ИЗ ПРЕДГОВОРА КЪМ ПЪРВОТО ИЗДАНИЕ

Упражненията, които съпровождат по-голямата част от параграфите, са обикновено лесни и не могат да запълнят нуждата от сериозен сборник от задачи по математически анализ. Тяхното единствено предназначение е да помогнат на читателя да провери дали е усвоил предишния материал. В този смисъл обаче те представляват неразделна част от текста и решаването на повечето от тях е извънредно препоръчително.

Считам за свой дълг да изразя признателността си към моя учител проф. Я. Тагамлицки. Моята дългогодишна работа като асистент под негово ръководство, многобройните ни беседи, както и неговият отличен курс по диференциално и интегрално смятане безспорно са оказали своето благоприятно влияние при написването на настоящия учебник.

Изказвам също така топла благодарност на др. доц. Д. Скордев, който прочете внимателно целия ръкопис и направи редица бележки, които допринесоха за неговото подобряване.

Накрая искам да изкажа своята благодарност на др. стаж. ас. Я. Кинтишев, който ми помогна при подбора на задачите за упражнения, на др. ас. К. Петров, който бе така любезен да поеме грижата за изработване на чертежите, както и на др. Гр. Благоева за нейното изключително старание при редактирането на книгата.

София, декември 1969 г. Д. Дойчинов

УВОД

А. Реални числа

В основата на целия наш курс по математически анализ лежи множеството на реалните числа. Тук ще изброим по-важните, основните свойства на това множество.*

I. На всеки две реални числа a и b съответствува едно реално число, наречено тяхна с у м а, което се бележи с $a+b$. Когато осъществяваме това съответствие, т. е. когато намираме тази сума, казваме, че извършваме действието с ъ б и р а н е. То е подчинено на следните изисквания:

1) $a+b=b+a$ (комутативен закон).

2) $(a+b)+c=a+(b+c)$ (асоциативен закон).

3) Уравнението $a+x=b$, където a и b са дадени реални числа, има винаги, и то едно единствено решение относно x. Това единствено решение се нарича р а з л и к а на числата b и a и се бележи с $b-a$, а действието, чрез което намираме тази разлика, се нарича и з в а ж д а н е.

4) Съществува едно единствено реално число, което се явява решение на уравнението $a+x=a$ при всеки избор на реалното число a. Това число се нарича н у л а и се бележи със знака 0.

Преди да продължим списъка на основните свойства на реалните числа, ще направим няколко забележки.

Асоциативният закон 2) ни дава възможност да въведем понятието сума на три числа a, b, c, която бележим с $a+b+c$, като под този израз разбираме числото $(a+b)+c$, или все едно числото $a+(b+c)$. Аналогично се дефинира понятието сума на произволен (но краен) брой реални числа $a_1, a_2, \dots, a_n$, която се бележи с $a_1+a_2+\dots+a_n$.

По-нататък от дефиницията на разликата $b-a$ е ясно, че за всеки две реални числа a и b

$$a+(b-a)=b,$$

* В Допълнението, поместено на края на курса, е показано как множеството на реалните числа може да бъде изградено, като се излезе от множеството на рационалните числа.

тъй както пък от дефиницията на числото 0 следва, че за всяко реално число a

$$a+0=a.$$

Решението на уравнението $a+x=0$ се нарича противоположно число на числото a и за краткост се бележи със знака $-a$ вместо с $0-a$.

Въз основа на изброените дотук четири свойства на реалните числа могат да бъдат получени редица други. Така например може да се докаже, че:

$-(-a)=a$ за всяко a;

$0=-0$, т. е. числото 0 е противоположно само на себе си;

$a-b=a+(-b)$, т. е. всяка разлика може да се разглежда като сума;

както и много други твърдения, на които няма да се спираме.

II. На всеки две реални числа a и b съответствува едно реално число, наречено тяхно произведение, което се бележи с ab. Когато осъществяваме това съответствие, т. е. когато намираме това произведение, казваме, че извършваме действието умножение. При това са изпълнени следните изисквания:

5) $ab=ba$ (комутативен закон на умножението).

6) $(ab)c=a(bc)$ (асоциативен закон на умножението).

7) Ако $a\neq 0$, то уравнението $ax=b$ има винаги, и то едно единствено решение относно x. То се нарича частно на числата b и a и се бележи с $\frac{b}{a}$. Самото действие, чрез което намираме това частно, се нарича деление.

8) Съществува едно единствено число, явяващо се решение на уравнението $ax=a$ при всеки избор на реалното число $a\neq 0$. Това число се нарича единица и се бележи със знака 1.

Тук могат да се направят забележки, подобни на онези, които направихме по-рано. Така асоциативният закон при умножението, аналогично на това, което имахме при събирането, ни позволява да въведем понятието произведение на три и повече реални числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$, което бележим с $a_1a_2\ldots a_n$.

По-нататък за всяко $a\neq 0$ и за всяко b имаме

$$a\frac{b}{a}=b, \quad a\,.\,1=a.$$

Числото $\frac{1}{a}$ се нарича обратно или реципрочно на числото a.

Може лесно да се покаже, че

$$\frac{1}{\frac{1}{a}}=a \text{ при } a\neq 0,$$

т. е. че реципрочното число на числото $\frac{1}{a}$ е a.

Всяко число, което е сума от единици, се нарича естествено число.

За естествените числа въвеждаме специални означения:

1, $2=1+1$, $3=1+1+1$, $4=1+1+1+1$, $5=1+1+1+1+1$ и т. н.

III. Действията събиране и умножение са свързани помежду си със следното свойство, наречено дистрибутивен закон:

9) $$a(b+c)=ab+ac.$$

С помощта на изброените дотук свойства могат да се докажат за всяко реално число a например следните равенства:

$$(-1)\,.\,a=-a, \quad 0\,.\,a=0, \quad \frac{a}{1}=a.$$

IV. Реалните числа могат да се сравняват по големина, т. е. има смисъл да твърдим, че дадено реално число a е по-малко от друго реално число b, което твърдение записваме така: $a<b$. В такъв случай казваме още, че числото b е по-голямо от числото a, което твърдение записваме така: $b>a$. При това изпълнено е следното изискване:

10) За всеки две различни реални числа a и b имаме една от двете възможности — или $a<b$, или $b<a$.

Често се употребяват също така знаците $\leqq$ и $\geqq$. Когато пишем $a\leqq b$, с това твърдим, че е изпълнено или равенството $a=b$, или неравенството $a<b$. Аналогично $a\geqq b$ означава, че имаме или $a=b$, или $a>b$.

Ясно е, че от валидността на двете неравенства $a\leqq b$ и $a\geqq b$ следва равенството $a=b$.

Неравенствата $a<b$, $a>b$ се наричат строги, а неравенствата $a\leqq b$, $a\geqq b$ — нестроги неравенства.

Реалните числа, които са по-големи от числото 0, се наричат положителни, а ония, които са по-малки от 0 — отрицателни. Числото 0 е единственото реално число, което не е нито положително, нито отрицателно.

Неравенствата удовлетворяват още следните изисквания:

11) Ако $a\leqq b$, $b\leqq c$, то $a\leqq c$.

12) Ако $a\leqq b$, $c\leqq d$, то $a+c\leqq b+d$.

13) Ако $0\leqq a\leqq b$, $0\leqq c\leqq d$, то $0\leqq ac\leqq bd$.

Забележка. Свойствата 11), 12) и 13) остават в сила, ако навсякъде знакът $\leqq$ бъде заменен със знака $<$.

Като следствия от изброените свойства могат да се установят и следните твърдения:

Сумата и произведението на две положителни числа са също положителни числа.

Ако $a>b$, то $-a<-b$. По-специално, ако $a>0$, то $-a<0$.

Ако $a<b$, то $b-a>0$ и обратно.

Числото 1 е положително.

V. На всяка двойка числа a и p, където a е положително, а p — произволно реално число, съответствува едно положително реално число, наречено „a в степен p", което бележим с a^p. Осъществяването на това съответствие, т. е. намирането на числото a^p, се нарича повдигане в степен или степенуване и е подчинено на следните изисквания:

14) $a^0=1$ за всяко положително число a.

15) Ако n е естествено число, то $a^n=aa\ldots a$, където броят на множителите от дясната страна на това равенство е n.

16) $(ab)^p=a^pb^p$ за всяка двойка положителни числа a и b и за всяко реално число p.

17) $a^pa^q=a^{p+q}$ за всяко положително число a и за всяка двойка реални числа p и q.

18) $(a^p)^q=a^{pq}$ за всяко положително число a и за всяка двойка реални числа p и q.

19) Ако $a>1$ и $p>0$, то $a^p>1$.

С помощта на тези свойства на действието степенуване могат да се докажат още и следните твърдения:

$1^p=1$ за всяко реално число p.

$a^{-p}=\frac{1}{a^p}$ за всяко $a>0$ и за всяко реално p.

Ако $a>1$ и $p<0$, то $a^p<1$.

Ако $0<a<1$ и $p>0$, то $a^p<1$.

Ако $0<a<1$ и $p<0$, то $a^p>1$.

Забележка. Когато степенният показател p има вида $\frac{1}{n}$, където n е едно естествено число, то често вместо с $a^{\frac{1}{n}}$ си служим с означението $\sqrt[n]{a}$, което се чете „корен n-ти от a". Съгласно свойство 18) за всяко положително число a имаме

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n=a,\quad \sqrt[n]{a^n}=a.$$

Реалните числа притежават по-нататък и следното свойство:

20) Ако a и b са две положителни реални числа и ако $a\neq 1$, то уравнението $a^x=b$ има винаги, и то едно единствено решение относно x. Това решение се бележи с $\log_a b$ и се нарича „логаритъм от b при основа a".

Ясно е, че при $a>0$, $a\neq 1$ и $b>0$ имаме

$$a^{\log_a b}=b.$$

Лесно се проверява също, че при $a>0$ и $a\neq 1$ са изпълнени равенствата

$$\log_a a=1,\qquad \log_a 1=0.$$

Също тъй лесно се доказват равенствата

$$\log_a(bc)=\log_a b+\log_a c,\qquad \log_a\frac{b}{c}=\log_a b-\log_a c$$

при $a>0$, $a\neq 1$, $b>0$ и $c>0$, както и равенството

$$\log_a(b^p)=p\log_a b$$

при $a>0$, $a\neq 1$, $b>0$, p — произволно.

Връзката между логаритмите на едно и също положително число c, взети при две различни основи a и b, се дава с равенството

$$\log_b c=\log_a c.\log_b a.$$

Това равенство се получава по следния начин: Полагаме $\log_a c=\alpha$ и $\log_b c=\beta$. Тогава от равенството $a^\alpha=b^\beta$ получаваме $\beta=\log_b a^\alpha$, или $\beta=\alpha\log_b a$, след което заместваме α и β със съответните изрази.

VI. Вече споменахме, че ако $a>0$, то $-a<0$, т. е. че ако $a\neq 0$, то от двете противоположни числа a и $-a$ едното е положително, а другото — отрицателно. Онова от тях, което е положително, се нарича абсолютна стойност или модул на числото a и се бележи с $|a|$. По такъв начин, когато $a>0$, имаме $|a|=a$, а когато $a<0$, имаме $|a|=-a$.

Абсолютната стойност на числото 0 по дефиниция приемаме равна на 0.

От казаното дотук е ясно, че за всяко реално число a имаме

$$a\leq|a|\quad\text{и}\quad -a\leq|a|.$$

Лесно се установява, че за всяка двойка реални числа a и b имаме

21) $|a+b|\leq|a|+|b|$.

22) $|a-b|\geq|a|-|b|$.

23) $|ab|=|a|\,.\,|b|$.

Нека забележим още, че, както не е трудно да се види, неравенството $|x|<a$ е равносилно с неравенствата $-a<x<a$.

VII. Както вече отбелязахме, всяко число, което е сума от единици, се нарича естествено число. Лесно се вижда, че:

24) Сумата и произведението на две естествени числа са също така естествени числа.

Следващите две свойства, отнасящи се до естествените числа, носят специални названия.

25) Принцип на Архимед. Не съществува реално число, по-голямо от всички естествени числа.

Като използуваме терминологията, въведена малко по-нататък, това твърдение може да се изкаже и така: множеството от естествените числа не е ограничено отгоре.

26) *Принцип за пълната математическа индукция.* Ако едно множество N от естествени числа съдържа числото 1 и ако от това, че N съдържа n, следва, че N съдържа и $n+1$, то множеството N съдържа всички естествени числа.

Всяко число, което може да се представи като разлика на две естествени числа, се нарича *цяло* число. Всяко естествено число е цяло. И наистина всяко естествено число n може да се представи като разлика на естествените числа $n+1$ и 1. Числото 0 е също цяло число, тъй като например $0=1-1$. Множеството на естествените числа съвпада с множеството на целите положителни числа. Не е трудно да се установи, че:

27) Сумата, разликата и произведението на две цели числа са също цели числа.

Всяко число, което се явява частно на две цели числа, се нарича *рационално* число. Всяко цяло число е рационално, тъй като за всяко цяло число n имаме $n=\frac{n}{1}$. В сила е твърдението:

28) Сумата, разликата, произведението и частното на две рационални числа са също рационални числа.

Забележка. Що се отнася до частното на две рационални числа, това твърдение е валидно, разбира се, само когато това частно съществува, т. е. когато знаменателят му е различен от нула.

Онези реални числа, които не са рационални, се наричат *ирационални*.

За да се убедим, че съществуват ирационални числа, нека покажем, че например числото $\sqrt{2}$ е ирационално. Да допуснем, че $\sqrt{2}$ е рационално число. Тогава ще имаме $\sqrt{2}=\frac{p}{q}$, където p и q са естествени числа. Можем при това да допуснем, че p и q са взаимно прости, т. е. че те нямат общ делител, различен от 1 (ако те имаха такъв, ние бихме могли да го съкратим). От равенството $p=\sqrt{2}q$ получаваме $p^2=2q^2$. Оттук виждаме, че числото p^2 е четно, откъдето пък заключаваме, че и p е четно число. Тогава $p=2k$, където k е някое естествено число. Следователно ще имаме $4k^2=2q^2$, или $2k^2=q^2$. Сега пък заключаваме, че числото q^2, а заедно с него и числото q е четно. И така p и q са четни числа, което обаче противоречи на това, че ние ги избрахме взаимно прости. Полученото противоречие показва, че числото $\sqrt{2}$ е ирационално.

