in M$, $x\neq x_0$ и $|x-x_0|<\delta$ ще имаме

$$|f(x)g(x)|=|f(x)|.|g(x)|<\frac{\varepsilon}{K}K=\varepsilon.$$

Тъй като ε беше произволно взето положително число, оттук следва, че

$$\lim_{x\to x_0} f(x)g(x)=0.$$

П р и м е р. С помощта на тази теорема лесно се установява например, че $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\frac{x}{x^2+1}=0$. Наистина, от една страна, $\lim\limits_{x\to 0} x=0$, а, от друга страна, за всяко x имаме $|\sin\frac{x}{x^2+1}|\leq 1$.

Ще завършим този параграф със следната

Теорема 7. *Ако $f(x)$ има граница, когато x клони към дадена точка x_0, то функцията $f(x)$ е ограничена в някоя околност $(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$ на точката x_0.*

Д о к а з а т е л с т в о. Нека M е дефиниционната област на $f(x)$ и нека $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=l$. Да вземем числото $\varepsilon=1$. Можем да намерим такова положително число δ, че когато $x\in M$, $x\neq x_0$ и $|x-x_0|<\delta$, да имаме $|f(x)-l|<1$. Но тогава за всички стойности на x от отворения интервал $(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$, които принадлежат на M и са различни от x_0, ще бъдат изпълнени неравенствата

$$l-1<f(x)<l+1,$$

които показват, че функцията $f(x)$ е ограничена в тоя интервал.*

---

* Тук, както и при теорема 6, имаме пред вид само онези точки от интервала, които принадлежат на дефиниционната област на $f(x)$.

Като следствие от тази теорема можем да заключим, че ако една функция не е ограничена в никоя околност на дадена точка x_0, то тя сигурно не притежава граница, когато x клони към x_0. Такова например е поведението на функцията $f(x)=\frac{1}{x}$ около точката $x_0=0$.

Упражнения. 1. Докажете, че при всяко x_0 имаме $\lim\limits_{x\to x_0} x=x_0$. (Оттук ще следва, че за всяко цяло положително число n имаме $\lim\limits_{x\to x_0} x^n=x_0^n$.)

2. Докажете, че ако $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=l$ и ако $l>0$, то $\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt{f(x)}=\sqrt{l}$. Упътване: използувайте, че

$$|\sqrt{f(x)}-\sqrt{l}|=\frac{|f(x)-l|}{\sqrt{f(x)}+\sqrt{l}}\leq\frac{1}{\sqrt{l}}|f(x)-l|.$$

3. Подобно на задача 2 докажете по-общото твърдение: Ако $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=l$ и ако $l>0$, то $\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt[n]{f(x)}=\sqrt[n]{l}$ за всяко цяло положително число n. Упътване: използувайте равенството

$$a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+\ldots+ab^{n-2}+b^{n-1}).$$

4. Намерете границите:

а) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2+2}{2x^2+x+1}$; б) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-5x+6}{x^2-2x}$; в) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^5-1}{x^3-1}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{1-x-x^2}}{x}$; д) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}{x}$; е) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x-\sin x}{\sin^3 x}$.

§ 19. Разширение на понятието граница на функция

С оглед на по-удобни пресмятания се оказва целесъобразно да разширим понятието граница на функция, като в някои случаи говорим за граница и когато тя не съществува в смисъл на дадената в предишния параграф дефиниция.

Ще започнем със следната

Дефиниция. *Нека е дадена функцията $f(x)$ с дефиниционна област M и нека x_0 е точка на сгъстяване за M. Казваме, че функцията $f(x)$ к л о н и к ъ м б е з к р а й н о с т при x, клонящо към x_0, и записваме това така:*

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\infty,$$

ако при всеки избор на положителното число A може да се намери такова положително число δ, че при $x\in M$ от неравенствата $x\neq x_0$ и $|x-x_0|<\delta$ да следва неравенството $f(x)>A$.

Тъй като числото A може да се вземе произволно голямо, тази дефиниция изисква, накратко казано, стойностите на функцията $f(x)$ да могат да станат колкото пожелаем големи, стига да вземаме такива стойности x, които са достатъчно близки до точката x_0.

Аналогично: *ще казваме, че $f(x)$ к л о н и к ъ м м и н у с б е з к р а й н о с т при x, клонящо към x_0 (където x_0 е точка на сгъстяване за дефиниционната област на $f(x)$), и ще записваме това така:*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty,$$

ако за всяко отрицателно число B съществува такова число $\delta > 0$, че при $x \in M$, $x \neq x_0$ и $|x - x_0| < \delta$ да имаме $f(x) < B$.

П р и м е р 1. Да установим, че $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = \infty$. За целта да изберем произволно положително число A. Ако вземем след това $\delta = \frac{1}{\sqrt{A}}$, то при $|x| < \delta$, т. е. при $|x| < \frac{1}{\sqrt{A}}$, ще имаме $x^2 < \frac{1}{A}$, откъдето $\frac{1}{x^2} > A$.

П р и м е р 2. Да покажем, че $\lim\limits_{x \to 0} \log_a x = -\infty$ при $a > 1$. Ако B е произволно отрицателно число, да си образуваме числото $\delta = a^B$. Както знаем, функцията $\log_a x$ (когато $a > 1$) е дефинирана и строго растяща в интервала $(0, \infty)$. Тогава от неравенството $|x| < \delta$, което в случая (понеже x трябва да бъде положително) се превръща в неравенствата $0 < x < \delta$, следва неравенството $\log_a x < \log_a a^B = B$.

Лесно се вижда верността на следната теорема, чието доказателство може да бъде предоставено на читателя.

Теорема 1. *Нека функциите $f(x)$ и $g(x)$ имат една и съща дефиниционна област M и нека x_0 е точка на сгъстяване за M. Тогава:*

а) *ако $f(x)$ е о г р а н и ч е н а в някоя околност на точката x_0, то*

$$\text{при} \lim_{x \to x_0} g(x) = \infty \quad \text{имаме} \lim_{x \to x_0} [f(x) + g(x)] = \infty;$$

$$\text{при} \lim_{x \to x_0} g(x) = -\infty \quad \text{имаме} \lim_{x \to x_0} [f(x) + g(x)] = -\infty;$$

б) *ако* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$ *и* $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \infty$, *то*

$$\text{при } a > 0 \text{ имаме} \lim_{x \to x_0} f(x) g(x) = \infty,$$

$$\text{при } a < 0 \text{ имаме} \lim_{x \to x_0} f(x) g(x) = -\infty;$$

в) *ако* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \infty$, *то*

$$\lim_{x \to x_0} [f(x) + g(x)] = \infty \quad \text{и} \quad \lim_{x \to x_0} f(x) g(x) = \infty.$$

П р и м е р 3. Имаме $\lim\limits_{x \to 0} (\cos x + \ln x) = -\infty$. Това се вижда от равенствата $\lim\limits_{x \to 0} \cos x = 1$ и $\lim\limits_{x \to 0} \ln x = -\infty$.

П р и м е р 4. Имаме $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\cos x}{x^2} = \infty$. Наистина знаем, че $\lim\limits_{x \to 0} \cos x = 1$ и $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = \infty$.

До друго разширение на понятието граница на функция достигаме с помощта на следната

Дефиниция. *Нека функцията $f(x)$ е дефинирана в някой интервал от вида (a, ∞). Казваме, че $f(x)$ клони към числото l, к о г а т о x к л о н и к ъ м б е з к р а й н о с т, и записваме това така:*

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = l,$$

ако при всеки избор на положителното число ε може да се намери такова число K, че за $x > K$ да е изпълнено неравенството $|f(x) - l| < \varepsilon$.

Ясно е, че смисълът на тази дефиниция е такъв: стойностите на функцията $f(x)$ ще станат колкото пожелаем близки до числото l (тъй като ε можем да вземем колкото поискаме малко), стига да вземем стойностите на аргумента x достатъчно големи — колко именно големи, това се определя от числото K (което число естествено ще зависи от избора на ε). Другояче казано, стойностите на $f(x)$ се приближават все повече към числото l, когато x става все по-голямо, т. е. когато x „клони към безкрайност".

Аналогично: *казваме, че функцията $f(x)$, дефинирана в някой интервал от вида $(-\infty, a)$, клони към l при x, к л о н я щ о к ъ м м и н у с б е з к р а й н о с т, и записваме това така:*

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = l,$$

ако за всяко $\varepsilon > 0$ съществува такова число N, че при $x < N$ да имаме $|f(x) - l| < \varepsilon$.

П р и м е р 5. Ще покажем, че $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$. Нека ε е произволно положително число и нека $K = \frac{1}{\varepsilon}$. Тогава при $x > K$, т. е. при $x > \frac{1}{\varepsilon}$, ще имаме $\frac{1}{x} < \varepsilon$, което може да се напише още така: $\left|\frac{1}{x} - 0\right| < \varepsilon$.

П р и м е р 6. Ако $a > 1$, то $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = 0$. Наистина нека $\varepsilon > 0$ и нека си образуваме числото $N = \log_a \varepsilon$. Тогава при $x < N$ поради монотонността на функцията a^x ще имаме $0 < a^x < a^N = a^{\log_a \varepsilon} = \varepsilon$. Следователно при $x < N$ е изпълнено неравенството $|a^x - 0| < \varepsilon$.

П р и м е р 7. Да покажем, че $\lim\limits_{x \to \infty} \operatorname{arc\,tg} x = \frac{\pi}{2}$. Нека $\varepsilon > 0$ и нека си образуваме числото $K = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon\right)$. Ако $x > K$, то поради това, че функцията $\operatorname{arc\,tg} x$ е растяща, ще имаме $\operatorname{arc\,tg} x > \operatorname{arc\,tg} K = \operatorname{arc\,tg}\left[\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon\right)\right] =$

$=\frac{\pi}{2}-\varepsilon$. От друга страна, имаме и $\operatorname{arc\,tg} x<\frac{\pi}{2}$. Следователно $0<\frac{\pi}{2}-\operatorname{arc\,tg} x<\varepsilon$ при $x>K$.