В сила е по-нататък следното твърдение:

29) *Гъстота на рационалните и ирационалните числа.* Ако a и b са две реални числа и $a<b$, то съществуват поне едно рационално число r и поне едно ирационално число s, такива, че $a<r<b$ и $a<s<b$.

Оттук лесно заключаваме, че между* всеки две различни реални

---

* Казваме, че числото c се намира *между* числата a и b, ако $a<c<b$ или $b<c<a$.

числа се намират както безбройно много рационални, така и безбройно много ирационални числа.

VIII. Преди да формулираме следващото особено важно свойство на множеството на реалните числа, ще се запознаем с някои дефиниции.

Едно множество M, съставено от реални числа, се нарича *ограничено отгоре*, ако съществува такова реално число b, че за всяко число x от множеството M да имаме $x\leqq b$. Числото b се нарича в такъв случай *горна граница* на множеството M. Нека отбележим изрично, че самото число b може да принадлежи, а може и да не принадлежи на множеството M.

Така например множеството S от всички отрицателни реални числа е ограничено отгоре, тъй като всяко число от това множество е помалко от числото 0. Числото 0 представлява една горна граница на множеството S, при това такава, която не принадлежи на това множество. Разбира се, числото 0 не е единствената горна граница на множеството S — всяко произволно взето положително число е също горна граница на S.

Изобщо, когато едно множество M от реални числа е ограничено отгоре, то притежава винаги безбройно много горни граници. И наистина, ако b е една горна граница на множеството M, то всяко число, по-голямо от b, ще бъде очевидно също горна граница на това множество.

Нека M е едно ограничено отгоре множество от реални числа. Да си зададем въпроса: има ли между неговите горни граници една най-малка, т. е. една такава, която да бъде по-малка от всяка друга. Отговорът на този въпрос (който не е очевиден) е утвърдителен. В това именно се състои и следното извънредно важно свойство на реалните числа:

30) *Принцип за непрекъснатост.* Ако едно множество M от реални числа е ограничено отгоре, то между неговите горни граници винаги има една най-малка.

Тази най-малка горна граница ще наричаме занапред *точна горна граница*. Тогава принципът за непрекъснатост може да се изкаже и така:

Всяко ограничено отгоре множество от реални числа притежава точна горна граница.

Разбира се, за точната горна граница на едно ограничено отгоре множество M от реални числа имаме също така две възможности — тя да принадлежи или да не принадлежи на множеството M.

Лесно можем да съобразим, че ако измежду числата x, съдържащи се в дадено множество M, има едно най-голямо — да го означим с x_0, то това число е точната горна граница на множеството M. И наистина числото x_0 удовлетворява неравенството $x\leqq x_0$ за всяко число x от M и следователно е горна граница на множеството M. От друга страна, всяка друга горна граница b на множеството M удовлетворява неравенството $b\geqq x_0$.

Възможно е обаче дадено множество от реални числа да бъде ограничено отгоре, без то да притежава най-голямо число (какъвто е например случаят с множеството от всички отрицателни реални числа). В такъв случай точната горна граница е число, непринадлежащо на даденото множество.

Аналогично на понятието горна граница се въвежда и понятието долна граница. А именно едно множество M от реални числа се нарича ограничено отдолу, ако съществува такова число a, че за всяко число x от M да имаме $a \leq x$. Тогава числото a се нарича долна граница на множеството M. Всяко ограничено отдолу множество от реални числа притежава безбройно много долни граници. Най-голямата от тях се нарича точна долна граница. С помощта на принципа за непрекъснатост може да се установи, че тази най-голяма долна граница винаги съществува, т. е. че е в сила твърдението:

Всяко ограничено отдолу множество от реални числа притежава точна долна граница.

Точната долна граница на едно ограничено отдолу множество M от реални числа може, разбира се, да принадлежи или да не принадлежи на M. Ако множеството M съдържа едно най-малко число, то това число представлява същевременно и неговата точна долна граница.

Когато едно множество M от реални числа е ограничено както отгоре, така и отдолу, то се нарича накратко ограничено. Съгласно казаното това означава, че съществуват две реални числа a и b такива, че за всяко число x от M да имаме $a \leq x \leq b$.

Всяко множество от реални числа, което не е ограничено, ще наричаме неограничено. Така например множеството от естествените числа, както и множеството от целите числа са неограничени (първото от тях не е ограничено отгоре, а второто — нито отгоре, нито отдолу).

IX. Особено често ще срещаме един специален вид множества от реални числа, наречени интервали.

Нека a и b са две реални числа и нека $a < b$. Множеството от всички реални числа x, удовлетворяващи неравенствата $a < x < b$, ще бележим (a, b) и ще наречем отворен интервал. Числото a е ляв край, а числото b — десен край на този интервал. Множеството пък от числата x, удовлетворяващи неравенствата $a \leq x \leq b$, ще бележим $[a, b]$ и ще наричаме затворен интервал. Затвореният интервал $[a, b]$ съдържа очевидно всички числа от отворения интервал (a, b), но освен тях той съдържа още и своите краища — числата a и b. Интервалите $[a, b)$ и $(a, b]$ се наричат полузатворени (или полуотворени). Първият от тях е множеството от числата x, за които имаме $a \leq x < b$, а вторият — множеството от ония x, за които имаме $a < x \leq b$.

Всички изброени дотук видове интервали образуват фамилията на крайните интервали. Освен с тях ние ще работим и с така наречените безкрайни интервали. Това са също специални множества от реални числа. Така интервалът (a, ∞) представлява множеството от всички реални числа x, за които имаме $x > a$, интервалът $[a, \infty)$ пък се състои от всички числа x, за които $x \geq a$. Аналогично интервалът $(-\infty, a)$ се състои от ония реални числа x, които удовлетворяват неравенството $x < a$, а интервалът $(-\infty, a]$ — от ония x, за които $x \leq a$. Най-сетне множеството на всички реални числа също ще разглеждаме като безкраен интервал, който ще означаваме $(-\infty, \infty)$.

Черт. 1

Като използуваме понятието интервал, можем сега да изкажем дефиницията на понятието ограничено множество по следния начин:

Едно множество M от реални числа се нарича ограничено, когато съществува някакъв краен интервал, който съдържа всички числа от M.

X. Често за по-голяма нагледност в разсъжденията ние ще изобразяваме реалните числа като точки върху една права. Това става по следния начин: В геометрията се установява, че ако изберем една отсечка като единица-мярка за дължина, то всяка друга отсечка ще има за дължина някакво положително реално число — рационално, когато измерваната отсечка е съизмерима с отсечката-единица, или пък ирационално, когато е несъизмерима с нея. Обратно, всяко положително реално число може да се разглежда като дължина на някоя отсечка.

Да разгледаме сега една права, която е начертана хоризонтално, и да си изберем върху нея една точка, която ще ни изобразява числото 0. След това да си вземем една отсечка, която ще ни служи за единица-мярка. На всяко положително реално число x ще съответствува тогава някаква отсечка — отсечката с дължина x. Ако единият край на тази отсечка съвпада с точката 0 и я нанесем надясно върху нашата права, то другият ѝ край ще съвпадне с някаква точка, която именно ще изобразява числото x. Ако пък нанесем същата отсечка наляво от точката 0, ще получим друга точка върху нашата права — тази точка ще изобразява числото $-x$ (черт. 1). По такъв начин всяко реално число се изобразява като точка от разглежданата права. Обратно, всяка точка от тази права изобразява някакво реално число — това число е положително, когато точката лежи вдясно от точката 0, и отрицателно, когато тя лежи вляво от нея. Ето защо в бъдеще много често вместо думата реално число ще употребяваме думата точка. Самата права пък, върху която нанасяме реалните числа, ще наречем реална права.

Не е трудно да се съобрази, че ако a и b са две реални числа, то неравенството $a < b$ е равносилно с изискването точката a да се намира вляво от точката b върху реалната права. Разстоянието пък между тези две точки, което се дава с дължината на свързващата ги отсечка и което ще наричаме дължина на интервала (a, b), се равнява на $b - a$. На тези именно забележки се основава онази нагледност в разсъжденията, която получаваме, когато изобразяваме реалните числа като точки.

Нека въведем още едно понятие, което ще срещаме често по-нататък — понятието околност на число или, както ще казваме обикновено, **околност на точка**. Ако a е едно реално число, или все едно една точка от реалната права, то всеки отворен интервал от вида $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$, където ε е някакво положително реално число, ще наричаме **околност** на точката a. Поради произволния избор на положителното число ε е ясно, че всяка точка a притежава безбройно много околности.*

С оглед на нашата бъдеща работа е полезно да отбележим следното. Ако ε е положително число, а x и a са две реални числа, то неравенството

$$|x-a|<\varepsilon$$

е еквивалентно, както знаем, с неравенствата

$$-\varepsilon<x-a<\varepsilon,$$

които пък от своя страна са равносилни с неравенствата

$$a-\varepsilon<x<a+\varepsilon.$$

По такъв начин виждаме, че множеството от числата x, удовлетворяващи неравенството $|x-a|<\varepsilon$ при дадени a и ε, съвпада с отворения интервал $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$.

Накрая нека въведем за по-голямо удобство едно твърде често използвано в съвременната математика означение. Когато едно число a принадлежи на дадено множество M, ние записваме този факт така: $a\in M$. Като си послужим с това означение, можем да изкажем направената по-горе забележка по следния начин:

Неравенството $|x-a|<\varepsilon$ е равносилно с условието $x\in(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$.

Б. Някои предварителни сведения

I. Някои означения:

а) Нека n е цяло положително число. Прието е произведението

$$1\,.\,2\,.\,3\ldots n$$

да се означава накратко така: $n!$ (чете се „n факториел"). От някои съображения за удобство въвеждаме и символа $0!$, като по дефиниция $0!=1$.

б) Нека n е произволно реално число, а k — цяло положително число. Символът $\binom{n}{k}$ (чете се „n над k"), с който се означава един израз, срещащ се при различни въпроси от математиката, се въвежда с равенството

$$\binom{n}{k}=\frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{1.2\ldots k}.$$

Когато не само k, но и n е цяло положително число и при това $k\leqq n$, това равенство може да се напише и във вида

$$\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Оказва се удобно да се въведе отделно и символът $\binom{n}{0}$ с помощта на равенството

$$\binom{n}{0}=1$$

за всяко реално число n.

в) Често пъти дадена сума от n събираеми се записва кратко с помощта на един специален символ — символа Σ. Това е възможно, когато можем да напишем израз, в който участвува някакъв променлив параметър (например k), така че, като даваме на този параметър последователни стойности, например стойностите от 1 до n или пък от 0 до $n-1$, да получаваме съответните събираеми от дадената сума. Ето за пример няколко равенства, поясняващи казаното — в дясната страна на всяко от тях е записана в кратка форма сумата, която подробно е написана в лявата:

$$1+q+q^2+\cdots+q^{n-1}=\sum_{k=0}^{n-1}q^k,$$

$$\sin x+\sin 2x+\cdots+\sin nx=\sum_{k=1}^{n}\sin kx,$$

$$a_1+a_2+\cdots+a_n=\sum_{k=1}^{n}a_k.$$

II. Биномна формула на Нютон:

Ако a и b са две реални числа, а n е цяло положително число, то

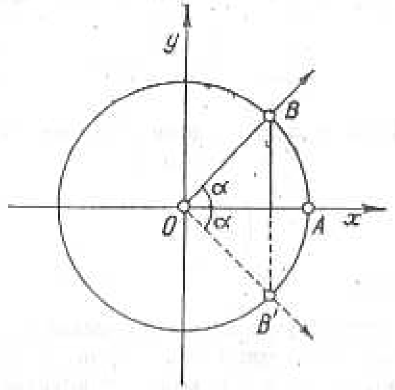
$$(a+b)^n=\binom{n}{0}a^n+\binom{n}{1}a^{n-1}b+\binom{n}{2}a^{n-2}b^2+\cdots+\binom{n}{n}b^n.$$

Това равенство носи названието **формула на нютоновия бином**. То може лесно да бъде установено с помощта на принципа за пълната математическа индукция.

* Понякога е удобно интервалът $(-\infty, \infty)$ да бъде разглеждан също като околност на дадена точка a. По такъв начин този интервал се явява околност на всяка точка от реалната права.

III. Радиан. Неравенството $|\sin x| \leqq |x|$:

Навсякъде в настоящия курс, където се говори за ъгли, те ще бъдат измервани в радиани. Както е известно, един радиан е големината на ъгъла, притежаващ следното свойство: ако опишем окръжност с център върха на този ъгъл и произволен радиус, то раменете на ъгъла отсичат



Черт. 2

от тази окръжност дъга с дължина, равна на дължината на радиуса. Оттук следва, че ако раменете на един ъгъл отсичат от една окръжност с център върха на ъгъла дъга с дължина l и ако радиусът на окръжността има дължина r, то големината на ъгъла, измерена в радиани, е равна на $\frac{l}{r}$. Ако радиусът на окръжността е 1, то големината на ъгъла, измерена в радиани, е просто равна на l. Така пълният ъгъл има големина 2π радиана, правият ъгъл е $\frac{\pi}{2}$ радиана и т. н.