По подобен начин се установява, че $\lim\limits_{x\to-\infty}\operatorname{arc\,tg} x=-\frac{\pi}{2}$.

Естествена се явява по-нататък и следната

Дефиниция. *Нека функцията $f(x)$ е дефинирана в интервал от вида (a, ∞). Ще казваме, че $f(x)$ клони към безкрайност при x, клонящо към безкрайност, и ще записваме това така:*

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty,$$

ако за всяко положително число A може да се намери такова число K, че от неравенството $x>K$ да следва неравенството $f(x)>A$.

Аналогично се дефинират равенствата

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=-\infty,\quad \lim_{x\to-\infty} f(x)=\infty,\quad \lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty.$$

Пример 8. Ако $a>1$, то $\lim\limits_{x\to\infty} a^x=\infty$. Действително да вземем произволно положително число A и да си образуваме след това числото $K=\log_a A$. Поради монотонността на функцията a^x от неравенството $x>K$ ще следва $a^x>a^K=a^{\log_a A}=A$.

Пример 9. Ако $\alpha>0$, то $\lim\limits_{x\to\infty} x^\alpha=\infty$. И наистина нека A е произволно положително число и нека $K=A^{\frac{1}{\alpha}}$. Както знаем, функцията x^α е строго растяща в интервала $(0, \infty)$, когато $\alpha>0$. Ето защо при $x>K$ ще имаме $x^\alpha>K^\alpha=(A^{\frac{1}{\alpha}})^\alpha=A$.

Пример 10. Ако $a>1$, то $\lim\limits_{x\to\infty}\log_a x=\infty$. За да се убедим в това, да вземем произволно положително число A и да си образуваме числото $K=a^A$. Поради монотонността на функцията $\log_a x$, когато е изпълнено неравенството $x>K$, ще бъде изпълнено и неравенството $\log_a x>\log_a K=\log_a a^A=A$.

Важно е да отбележим, че теорема 3 от предния параграф, отнасяща се до границите на сума, разлика, произведение и частно на две функции, остава в сила, когато границите, за които се говори в нея, вместо при x, клонящо към една точка x_0, се вземат при x, клонящо към ∞ (или към $-\infty$). Същото се отнася и до следващата теорема 4, а теорема 5 не само остава валидна, когато границите в нея се вземат при $x\to\infty$ (или $x\to-\infty$), но също и когато самите тези граници са равни на ∞ или на $-\infty$. Най-сетне теореми 6 и 7, както и теорема 1 от настоящия параграф, запазват своята валидност при $x\to\infty$ и $x\to-\infty$, след като в тяхната формулировка изискването за ограниченост на $f(x)$ в някоя околност на точката x_0 се замени с изискването $f(x)$ да бъде ограничена в някой интервал от вида (p, ∞) за случая $x\to\infty$, съответно от вида $(-\infty, q)$ за случая $x\to-\infty$.

Всички тези забележки, както и очевидните равенства $\lim\limits_{x\to\infty} C=\lim\limits_{x\to-\infty} C=C$, където C е една константа, разширяват възможностите за използуване на споменатите теореми при решаването на конкретни задачи.

Пример 11. Да се намери границата $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2-3x+1}{3x^2+5}$. Като вземем пред вид теорема 3 от § 18 и пример 5 от този параграф, получаваме

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-3x+1}{3x^2+5}=\lim_{x\to\infty}\frac{2-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}{3+\frac{5}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2-3\cdot\frac{1}{x}+\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x}}{3+5\cdot\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x}}=\frac{2}{3}.$$

Пример 12. Покажете, че $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=0$, като използувате теорема 6 от § 18 (отнесена за случая $x\to\infty$) и пример 5 от този параграф.

Пример 13. Нека $f(x)>0$ и нека $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$. Покажете, че $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{1}{f(x)}=\infty$. Покажете също, че ако $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0$, то $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{f(x)}=\infty$.

Пример 14. Покажете, че ако $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$, то $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{1}{f(x)}=0$ и също така, че ако $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$, то $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{f(x)}=0$.

Понякога се интересуваме какво е поведението на дадена функция $f(x)$, когато x клони към дадена точка x_0, оставайки обаче винаги по-голямо от x_0, или, както казваме още, когато клони към x_0 отдясно. С оглед на това даваме следната

Дефиниция. *Казваме, че $f(x)$ клони към числото l, когато x клони отдясно към x_0, и записваме това така:*

$$\lim_{x\to x_0,\ x>x_0} f(x)=l,$$

ако за всяко $\varepsilon>0$ съществува такова $\delta>0$, че от неравенствата $x_0<x<x_0+\delta$ да следва неравенството $|f(x)-l|<\varepsilon$.

Аналогично: *казваме, че $f(x)$ клони към l при x, клонящо отляво към x_0, и записваме това така:*

$$\lim_{x\to x_0,\ x<x_0} f(x)=l,$$

ако за всяко $\varepsilon>0$ съществува такова $\delta>0$, че при $x_0-\delta<x<x_0$ да имаме $|f(x)-l|<\varepsilon$.

По подобен начин се въвеждат и равенствата

$$\lim_{x\to x_0,\ x>x_0} f(x)=\infty,\quad \lim_{x\to x_0,\ x>x_0} f(x)=-\infty,\quad \lim_{x\to x_0,\ x<x_0} f(x)=\infty,\quad \lim_{x\to x_0,\ x<x_0} f(x)=-\infty.$$

Пример 15. Да покажем, че $\lim\limits_{x\to 0,\ x>0}\frac{1}{x}=\infty$. Наистина нека A е произволно положително число. Да вземем $\delta=\frac{1}{A}$. Ясно е, че при $0<x<\delta$ т. е. при $0<x<\frac{1}{A}$, ще имаме $\frac{1}{x}>A$, с което желаното равенство е доказано.

По подобен начин се установява, че $\lim\limits_{x\to 0,\ x<0}\frac{1}{x}=-\infty$.

Ясно е, че ако за някоя функция $f(x)$ съществува границата $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, то ще съществуват и границите $\lim\limits_{x\to x_0,\ x>x_0} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to x_0,\ x<x_0} f(x)$, като при това ще имаме

$$\lim_{x\to x_0,\ x>x_0} f(x)=\lim_{x\to x_0,\ x<x_0} f(x)=\lim_{x\to x_0} f(x). \tag{1}$$

Обратно, ако двете граници $\lim\limits_{x\to x_0,\ x>x_0} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to x_0,\ x<x_0} f(x)$ съществуват и са равни помежду си, то оттук следва съществуването и на границата $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, като, разбира се, равенството (1) ще бъде също изпълнено.

Възможно е обаче границите $\lim\limits_{x\to x_0,\ x>x_0} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to x_0,\ x<x_0} f(x)$ да съществуват, без да бъдат равни помежду си. В такъв случай границата $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ не съществува. Такъв е например случаят с функцията

$$f(x)=x+\frac{|x|}{x},$$

дефинирана при $x\neq 0$, за която, както лесно се вижда, имаме

$$\lim_{x\to 0,\ x<0} f(x)=-1,\quad \lim_{x\to 0,\ x>0} f(x)=1.$$

Като се върнем отново към доказаните в предния параграф теореми за граници на функции, ще отбележим, че след съответни естествени изменения във формулировките, които читателят сам може да извърши, те остават валидни, когато навсякъде в тях вместо x, клонящо към x_0, вземем x, клонящо към x_0 отдясно (или пък x, клонящо към x_0 отляво).

В края на този параграф ще се спрем на няколко теореми, отнасящи се до монотонни функции, които напомнят (както по своята формулировка, така и по самото си доказателство) теоремата от § 4 за монотонните редици.

Теорема 2. *Ако функцията $f(x)$ е растяща и ограничена отгоре в отворения интервал (a, b), то тя притежава граница, когато x клони*

отляво към b, и тази граница е равна на нейната точна горна граница в интервала (a, b).

Доказателство. Нека L е точната горна граница на $f(x)$ в интервала (a, b). Да си вземем произволно положително число ε. Числото $L-\varepsilon$ е по-малко от най-малката горна граница и вече не е горна граница на функцията $f(x)$. Ще съществува следователно поне една точка x_1 от интервала (a, b), за която $f(x_1)>L-\varepsilon$. Нека сега $\delta=b-x_1$. Ясно е, че $\delta>0$. От друга страна, от монотонността на $f(x)$ е ясно, че при $x_1<x<b$ ще имаме $f(x_1)\leq f(x)$. И така, когато x удовлетворява неравенствата $x_1<x<b$ или, което е все едно, неравенствата $b-\delta<x<b$, ще бъдат изпълнени неравенствата

$$L-\varepsilon<f(x_1)\leq f(x)\leq L<L+\varepsilon,$$

откъдето

$$L-\varepsilon<f(x)<L+\varepsilon,$$

или $|f(x)-L|<\varepsilon$. Следователно $\lim\limits_{x\to b,\ x<b} f(x)=L$.

По подобен начин се доказва и следната теорема:

Ако функцията $f(x)$ е растяща и ограничена отдолу в отворения интервал (a, b), то тя има граница при x, клонящо отдясно към a, и тази граница е равна на нейната точна долна граница в дадения интервал.

По-нататък, като разсъждаваме аналогично, можем да установим и следните две теореми:

Ако функцията $f(x)$ е растяща и ограничена отгоре в някой интервал от вида (a, ∞) и ако L е нейната точна горна граница, то границата $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ съществува и е равна на L.

Ако функцията $f(x)$ е растяща и ограничена отдолу в някой интервал от вида $(-\infty, a)$ и ако l е нейната точна долна граница, то границата $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ съществува и е равна на l.

Читателят лесно ще формулира сам теореми, аналогични на последните четири, но отнасящи се до намаляваща функция $f(x)$.