Нека отбележим следното неравенство, използващо се по-нататък в настоящия курс:

$$|\sin \alpha| \leqq |\alpha| \text{ за всяко } \alpha.$$

(Тук α е големината на ъгъл, измерен в радиани.) Това неравенство е очевидно, когато $|\alpha| \geqq \frac{\pi}{2}$. Когато $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$, то се вижда от следните геометрични съображения: Ако $\sphericalangle AOB=\alpha$ и ако опишем една окръжност с център O и радиус 1 (черт. 2), то дъгата $\overset{\frown}{BAB'}$ има големина 2α, а големината на хордата BB' е равна на $2\sin\alpha$. Ясно е тогава, че ще имаме $0<\sin\alpha<\alpha$. При $-\frac{\pi}{2}<\alpha<0$ неравенството $|\sin\alpha| \leqq |\alpha|$ следва от това, че в този случай $0<-\alpha<\frac{\pi}{2}$, и от факта, че $\sin(-\alpha)=-\sin\alpha$. Най-сетне имаме $\sin 0=0$. По такъв начин желаното неравенство е доказано за всяко реално число α.

ЧАСТ I
РЕДИЦИ И РЕДОВЕ

ГЛАВА I

БЕЗКРАЙНИ РЕДИЦИ

Целта на тази първа глава от нашия курс е да се запознаем с най-основното понятие на математическия анализ — понятието **граница**. По-точно ще се запознаем с понятието **граница на една безкрайна редица** и ще изучим неговите свойства.

§ 1. Редици. Ограничени и неограничени редици

Ще казваме, че ни е дадена една **безкрайна редица** (или по-кратко — една **редица**) от реални числа, когато по някакво правило на всяко естествено число е съпоставено някое реално число. Ако с a_1 означим онова число, което е съпоставено на числото 1, с a_2 — онова, което е съпоставено на числото 2, и т. н., изобщо с a_n — онова реално число, което е съпоставено на естественото число n, то дадената редица ще се записва обикновено така:

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$$

Числата a_1, a_2 и т. н. се наричат **членове** на редицата — a_1 е нейният първи член, a_2 — втори и т. н.; n-тият член a_n се нарича още и **общ член** на редицата. Числото n пък се нарича **номер** или **индекс** на члена a_n.

От казаното дотук е ясно, че всяка редица се състои от безбройно много членове. Разбира се, някои от тези членове (даже всичките) могат да бъдат равни на едно и също реално число.

Една редица ние считаме за дадена, когато ни е известно правилото за получаване на нейните членове. Това правило може да бъде изразено по различни начини. Обикновено се дава някаква формула за пресмятане на общия член на редицата. Ето няколко примера на безкрайни редици, записани по два начина — подробно и посредством формула за n-тия им член:

(1) $1, 2, 3, \ldots, n, \ldots,$ или $a_n = n$;

(2) $2, 4, 6, \ldots, 2n, \ldots,$ или $a_n = 2n$;

(3) $1, 1, 1, \ldots, 1, \ldots,$ или $a_n = 1$;

(4) $\quad 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots, \qquad$ или $a_n = \frac{1}{n}$;

(5) $\quad 1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, (-1)^{n-1}\frac{1}{n}, \ldots, \quad$ или $a_n = (-1)^{n-1}\frac{1}{n}$.

Ето и други примери за безкрайни редици, при които n-тият член се записва по по-сложен начин:

(6) $\quad 1, 0, 1, 0, \ldots,$ или $a_n = \begin{cases} 1 & \text{при нечетно } n \\ 0 & \text{при четно } n; \end{cases}$

(7) $\quad 1, -1, 2, -2, \ldots,$ или $a_n = \begin{cases} \frac{n+1}{2} & \text{при нечетно } n \\ -\frac{n}{2} & \text{при четно } n; \end{cases}$

(8) $\quad 0, 1, 0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{3}, \ldots,$ или $a_n = \begin{cases} 0 & \text{при нечетно } n \\ \frac{2}{n} & \text{при четно } n. \end{cases}$

Една редица може да бъде зададена и индуктивно, т. е. по начин основан на пълната математическа индукция. Например може да бъдат дадени нейният първи член a_1 и някаква формула за пресмятане на a_{n+1} посредством a_n. Така например равенствата

(9) $$a_1 = 2, \; a_{n+1} = a_n^2 - 1$$

дефинират редица, първите няколко члена на която са следните:

$$2, 3, 8, 63, \ldots.$$

Или пък може да бъдат дадени a_1 и a_2 и освен това някаква формула, чрез която a_{n+2} се пресмята в зависимост от a_n и a_{n+1}. Такава е например редицата, зададена с равенствата

(10) $$a_1 = 0, \; a_2 = 1, \; a_{n+2} = \frac{a_n + a_{n+1}}{2},$$

въз основа на които получаваме по-подробно

$$0, 1, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{5}{8}, \ldots$$

Най-сетне правилото за получаване на n-тия член на една редица може да не бъде записано с каквато и да било формула, а просто да бъде изказано с думи. Например да разгледаме редицата, n-тият член на която е n-тото (поред) просто естествено число. (Едно естествено число, по-голямо от 1, се нарича просто, когато то се дели без остатък само на числото 1 и на себе си.) Ето първите няколко члена на тази редица:

(11) $$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, \ldots$$

Една редица

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$$

се нарича **ограничена отгоре**, когато множеството от нейните членове, разглеждано като множество от реални числа, е ограничено отгоре, т. е. когато съществува такова число β, че $a_n \leq \beta$ за всяко n. Числото β се нарича тогава **горна граница** на дадената редица. Аналогично, когато съществува такова число α, че $a_n \geq \alpha$ за всяко n, то редицата се нарича **ограничена отдолу**, а числото α — нейна **долна граница**. Най-сетне една редица се нарича накратко **ограничена**, когато е ограничена и отгоре, и отдолу, т. е. когато съществуват две такива числа α и β, че за всички членове на редицата да имаме $\alpha \leq a_n \leq \beta$. Другояче казано, една редица е ограничена, когато съществува някакъв краен интервал $[\alpha, \beta]$, който съдържа всички нейни членове. Всяка редица, която не е ограничена, се нарича **неограничена**.

Когато една редица е ограничена отгоре, тя притежава, разбира се, безбройно много горни граници, една от които е най-малка — това е нейната **точна горна граница**. Също така всяка ограничена отдолу редица притежава безбройно много долни граници, една от които е най-голяма — **точната ѝ долна граница**.

Лесно се вижда, че редиците (3), (4), (5), (6) и (8) са ограничени. (Посочете за всяка от тях по една горна и една долна граница!) Редиците (1), (2) и (11) са ограничени само отдолу, но не и отгоре, докато редицата (7) не е ограничена нито отгоре, нито отдолу. Следователно редиците (1), (2), (7) и (11) са неограничени.

Упражнения. 1. Напишете първите няколко члена на редиците, дадени със следните формули:

$$a_n = \sqrt{n}; \quad a_n = \frac{1}{3^n}; \quad a_n = \frac{1 + (-1)^{n-1}}{2}; \quad a_n = \frac{n!}{n^n}.$$

2. Напишете формули за n-тите членове на редиците:

$$3, \sqrt{3}, \sqrt[3]{3}, \ldots;$$

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots;$$

$$1, -1, 2, -2, 3, -3, \ldots$$

3. Докажете, че редицата, дадена с равенствата (9), е неограничена. Упътване: Установете с помощта на пълната математическа индукция, че $a_n \geq n$.

4. Докажете, че редицата, дадена с равенствата (10), е ограничена. Упътване: Използувайте, че $0 \leq a_1 \leq 1$, $0 \leq a_2 \leq 1$, и покажете, че ако $0 \leq a_n \leq 1$ и $0 \leq a_{n+1} \leq 1$, то $0 \leq a_{n+2} \leq 1$, след което направете заключението въз основа на пълната математическа индукция.

5. Дайте пример за редица, която е ограничена отгоре, но не и отдолу.

Друг важен пример за сходяща редица ни дава геометричната прогресия

$$q,\ q^2,\ q^3,\ \dots,\ q^n,\ \dots \tag{4}$$

Ще покажем, че ако $0<q<1$, то тази редица е сходяща и $\lim q^n=0$. И наистина да си вземем отново произволно положително число ε и да си образуваме след това числото $\nu=\log_q \varepsilon$. Тогава при $n>\nu$ от неравенствата $0<q<1$ и $n-\nu>0$ ще следва $q^{n-\nu}<1$ или, което е все едно, $q^n<q^\nu$. И така при $n>\nu$ получаваме

$$|q^n-0|=q^n<q^\nu=q^{\log_q \varepsilon}=\varepsilon,$$

т. е. установяваме, че при $n>\nu$ е изпълнено неравенството (3). С това е установено, че $\lim q^n=0$.

Да разгледаме и един съвършено прост, но често срещан пример. Нека всички членове на една редица са равни на едно и също реално число a, т. е. нека е дадена редицата

$$a,\ a,\ \dots,\ a,\ \dots \tag{5}$$

В случая $a_n=a$ за всяко n. Лесно е да се види, че тази редица е сходяща и клони към a. Действително каквото и да бъде положителното число ε, неравенството (3) е изпълнено за всички членове на редицата, тъй като то се превръща в очевидното неравенство

$$|a-a|<\varepsilon.$$

Тогава каквато и стойност да дадем на ν, например $\nu=1$, изискването на дефиницията за сходимост ще бъде удовлетворено. И така $\lim a=a$.

Упражнение. За всяка от дадените редици докажете, че е сходяща, и намерете границата ѝ:

а) $1,\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{5},\ \dots,\ \frac{1}{2n-1},\ \dots;$

б) $\frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{6},\ \dots,\ \frac{1}{2n},\ \dots;$

в) $1,\ -\frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \dots,\ (-1)^{n-1}\frac{1}{n},\ \dots;$

г) $\frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{4},\ \dots,\ \frac{n}{n+1},\ \dots$

§ 3. Свойства на сходящите редици

Нека спрем още веднъж вниманието си върху дефиницията за сходяща редица. Както казахме, ние наричаме едно число a граница на дадена редица

$$a_1,\ a_2,\ \dots,\ a_n,\ \dots, \tag{1}$$

ако за всяко положително число ε съществува такова число ν, че при $n>\nu$ да имаме

$$|a_n-a|<\varepsilon. \tag{2}$$

Числото ν, както вече изтъкнахме, зависи от избора на числото ε. Не трябва да се мисли обаче, че на всяко положително число ε съответствува едно единствено число ν. Наистина, ако вземем някое число ν такова, че при $n>\nu$ да бъде изпълнено неравенството (2), то всяко друго число ν_1, което е по-голямо от ν, ще притежава същото свойство, т. е. същото неравенство (2) ще бъде изпълнено и при $n>\nu_1$.

Друга особеност, на която желаем да обърнем внимание, е следната: В дефиницията за сходимост се изисква неравенството (2) да бъде изпълнено само за онези членове a_n на дадената редица, чиито номера n са по-големи от някое число ν. За членовете с по-малки номера не се изисква нищо, те могат да бъдат каквито и да е. Всичко това ни дава основание да изкажем следното твърдение:

Ако в една сходяща редица променим стойностите на краен брой нейни членове, то сходимостта на редицата няма да се наруши и границата ѝ няма да се промени.

Това е така, тъй като съгласно направените забележки винаги можем да считаме, че сме взели числото ν толкова голямо, че направените промени в членовете на редицата да не се отразяват на верността на неравенството (2) при $n>\nu$.

С подобни разсъждения можем да се убедим и във верността на следното твърдение:

Ако от една сходяща редица премахнем краен брой членове или пък прибавим краен брой нови членове към нея, то получената редица е също сходяща и има същата граница.

За да формулираме кратко друго едно просто свойство на сходящите редици, ще въведем следното понятие: Ако премахнем някои членове (краен брой или пък безбройно много) от дадена редица (1)

$$a_1,\ a_2,\ \dots,\ a_n,\ \dots,$$

но така, че да останат все пак безбройно много членове, и ако останалите членове вземем в същия ред, в който те са били в редицата (1), ще получим нова безкрайна редица

$$a_{n_1},\ a_{n_2},\ \dots,\ a_{n_k},\ \dots \tag{3}$$

която се нарича **п о д р е д и ц а** на редицата (1). Тук n_k е номерът на члена a_{n_k} в редицата (1), а числото k е номерът на a_{n_k}, разглеждан вече като член на редицата (3). Ясно е, че

$$(4) \qquad n_1 < n_2 < \ldots < n_k < \ldots$$

Лесно се вижда валидността на следното твърдение:

Ако една редица е сходяща и клони към числото a, то всяка нейна подредица е също сходяща и клони също към a.

И наистина, ако редицата (1) е сходяща и $\lim a_n = a$ и ако за дадено положително число ε неравенството

$$|a_n - a| < \varepsilon$$

е изпълнено при $n > \nu$, то при $k > \nu$ ще бъде изпълнено и неравенството

$$|a_{n_k} - a| < \varepsilon.$$

Това е така, понеже от неравенствата (4) е ясно, че $n_k \geqq k$, и следователно при $k > \nu$ ще имаме и $n_k > \nu$.

Всичко това означава, че $\lim\limits_{k \to \infty} a_{n_k} = a$.

Едно основно свойство на сходящите редици се дава със следната

Теорема 1. *Всяка сходяща редица е ограничена.*

Д о к а з а т е л с т в о. Нека е дадена сходящата редица

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$$

с граница a. Да вземем числото $\varepsilon = 1$. От сходимостта на редицата следва, че ще съществува такова число ν, че при $n > \nu$ да имаме

$$|a_n - a| < 1$$

или, което е все едно,

$$a - 1 < a_n < a + 1.$$

Последните неравенства показват, че всички членове от дадената редица, чиито номера са по-големи от ν, се намират в интервала $(a-1, a+1)$. Ако има такива членове a_n, които лежат извън този интервал, то техните номера няма да надминават числото ν и следователно те ще бъдат краен брой. Ясно е тогава, че ще можем да намерим един такъв краен интервал $[\alpha, \beta]$, който да съдържа в себе си както целия интервал $(a-1, a+1)$, така и всички ония членове a_n на редицата, които лежат вън от този интервал. Тогава интервалът $[\alpha, \beta]$ ще съдържа всички членове от разглежданата редица. А това означава, че тази редица е ограничена.

Следствие. *Ако една редица е неограничена, тя е разходяща.*

Сега лесно можем да покажем, че съществуват разходящи редици. И наистина въз основа на горното следствие можем да заключим, че например редиците (1), (2), (7), (9) и (11) от § 1 са разходящи, тъй като всички те са неограничени.

Не всички разходящи редици обаче са неограничени. Съществуват редици, които са ограничени и разходящи.

Такава е например редицата

$$(5) \qquad 1, 0, 1, 0, \ldots$$

Тя е очевидно ограничена. Ако допуснем обаче, че е сходяща, и означим нейната граница с l, то и двете ѝ подредици

$$1, 1, \ldots, 1, \ldots,$$

$$0, 0, \ldots, 0, \ldots$$

(първата от които е образувана от членовете ѝ с нечетни номера, а втората — от членовете ѝ с четни номера) ще трябва да клонят към l. Но ние знаем, че първата от тях клони към 1, а втората — към 0. Получаваме противоречие, което показва, че редицата (5) е разходяща.

Следващите няколко теореми изразяват други важни свойства на сходящите редици.

Теорема 2. *Ако са дадени две сходящи редици*

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$$

и

$$b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots,$$

при което $\lim a_n = a$ *и* $\lim b_n = b$, *и ако за всяко n имаме $a_n \leqq b_n$, то $a \leqq b$.*

Д о к а з а т е л с т в о. Да допуснем, че $a > b$. Тъй като числото $\varepsilon = \frac{a-b}{2}$ ще бъде в такъв случай положително, ще можем да намерим такова число ν_1, че при $n > \nu_1$ да имаме $|a_n - a| < \varepsilon$, и също тъй такова ν_2, че при $n > \nu_2$ да имаме $|b_n - b| < \varepsilon$. Ако означим с ν по-голямото от двете числа ν_1 и ν_2, то при $n > \nu$ ще бъдат изпълнени и двете неравенства $|a_n - a| < \varepsilon$ и $|b_n - b| < \varepsilon$, които могат да се напишат още така:

$$a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon \quad \text{и} \quad b - \varepsilon < b_n < b + \varepsilon.$$

Но

$$a - \varepsilon = a - \frac{a-b}{2} = \frac{a+b}{2} = b + \frac{a-b}{2} = b + \varepsilon.$$

Тогава при $n > \nu$ ще получим $b_n < b + \varepsilon = a - \varepsilon < a_n$, т. е. $b_n < a_n$, противно на условието, според което $a_n \leqq b_n$ за всяко n. Полученото противоречие ни показва, че неравенството $a > b$ е невъзможно, т. е. че $a \leqq b$.

Следствие. *Ако редицата*

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$$

е сходяща и $\lim a_n = a$ *и ако за всяко n имаме $a_n \leqq l$, където l е някакво реално число, то и $a \leqq l$.*

Действително, ако заедно с дадената редица разгледаме и редицата

$$l, l, \ldots, l, \ldots,$$

която, както знаем, е сходяща и клони към l, то, като приложим току-що доказаната теорема към тези две редици, ще получим желаното твърдение.

Разбира се, по същия начин можем да се убедим, че от $\lim a_n = a$ и $a_n \geqq l$ следва $a \geqq l$.

Теорема 3. *Ако редицата*

(1) $$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$$

е сходяща и клони към a и ако $a < l$, то съществува такова число ν, че при $n > \nu$ е изпълнено неравенството $a_n < l$.

Доказателство. Нека $\varepsilon = l - a$ и нека числото ν е взето така, че при $n > \nu$ да имаме $|a_n - a| < \varepsilon$ — това е възможно, тъй като a е границата на редицата (1). От последното неравенство получаваме

$$a_n < a + \varepsilon = a + l - a = l,$$

т. е. $a_n < l$ при $n > \nu$. С това теоремата е доказана.

Аналогично се доказва, че ако $\lim a_n = a$ и $a > l$, то за достатъчно големи стойности на n, т. е. за стойности на n, по-големи от някое число ν, ще бъде изпълнено неравенството $a_n > l$.

Теорема 4. *Нека са дадени трите редици*

(6) $$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots,$$

(7) $$b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots,$$

(8) $$c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots$$

и нека $a_n \leqq c_n \leqq b_n$ за всяко n. Ако редиците (6) и (7) са сходящи и имат обща граница l, то и редицата (8) е също сходяща и клони към l.

Доказателство. Нека ε е произволно положително число. Поради сходимостта на редиците (6) и (7) ние можем да намерим такова число ν_1, че при $n > \nu_1$ да имаме

(9) $$|a_n - l| < \varepsilon,$$

и такова число ν_2, че при $n > \nu_2$ да имаме

(10) $$|b_n - l| < \varepsilon.$$

Ако ν е число, по-голямо както от ν_1, така и от ν_2, то при $n > \nu$ ще бъдат удовлетворени и двете неравенства (9) и (10). Тези неравенства са равносилни с неравенствата

$$l - \varepsilon < a_n < l + \varepsilon, \quad l - \varepsilon < b_n < l + \varepsilon.$$

Но тогава при $n > \nu$ ще имаме

$$l - \varepsilon < a_n \leqq c_n \leqq b_n < l + \varepsilon,$$

т. е. $l - \varepsilon < c_n < l + \varepsilon$ или, което е все едно, $|c_n - l| < \varepsilon$. С това е установено, че $\lim c_n = l$.

Теорема 5. *Ако редицата*

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$$

е сходяща и клони към a, то редицата

$$|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_n|, \ldots$$

е също сходяща и клони към $|a|$.

Доказателство. Нека ε е произволно положително число. Съществува такова число ν, че при $n > \nu$ имаме $|a_n - a| < \varepsilon$. Но от неравенствата

$$|a_n| - |a| \leqq |a_n - a|$$

и

$$|a| - |a_n| \leqq |a_n - a|$$

следва неравенството

$$\big|\,|a_n| - |a|\,\big| \leqq |a_n - a|.$$

Оттук заключаваме, че при $n > \nu$ имаме също

$$\big|\,|a_n| - |a|\,\big| < \varepsilon,$$

с което теоремата е доказана.

Теорема 6. *Ако една от двете редици*

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots,$$

$$|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_n|, \ldots$$

клони към 0, то и другата също клони към 0.

Доказателство. Наистина нека ε е произволно положително число. Неравенствата $|a_n - 0| < \varepsilon$ и $\big|\,|a_n| - 0\big| < \varepsilon$ са очевидно равносилни. Следователно, ако съществува такова число ν, че при $n > \nu$ е изпълнено едното от тях, то при същите стойности на n ще бъде изпълнено и другото.

Като използуваме тази теорема, можем да видим например, че разглежданата в предишния параграф геометрична прогресия

$$q, q^2, q^3, \ldots, q^n, \ldots$$

представлява сходяща редица с граница 0, когато $-1 < q < 1$ (а не само когато $0 < q < 1$). И наистина при $q = 0$ това е очевидно, а при $-1 < q < 0$ от неравенството $|q| < 1$ следва (както знаем от предишния параграф), че $\lim |q|^n = 0$. Оттук заключаваме, че и $\lim q^n = 0$.

Особено полезна се оказва следната

Теорема 7 (теорема за действия със сходящите редици). *Ако редиците*

(11) $$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots,$$

(12) $$b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$$

са сходящи и $\lim a_n = a$, $\lim b_n = b$, то редиците

(13) $$a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_n + b_n, \ldots,$$

(14) $$a_1 - b_1, a_2 - b_2, \ldots, a_n - b_n, \ldots,$$

(15) $$a_1 b_1, a_2 b_2, \ldots, a_n b_n, \ldots$$

са също сходящи. В случай, когато $b_n \neq 0$ за всяко n и $b \neq 0$, сходяща е също тъй и редицата

$$(16) \qquad \frac{a_1}{b_1},\ \frac{a_2}{b_2},\ \ldots,\ \frac{a_n}{b_n},\ \ldots$$

При това

$\lim (a_n+b_n)=a+b,\ \lim(a_n-b_n)=a-b,\ \lim a_nb_n=ab,\ \lim \frac{a_n}{b_n}=\frac{a}{b}.$

Д о к а з а т е л с т в о. а) Да разгледаме най-напред редицата (13). Нека ε е едно произволно положително число. Да вземем още едно положително число ε', за което по-късно ще уточним как именно сме го избрали. Поради сходимостта на редиците (11) и (12) можем да намерим такива числа ν_1 и ν_2, че да имаме $|a_n-a|<\varepsilon'$ при $n>\nu_1$ и $|b_n-b|<\varepsilon'$ при $n>\nu_2$. Тогава, ако ν е число, по-голямо както от ν_1, така и от ν_2, при $n>\nu$ ще имаме

$$|(a_n+b_n)-(a+b)|=|(a_n-a)+(b_n-b)|$$

$$(17) \qquad \leqq |a_n-a|+|b_n-b|<\varepsilon'+\varepsilon'=2\varepsilon'.$$

Ясно е, че ако вземем $\varepsilon'=\frac{\varepsilon}{2}$, неравенството (17) при $n>\nu$ ще ни даде

$$|(a_n+b_n)-(a+b)|<\varepsilon.$$

С това е установено, че редицата (13) е сходяща и че

$$\lim (a_n+b_n)=a+b.$$

б) Доказателството за сходимостта на редицата (14) и на равенството $\lim (a_n-b_n)=a-b$ се извършва по същия начин, като обаче вместо веригата от равенства и неравенства (17) се използува следната:

$$|(a_n-b_n)-(a-b)|=|(a_n-a)+(b-b_n)|$$

$$\leqq |a_n-a|+|b_n-b|<\varepsilon'+\varepsilon'=2\varepsilon'.$$

в) Да разгледаме сега редицата (15). Преди всичко ще отбележим, че от сходимостта на редицата (11) следва сходимостта и на редицата

$$|a_1|,\ |a_2|,\ \ldots,\ |a_n|,\ \ldots$$

Тъй като всяка сходяща редица, както знаем, е ограничена, ще съществува такова положително число A, за което $|a_n|<A$ при всяко n. Нека сега ε е произволно положително число. Да вземем още и положителното число ε', за което си запазваме свободата да определим по-късно как сме го избрали. Като вземем пред вид сходимостта на редиците (11) и (12), можем да намерим такива числа ν_1 и ν_2, че при $n>\nu_1$ да бъде изпълнено неравенството $|a_n-a|<\varepsilon'$, а при $n>\nu_2$ — неравенството $|b_n-b|<\varepsilon'$. Тогава, ако ν е число, по-голямо и от ν_1, и от ν_2, ще имаме при $n>\nu$

$$|a_nb_n-ab|=|a_nb_n-a_nb+a_nb-ab|=|a_n(b_n-b)+b(a_n-a)|$$

$$\leqq |a_n|\,.\,|b_n-b|+|b|\,.\,|a_n-a|<A\,.\,\varepsilon'+|b|\,.\,\varepsilon'=\varepsilon'(A+|b|).$$

Ако вземем $\varepsilon'=\frac{\varepsilon}{A+|b|}$, то ще получим при $n>\nu$

$$|a_nb_n-ab|<\varepsilon.$$

С това е доказана сходимостта на редицата (15), а също и равенството $\lim a_nb_n=ab$.

г) Най-сетне нека е дадено, че $b_n\neq 0$ за всяко n и че $b\neq 0$. Да разгледаме редицата (16). Нека изберем едно произволно положително число ε, а след това още едно положително число ε', което ще зависи от ε, но стойността на което ще уточним по-късно. Поради сходимостта на редиците (11) и (12) ще съществуват такива числа ν_1 и ν_2, че да имаме $|a_n-a|<\varepsilon'$ при $n>\nu_1$ и $|b_n-b|<\varepsilon'$ при $n>\nu_2$. Тъй като числото $\frac{|b|}{2}$ е също положително, то отново поради сходимостта на редицата (12) ще съществува и такова число ν_3, че при $n>\nu_3$ да имаме $|b_n-b|<\frac{|b|}{2}$, откъдето $|b|-|b_n|<\frac{|b|}{2}$ или $|b_n|>\frac{|b|}{2}$. Тогава, ако ν е число, по-голямо от трите числа ν_1, ν_2, ν_3, при $n>\nu$ ще имаме

$$\left|\frac{a_n}{b_n}-\frac{a}{b}\right|=\frac{|a_nb-ab_n|}{|b_nb|}=\frac{|a_nb-ab+ab-ab_n|}{|b_n|\,.\,|b|}$$

$$=\frac{|(a_n-a)b+(b-b_n)a|}{|b_n|\,.\,|b|}\leqq\frac{2}{|b|}\,\frac{1}{|b|}\,(|a_n-a|\,.\,|b|+|b_n-b|\,.\,|a|)$$

$$<\frac{2}{b^2}(\varepsilon'|b|+\varepsilon'|a|)=\frac{2}{b^2}(|a|+|b|)\,\varepsilon'.$$

Виждаме, че ако вземем $\varepsilon'=\frac{b^2}{|a|+|b|}\cdot\frac{\varepsilon}{2}$, то при $n>\nu$ ще имаме

$$\left|\frac{a_n}{b_n}-\frac{a}{b}\right|<\varepsilon.$$

Поради произволния избор на числото ε това означава, че редицата (16) е сходяща и че $\lim\frac{a_n}{b_n}=\frac{a}{b}$.