Упражнения. Намерете границите:

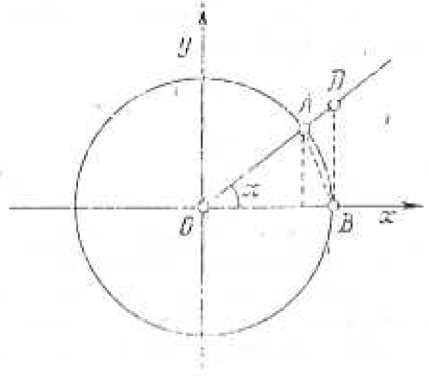
1. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x}{(x-2)^2}$.
2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x+3}{x^2}$.
3. $\lim\limits_{x\to 1,\ x<1}\frac{x^2}{x^2-1}$.
4. $\lim\limits_{x\to 1,\ x>1}\frac{x^2}{x^2-1}$.
5. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.
6. $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.
7. $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{x}$.
8. $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})$.
9. $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1})$.
10. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x+1}{x^2+x+1}$.
11. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3}{x^2+3x+2}$.
12. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+5}{2x^2-x+2}$.

13. Като използувате понятието редица, клоняща към $+\infty$ (или към $-\infty$), дайте дефиниции за равенствата (1)—(6) в духа на дефиницията на Хайне от § 18 за равенството $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=l$. Във всеки от разглежданите случаи обмислете какви изменения във формулировките и доказателствата на теореми 1 и 2 от § 18 са необходими, за да установите, че всяка от дадените от вас дефиниции е еквивалентна на съответната дефиниция от настоящия параграф.

§ 20. Две забележителни граници

В този параграф ще се занимаем с намирането на две граници, играещи важна роля в голям брой задачи от анализа.

Най-напред ще покажем, че функцията $f(x)=\frac{\sin x}{x}$, дефинирана при $x\neq 0$, има граница, когато x клони към 0, и тази граница е числото 1



Черт. 11

За целта нека предположим на първо време, че $0<x<\frac{\pi}{2}$, и нека разгледаме черт. 11, където $\measuredangle AOB=x$. Ясно е, че

лицето на $\triangle OAB<$лицето на сект. $OAB<$лицето на $\triangle OBD$.

Ако означим с r радиуса на окръжността на черт. 11, ще имаме

$$\frac{1}{2}r.r\sin x<\frac{1}{2}r^2x<\frac{1}{2}r.r\,\mathrm{tg}\,x,$$

откъдето получаваме последователно

$$\sin x<x<\mathrm{tg}\,x,$$

$$1<\frac{x}{\sin x}<\frac{1}{\cos x}$$

и най-сетне

$$1>\frac{\sin x}{x}>\cos x. \tag{1}$$

Неравенствата (1) ние получихме при $0<x<\frac{\pi}{2}$, но тъй като $\sin(-x)=-\sin x$, а $\cos(-x)=\cos x$, то веднага се вижда, че те ще бъдат изпълнени и при $-\frac{\pi}{2}<x<0$. И така неравенствата (1) са валидни за всяко $x\neq 0$, което принадлежи на интервала $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$. Това е достатъчно, за да извършим нашите по-нататъшни разсъждения. Наистина, както знаем в § 18, имаме $\lim\limits_{x\to 0}\cos x=1$. Остава да използуваме теорема 5 от § 18, за да заключим, че

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

А сега ще потърсим границата на функцията $f(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ при x, клонящо към ∞, и ще покажем, че тя съществува и е равна на числото e. Това впрочем е за очакване, тъй като това твърдение е естествено обобщение на известния ни факт, че редицата с общ член $a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ е сходяща и клони към e.

Нека вземем едно произволно положително число ε и нека покажем, че съществува такова положително число A, че при $x>A$ да имаме

$$\left|\left(1+\frac{1}{x}\right)^x-e\right|<\varepsilon.$$

Преди всичко, като вземем пред вид, че редиците $b_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ и $c_n=\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n$ са сходящи и клонят и двете към e, можем да намерим такова положително число ν, че при $n>\nu$ да са изпълнени неравенствата

$$\left|\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}-e\right|<\varepsilon \quad \text{и} \quad \left|\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n-e\right|<\varepsilon$$

или, което е все същото, неравенствата

$$e-\varepsilon<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}<e+\varepsilon, \qquad e-\varepsilon<\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n<e+\varepsilon. \tag{2}$$

Нека сега $A=\nu+1$ и нека x е някое число, удовлетворяващо неравенството $x>A$. Да изберем след това цялото положително число n по такъв начин, че да имаме $n\leqq x<n+1$. (Ясно е, че това винаги е възможно.) Тогава ще получим последователно следните неравенства:

$$\frac{1}{n+1}<\frac{1}{x}\leqq\frac{1}{n},$$

$$1+\frac{1}{n+1}<1+\frac{1}{x}\leqq 1+\frac{1}{n},$$

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n<\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\leqq\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

От друга страна, тъй като $x>A$, то $n+1>\nu+1$, или $n>\nu$. Като вземем пред вид неравенствата (2), изпълнени за всяко $x>A$, ще получим

$$e-\varepsilon<\left(1+\frac{1}{x}\right)^x<e+\varepsilon.$$

И така за всяко $x>A$ имаме $\left|\left(1+\frac{1}{x}\right)^x-e\right|<\varepsilon$. С това доказахме, че

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e.$$

Не е трудно да се уверим, че имаме също $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$. И наистина, ако положим $x=-t$, получаваме

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\lim_{t\to\infty}\left(1-\frac{1}{t}\right)^{-t}=\lim_{t\to\infty}\frac{1}{\left(1-\frac{1}{t}\right)^t}$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{1}{\left(\frac{t-1}{t}\right)^t}=\lim_{t\to\infty}\left(\frac{t}{t-1}\right)^t=\lim_{t\to\infty}\left(\frac{t-1+1}{t-1}\right)^t$$

$$=\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t-1}\right)^t=\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t-1}\right)^{t-1}\left(1+\frac{1}{t-1}\right)=e.$$

Упражнения. Намерете границите:

1. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin 2x}{x}$,
2. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin 3x}{\operatorname{tg} x}$,
3. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin^2 x}{x}$,
4. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin 2x}{\sin 5x}$,
5. $\lim\limits_{x\to0} x\operatorname{cotg} x$,
6. $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}$,
7. $\lim\limits_{x\to\infty} x\sin\frac{1}{x}$,
8. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x-\cos x}{x-\frac{\pi}{4}}$,
9. $\lim\limits_{x\to0,\,x>0}\operatorname{arc\,tg}\frac{x^2+1}{x^3}$,
10. $\lim\limits_{x\to2}\operatorname{arc\,tg}\frac{x-3}{(x-2)^2}$,
11. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{k}{x}\right)^x$ (k — цяло число),
12. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x+1}\right)^x$,
13. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x^2}\right)^x$,
14. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{x^2}$.

ГЛАВА IV

НЕПРЕКЪСНАТОСТ

Понятието непрекъснатост на функция е едно от най-характерните понятия на математическия анализ. Макар че до неговата съвременна дефиниция се е дошло едва след изминаването на дълъг път, в една или друга форма то винаги е играло важна роля в математиката. Непрекъснатите функции притежават редица свойства, които ги правят твърде удобни за работа.

§ 21. Непрекъснати функции

Въвеждайки понятието граница на функция и дефинирайки символа $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, ние предполагахме, че x_0 е точка на сгъстяване за дефиниционната област M на $f(x)$, но не изисквахме непременно тази точка да принадлежи на M. Нека сега спрем вниманието си именно на случая, когато точката x_0 е точка от множеството M. В този случай съществува функционалната стойност $f(x_0)$ и естествено възниква въпросът, дали тази стойност съвпада със стойността на $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ при условие, че тази граница съществува. Когато тези две стойности съвпадат (а както знаем от § 18, това не винаги е така), казваме, че функцията $f(x)$ е непрекъсната в точката x_0. Така например доказаното в § 18 равенство $\lim\limits_{x\to0}\cos x=1$ изразява непрекъснатостта на функцията $\cos x$ в точката $x_0=0$.

И тъй ние въвеждаме следната

Дефиниция. *Нека $f(x)$ е функция с дефиниционна област M и нека x_0 е точка от M. Ще казваме, че функцията $f(x)$ е непрекъсната в точката x_0, ако тя притежава граница при x, клонящо към x_0, и ако при това е изпълнено равенството*

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0).$$

Разбира се, тази дефиниция има смисъл само когато точката x_0, съдържайки се в M, се явява същевременно и точка на сгъстяване за множеството M (в противен случай няма да можем да говорим за гранината $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$). Възможно е обаче (макар че ние рядко ще срещаме подобни случаи) една точка да принадлежи на дадено множество M, без да бъде негова точка на сгъстяване. Такава точка се нарича **изолирана точка** на множеството M.

Ако дефиниционната област M на една функция $f(x)$ притежава изолирани точки, приема се, че $f(x)$ е непрекъсната във всяка от тези точки. Допълнената по този начин дефиниция за непрекъснатост ни позволява вече да поставим въпроса за непрекъснатостта на дадена функция $f(x)$ във всяка точка от нейната дефиниционна област.

Като си спомним дефинициите на Коши и на Хайне за понятието граница на функция, лесно съобразяваме, че дефиницията за непрекъснатост на една функция $f(x)$ в дадена точка x_0 може да се изкаже още и по следните два начина:

Функцията $f(x)$ с дефиниционна област M е непрекъсната в точката x_0 от M, ако за всяко положително число ε съществува такова положително число δ, че при $x \in M$ от неравенството $|x-x_0|<\delta$ да следва неравенството $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$ (**дефиниция на Коши**).

Или: *Функцията $f(x)$, дефинирана в областта M, е непрекъсната в точката x_0 от M, ако за всяка редица от числа*

$$x_1, x_2, \dots, x_n, \dots,$$

принадлежащи на M, която клони към x_0, съответната редица от функционални стойности

$$f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n), \dots$$

е сходяща и клони към $f(x_0)$ (**дефиниция на Хайне**).

Последните две формулировки на дефиницията на понятието непрекъснатост имат това предимство, че обхващат, както лесно се вижда, не само случая, когато x_0 е точка на сгъстяване, но и случая, когато тя е изолирана точка за множеството M.