Теоремата за действия със сходящите редици е едно удобно средство за намиране границите на някои редици. Да разгледаме например редицата с общ член

$$a_n=\frac{2n^2-5n+3}{3n^2+1}.$$

Като разделим числителя и знаменателя с n^2, получаваме

$$a_n=\frac{2-\frac{5}{n}+\frac{3}{n^2}}{3+\frac{1}{n^2}}\,.$$

Както знаем от § 2, $\lim\frac{1}{n}=0$. Тогава

$$\lim\left(2-\frac{5}{n}+\frac{3}{n^2}\right)=\lim 2-\lim 5\,.\lim\frac{1}{n}+\lim 3\,.\lim\frac{1}{n}\cdot\lim\frac{1}{n}=2,$$

$$\lim\left(3+\frac{1}{n^2}\right)=\lim 3+\lim\frac{1}{n}\cdot\lim\frac{1}{n}=3,$$

откъдето

$$\lim a_n=\frac{3}{2}\,.$$

Теорема 8. *Ако двете редици*

$$a_1,\ a_2,\ldots,a_n,\ldots,$$
$$b_1,\ b_2,\ldots,b_n,\ldots$$

са сходящи и клонят към една и съща граница l, редицата

(18) $$a_1,\ b_1,\ a_2,\ b_2,\ldots,a_n,\ b_n,\ldots,$$

получена от тяхното алтернативно комбиниране, е също сходяща и клони към същата граница.

Доказателство. Да запишем редицата (18) във вида

$$c_1,\ c_2,\ldots,c_m,\ldots$$

Тогава $c_{2n-1}=a_n$ и $c_{2n}=b_n$ за $n=1, 2, \ldots$ За всяко положително число ε съществува такова ν_1, че при $n>\nu_1$ да имаме $|a_n-l|<\varepsilon$, както и такова ν_2, че при $n>\nu_2$ да имаме $|b_n-l|<\varepsilon$. Нека ν' е по-голямото от двете числа ν_1 и ν_2 и нека $\nu=2\nu'$. Ако сега $m>\nu$, както при $m=2n-1$, тъй и при $m=2n$ ще имаме $n>\nu'$ и следователно ще бъдат изпълнени неравенствата $|a_n-l|<\varepsilon$ и $|b_n-l|<\varepsilon$, т. е. неравенството $|c_m-l|<\varepsilon$. С това теоремата е доказана.

Упражнения. Докажете сходимостта и намерете границите на следните редици:

1. $a_n=\frac{8n^2-n+2}{2n^2+3n+3}$. 2. $a_n=\frac{3n^3+2n+5}{3n^3+n^2+1}$.

3. $a_n=\frac{2n}{n^2+1}$. 4. $a_n=\frac{n^2+5n+2}{7n^3-2n^2+1}$. 5. $a_n=\frac{n!}{(n+1)!-n!}$.

6. $a_n=\frac{1}{1\,.\,2}+\frac{1}{2\,.\,3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}$. Упътване: използувайте равенството

$$\frac{1}{k(k+1)}=\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\,.$$

7. $a_n=\frac{\sin n\alpha}{n}$ (α е реално число). Упътване: използувайте, че $-1\leqq\sin n\alpha\leqq 1$, и приложете теорема 3.

8. $a_n=\frac{n}{n^2+1}+\frac{n}{n^2+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n}$. Упътване: използувайте теорема 4.

9. $a_n=\frac{1+2+\cdots+n}{3n^2}$. Упътване: използувайте формулата за сума на аритметична прогресия.

§ 4. Монотонни редици. Теорема на Кантор

Една редица

$$a_1,\ a_2,\ldots,a_n,\ldots$$

се нарича растяща, ако за всяко n е изпълнено неравенството $a_n\leqq a_{n+1}$. Ако пък $a_n\geqq a_{n+1}$ за всяко n, то тя се нарича намаляваща. Растящите и намаляващите редици образуват фамилията на така наречените монотонни редици. Ако се върнем отново към примерите от § 1, ще видим, че редиците (1), (2) и (3) са растящи, а редиците (3) и (4) — намаляващи (редицата (3) е едновременно и растяща, и намаляваща). Редиците (5), (6), (7) и (8) от § 1 не са нито растящи, нито намаляващи — те не са монотонни.

Всяка растяща редица е сигурно ограничена отдолу, тъй като нейният първи член се явява същевременно и нейна долна граница. Една растяща редица обаче може да бъде неограничена отгоре. Аналогично една намаляваща редица е винаги ограничена отгоре, но не винаги отдолу.

Както видяхме, една редица може да бъде ограничена, без да бъде сходяща. При монотонните редици обаче това е невъзможно.

Теорема. *Всяка ограничена монотонна редица е сходяща. При това, ако е растяща, тя клони към своята точна горна граница, а ако е намаляваща — към точната си долна граница.*

Доказателство. Нека редицата

(1) $$a_1,\ a_2,\ldots,a_n,\ldots$$

е растяща и ограничена (случаят на намаляваща редица се третира аналогично) и нека l е нейната точна горна граница. Да изберем едно произволно положително число ε. Тъй като l е най-малката горна граница на редицата (1), то числото $l-\varepsilon$, като по-малко от l, не може да бъде горна граница на тази редица. А това значи, че съществува някакъв член a_{n_0} от редицата, такъв, че $a_{n_0}>l-\varepsilon$. Но от монотонността на редицата следва, че при $n>n_0$ ще имаме $a_n\geqq a_{n_0}$, откъдето

$$l-\varepsilon<a_{n_0}\leqq a_n\leqq l<l+\varepsilon.$$

И така при $n>n_0$ са изпълнени неравенствата $l-\varepsilon<a_n<l+\varepsilon$, които са равносилни с неравенството

$$|a_n-l|<\varepsilon.$$

Поради произволния избор на числото ε това означава, че редицата (1) е сходяща и $\lim a_n=l$. С това теоремата е доказана.

Като първо приложение на теоремата за монотонните редици ще установим известната теорема на Кантор, отнасяща се до редици от затворени интервали.

Теорема на Кантор. *Нека е дадена една безкрайна редица от затворени интервали*

$$[a_1, b_1], [a_2, b_2], \dots, [a_n, b_n], \dots,$$

удовлетворяващи следните две условия:

а) *всеки интервал от тази редица съдържа следващия;*

б) *редицата от дължините на интервалите клони към* 0.

Тогава съществува, и то една единствена точка ξ, *съдържаща се във всичките интервали.*

Доказателство. Съгласно условието на теоремата интервалът $[a_{n+1}, b_{n+1}]$ е подинтервал на интервала $[a_n, b_n]$. Оттук следват неравенствата

$$a_n \leqq a_{n+1} \quad \text{и} \quad b_{n+1} \leqq b_n. \tag{2}$$

Освен това ясно е, че интервалът $[a_1, b_1]$ съдържа всички интервали от дадената редица, и следователно за всяко n имаме

$$a_1 \leqq a_n < b_n \leqq b_1. \tag{3}$$

Да разгледаме сега двете числови редици

$$a_1, a_2, \dots, a_n, \dots, \tag{4}$$

$$b_1, b_2, \dots, b_n, \dots, \tag{5}$$

първата от които е образувана от левите краища на дадените интервали, а втората — от техните десни краища. Неравенствата (2) показват, че тези две редици са монотонни — първата е растяща, а втората — намаляваща. От неравенствата (3) пък се вижда, че те са и ограничени. Следователно те са сходящи. Нека $\lim a_n = \alpha$, $\lim b_n = \beta$. От неравенствата $a_n < b_n$ получаваме $\alpha \leqq \beta$. Тогава за всяко n ще имаме

$$a_n \leqq \alpha \leqq \beta \leqq b_n, \tag{6}$$

откъдето

$$0 \leqq \beta - \alpha \leqq b_n - a_n.$$

От друга страна обаче, съгласно условието б) на теоремата имаме $\lim (b_n - a_n) = 0$. Оттук следва, че $\beta - \alpha = 0$, или $\alpha = \beta$, т. е. че редиците (4) и (5) клонят към една и съща граница. Ако означим тази обща граница с ξ, то неравенствата (6) ще преминат в неравенствата

$$a_n \leqq \xi \leqq b_n, \tag{7}$$

които са изпълнени за всяко n и които следователно показват, че точката ξ лежи във всичките интервали $[a_n, b_n]$.

Най-сетне лесно се вижда, че точката ξ е единствената точка с това свойство. Ако допуснем, че някоя друга точка ξ', различна от точката ξ, също така удовлетворява неравенствата

$$a_n \leqq \xi' \leqq b_n,$$

то от неравенството $|\xi - \xi'| \leqq b_n - a_n$ и от условието $\lim (b_n - a_n) = 0$ би следвало, че $|\xi - \xi'| = 0$, или $\xi = \xi'$, т. е. бихме стигнали до противоречие. И така теоремата е доказана.

С оглед приложението на теоремата на Кантор при доказателството на някои други теореми ще отбележим още следното:

Каквато и околност $(\xi - \delta, \xi + \delta)$ на намерената по-горе точка ξ да вземем, всички интервали $[a_n, b_n]$ от редицата (2) с достатъчно големи номера ще се съдържат в тази околност. И наистина, тъй като $\lim (b_n - a_n) = 0$, ще съществува някое ν, такова, че при $n > \nu$ да имаме $b_n - a_n < \delta$. От неравенствата (7) получаваме

$$\xi - a_n \leqq b_n - a_n, \qquad b_n - \xi \leqq b_n - a_n.$$

Тогава при $n > \nu$ ще имаме

$$\xi - a_n < \delta, \qquad b_n - \xi < \delta,$$

откъдето

$$\xi - \delta < a_n \quad \text{и} \quad b_n < \xi + \delta.$$

А тези неравенства именно показват, че затвореният интервал $[a_n, b_n]$ се съдържа изцяло в отворения интервал $(\xi - \delta, \xi + \delta)$.

Упражнения. 1. Да се докаже, че редицата с общ член

$$a_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+n}$$

е сходяща.

Упътване: Покажете, че $a_n < a_{n+1}$ и $a_n < 1$.

2. Да се докаже, че редицата, чиито членове са зададени с помощта на равенствата

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{a_n^2 + 4}{4},$$

е сходяща и да се намери границата ѝ.

Упътване: Покажете, че редицата е растяща и че $a_n \leqq 2$ (неравенството установете чрез метода на математическата индукция). Границата намерете, като използувате равенството, свързващо a_{n+1} и a_n.

§ 5. Числото e

В този параграф ще се запознаем с една забележителна редица — редицата с общ член

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n,$$

и ще покажем, че тя е сходяща. Границата на тази редица играе важна роля в математиката. Като използуваме биномната формула на Нютон, получаваме

$$a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1+\binom{n}{1}\frac{1}{n}+\binom{n}{2}\frac{1}{n^2}+\dots+\binom{n}{k}\frac{1}{n^k}+\dots+\binom{n}{n}\frac{1}{n^n}$$

$$=1+\frac{n}{1!}\frac{1}{n}+\frac{n(n-1)}{2!}\frac{1}{n^2}+\dots+\frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}\frac{1}{n^k}$$

$$+\dots+\frac{n(n-1)\dots(n-n+1)}{n!}\frac{1}{n^n}$$

$$=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}\frac{n-1}{n}+\dots+\frac{1}{k!}\frac{n-1}{n}\frac{n-2}{n}\dots\frac{n-k+1}{n}$$

$$+\dots+\frac{1}{n!}\frac{n-1}{n}\frac{n-2}{n}\dots\frac{n-n+1}{n},$$

откъдето

$$a_n=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\dots+\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)$$

$$+\dots+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right).$$

Като заместим в последното равенство n с $n+1$, получаваме

$$a_{n+1}=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)+\dots+\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n+1}\right)$$

$$+\dots+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n+1}\right)$$

$$+\frac{1}{(n+1)!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{n}{n+1}\right).$$

Но при $k=2, 3, \dots, n$ имаме

$$\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)<\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n+1}\right),$$

т. е. всяко от събираемите, участвуващи в израза за a_n, не надминава съответното събираемо в израза за a_{n+1}. Последното събираемо в израза за a_{n+1}, което не съответствува на никое от събираемите в израза за a_n, е положително. Следователно $a_n<a_{n+1}$, т. е. редицата е растяща.

От неравенствата

$$\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)<\frac{1}{k!} \quad (k=2, 3, \dots, n)$$

пък следва, че

$$a_n<1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\dots+\frac{1}{n!}=1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2.3}+\dots+\frac{1}{2.3\dots n}$$

$$\leqq 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\dots+\frac{2}{2^{n-1}}=1+\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}}=1+2-\frac{1}{2^{n-1}}<3.$$

И така за всяко n имаме $a_n<3$, т. е. редицата е ограничена отгоре. Тя е ограничена, разбира се, и отдолу, тъй като е растяща. Както знаем обаче, всяка монотонна редица, която е ограничена, е сходяща.

Границата на редицата с общ член $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ се нарича **неперово*** **число** и се бележи с буквата e. Може да се покаже, че това число е ирационално. Ето първите няколко негови десетични знака:

$$e=2{,}7182818284\dots$$

Числото e се взема за основа на така наречената **естествена** (**натурална**) логаритмична система. Прието е естествените логаритми на числата вместо с $\log_e x$ да се означават с $\ln x$:

Упражнения. 1. Намерете границите на редиците със следните общи членове:

а) $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+2}$; б) $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{3n}$; в) $\left(1+\frac{1}{n+3}\right)^{2n}$.

2. Докажете, че за всяко цяло число k имаме $\lim\left(1+\frac{k}{n}\right)^n=e^k$.

Упътване: Най-напред установете твърдението за положителни стойности на k, като си послужите с пълната математична индукция, проведена по отношение на k. За целта се възползувайте от равенствата

$$1+\frac{k+1}{n}=\frac{n+k+1}{n}=\frac{n+1}{n}\frac{n+k+1}{n+1}=\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{k}{n+1}\right).$$

След това докажете твърдението за цели отрицателни стойности на k, като положите $k=-s$ (където s е положително число) и използувате при $n>s$ равенствата

$$1-\frac{s}{n}=\frac{n-s}{n}=\frac{1}{\frac{n}{n-s}}=\frac{1}{\frac{n-s+s}{n-s}}=\frac{1}{1+\frac{s}{n-s}}.$$

3. Намерете границите на редиците със следните общи членове:

а) $\left(\frac{n+2}{n}\right)^n$; б) $\left(\frac{n+5}{n+4}\right)^n$; в) $\left(\frac{n-3}{n+2}\right)^n$; г) $\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n$.