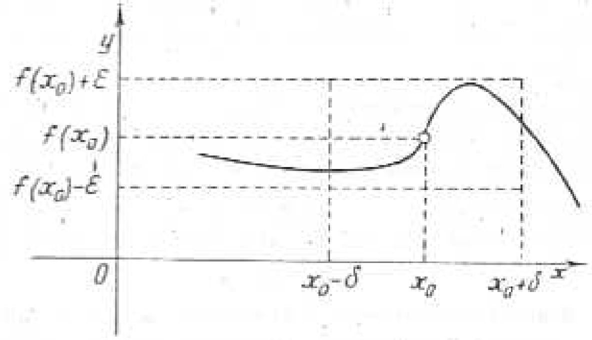
Дефиницията на Коши позволява да се даде просто геометрично тълкуване на понятието непрекъснатост. Наистина нека $f(x)$ е непрекъсната в точката x_0 и нека ε е едно положително число. Тогава съгласно тази дефиниция неравенството $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$, което е еквивалентно с неравенствата

$$f(x_0)-\varepsilon<f(x)<f(x_0)+\varepsilon,$$

е изпълнено за всички точки x, удовлетворяващи неравенството $|x-x_0|<\delta$, т. е. за всички точки x от дефиниционната област на $f(x)$, които принадлежат на отворения интервал $(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$. Геометрически това означава, че онази част от графиката на функцията $f(x)$, която съответствува на този интервал, се намира в хоризонталната ивица, заключена между правите с уравнения $y=f(x_0)-\varepsilon$ и $y=f(x_0)+\varepsilon$ (черт. 12). Тази ивица е толкова по-тясна, колкото по-малко е числото ε. Числото δ, определящо интервала $(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$, зависи, разбира се от ε — когато ε е твърде малко, δ също може да бъде много малко.

Когато една функция $f(x)$ не е непрекъсната в някоя точка x_0 от своята дефиниционна област, казваме, че тя **се прекъсва** или че е **прекъсната** в тази точка.

Ясно е, че една функция $f(x)$ с дефиниционна област M ще бъде прекъсната в дадена точка x_0 от M, когато x_0 е точка на сгъстяване за M



Черт. 12

и когато границата $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ или не съществува, или пък съществува, но е различна от $f(x_0)$.

Както вече отбелязахме, в § 18 бе показано, че функцията $f(x)=\cos x$ е непрекъсната в точката $x_0=0$. Ако искаме да посочим пример за функция, която е прекъсната в някоя точка от своята дефиниционна област, достатъчно ще бъде да си припомним функцията

$$f(x)=\begin{cases} x & \text{при } x\neq 0 \\ 1 & \text{при } x=0, \end{cases}$$

която вече разгледахме и за която имаме $\lim\limits_{x\to 0} f(x)\neq f(0)$ — тя е прекъсната в точката $x_0=0$.

Понякога се налага да решим следната задача: Дадена е функцията $f(x)$ с дефиниционна област M и точка x_0, непринадлежаща на M, но явяваща се точка на сгъстяване за M. Искаме да дефинираме функцията $f(x)$ допълнително в точката x_0, и то по такъв начин, че да получим функция, непрекъсната в тази точка. Ясно е, че това е възможно само когато съществува границата $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ и че в такъв случай нашата цел ще бъде постигната, ако дефинираме $f(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$.

Така например, ако функцията $f(x)=x\sin\frac{1}{x}$, дефинирана само при $x\neq 0$, дефинираме допълнително при $x_0=0$ с равенството $f(0)=0$, ще получим функция, дефинирана вече за всяко x, която при това е непрекъсната в точката $x_0=0$. Това е така, защото, както знаем (вж. § 18), $\lim\limits_{x\to 0} x \sin\frac{1}{x}=0$.

Ако обаче разгледаме функцията $f(x)=\sin\frac{1}{x}$, дефинирана също така само при $x\neq 0$, то каквато и стойност да ѝ припишем за точката $x_0=0$, тя ще бъде прекъсната в тази точка, тъй като границата $\lim\limits_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$, както видяхме, не съществува.

Една функция $f(x)$ се нарича **непрекъсната отляво** в дадена точка x_0 от своята дефиниционна област, ако тя притежава граница при x, клонящо отляво към точката x_0, и ако $\lim\limits_{x\to x_0,\ x<x_0} f(x)=f(x_0)$.

Аналогично $f(x)$ се нарича **непрекъсната отдясно** в точката x_0, ако притежава граница, когато x клони отдясно към x_0, и ако $\lim\limits_{x\to 0,\ x>x_0} f(x)=f(x_0)$.

Ясно е, че ако една функция $f(x)$ е непрекъсната в дадена точка x_0, то тя е непрекъсната и отляво, и отдясно в тази точка и че, обратно, ако тя е непрекъсната както отляво, така и отдясно в точката x_0, то тя е непрекъсната в нея.

Една функция може обаче да бъде непрекъсната и само отляво или пък само отдясно в някоя точка. Така например, като вземем пред вид това, което знаем от § 18 за функцията $x+\frac{|x|}{x}$, заключаваме, че функцията

$$f(x)=\begin{cases} x+\frac{|x|}{x} & \text{при } x\neq 0 \\ -1 & \text{при } x=0 \end{cases}$$

е непрекъсната отляво, но не и отдясно в точката $x_0=0$, а функцията

$$g(x)=\begin{cases} x+\frac{|x|}{x} & \text{при } x\neq 0 \\ 1 & \text{при } x=0 \end{cases}$$

е непрекъсната само отдясно, но не и отляво при $x_0=0$. Функцията пък

$$h(x)=\begin{cases} x+\frac{|x|}{x} & \text{при } x\neq 0 \\ 0 & \text{при } x=0 \end{cases}$$

не е непрекъсната нито отляво, нито отдясно в точката $x_0=0$. И трит тези функции са прекъснати при $x_0=0$.

§ 22. Основни свойства на непрекъснатите функции

Едно просто, но твърде често използувано свойство на непрекъснатите функции се дава със следната

Теорема 1. *Ако $f(x)$ е непрекъсната в точката x_0 и ако $f(x_0)\neq 0$, то съществува такава околност $(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$ на тази точка, в която функцията $f(x)$ не си мени знака.*

Доказателство. Нека $f(x_0)>0$. Да си образуваме положително число $\varepsilon=\frac{f(x_0)}{2}$. От непрекъснатостта на функцията $f(x)$ в точката x_0 следва, че можем да намерим такова число $\delta>0$, че при $|x-x_0|<\delta$ да имаме

$$|f(x)-f(x_0)|<\frac{f(x_0)}{2}.$$

От последното неравенство получаваме

$$-\frac{f(x_0)}{2}<f(x)-f(x_0),$$

откъдето

$$f(x)>\frac{f(x_0)}{2}.$$

Следователно при $x\in(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$ имаме $f(x)>0$. И така функцията $f(x)$ остава положителна за всички стойности на x от интервала $(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$.

Аналогично се разсъждава в случая, когато $f(x_0)<0$.

Като вземем пред вид дефиницията на понятието непрекъснатост на функция, от една страна, и като си спомним, от друга страна, теорема 3 от § 18, веднага получаваме следната

Теорема 2. *Ако функциите $f(x)$ и $g(x)$ са непрекъснати в дадена точка x_0, то функциите $f(x)+g(x)$, $f(x)-g(x)$, $f(x)g(x)$, а в случая, когато $g(x_0)\neq 0$, и функцията $\frac{f(x)}{g(x)}$ са също така непрекъснати в тази точка.*

Накратко казано, тази теорема твърди, че сумата, разликата, произведението и частното на две непрекъснати функции са също непрекъснати функции.

Следващото свойство на непрекъснатите функции, на което ще се спрем, се отнася до т. нар. съставни функции. Преди всичко необходимо е да изясним понятието съставна функция.

Нека $F(x)$ е една функция с дефиниционна област M, а $f(t)$ е някоя друга функция с дефиниционна област N. Ако всички функционални стойности на функцията $f(t)$ са числа, принадлежащи на множеството M, то за всяко t от N можем да си образуваме $F[f(t)]$. Така получаваме очевидно една функция на t с дефиниционна област N. Тя се нарича **съставна функция** или още **функция от функция**.

Така например, ако $F(x)=\sin x$ за всяко x, а $f(t)=\frac{1}{t}$ при $t\neq 0$, то $F[f(t)]=\sin\frac{1}{t}$ при $t\neq 0$. Ако $F(x)=\sqrt{x}$ при $x\in[0, \infty)$, а $f(t)=t^2$ при $t\in(-\infty, \infty)$, то $F[f(t)]=\sqrt{t^2}=|t|$ за всяко t.

Относно съставните функции е в сила следната

Теорема 3. *Ако функцията $F(x)$ е непрекъсната в точка x_0, а функцията $f(t)$ е непрекъсната в точка t_0 и ако $f(t_0)=x_0$, то съставната функция $\varphi(t)=F[f(t)]$ е непрекъсната в точката t_0.*

Доказателство. Нека разгледаме произволна редица от точки

$$t_1, t_2, \ldots, t_n, \ldots, \tag{1}$$

принадлежащи на дефиниционната област на $f(t)$, която клони към t_0. Поради непрекъснатостта на функцията $f(t)$ в точката t_0, редицата от съответните функционални стойности

$$f(t_1), f(t_2), \ldots, f(t_n), \ldots \tag{2}$$

ще бъде сходяща и ще клони към $f(t_0)$. Ние можем обаче да разгледаме редицата (2) като съставена от числа, принадлежащи на дефиниционната област на функцията $F(x)$. При това тази редица клони към x_0, тъй като по условие имаме $f(t_0)=x_0$. Тогава поради непрекъснатостта на функцията $F(x)$ в точката x_0 редицата

$$F[f(t_1)],\ F[f(t_2)], \ldots, F[f(t_n)], \ldots \tag{3}$$

ще бъде сходяща и ще клони към $F(x_0)$. Редицата (3) обаче може да се напише още така:

$$\varphi(t_1),\ \varphi(t_2), \ldots, \varphi(t_n), \ldots$$

Нейната граница при това е равна на $\varphi(t_0)$, понеже $\varphi(t_0)=F[f(t_0)]=F(x_0)$. Това именно означава съгласно дефиницията на Хайне, че съставната функция $\varphi(t)$ е непрекъсната в точката t_0.

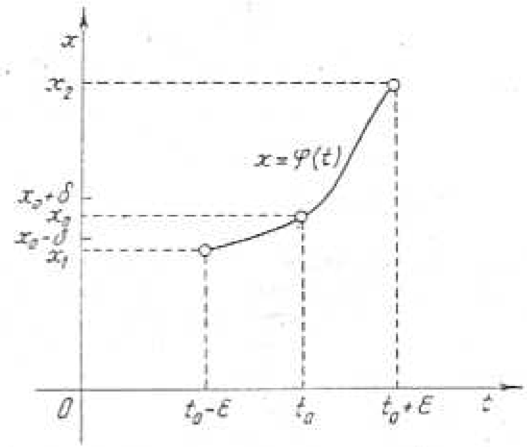
Накратко доказаната теорема се изказва така: *Непрекъсната функция от непрекъсната функция е също непрекъсната функция.*

Следващата теорема третира въпроса за непрекъснатостта на обратните функции.

Теорема 4. *Ако функцията $f(t)$, дефинирана в един интервал D, е строго растяща (или пък строго намаляваща) в този интервал, то нейната обратна функция $\varphi(x)$ е непрекъсната във всички точки от своята дефиниционна област.*

Доказателство. Нека $f(t)$ е строго растяща функция. (Случаят, когато $f(t)$ е строго намаляваща, е аналогичен.) Да напомним, че всяка строго растяща функция е обратима и че нейната обратна функ-

ция $\varphi(x)$ е също строго растяща. Да означим с N множеството от функционалните стойности на функцията $f(t)$, което се явява дефиниционна област на функцията $\varphi(x)$. Нека x_0 е произволна точка от N и нека $\varphi(x_0)=t_0$. Ще разгледаме случая, когато точката t_0 е вътрешна за интервала D. (Случаят, когато t_0 е крайна точка за този интервал, се разглежда



Черт. 13

по същия начин с несъществени изменения.) Да си вземем произволно положително число ε. Можем да считаме, че ε е толкова малко, че точките $t_0-\varepsilon$ и $t_0+\varepsilon$ принадлежат също на интервала D. Нека $f(t_0-\varepsilon)=x_1$ и $f(t_0+\varepsilon)=x_2$. Ясно е, че $x_1<x_0<x_2$. Да изберем след това едно положително число δ, толкова малко, че интервалът $(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$ да се съдържа изцяло в интервала $(x_1,\ x_2)$ (черт. 13). Ако сега $x\in N$ и $|x-x_0|<\delta$, то ще бъдат изпълнени неравенствата $x_1<x<x_2$. Оттук поради монотонността на функцията $\varphi(x)$ ще получим $\varphi(x_1)<\varphi(x)<\varphi(x_2)$. Но

$$\varphi(x_1)=t_0-\varepsilon=\varphi(x_0)-\varepsilon,\quad \varphi(x_2)=t_0+\varepsilon=\varphi(x_0)+\varepsilon.$$

И така получаваме, че при $x\in N$ и $|x-x_0|<\delta$ имаме

$$\varphi(x_0)-\varepsilon<\varphi(x)<\varphi(x_0)+\varepsilon,$$

откъдет

$$|\varphi(x)-\varphi(x_0)|<\varepsilon.$$

С това е установена непрекъснатостта на функцията $\varphi(x)$ в произволно взетата точка x_0 от нейната дефиниционна област.

§ 23. Непрекъснатост на елементарните функции

Както ще видим в този параграф, оказва се, че всички елементарни функции са непрекъснати. По-точно казано, всяка от тях е непрекъсната във всяка точка от своята дефиниционна област.

Преди всичко лесно се установява непрекъснатостта на рационалните функции. Най-напред всяка функция-константа $f(x)=C$ е непрекъсната за всяка точка x. Наистина, каквото и да бъде положителното число ε, неравенството $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$, което сега се превръща в очевидното неравенство $|C-C|<\varepsilon$, е изпълнено за всяко x. Ясно е тогава, че както и да вземем положителното число δ, то ще удовлетворява изискванията на дефиницията на Коши.

По-нататък също така лесно се вижда непрекъснатостта на функцията $f(x)=x$ за всяко x. Действително, ако x_0 е произволна точка върху реалната права, а ε е произволно положително число, то достатъчно е да вземем $\delta=\varepsilon$, за да видим, че когато $|x-x_0|<\delta$, ще имаме

$$|f(x)-f(x_0)|=|x-x_0|<\varepsilon,$$

откъдето следва, че функцията $f(x)=x$ е непрекъсната в точката x_0.

Като вземем сега пред вид теорема 1 от § 22, утвърждаваща непрекъснатостта на сумата, разликата, произведението и частното на две непрекъснати функции, можем да заключим най-напред, че при всяко цяло положително число n функцията $f(x)=x^n$ като произведение от непрекъснати функции е също непрекъсната за всяко x. След това, като си спомним, че общият вид на полиномите е

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0,$$

виждаме, че всеки полином е непрекъсната функция за всяко x. Най-сетне всяка рационална функция като частно на два полинома е също непрекъсната във всяка точка от своята дефиниционна област, т. е. във всяка точка, за която не става нула полиномът, намиращ се в знаменателя.

Преминаваме към показателната (експоненциалната) функция $f(x)=a^x$ (където $a>0$). Ще покажем на първо място, че

$$\lim_{x\to 0} a^x=1. \tag{1}$$

Нека най-напред $a>1$. Да вземем едно произволно положително число ε. Разбира се, можем да считаме, че $\varepsilon<1$. Да си образуваме след това числата $\log_a(1-\varepsilon)$ и $\log_a(1+\varepsilon)$. Като вземем пред вид, че при $a>1$ функцията a^x е строго растяща, ще заключим, че при

$$\log_a(1-\varepsilon)<x<\log_a(1+\varepsilon) \tag{2}$$

имаме

$$1-\varepsilon<a^x<1+\varepsilon. \tag{3}$$

Първото от числата $\log_a(1-\varepsilon)$ и $\log_a(1+\varepsilon)$ е отрицателно, а второто — положително. Поради това е ясно, че ако δ е по-малкото от числата $|\log_a(1-\varepsilon)|$ и $\log_a(1+\varepsilon)$, то от неравенството $|x|<\delta$ ще следват неравенствата (2), а оттам — и неравенствата (3), които пък са равносилни с неравенството

$$|a^x-1|<\varepsilon.$$

С това равенството (1) е установено при $a>1$.

Случаят, когато $0<a<1$, се свежда към току-що разгледания, като се използува равенството

$$a^x=\frac{1}{(a^{-1})^x}$$

и като се вземе пред в д. че в този случай $a^{-1}>1$. Когато $a=1$, равенството (1) е очевидно.

Доказаното равенство (1) в същност ни показва, че функцията $f(x)=a^x$ е непрекъсната в точката $x_0=0$, тъй като $a^0=1$. Но оттук лесно можем да установим нейната непрекъснатост в произволна точка x_0. Наистина това се вижда от равенствата

$$\lim_{x\to x_0} a^x=\lim_{x\to x_0} a^{x_0}a^{x-x_0}=a^{x_0}\lim_{x\to x_0} a^{x-x_0}=a^{x_0}.$$

Функцията $\log_a x$, където $a>0$ и $a\neq 1$, дефинирана при $x>0$, е обратна на строго растящата функция a^x с дефиниционен интервал $(-\infty,\infty)$ и е също непрекъсната съгласно теорема 4 от § 22 във всяка точка от своята дефиниционна област.

Сега вече е твърде лесно да се покаже непрекъснатостта на степенната функция $f(x)=x^\alpha$ при произволен степенен показател α, дефинирана при $x>0$. (Досега ние сме доказали нейната непрекъснатост само когато α е цяло число.) Наистина, ако α е някое положително число, различно от единица, в сила е равенството $x^\alpha=a^{\alpha\log_a x}$, от което непрекъснатостта на функцията $f(x)=x^\alpha$ следва въз основа на теоремата за непрекъснатост на съставни функции. Оттук пък непосредствено се получава непрекъснатостта на всички ирационални функции — достатъчно е да се използува непрекъснатостта на рационалните функции и на функцията $f(x)=x^\alpha$ при дробен степенен показател и най-сетне теоремата за непрекъснатостта на съставните функции.

За да изчерпим всички елементарни функции, остава да се занимаем още с четирите тригонометрични функции и техните обратни.

Да разгледаме функцията $\sin x$ и да вземем произволна точка x_0. Лесно се вижда верността на следната верига от равенства и неравенства:

$$|\sin x-\sin x_0|=2\left|\cos\frac{x+x_0}{2}\right|\cdot\left|\sin\frac{x-x_0}{2}\right|\leqq 2\cdot 1\cdot\frac{|x-x_0|}{2}=|x-x_0|.$$

Ясно е тогава, че ако ε е произволно положително число, то достатъчно е да вземем $\delta=\varepsilon$, за да имаме $|\sin x-\sin x_0|<\varepsilon$ при $|x-x_0|<\delta$. С това е установена непрекъснатостта на функцията $\sin x$ в произволно взетата точка x_0.

По аналогичен начин се вижда, че и функцията $\cos x$ е непрекъсната за всяко x. Що се отнася до функциите $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{cotg} x$, то всяка от тях е непрекъсната за всяко x от своята дефиниционна област. Това се вижда от равенствата $\operatorname{tg} x=\frac{\sin x}{\cos x}$ и $\operatorname{cotg} x=\frac{\cos x}{\sin x}$ въз основа на теоремата за непрекъснатостта на частното на две непрекъснати функции.

Най-сетне функциите $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$ и $\operatorname{arccotg} x$ като обратни на строго растящи функции, всяка от които е взета в някакъв интервал, ще бъдат също така непрекъснати за всяко x от своята дефиниционна област.