Упътване: Използувайте зад. 2.

§ 6*. Теорема на Болцано—Вайерщрас

Ограничените редици, както знаем, не са непременно сходящи. Въпреки това ограничените редици притежават едно свойство, което е свързано със свойството сходимост. То е изказано в следната

* Дж. Непер (1550—1617) е шотландски математик, който пръв е въвел логаритмите в математиката.

Теорема на Болцано—Вайерщрас. *Всяка ограничена редица притежава поне една сходяща подредица.*

Доказателство. Нека редицата

(1) $$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$$

е ограничена и нека $[\alpha, \beta]$ е един интервал, съдържащ всички нейни членове. Да разделим този интервал на две равни части и да означим с $[\alpha_1, \beta_1]$ един от така получените негови подинтервали, при това такъв, който съдържа безбройно много членове на дадената редица — поне един от двата интервала има това свойство, иначе би излязло, че цялата редица се състои от краен брой членове. Да вземем след това един член a_{n_1} от редицата (1), който се съдържа в интервала $[\alpha_1, \beta_1]$. След това да разделим $[\alpha_1, \beta_1]$ на два равни по големина подинтервала, да означим с $[\alpha_2, \beta_2]$ единия от тях, избран така, че да съдържа безбройно много членове от редицата (1), и да означим с a_{n_2} един член от тази редица, който се съдържа в $[\alpha_2, \beta_2]$ и чийто номер n_2 удовлетворява неравенството $n_2 > n_1$ (член с такъв номер сигурно ще се намери в интервала $[\alpha_2, \beta_2]$, щом като този интервал съдържа безбройно много членове от редицата (1)). Продължавайки по този начин неограничено, ние ще получим една безкрайна редица от затворени интервали

(2) $$[\alpha_1, \beta_1], [\alpha_2, \beta_2], \ldots, [\alpha_k, \beta_k], \ldots$$

и една редица

(3) $$a_{n_1}, a_{n_2}, \ldots, a_{n_k}, \ldots,$$

съставена от членове на редицата (1), такива, че $a_{n_k} \in [\alpha_k, \beta_k]$ и

(4) $$n_1 < n_2 < \ldots < n_k < \ldots$$

Неравенствата (4) показват, че редицата (3) е подредица на редицата (1). Що се отнася до редицата (2) от интервалите $[\alpha_k, \beta_k]$, тя, както веднага се вижда, удовлетворява условията на теоремата на Кантор. Следователно ще съществува една точка ξ, принадлежаща на всички тези интервали. Съгласно бележката от края на § 4 за всяко положително число ε можем да намерим такова число ν, че при $k > \nu$ всички интервали $[\alpha_k, \beta_k]$ да се съдържат в интервала $(\xi - \varepsilon, \xi + \varepsilon)$. Оттук следва, че и всички a_{n_k} при $k > \nu$ се съдържат в този отворен интервал и следователно удовлетворяват неравенството

$$|a_{n_k} - \xi| < \varepsilon.$$

Това пък означава, че редицата (3), която беше една подредица на редицата (1), е сходяща и клони към ξ. С това теоремата е доказана.

§ 7*. Необходимо и достатъчно условие на Коши за сходимост на редици

Когато искаме, излизайки от дефиницията за сходимост, да установим, че дадена редица е сходяща, ние се сблъскваме със следното неудобство — за да проверим условието на дефиницията, трябва предварително да познаваме границата на разглежданата редица. Ето защо

интересно е да разполагаме с такова необходимо и достатъчно условие за сходимост на една редица, в което да не става дума за нейната граница. Такова е т. нар. условие на Коши, съдържащо се в следната

Теорема на Коши. *За да бъде редицата*

(1) $$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$$

сходяща, е необходимо и достатъчно за всяко положително число ε да съществува такова число ν, че при $m > \nu$ и $n > \nu$ да бъде изпълнено неравенството

$$|a_m - a_n| < \varepsilon.$$

Доказателство. Да установим най-напред необходимостта на условието. Нека редицата (1) е сходяща и a е нейната граница. Можем да намерим такова число ν, че при $n > \nu$ да имаме $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$. Тогава при $m > \nu$ и $n > \nu$ е изпълнено

$$|a_n - a_m| = |a_n - a + a - a_m| \leqq |a_n - a| + |a_m - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

С това необходимостта на условието е доказана.

Да докажем сега неговата достатъчност. Ще допуснем, че условието на Коши, изказано във формулировката на теоремата, е изпълнено. Да приложим това условие при $\varepsilon = 1$. Ще съществува такова число ν, че при $n > \nu$ и $m > \nu$ да имаме

$$|a_n - a_m| < 1.$$

Ако сега фиксираме един член a_m, чийто номер m е по-голям от ν, то от последното неравенство ще получим

$$a_m - 1 < a_n < a_m + 1$$

при $n > \nu$. Това означава, че всички членове на редицата (1) с номера, по-големи от ν, се намират в интервала $(a_m - 1, a_m + 1)$. А тъй като членовете с номера, по-малки от ν, са краен брой, то ще можем да намерим такъв краен интервал $[\alpha, \beta]$, който съдържа всички членове на редицата (1). Следователно тази редица е ограничена. Съгласно теоремата на Болцано—Вайерщрас тя ще притежава тогава поне една сходяща подредица

(2) $$a_{n_1}, a_{n_2}, \ldots, a_{n_k}, \ldots$$

чиято граница нека означим с a.

Ще покажем, че редицата (1) е сходяща и клони също към a. За целта да вземем едно произволно положително число ε. Поради сходимостта на редицата (2) можем да намерим такова число ν_1, че при $k > \nu_1$

(3) $$|a_{n_k} - a| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

От друга страна, съгласно условието на Коши, което предполагаме за изпълнено, ще съществува и такова ν, че

(4) $$|a_n - a_m| < \frac{\varepsilon}{2}$$

при $n>\nu$, $m>\nu$. Нека сега $n>\nu$. Да изберем номера k толкова голям, че да са изпълнени неравенствата $k>\nu_1$ и $n_k>\nu$. Тогава въз основа на неравенствата (3) и (4) ще получим

$$|a_n-a|=|a_n-a_{n_k}+a_{n_k}-a|\leqq|a_n-a_{n_k}|+|a_{n_k}-a|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

И така при $n>\nu$ е изпълнено неравенството

$$|a_n-a|<\varepsilon.$$

Това означава, че редицата (1) е сходяща и има граница a. С това теоремата е доказана.

§ 8. Редици, клонящи към безкрайност

Понякога думата к л о н и се употребява и по отношение на някои редици, които са разходящи. А именно оказва се удобно да се въведе следната

Дефиниция. *Ще казваме, че редицата*

(1) $$a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n,\ \ldots$$

к л о н и к ъ м б е з к р а й н о с т, и ще бележим това така:

$$\lim a_n=\infty \quad \text{или} \quad a_n\to\infty,$$

когато при всеки избор на положителното число A може да се намери такова число ν, че при $n>\nu$ да имаме $a_n>A$.

За да поясним смисъла на тази дефиниция, нека отбележим, че числото A се взема произволно и следователно може да бъде избрано колкото искаме голямо. Така че в дефиницията в същност се иска членовете на редицата да могат да станат по-големи от всяко положително число колкото и голямо да е то, стига номерата на тези членове да станат достатъчно големи.

Аналогично: *казваме, че редицата* (1) *клони към минус безкрайност, и записваме това така:*

$$\lim a_n=-\infty \quad \text{или} \quad a_n\to-\infty,$$

ако за всяко отрицателно число B съществува такова число ν, че при $n>\nu$ да имаме $a_n<B$.

Лесно се вижда например, че редиците

$$1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n,\ \ldots,$$

$$2,\ 4,\ 6,\ \ldots,\ 2n,\ \ldots$$

клонят към ∞, а редицата

$$-1,\ -2,\ -3,\ \ldots,\ -n,\ \ldots$$

клони към $-\infty$.

Ще покажем, че е валидна следната

Теорема 1. *Нека е дадена редицата*

(1) $$a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n,\ \ldots$$

и нека $a_n>0$ за всяко n. Да образуваме редицата

(2) $$\frac{1}{a_1},\ \frac{1}{a_2},\ \ldots,\ \frac{1}{a_n},\ \ldots$$

Ако $\lim a_n=0$, то $\lim\frac{1}{a_n}=\infty$ и, обратно, ако $\lim a_n=\infty$, то $\lim\frac{1}{a_n}=0$.

Д о к а з а т е л с т в о. Нека $\lim a_n=0$. Да си изберем едно произволно положително число A. Ако $\varepsilon=\frac{1}{A}$, то съгласно дефиницията за сходяща редица ще съществува такова число ν, че при $n>\nu$ ще имаме $|a_n-0|<\varepsilon$ или, което е все едно, $a_n<\frac{1}{A}$. Оттук ще получим $\frac{1}{a_n}>A$ при $n>\nu$. Това означава, че $\lim\frac{1}{a_n}=\infty$.

Нека сега пък $\lim a_n=\infty$. Да вземем произволно положително число ε и да си образуваме числото $A=\frac{1}{\varepsilon}$. Съгласно дефиницията за редица, клоняща към безкрайност, можем да намерим такова число ν, че при $n>\nu$ да имаме $a_n>A$, т. е. $a_n>\frac{1}{\varepsilon}$, откъдето получаваме $\frac{1}{a_n}<\varepsilon$ или $|\frac{1}{a_n}-0|<\varepsilon$.

Следователно $\lim\frac{1}{a_n}=0$.

П р и м е р. Ако $q>1$, то за геометричната прогресия

$$q,\ q^2,\ \ldots,\ q^n,\ \ldots$$

имаме $\lim q^n=\infty$. Наистина в такъв случай редицата

$$\frac{1}{q},\ \frac{1}{q^2},\ \ldots,\ \frac{1}{q^n},\ \ldots$$

е геометрична прогресия с частно $\frac{1}{q}$, удовлетворяваща неравенствата $0<\frac{1}{q}<1$. Следователно $\lim\frac{1}{q^n}=0$, откъдето $\lim q^n=\infty$.

Лесно се доказват също следните теореми:

Теорема 2. *Нека редицата*

$$a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n,\ \ldots$$

е сходяща, т. е. нека $\lim a_n=a$, където a е някакво реално число. Ако за редицата

$$b_1,\ b_2,\ \ldots,\ b_n,\ \ldots$$

имаме $\lim b_n=\infty$, то

$$\lim(a_n+b_n)=\infty.$$

Ако пък $\lim b_n=-\infty$, то

$$\lim(a_n+b_n)=-\infty.$$

Теорема 3. *Нека за редицата*

$$a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n,\ \ldots$$

е дадено, че $\lim a_n = a$ *и нека* $a \neq 0$. *Ако за редицата*

$$b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$$

имаме $\lim b_n = \infty$, *то при* $a > 0$ *имаме*

$$\lim a_n b_n = \infty,$$

а при $a < 0$

$$\lim a_n b_n = -\infty.$$

Като частен случай на тази теорема се явява твърдението:

Ако редицата

$$c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots$$

клони към ∞, то редицата

$$-c_1, -c_2, \ldots, -c_n, \ldots$$

клони към $-\infty$ и обратно.

Теорема 4. *Ако за редиците*

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots,$$

$$b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$$

имаме $\lim a_n = \infty$ и $\lim b_n = \infty$, *то* $\lim (a_n + b_n) = \infty$ и $\lim a_n b_n = \infty$.

Ако пък $\lim a_n = -\infty$ и $\lim b_n = -\infty$, *то* $\lim (a_n + b_n) = -\infty$ и $\lim a_n b_n = \infty$.

Най-сетне, ако $\lim a_n = \infty$ и $\lim b_n = -\infty$, *то* $\lim a_n b_n = -\infty$.

Упражнения. 1. Докажете, че $\lim \sqrt{n} = \infty$.

2. Намерете: а) $\lim \frac{n^2}{n+1}$; б) $\lim \frac{n^3-5}{2n+3}$; в) $\lim \frac{1-n^2}{3+n}$;

г) $\lim \frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}}$; д) $\lim(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1})$.

3. Покажете, че редицата, зададена с равенствата $a_1 = 3$, $a_{n+1} = a_n^2 - 1$, клони към ∞.

Упътване: С помощта на принципа за математическата индукция покажете, че $a_n \geq n+1$.

ГЛАВА II

БЕЗКРАЙНИ РЕДОВЕ

Тази глава е посветена на изучаването на понятието **безкраен ред** от реални числа и неговите свойства — едно понятие, тясно свързано с понятието безкрайна редица, но играещо твърде голяма самостоятелна роля в математическия анализ.

§ 9. Сходящи и разходящи редове

Нека е дадена една редица от реални числа

(1) $$u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$$

Ако започнем да събираме последователно членовете на тази редица, ще получим следните суми:

$$S_1 = u_1,$$
$$S_2 = u_1 + u_2,$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$$

и т. н.

Да разгледаме редицата

$$S_1, S_2, \ldots, S_n, \ldots$$

Ако тази редица е сходяща и ако S е нейната граница, то ние сме склонни да разглеждаме числото S като число, което се е получило като че ли в резултат от последователно събиране на всички членове от редицата (1) — една операция, сама по себе си невъзможна. Такъв възглед прави естествена следната

Дефиниция. *Израз от вида*

(2) $$u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \ldots,$$

където $u_1, u_2, \ldots$ *са реални числа, се нарича* ***безкраен ред*** *от реални числа или по-кратко* ***ред****. Числата* $u_1, u_2, \ldots$ *се наричат* ***членове*** *на този ред. Сумата*

$$S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$$

се нарича *n*-та *частична (парциална) сума на реда. Най-сетне, ако редицата от частичните му суми*

(3) $$S_1,\ S_2, \dots, S_n, \dots$$

е сходяща и клони към S, то редът се нарича сходящ, а числото S — негова сума.