§ 24. Четири теореми за непрекъснатите функции

Когато една функция $f(x)$ е непрекъсната във всички точки на дадено множество M от реални числа, накратко казваме, че тя е непрекъсната в множеството M. От непрекъснатостта на една функция следват редица свойства. Особено важни заключения за свойствата на една функция могат да се направят, когато тя е непрекъсната в краен и затворен интервал.

Така например, макар между непрекъснатите функции да се срещат както ограничени, така и неограничени, оказва се, че е в сила следната

Теорема 1 (теорема за ограниченост). *Ако една функция $f(x)$ е непрекъсната в крайния и затворен интервал $[a, b]$, то тя е ограничена в този интервал.*

За да си изясним по-добре смисъла на това твърдение, нека посочим някои съвсем прости примери, от които се вижда, че заключението на теоремата може да не бъде вярно, ако са нарушени някои от нейните условия. Функцията $f(x)=\frac{1}{x}$, макар и непрекъсната в интервала $(0, 1]$ е неограничена в него. Функцията пък, дефинирана с равенството

$$g(x)=\begin{cases} \frac{1}{x} & \text{при } x\neq 0 \\ 0 & \text{при } x=0, \end{cases}$$

е неограничена даже в затворения интервал $[0, 1]$.

Тези примери, разбира се, не противоречат на теорема 1, тъй като в първия от тях интервалът $(0, 1]$ не е затворен, а във втория функцията $g(x)$ е прекъсната в точката $x_0=0$.

Преди да формулираме следващата теорема, да разгледаме още някои примери. Когато ни е дадена една функция $f(x)$, естествено възниква въпросът, притежава ли тя най-голяма (максимална), съответно най-малка (минимална) стойност. Разбира се, ако функцията не е ограничена отгоре, тя не може да има максимална стойност. Но тя може да не притежава най-голяма стойност даже и когато е ограничена.

И наистина функцията $f(x)=1-\frac{1}{x}$ например е ограничена отгоре в безкрайния интервал $(1, \infty)$, тъй като всички нейни стойности са по-малки от 1. Тя обаче не притежава максимална стойност, тъй като е строго растяща в този интервал, което се проверява непосредствено.

Такава ситуация може да бъде налице даже и в краен интервал. Да разгледаме например функцията $g(x)=x^2$ в интервала $[0, 2)$. Тя е очевидно ограничена, тъй като всички нейни стойности са по-малки от 4. Но тя също не притежава максимална стойност, защото, както и да изберем точката x_1 от интервала $[0, 2)$, винаги можем да намерим друга точка x_2, такава, че $0\leq x_1<x_2<2$, откъдето $x_1^2<x_2^2$, или $g(x_1)<g(x_2)$.

По същия начин можем да се убедим, че и функцията

$$h(x)=\begin{cases} x^2 & \text{при } 0\leq x<2 \\ 0 & \text{при } x=2, \end{cases}$$

дефинирана в затворения интервал $[0, 2]$, не притежава най-голяма стойност.

Разбира се, аналогични забележки, придружени със съответни примери, могат да бъдат направени и по въпроса за съществуването на най-малка стойност на дадена функция.

След всичко това е очевидна важността на следната

Теорема 2 (теорема на Вайерщрас). *Ако една функция $f(x)$ е непрекъсната в крайния и затворен интервал $[a, b]$, то тя притежава една най-голяма и една най-малка стойност.*

Както знаем от теорема 1, щом функцията $f(x)$ е непрекъсната в крайния и затворен интервал $[a, b]$, то тя е ограничена. Това ще рече, че множеството от нейните функционални стойности е ограничено. Като си спомним една от забележките, които направихме при въвеждането на понятието точна горна граница на множество от реални числа, заключаваме, че най-голямата стойност на $f(x)$, ако съществува такава, трябва да съвпада с точната горна граница на тази функция. Аналогично, ако функцията $f(x)$ притежава най-малка стойност, тя трябва да съвпада с нейната точна долна граница.

Ето защо теоремата на Вайерщрас може да се изкаже и по следния начин:

Ако функцията $f(x)$ е непрекъсната в крайния и затворен интервал $[a, b]$, то тя достига в този интервал както своята точна горна граница, така и своята точна долна граница.

Друго важно свойство на непрекъснатите функции се дава със следната

Теорема 3 (теорема на Болцано). *Ако функцията $f(x)$ е непрекъсната в един краен и затворен интервал $[a, b]$ и ако $f(a)\neq f(b)$, а λ е число, намиращо се между $f(a)$ и $f(b)$, то съществува поне една точка α в интервала (a, b), за която $f(\alpha)=\lambda$.*

Другояче казано, функцията $f(x)$ трябва да получи поне веднъж всяка стойност, намираща се между $f(a)$ и $f(b)$. По-специално, когато $f(a)$ и $f(b)$ са две числа с противни знаци (т. е. когато едното от тях е положително, а другото — отрицателно), функцията $f(x)$ трябва да стане равна на нула най-малко за една стойност на x между a и b.

С помощта на формулираните дотук теореми можем лесно да направим важни заключения, отнасящи се до множеството от функционалните стойности на една непрекъсната функция. Нека най-напред вземем една функция $f(x)$, която е дефинирана и непрекъсната в някой краен и затворен интервал $[a, b]$ и не е константа в него. Тя ще бъде ограничена, както знаем от теорема 1. Ако L и l са съответно нейната точна горна и нейната точна долна граница, то съгласно теорема 2 ще съществуват две точки x_1 и x_2 от интервала $[a, b]$, за които ще имаме $f(x_1)=l$ и $f(x_2)=L$. Тези две точки са различни, защото, ако те съвпадаха, бихме получили $l=L$, т. е. $f(x)$ би била константа. Да разгледаме сега точките x_1 и x_2 като краища на един краен и затворен интервал. Тъй като функцията $f(x)$ е непрекъсната в този интервал и тъй като тя получава в краищата му стойностите l и L, то съгласно теорема 3 тя ще взема и всяка стойност, намираща се между тези две числа. А тъй като, от друга страна, никоя стойност на функцията $f(x)$ не може да бъде по-малка от l или по-голяма от L, то заключаваме, че множеството от функционалните стойности на $f(x)$ трябва да съвпада със затворения интервал $[l, L]$. И така, ако една функция е дефинирана и непрекъсната в краен и затворен интервал и не е константа, то множеството от нейните функционални стойности представлява също краен и затворен интервал.

Като разсъждаваме по подобен начин, макар и малко по-сложно, можем да се убедим, че изобщо, когато една функция е дефинирана и непрекъсната в интервал от произволен вид и не е константа, множеството от нейните функционални стойности е също интервал.

За да формулираме по-кратко следващото важно свойство на непрекъснатите функции, ще въведем предварително един нов термин. Ако функцията $f(x)$ е ограничена в дадено множество M и ако L е нейната точна горна граница, а l — нейната точна долна граница, когато x се мени в M, то числото $L-l$ ще наречем о с ц и л а ц и я на функцията $f(x)$ в множеството M.

Ползата от въвеждането на този термин, както и от теоремата, която предстои да формулираме, ще се види едва по-нататък, когато се запознаем с дефиницията на понятието определен интеграл. Нека отбележим само, че ако $f(x)$ е функция, дефинирана в някое множество M, и ако x' и x'' са две точки от M, то стойността на израза $|f(x')-f(x'')|$ не надминава осцилацията на $f(x)$ в M. И наистина, ако l е точната долна, а L — точната горна граница на $f(x)$ в M и ако от двете числа $f(x')$ и $f(x'')$ първото например е по-малко или равно на второто, ще бъдат изпълнени неравенствата

$$l \leq f(x') \leq f(x'') \leq L,$$

откъдето

$$|f(x')-f(x'')|=f(x'')-f(x')\leq L-l.$$

Последната теорема, на която ще се спрем в този параграф, е следната:

Теорема 4 (теорема за равномерната непрекъснатост). *Ако функцията $f(x)$ е непрекъсната в един краен и затворен интервал $[a, b]$ и ако ε е положително число, то интервалът $[a, b]$ може да бъде разделен на краен брой подинтервали по такъв начин, че във всеки от тях осцилацията на $f(x)$ да бъде по-малка от ε.*

Тази теорема може да бъде изказана още и така:

Ако функцията $f(x)$ е непрекъсната в крайния и затворен интервал $[a, b]$, то за всяко положително число ε съществува такова положително число δ, че във всеки подинтервал на $[a, b]$ с дължина, по-малка от δ, осцилацията на $f(x)$ да е по-малка от ε.

Наистина нека сме си избрали едно произволно положително число ε и нека след това сме разделили интервала $[a, b]$ на краен брой подинтервали по такъв начин, че във всеки от тях осцилацията на $f(x)$ да е по-малка от положителното число $\frac{\varepsilon}{2}$. Да означим с δ дължината на най-малкия от тези подинтервали и да си вземем след това произволен подинтервал $[\alpha, \beta]$ на интервала $[a, b]$, но такъв, че неговата дължина $\beta-\alpha$ да бъде по-малка от δ. Съгласно теоремата на Вайерщрас, ако L и l са съответно точната горна и точната долна граница на $f(x)$ в интервала $[\alpha, \beta]$, то ще съществуват в този интервал две точки x' и x'', такива, че $f(x')=L$ и $f(x'')=l$. Тъй като разстоянието между точките x' и x'' е по-малко от δ, те или лежат в един и същ подинтервал от онези, на които сме разделили интервала $[a, b]$, или пък се намират в два съседни подинтервала. В първия случай числото $|f(x')-f(x'')|$ няма да надминава осцилацията на $f(x)$ в съответния подинтервал, която е по-малка от $\frac{\varepsilon}{2}$. Във втория случай, като означим с $[p, q]$ и $[q, r]$ двата съседни подинтервала, съдържащи точките x' и x'', и предположим, че например $x' \in [p, q]$, $x'' \in [q, r]$, ще имаме

$$|f(x')-f(x'')|=|f(x')-f(q)+f(q)-f(x'')|$$
$$\leq |f(x')-f(q)|+|f(q)-f(x'')|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

И така и в двата случая $L-l=f(x')-f(x'')<\varepsilon$.