Фактът, че числото S е сума на реда (2), се записва с помощта на равенството

(4) $$S = u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$$

Ако редицата (3) от частичните суми на един ред е разходяща, то и самият ред се нарича разходящ.

Нека подчертаем, че понятието сума на ред се дефинира само за сходящите редове. Разходящите редове не притежават сума. Ясно е тогава, че изразът (2) може, както показва равенството (4), да се схваща като число само когато той представлява сходящ ред. В противен случай той не представлява никакво число.

Изразът (2) се записва за краткост още и по следния начин:

(5) $$\sum_{n=1}^{\infty} u_n.$$

Лесно се вижда, че съществуват разходящи редове. Така например редът

(6) $$1 + 1 + \dots + 1 + \dots,$$

всички членове на който са равни на 1, е разходящ, тъй като редицата от неговите частични суми

$$1,\ 2,\ 3, \dots, n, \dots,$$

както знаем, е разходяща.

За да покажем пък, че съществуват и сходящи редове, ще разгледаме следния важен пример: Реда

(7) $$1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1} + \dots$$

ще наричаме геометрична прогресия (т. е. ще употребим същото наименование, което бяхме използували вече за редицата с общ член q^{n-1}). Ще покажем, че когато числото q удовлетворява неравенствата $-1<q<1$, редът геометрична прогресия (7) е сходящ. За целта да си образуваме неговата n-та частична сума:

$$S_n = 1 + q + \dots + q^{n-1} = \frac{1-q^n}{1-q}.$$

Както знаем от § 3, $\lim q^n = 0$, когато $-1<q<1$. Следователно за такива стойности на q ще имаме

$$\lim S_n = \lim \frac{1-q^n}{1-q} = \frac{1}{1-q} - \frac{1}{1-q}\lim q^n = \frac{1}{1-q}.$$

И така виждаме, че при $-1<q<1$, т. е. при $|q|<1$, редът (7) е сходящ и неговата сума е $\frac{1}{1-q}$, т. е. можем да напишем равенството

$$\frac{1}{1-q} = 1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1} + \dots$$

Нека отбележим някои най-прости свойства на сходящите редове, които следват непосредствено от самата дефиниция за сходимост на ред:

Ако всички членове на един сходящ ред

(8) $$u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$$

умножим с едно и също число a, то полученият ред

(9) $$au_1 + au_2 + \dots + au_n + \dots$$

е също сходящ и ако S е сумата на реда (8), то сумата на реда (9) е aS.

Наистина, ако

$$S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n,$$

$$\sigma_n = au_1 + au_2 + \dots + au_n,$$

то $\sigma_n = aS_n$ и от $\lim S_n = S$ получаваме $\lim \sigma_n = aS$.

Ако са дадени два сходящи реда, съответно със суми S′ и S″, т. е. ако

$$S' = u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots,$$

$$S'' = v_1 + v_2 + \dots + v_n + \dots,$$

то редовете

$$(u_1+v_1) + (u_2+v_2) + \dots + (u_n+v_n) + \dots$$

и

$$(u_1-v_1) + (u_2-v_2) + \dots + (u_n-v_n) + \dots$$

са също сходящи и сумата на първия от тях е S′+S″, а на втория е S′−S″.

И наистина, ако

$$S'_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n,$$

$$S''_n = v_1 + v_2 + \dots + v_n,$$

$$\sigma_n = (u_1+v_1) + (u_2+v_2) + \dots + (u_n+v_n),$$

$$\rho_n = (u_1-v_1) + (u_2-v_2) + \dots + (u_n-v_n),$$

то $\sigma_n = S'_n + S''_n$, $\rho_n = S'_n - S''_n$ и от $\lim S'_n = S'$, $\lim S''_n = S''$ получаваме $\lim \sigma_n = S' + S''$, $\lim \rho_n = S' - S''$.

Лесно се доказва също и следното свойство:

Ако към членовете на един сходящ ред прибавим краен брой нови членове или пък премахнем краен брой от неговите членове, получаваме винаги пак сходящ ред.

Ще докажем сега едно важно свойство на сходящите редове.

Теорема. *Ако редът*

(10) $$u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots$$

е сходящ, то редицата от неговите членове

(11) $$u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$$

клони към нула.

Доказателство. От равенствата

$$S_n=u_1+u_2+\cdots+u_n,$$

$$S_{n+1}=u_1+u_2+\cdots+u_n+u_{n+1}$$

получаваме

(12) $$S_{n+1}-S_n=u_{n+1}.$$

Ако редът (10) е сходящ и ако S е неговата сума, ще имаме $\lim S_n=S$ и също така $\lim S_{n+1}=S$. Оттук $\lim(S_{n+1}-S_n)=0$, което поради равенството (12) означава, че $\lim u_{n+1}=0$. Това пък показва, че редицата (11) е сходяща и клони към нула.

От доказаната теорема следва, че ако редицата от членовете на един безкраен ред не клони към нула, то той е разходящ.

Като вземем пред вид тази теорема, бихме могли сега още веднъж да се убедим, че редът (6) е разходящ, без да прибягваме към редицата от неговите частични суми, а само като забележим, че редицата от неговите членове

$$1, 1, \ldots, 1, \ldots$$

не клони към нула.

Друг по-интересен случай, когато можем да използуваме същата теорема, е следният. Да разгледаме отново геометричната прогресия

(7) $$1+q+q^2+\cdots+q^{n-1}+\cdots$$

и да се занимаем с въпроса за сходимостта на този ред, когато $|q|\geqq 1$. Редицата от членовете на реда

$$1, q, q^2, \ldots, q^{n-1}, \ldots$$

в този случай не клони към нула, защото, ако бихме имали $\lim q^{n-1}=0$, то щяхме да имаме също и $\lim |q|^{n-1}=0$. А това е невъзможно поради неравенството $|q|^{n-1}\geqq 1$, изпълнено за всяко n. Следователно при $|q|\geqq 1$ редът (7) е разходящ. И така установихме, че геометричната прогресия (7) представлява сходящ ред само когато $|q|<1$.

Доказаната в този параграф теорема може да се изкаже още и така: *за да бъде един ред сходящ, необходимо е редицата от неговите членове да клони към нула.*

Възниква въпросът, дали това условие е и достатъчно, т. е. можем ли от това, че редицата от членовете на един ред клони към нула, да заключим, че той е сходящ. Отговорът на този въпрос е отрицателен. За да се убедим в това, ще разгледаме следния важен пример: Редът

(13) $$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$$

се нарича хармоничен ред. Редицата от неговите членове

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots,$$

както знаем, е сходяща и клони към нула. Въпреки това този ред е разходящ.

И наистина да разгледаме редицата от неговите частични суми:

(14) $$S_1, S_2, \ldots, S_n, \ldots$$

Ще покажем, че тази редица е неограничена отгоре. За целта да вземем произволно положително число A. Да изберем след това едно цяло положително число m, удовлетворяващо неравенството $m>2A$, и да разгледаме най-сетне частичната сума S_{2^m}, т. е. оная частична сума, която се получава от събирането на първите 2^m (на брой) члена на дадения ред. Да групираме събираемите в тази сума по следния начин:

$$S_{2^m}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2^m}$$

$$=1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)$$

$$+\cdots+\left(\frac{1}{2^{m-1}+1}+\frac{1}{2^{m-1}+2}+\cdots+\frac{1}{2^m}\right).$$

Тогава ще имаме

$$S_{2^m}\geqq 1+\frac{1}{2}+2\cdot\frac{1}{4}+4\cdot\frac{1}{8}+\cdots+2^{m-1}\frac{1}{2^m}=1+m\frac{1}{2}>A.$$

И така получаваме $S_{2^m}>A$, което показва, че произволно взетото положително число A не е горна граница на редицата (14), т. е. че тази редица е неограничена. Следователно тя не е сходяща, което означава, че редът (13) е разходящ.

§ 10. Редове с неотрицателни членове

Ако всички членове на един ред

$$u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots$$

са неотрицателни числа, то редицата от неговите частични суми

$$S_1, S_2, \ldots, S_n, \ldots$$

е растяща. Действително от равенството

$$S_{n+1}=S_n+u_{n+1}$$

и от това, че $u_{n+1}\geqq 0$, следва неравенството

$$S_n\leqq S_{n+1}$$

за всяко n.

Както знаем, една растяща редица е сходяща винаги когато е ограничена. Ето защо, *за да установим, че един ред с неотрицателни членове е сходящ, достатъчно е да покажем, че редицата от неговите частични суми е ограничена.* Тази забележка ни дава възможност лесно да установим следната важна

Теорема (принцип за сравняване на редове с неотрицателни членове). *Нека са дадени два реда с неотрицателни членове*

$$(1)\qquad u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots$$

и

$$(2)\qquad v_1+v_2+\cdots+v_n+\cdots$$

и нека за всяко n е изпълнено неравенството $u_n\leqq v_n$. Тогава, ако редът (2) е сходящ, то и редът (1) е сходящ.

Доказателство. Нека

$$S'_n=u_1+u_2+\cdots+u_n,$$
$$S''_n=v_1+v_2+\cdots+v_n.$$

Ясно е, че $S'_n\leqq S''_n$. Тъй като редът (2) е сходящ, то редицата

$$S''_1,\ S''_2,\ldots,\ S''_n,\ldots$$

е сходяща и следователно — ограничена. Ако A е такова число, че $S''_n<A$ за всяко n, то също така за всяко n ще имаме $S'_n<A$, т. е. редицата от частичните суми

$$S'_1,\ S'_2,\ldots,\ S'_n,\ldots$$

на реда (1) е ограничена отгоре. Тя обаче, както знаем, е растяща и следователно ще бъде и сходяща. С това теоремата е доказана.

Нека се убедим чрез някои примери в ползата от току-що доказания принцип за сравняване. Да разгледаме реда

$$(3)\qquad \frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{9}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}+1}+\cdots$$

Членовете на този ред са по-малки от съответните членове на реда

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}+\cdots,$$

който обаче е геометрична прогресия с частно $q=\frac{1}{2}$ и следователно е сходящ. Въз основа на принципа за сравняване на редове с неотрицателни членове заключаваме, че и редът (3) е сходящ.

Да вземем друг пример — да разгледаме реда

$$(4)\qquad 1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\cdots+\frac{1}{2n-1}+\cdots$$

Ако допуснем, че този ред е сходящ, то като умножим всичките му членове с числото 2, ще получим също така сходящия ред

$$2+\frac{2}{3}+\frac{2}{5}+\frac{2}{7}+\cdots+\frac{2}{2n-1}+\cdots,$$

членовете на който са по-големи от съответните членове на хармоничния ред

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$$

От принципа за сравняване тогава ще следва, че и хармоничният ред е сходящ, което, както знаем, не е вярно. Това показва, че нашето допускане за сходимостта на реда (4) е било погрешно и че следователно той е разходящ.

Като се използува принципът за сравняване на редове с неотрицателни членове, могат да се докажат няколко достатъчни условия за сходимост и разходимост, известни под названието критерии за редове с положителни членове. Ние ще посочим три такива критерия. Навсякъде при тяхната формулировка ще се предполага, че е даден един ред

$$(5)\qquad u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots,$$

всичките членове на който са положителни числа.

I. Критерий на Даламбер. *Нека редицата*

$$\frac{u_2}{u_1},\ \frac{u_3}{u_2},\ldots,\ \frac{u_{n+1}}{u_n},\ldots$$

е сходяща и нека $\lim\frac{u_{n+1}}{u_n}=l$. *Тогава:*

ако $l<1$, редът (5) е сходящ;
ако $l>1$, редът (5) е разходящ.

Доказателство. Нека $\lim\frac{u_{n+1}}{u_n}=l<1$. Да вземем такова число q, което удовлетворява неравенствата $l<q<1$. Както знаем от една теорема за редиците (теорема 3 от § 3), ще съществува такова число ν, че при $n>\nu$ да имаме $\frac{u_{n+1}}{u_n}<q$. Нека $n_0>\nu$. От неравенствата

$$\frac{u_{n_0+1}}{u_{n_0}}<q,\ \frac{u_{n_0+2}}{u_{n_0+1}}<q,\ldots,\ \frac{u_{n_0+k}}{u_{n_0+k-1}}<q,$$

където k е произволно естествено число, получаваме (чрез почленно умножаване и съкращаване) $\frac{u_{n_0+k}}{u_{n_0}}<q^k$, или

$$u_{n_0+k}<u_{n_0}q^k.$$

Това показва, че членовете на реда

$$(6)\qquad u_{n_0+1}+u_{n_0+2}+\cdots+u_{n_0+k}+\cdots$$

са по-малки от съответните членове на реда

$$u_{n_0}q+u_{n_0}q^2+\cdots+u_{n_0}q^k+\cdots,$$

който е геометрична прогресия, умножена с постоянното число u_{n_0}. Тъй като $0<q<1$, тази прогресия е сходящ ред. Оттук въз основа на принципа за сравняване заключаваме, че редът (6), а следователно и редът (5) е сходящ.

Нека сега $\lim \frac{u_{n+1}}{u_n}=l>1$. Тогава ще съществува такова число ν, че $\frac{u_{n+1}}{u_n}>1$ при $n>\nu$. Ако $n_0>\nu$, ще имаме $u_{n+1}>u_n$ при $n\geqq n_0$. И тъй редицата

$$u_{n_0},\ u_{n_0+1},\ldots,\ u_{n_0+k},\ldots$$

е растяща и следователно (тъй като първият ѝ член е положителен) не клони към нула. Значи и редицата от членовете на дадения ред (5) не клони към нула. Следователно този ред е разходящ.