Нека сега, обратно, като изберем едно произволно положително число ε, знаем, че съществува такова число δ, че осцилацията на $f(x)$ да е по-малка от ε във всеки подинтервал на $[a, b]$ с дължина, по-малка от δ. Да разделим интервала $[a, b]$ на краен брой подинтервали така, че дължината на всеки от тях да бъде по-малка от δ. Това лесно може да бъде постигнато. Достатъчно е например да разделим $[a, b]$ на n равни части, като вземем n толкова голямо, че да е изпълнено неравенството $\frac{b-a}{n}<\delta$. Тогава във всеки от така получените подинтервали осцилацията на $f(x)$ ще бъде по-малка от ε.

По този начин се убеждаваме, че дадените по-горе две формулировки на теорема 4 са наистина еквивалентни. Използвайки втората от тях, лесно получаваме следното твърдение (което впрочем също е еквивалентно на теорема 4):

Ако функцията $f(x)$ е непрекъсната в крайния и затворен интервал $[a, b]$, то за всяко положително число ε съществува такова положително число δ, че при $x' \in [a, b]$ и $x'' \in [a, b]$ от неравенството $|x'-x''|<\delta$ следва неравенството $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$.

Доказателствата на формулираните в този параграф теореми за непрекъснатите функции са изложени в следващия параграф.

Упражнения. 1. В трите примера от стр. 106—107, поясняващи съдържанието на теоремата на Вайерщрас, нито една от функциите $f(x)$, $g(x)$ и $h(x)$ не притежава най-голяма стойност. Посочете кое от условията на теоремата е нарушено във всеки от тези примери.

2. Определете осцилацията на функцията $f(x)=\sin x$ в интервала $(-\infty, +\infty)$. Също в интервалите $[0, \pi]$, $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ и $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$.

2. Разделете интервала $[0, \pi]$ на подинтервали така, че осцилацията на функцията $f(x)=\cos x$ във всеки от тях да бъде по-малка от $\frac{1}{2}$.

§ 25*. Доказателства на теоремите от § 24

Тук ще изложим доказателствата на формулираните в предишния параграф четири теореми. Във всички тези доказателства, както читателят ще види, основна роля играе теоремата на Кантор, която установихме в § 4.

За да не повтаряме всеки път, нека напомним, че и четирите теореми, които предстои да докажем, бяха изказани при едно и също предположение — дадена е една функция $f(x)$, непрекъсната в крайния и затворен интервал $[a, b]$.

И така, без да повтаряме самите формулировки на теоремите, пристъпваме към излагане на техните доказателства.

Доказателство на теоремата за ограниченост. Трябва да докажем, че функцията $f(x)$ е ограничена в интервала $[a, b]$. Да допуснем противното — че тя не е ограничена в него. Да разделим този интервал на две равни части с помощта на точката c, която е средата му. Ясно е, че ако функцията $f(x)$ би била ограничена в двата затворени интервала $[a, c]$ и $[c, b]$, то тя щеше да бъде ограничена и в интервала $[a, b]$. Следователно тя е неограничена поне в един от тези два интервала, който ще означим за удобство с $[a_1, b_1]$. Ако сега разделим интервала $[a_1, b_1]$ на две равни части, то също така поне в едната от неговите две половини, която ще означим с $[a_2, b_2]$, $f(x)$ ще бъде неограничена. По-нататък ние можем да разделим и $[a_2, b_2]$ на две равни части и т. н. По такъв начин получаваме една редица от затворени интервали

$$[a_1, b_1],\ [a_2, b_2],\ \ldots,\ [a_n, b_n],\ \ldots,$$

всеки от които съдържа следващия и във всеки от които функцията $f(x)$ е неограничена. Освен това $b_n-a_n=\frac{1}{2^n}(b-a)$ и следователно $\lim(b_n-a_n)=0$. Според теоремата на Кантор ще съществува една точка ξ, принадлежаща на всички тези интервали. Но ξ е точка от интервала $[a, b]$, така че функцията $f(x)$ е непрекъсната в тази точка. Съгласно дефиницията на Коши за непрекъснатост, като вземем числото $\varepsilon=1$, ние можем да намерим такова положително число δ, че при $|x-\xi|<\delta$ да бъде изпълнено неравенството $|f(x)-f(\xi)|<1$. Това ще рече, за всяка точка x от интервала $(\xi-\delta, \xi+\delta)$ имаме

$$f(\xi)-1<f(x)<f(\xi)+1.$$

Тези неравенства показват, че функцията $f(x)$ е ограничена в интервала $(\xi-\delta, \xi+\delta)$. За достатъчно големи стойности на n обаче съгласно бележката, която направихме в края на § 4, интервалът $[a_n, b_n]$ ще се съдържа в интервала $(\xi-\delta, \xi+\delta)$ и следователно $f(x)$ ще бъде ограничена и в интервала $[a_n, b_n]$. Това обаче противоречи на начина, по който построихме тези интервали. Полученото противоречие показва, че нашето допускане за неограничеността на функцията $f(x)$ в интервала $[a, b]$ е било погрешно. С това теоремата е доказана.

Доказателство на теоремата на Вайерщрас. Ще докажем, че функцията $f(x)$ притежава най-голяма стойност, което, както видяхме, е равносилно с това да покажем, че тя достига своята точна горна граница. Аналогично се доказва, че $f(x)$ достига и точната си долна граница.

И така нека L е точната горна граница на $f(x)$ в интервала $[a,b]$. Да разделим този интервал на две равни части $[a, c]$ и $[c, b]$. Ясно е, че L е горна граница на функцията $f(x)$ както в интервала $[a, c]$, така и в интервала $[c, b]$. Поради това, ако L_1 е нейната точна горна граница в $[a, c]$, а L_2 — точната ѝ горна граница в $[c, b]$, то нито едно от тези две числа няма да надминава L. Ако и двете обаче биха били по-малки от L, то по-голямото от тях би представлявало горна граница на $f(x)$ в целия интервал $[a, b]$, при това такава горна граница, която е по-малка от най-малката горна граница. Това е невъзможно. Следователно поне едно от числата L_1 и L_2 е равно на L, т. е. числото L е точна горна граница на $f(x)$ не само в интервала $[a, b]$, но също и в поне един от двата интервала $[a, c]$ и $[c, b]$, който ще означим с $[a_1, b_1]$. Ако сега разделим интервала $[a_1, b_1]$ на две равни части, то отново ще видим, че поне в една от двете негови половинки, която ще означим с $[a_2, b_2]$, числото L се явява точна горна граница на $f(x)$. Разделяме след това $[a_2, b_2]$ на две равни части и т. н. Получаваме една редица от затворени интервали

$$[a_1, b_1],\ [a_2, b_2],\ \ldots,\ [a_n, b_n],\ \ldots,$$

във всеки от които точната горна граница на функцията $f(x)$ е равна на L. Веднага се вижда, че тази редица удовлетворява условията на теоремата на Кантор. Следователно съществува една точка ξ, съдържаща се във всичките интервали $[a_n, b_n]$. Ще покажем, че $f(\xi)=L$. Разбира се, ние знаем, че $f(\xi)\leqq L$. Да допуснем, че $f(\xi)<L$. Можем тогава да вземем такова число L', което да удовлетворява неравенствата $f(\xi)<L'<L$.

Ако разгледаме сега функцията $\varphi(x)=L'-f(x)$, то тази функция е непрекъсната в точката ξ и освен това има в тази точка положителна стойност, понеже $\varphi(\xi)=L'-f(\xi)>0$. Тогава съгласно теорема 1 от § 22 ще съществува такава околност $(\xi-\delta, \xi+\delta)$ на точката ξ, във всички точки на която ще имаме $\varphi(x)>0$, т. е. $L'-f(x)>0$, или $f(x)<L'$. Това показва, че числото L' е горна граница на $f(x)$ в интервала $(\xi-\delta, \xi+\delta)$. Но при достатъчно големи стойности на n интервалът $[a_n, b_n]$ се съдържа изцяло в интервала $(\xi-\delta, \xi+\delta)$, поради което L' ще бъде горна граница на $f(x)$ и в интервала $[a_n, b_n]$. Това обаче е невъзможно, тъй като $L'<L$, а L беше точната, т. е. най-малката, горна граница на $f(x)$ в $[a_n, b_n]$. Полученото противоречие показва, че нашето допускане $f(\xi)<L$ е погрешно. Следователно $f(\xi)=L$. И така $f(x)$ достига своята точна горна граница L.

Доказателство на теоремата на Болцано. Нека $f(a)\neq f(b)$ и λ е число, намиращо се между $f(a)$ и $f(b)$. Трябва да покажем, че съществува точка α от (a, b), за която $f(\alpha)=\lambda$. Нека разгледаме най-напред случая, когато $f(a)<0$ и $f(b)>0$. В този случай ще покажем, че в интервала (a, b) има точка α, за която $f(\alpha)=0$. Да допуснем, че такава точка не съществува. Тогава, ако разделим интервала $[a, b]$ на два равни подинтервала $[a, c]$ и $[c, b]$, то единият от тях ще притежава свойството функцията $f(x)$ да получава в краищата му стойности с противни знаци. И наистина, ако $f(c)>0$, то това ще бъде интервалът $[a, c]$, ако ли пък $f(c)<0$, такъв ще бъде интервалът $[c, b]$. (Случаят $f(c)=0$ е изключен, тъй като допуснахме, че $f(x)$ не става никога равна на нула в интервала $[a, b]$.) Интервала с това свойство да означим с $[a_1, b_1]$. Ако и него разделим на два равни подинтервала, то отново единият от тях ще бъде такъв, че функцията $f(x)$ ще получава стойности с противни знаци в неговите краища. Този подинтервал ще означим с $[a_2, b_2]$, ще разделим след това и него на две равни части и т. н. Получаваме една редица от такива затворени интервали

$$[a_1, b_1], [a_2, b_2], \ldots, [a_n, b_n], \ldots,$$

че в краищата на всеки от тях $f(x)$ получава стойности с противни знаци. Тази редица удовлетворява условията на теоремата на Кантор и следователно определя една точка ξ, съдържаща се във всички тези интервали. Тъй като функцията съгласно нашето допускане не е равна на 0 за никоя точка от интервала $[a, b]$, то $f(\xi)\neq 0$, т. е. $f(\xi)>0$ или $f(\xi)<0$. Да разгледаме случая $f(\xi)>0$. (В случай че $f(\xi)<0$, разсъжденията са аналогични.) От непрекъснатостта на $f(x)$ в точката ξ и от неравенството $f(\xi)>0$ следва, че съществува такъв интервал $(\xi-\delta, \xi+\delta)$, в който за всяко x имаме $f(x)>0$. Тъй като $[a_n, b_n]$ се съдържа изцяло в интервала $(\xi-\delta, \xi+\delta)$, когато n е достатъчно голямо, то за такива стойности на n ще имаме едновременно $f(a_n)>0$ и $f(b_n)>0$. Но ние бяхме избрали интервалите $[a_n, b_n]$ така, че функцията $f(x)$ да получава в краищата им стойности с противни знаци. Получихме противоречие, което

показва, че нашето първоначално допускане е погрешно, и следователно съществува поне една точка α от (a, b), за която $f(\alpha)=0$.

Остава да разгледаме общия случай на теоремата. Беше дадено, че $f(a)\neq f(b)$. Можем да приемем, че $f(a)<f(b)$. (Случаят $f(a)>f(b)$ е аналогичен.) Тогава $f(a)<\lambda<f(b)$. Разглеждаме функцията $\varphi(x)=f(x)-\lambda$. Тя е очевидно непрекъсната в интервала $[a, b]$. Освен това $\varphi(a)<0$ и $\varphi(b)>0$. Следователно съществува поне една точка α, намираща се между a и b, за която имаме $\varphi(\alpha)=0$. Оттук получаваме $f(\alpha)=\lambda$. С това теоремата е доказана.

Доказателство на теоремата за равномерната непрекъснатост. Нека ε е произволно положително число. Трябва да установим, че интервалът $[a, b]$ може да бъде разделен на краен брой подинтервали така, че във всеки от тях осцилацията на функцията $f(x)$ да бъде по-малка от ε. Да допуснем, че това е невъзможно. Ако разделим интервала $[a, b]$ на два равни подинтервала $[a, c]$ и $[c, b]$ и ако всеки от тях би могъл да се раздели от своя страна на краен брой подинтервали, във всеки от които $f(x)$ да има осцилация, по-малка от ε, то с това бихме получили едно разделяне на целия интервал $[a, b]$ на части, което има същото свойство. Тъй като допуснахме, че това е невъзможно, то поне един от двата подинтервала $[a, c]$ и $[c, b]$ не може да бъде разделен по казания начин. Да означим този подинтервал с $[a_1, b_1]$ и да разгледаме след това неговите две половини. Поне едната от тях, която ще означим с $[a_2, b_2]$, също така не може да бъде разделена на подинтервали по желания начин. Като разсъждаваме все така, ние ще получим една безкрайна редица от затворени интервали

$$[a_1, b_1], [a_2, b_2], \ldots, [a_n, b_n], \ldots,$$

която удовлетворява условията на теоремата на Кантор. При това нито един от интервалите $[a_n, b_n]$ не може да бъде разделен на подинтервали така, че осцилацията на функцията $f(x)$ във всеки от тях да бъде по-малка от ε. Оттук следва, разбира се, че осцилацията на $f(x)$ във всеки един от интервалите $[a_n, b_n]$ е по-голяма или равна на ε. Съгласно теоремата на Кантор съществува една точка ξ, съдържаща се във всичките интервали $[a_n, b_n]$. Да си образуваме положителното число $\frac{\varepsilon}{3}$. Поради непрекъснатостта на функцията $f(x)$ в точката ξ ще съществува такова число $\delta>0$, че за всяко x от интервала $(\xi-\delta, \xi+\delta)$ ще имаме $|f(x)-f(\xi)| < \frac{\varepsilon}{3}$, или

$$f(\xi)-\frac{\varepsilon}{3}<f(x)<f(\xi)+\frac{\varepsilon}{3}.$$

За достатъчно големи стойности на n обаче интервалът $[a_n, b_n]$ ще се съдържа изцяло в интервала $(\xi-\delta, \xi+\delta)$. Ето защо за такива стойности на n числата $f(\xi)+\frac{\varepsilon}{3}$ и $f(\xi)-\frac{\varepsilon}{3}$ се явяват, както това се вижда от последните неравенства, съответно горна и долна граница на функцията

$f(x)$ в интервала $[a_n, b_n]$. Тогава осцилацията на $f(x)$ в този интервал няма да надминава числото

$$\left(f(\xi)+\frac{\varepsilon}{3}\right)-\left(f(\xi)-\frac{\varepsilon}{3}\right)=\frac{2}{3}\,\varepsilon$$

и значи ще бъде по-малка от ε. Но във всеки от интервалите $[a_n, b_n]$ осцилацията на $f(x)$ беше по-голяма или равна на ε. Полученото противоречие показва, че нашето първоначално допускане е било погрешно. С това теоремата е доказана.

§ 26.* Равномерна непрекъснатост

Нека една функция $f(x)$ е непрекъсната в едно множество M от реални числа. Ако вземем някое положително число ε, то за всяка точка x_1 от M ще съществува съгласно дефиницията на Коши за непрекъснатост такова положително число δ, че от неравенството $|x-x_1|<\delta$, където $x\in M$, да следва неравенството $|f(x)-f(x_1)|<\varepsilon$. Ясно е обаче, че това число δ ще зависи в нашия случай не само от числото ε, но и от точката x_1 — когато избираме по различни начини x_1 в множеството M, δ също може да получава различни стойности. Особено важен е случаят, когато числото δ може да бъде избрано независимо от точката x_1, т. е. когато при произволно избрано $\varepsilon>0$ съществува такова положително число δ, че за всички точки x_1, принадлежащи на M, от $|x-x_1|<\delta$ (при $x\in M$) да следва $|f(x)-f(x_1)|<\varepsilon$. В този случай ще казваме, че функцията $f(x)$ *е равномерно непрекъсната* в множеството M. Всичко това може да бъде изказано със следната

Дефиниция. *Една функция $f(x)$ се нарича равномерно непрекъсната в дадено множество M от реални числа, ако за всяко положително число ε съществува такова положително число δ, че за всеки две точки x' и x'' от M, удовлетворяващи неравенството*

$$|x'-x''|<\delta,$$

е изпълнено неравенството

$$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon.$$

Като пример за равномерно непрекъсната функция можем да посочим функцията $f(x)=\sin x$, разглеждана в цялата своя дефиниционна област — интервала $(-\infty, \infty)$. Ако ε е произволно положително число, то изискванията на дефиницията за равномерна непрекъснатост ще бъдат удовлетворени при $\delta=\varepsilon$. Наистина, каквито и две числа x' и x'' да си вземем, ще имаме

$$|\sin x'-\sin x''|=2\left|\sin\frac{x'-x''}{2}\right|\cdot\left|\cos\frac{x'+x''}{x}\right|\leq 2\frac{|x'-x''|}{2}\cdot 1=|x'-x''|,$$

откъдето виждаме, че от неравенството $|x'-x''|<\delta$ или — все едно — от неравенството $|x'-x''|<\varepsilon$ следва неравенството $|\sin x'-\sin x''|<\varepsilon$. Тук числото δ беше определено от нас в зависимост от ε, но независимо от избора на точките x' и x'', които бяха произволно взети в интервала

$(-\infty, \infty)$. Това показва, че функцията $f(x)=\sin x$ е равномерно непрекъсната в този интервал.

Една функция $f(x)$ може да бъде непрекъсната в някое множество M от реални числа, без да бъде равномерно непрекъсната в него, дори когато това множество е един краен интервал. Наистина, нека вземем следния пример. Да разгледаме функцията $f(x)=\frac{1}{x}$. Тя е непрекъсната в интервала $(0, 1]$. Нека допуснем, че тя е и равномерно непрекъсната в този интервал. Тогава, вземайки си $\varepsilon=1$, ще можем да намерим такова положително число δ, че за всеки две точки x' и x'' от интервала $(0, 1]$, изпълняващи неравенството $|x'-x''|<\delta$, да имаме $\left|\frac{1}{x'}-\frac{1}{x''}\right|<1$. Нека сега x' е такова число, принадлежащо на интервала $(0, 1]$, за което да имаме $x'<\frac{1}{2}$ и $x'<\frac{\delta}{2}$, и нека $x''=x'+\frac{\delta}{2}$. Тогава $|x'-x''|=\frac{\delta}{2}<\delta$ и следователно трябва да имаме $\left|\frac{1}{x'}-\frac{1}{x''}\right|<1$. Това обаче не е така, тъй като

$$\left|\frac{1}{x'}-\frac{1}{x''}\right|=\left|\frac{1}{x'}-\frac{1}{x'+\frac{\delta}{2}}\right|=\frac{\frac{\delta}{2}}{x'\left(x'+\frac{\delta}{2}\right)}\geq\frac{\frac{\delta}{2}}{\frac{1}{2}\left(\frac{\delta}{2}+\frac{\delta}{2}\right)}=1.$$

И така функцията $f(x)=\frac{1}{x}$ не е равномерно непрекъсната в интервала $(0, 1]$, макар и да е непрекъсната в него.

Оказва се обаче, че *всяка функция, непрекъсната в един краен и затворен интервал, е и равномерно непрекъсната в този интервал.*

И наистина точно това е съдържанието на твърдението, формулирано в края на § 24 и получено като следствие от теоремата за осцилациите. Именно поради това тази теорема ние нарекохме още *теорема за равномерната непрекъснатост.*

Упражнения. 1. Покажете директно, т. е. без да се позовавате на теоремата за равномерната непрекъснатост, че функцията $f(x)=x^2$ е равномерно непрекъсната в интервала $[0, 2]$.

2. Покажете, че функцията $f(x)=x^2$ не е равномерно непрекъсната в интервала $[0, \infty)$.