II. Критерий на Коши. *Нека предположим, че редицата*

$$u_1,\ \sqrt{u_2},\ \sqrt[3]{u_3},\ldots,\ \sqrt[n]{u_n},\ldots$$

е сходяща и че $\lim\sqrt[n]{u_n}=l$. *Тогава:*

ако $l<1$, *редът* (5) *е сходящ;*
ако $l>1$, *редът* (5) *е разходящ.*

Доказателство. Ако $\lim\sqrt[n]{u_n}=l<1$ и ако $l<q<1$, то съществува такова число ν, че при $n>\nu$ да имаме $\sqrt[n]{u_n}<q$ или $u_n<q^n$. Това показва, че за достатъчно големи (по-големи от ν) номера n членовете на реда (5) са по-малки от съответните членове на една сходяща геометрична прогресия. Следователно редът (5) съгласно принципа за сравняване е сходящ.

Ако пък $\lim\sqrt[n]{u_n}=l>1$, за достатъчно големи номера n ще имаме $\sqrt[n]{u_n}>1$, т. е. $u_n>1$. Оттук виждаме, че редицата от членовете на реда (5) не клони към нула и значи той е разходящ.

III. Критерий на Раабе — Дюамел. *Да определим числото* α_n *от равенството*

$$(7)\qquad \frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{1}{1+\alpha_n}$$

и да образуваме след това редицата

$$\alpha_1,\ 2\alpha_2,\ 3\alpha_3,\ldots,\ n\alpha_n,\ldots$$

Нека тази редица е сходяща и нека $\lim n\alpha_n=l$. *Тогава:*

ако $l>1$, *редът* (5) *е сходящ;*
ако $l<1$, *редът* (5) *е разходящ.*

Доказателство. От равенството (7) получаваме

$$\alpha_n=\frac{u_n-u_{n+1}}{u_{n+1}}.$$

Нека $\lim n\alpha_n=l>1$ и нека μ е число, удовлетворяващо неравенствата $l>\mu>1$. За достатъчно големи номера n, по-точно за $n>\nu$, където ν е подходящо избрано число, ще имаме $n\alpha_n>\mu$, откъдето получаваме

$$nu_n-nu_{n+1}>\mu u_{n+1},$$

а оттук

$$nu_n-(n+1)\ u_{n+1}>(\mu-1)\ u_{n+1}.$$

Нека $n_0>\nu$. От неравенствата

$$n_0u_{n_0}-(n_0+1)u_{n_0+1}>(\mu-1)u_{n_0+1},$$

$$(n_0+1)u_{n_0+1}-(n_0+2)u_{n_0+2}>(\mu-1)u_{n_0+2},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$(n_0+k)u_{n_0+k}-(n_0+k+1)u_{n_0+k+1}>(\mu-1)u_{n_0+k},$$

където k е произволно естествено число, чрез почленно събиране получаваме

$$n_0u_{n_0}-(n_0+k+1)u_{n_0+k+1}>(\mu-1)(u_{n_0+1}+\cdots+u_{n_0+k}),$$

откъдето

$$u_{n_0+1}+u_{n_0+2}+\cdots+u_{n_0+k}<\frac{n_0u_{n_0}}{\mu-1}.$$

Виждаме, че всички частични суми на реда

$$u_{n_0+1}+u_{n_0+2}+\cdots+u_{n_0+k}+\cdots$$

не надминават едно постоянно число, т. е. редицата от тези частични суми е ограничена отгоре. Това показва, че този ред, който е с положителни членове, е сходящ. А тогава сходящ ще бъде и редът (5).

Нека сега $\lim n\alpha_n=l<1$. Тогава ще съществува такова ν че при $n>\nu$ да имаме $n\alpha_n<1$, значи

$$nu_n-nu_{n+1}<u_{n+1},$$

или

$$nu_n<(n+1)u_{n+1}.$$

Да вземем $n_0>\nu$. От неравенствата

$$n_0u_{n_0}<(n_0+1)u_{n_0+1}<\cdots<(n_0+k)u_{n_0+k},$$

валидни за всяко естествено число k, получаваме

$$u_{n_0+k}>n_0u_{n_0}\frac{1}{n_0+k}.$$

Оттук виждаме, че членовете на реда

(8) $$u_{n_0+1}+u_{n_0+2}+\cdots+u_{n_0+k}+\cdots$$

са по-големи от съответните членове на реда

$$\frac{n_0 u_{n_0}}{n_0+1}+\frac{n_0 u_{n_0}}{n_0+2}+\cdots+\frac{n_0 u_{n_0}}{n_0+k}+\cdots$$

Последният ред обаче е получен чрез премахване на първите n_0 на брой членове на разходящия хармоничен ред и умножаване на всички останали негови членове с постоянното число $n_0 u_{n_0}$ — значи той също е разходящ. От принципа за сравняване на редове с неотрицателни членове заключаваме, че редът (8), а значи и редът (5) е разходящ.

И така трите критерия за сходимост и разходимост на редове с положителни членове са доказани.

Нека отбележим изрично следното: Ако при прилагането на който и да било от изказаните три критерия установим, че границата l е равна на 1, то този критерий не ни дава нищо и въпросът за сходимостта на реда (5) остава открит.

Най-сетне заслужава да обърнем внимание на факта, че при прилагането на критерия на Раабе—Дюамел излизаме от израза $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ — същия, който участвува и в критерия на Даламбер. Ето защо към критерия на Раабе—Дюамел прибягваме обикновено, когато критерият на Даламбер не може да ни помогне, например, когато $\lim \frac{u_{n+1}}{u_n}=1$.

Пример 1. Да разгледаме реда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$. Тогава ще имаме

$$\lim \frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\frac{(n+1)!\,n^n}{(n+1)^{n+1}n!}=\lim\frac{n^n}{(n+1)^n}=\lim\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}=\frac{1}{e}.$$

Но $\frac{1}{e}<1$ и оттук заключаваме въз основа на критерия на Даламбер, че разглежданият ред е сходящ.

Пример 2. Разглеждаме реда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n^n}$. Тъй като

$$\lim \sqrt[n]{u_n}=\lim\frac{2}{n}=0<1,$$

то този ред е сходящ съгласно критерия на Коши.

Пример 3. Да разгледаме реда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$. За този ред получаваме

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{n^2}{(n+1)^2}=\frac{n^2}{n^2+2n+1}.$$

Тук $\lim\frac{u_{n+1}}{u_n}=1$, така че критерият на Даламбер не ни дава резултат. Прилагаме критерия на Раабе—Дюамел. За целта от равенството

$$\frac{n^2}{n^2+2n+1}=\frac{1}{1+\alpha_n}$$

определяме α_n. Получаваме $\alpha_n=\frac{2n+1}{n^2}$. Тогава

$$\lim n\,\alpha_n=\lim\frac{2n+1}{n}=2.$$

Тъй като $2>1$, то редът е сходящ.

Упражнения. Да се изследва дали са сходящи или разходящи следните редове:

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}$.
2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n(n+1)}{3^n}$.
3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{n!}$.
4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{(2n)!}$.
5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!}{(n!)^2}\cdot\frac{1}{3^n}$.
6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n-1}{3n+1}\right)^n$.
7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}2^n\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$.
8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2}$.
9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)\,2n}$.
10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots2n}$.
11. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots2n}\cdot\frac{1}{n}$.

12. За кои стойности на цялото положително число k е сходящ и за кои е разходящ редът $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n!\frac{k^n}{n^n}$?

§ 11. Критерий на Лайбниц

Критерият на Лайбниц се отнася за редове, чиито членове си сменят последователно знака. Той гласи:

Ако редицата от положителните числа

(1) $$u_1,\ u_2,\ \ldots,\ u_n,\ \ldots$$

е намаляваща и клони към нула, то редът

(2) $$u_1-u_2+u_3-\cdots+(-1)^{n-1}u_n+\cdots$$

е сходящ.

Доказателство. Да означим с S_n n-тата частична сума на реда (2). При направените предположения за редицата (1) ще имаме

$$S_{2n+1}-S_{2n-1}=-(u_{2n}-u_{2n+1})\leqq 0,$$
$$S_{2n+2}-S_{2n}=u_{2n+1}-u_{2n+2}\geqq 0,$$
$$S_{2n+2}-S_{2n+1}=-u_{2n+2}<0.$$

Оттук получаваме

$$S_{2n-1}\geqq S_{2n+1}>S_{2n+2}\geqq S_{2n}.$$

Първото заключение, което можем да направим от тези неравенства, е, че редицата

(3) $$S_1,\ S_3,\ \ldots,\ S_{2n-1},\ \ldots$$

е намаляваща, а редицата

(4) $$S_2,\ S_4,\ \ldots,\ S_{2n},\ \ldots$$

е растяща. По-нататък от очевидните неравенства

$$S_2\leqq S_{2n}<S_{2n-1}\leqq S_1$$

заключаваме, че тези две редици са ограничени и следователно са сходящи. Ако редицата (3) клони към S', а редицата (4) — към S'', то поради неравенството $S_{2n}<S_{2n-1}$ ще имаме $S''\leqq S'$. А като вземем пред вид монотонността на редиците (3) и (4), ще заключим, че

$$S_{2n}\leqq S''\leqq S'\leqq S_{2n-1}.$$

Тогава за всяко n ще бъдат в сила неравенствата

$$0\leqq S'-S''\leqq S_{2n-1}-S_{2n} \quad \text{или} \quad 0\leqq S'-S''\leqq u_{2n}.$$

Тъй като редицата (1) клони по условие към нула, от последните неравенства следва, че $S'=S''$, т. е. че редиците (3) и (4) клонят към една и съща граница. Но тогава и редицата

$$S_1,\ S_2,\ \ldots,\ S_n,\ \ldots$$

от частичните суми на реда (2), която е получена от комбинирането на редиците (3) и (4), ще бъде сходяща. С това е доказана и сходимостта на реда (2).

Нека забележим, че от извършеното доказателство можем да извлечем още едно заключение. А именно ако S е сумата на реда (2), то от неравенствата $S_{2n}\leqq S\leqq S_{2n-1}$ ще получим

(5) $$0\leqq S_{2n-1}-S\leqq S_{2n-1}-S_{2n}=u_{2n},$$

а от неравенствата $S_{2n}\leqq S\leqq S_{2n+1}$ ще имаме

(6) $$0\leqq S-S_{2n}\leqq S_{2n+1}-S_{2n}=u_{2n+1}.$$

Това можем да резюмираме по следния начин: *Ако*

$$u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots$$

е един ред, удовлетворяващ условията на критерия на Лайбниц, то за неговата сума S и неговата частична сума S_n имаме

$$|S-S_n|\leqq|u_{n+1}|.$$

Наистина неравенството (5) ни дава горното неравенство за нечетни, а неравенството (6) — за четни стойности на n.

С помощта на критерия на Лайбниц можем например да покажем, че редът

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}+\cdots$$

е сходящ. Наистина всички условия на критерия тук са изпълнени, което се проверява непосредствено.

Упражнения. Покажете дали са сходящи или разходящи следните редове:

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2n+1}{n(n+1)}$. 2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\ln\frac{n+1}{n}$.

§ 12. Абсолютно сходящи редове

Както знаем, сумата на краен брой числа не се променя, когато разместим по произволен начин събираемите — в това се състои така нареченият комутативен закон на събирането. Този закон обаче не е валиден при безкрайните редове. За да поясним това, да разгледаме следния пример. Редът

(1) $$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}+\cdots;$$

както видяхме, е сходящ. Да означим с S_n неговата n-та частична сума, а с S — неговата сума. Нека сега разместим членовете му по следния начин: да вземем най-напред първите два положителни члена, след това — първия отрицателен, после — следващите два положителни, след това — следващия отрицателен и т. н. Ще получим реда

(2) $$1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\cdots$$

Ако σ_n е n-тата частична сума на този ред, за частичните му суми от вида σ_{3n} ще имаме

$$\sigma_{3n}=\left(1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{4k-3}+\frac{1}{4k-1}-\frac{1}{2k}\right)$$
$$+\cdots+\left(\frac{1}{4n-3}+\frac{1}{4n-1}-\frac{1}{2n}\right).$$

Да разместим събираемите в първата скоба, а всеки от изразите в останалите скоби да намалим, като използуваме, че

$$\frac{1}{4k-3}+\frac{1}{4k-1}=\frac{2(4k-2)}{(4k-3)(4k-1)}>\frac{2(4k-2)}{(4k-2)^2}=\frac{1}{2k-1}.$$

Ще получим неравенството

$$\sigma_{3n} > \frac{1}{3} + 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k} + \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n},$$

което може да се запише така:

$$\sigma_{3n} > \frac{1}{3} + S_{2n}.$$

Без да изследваме въобще въпроса, сходящ ли е редът (2), или е разходящ, ясно е, че ако той е сходящ и неговата сума е σ, последното неравенство ще ни даде

$$\sigma \geq \frac{1}{3} + S. \tag{3}$$

И така редът (2), получен чрез разместване на членовете на реда (1), или е разходящ, или е сходящ със сума, различна от тази на реда (1).

Този пример ни показва, че като разместваме членовете на един сходящ безкраен ред, ние рискуваме да променим с това неговата сума. Нещо повече, може да се покаже даже че има случаи, когато членовете на един сходящ ред могат да бъдат разместени по такъв начин, че новополученият ред да бъде разходящ.

Има една важна категория сходящи редове обаче, при които можем да разместваме по произволен начин членовете им, без с това да променяме сумите им. Това са т. нар. абсолютно сходящи редове.

Дефиниция. *Един безкраен ред*

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots \tag{4}$$

се нарича а б с о л ю т н о с х о д я щ, ако редът

$$|u_1| + |u_2| + \cdots + |u_n| + \cdots, \tag{5}$$

съставен от абсолютните стойности на неговите членове, е сходящ.

Нека отбележим, че в тази дефиниция не се говори нищо за сходимостта на реда (4). Ето защо ще установим следната

Теорема 1. *Всеки абсолютно сходящ ред е сходящ.*

Д о к а з а т е л с т в о. Нека е дадено, че редът (4) е абсолютно сходящ. Ще положим

$$v_n = \frac{|u_n| + u_n}{2}, \quad w_n = \frac{|u_n| - u_n}{2}.$$

Лесно се вижда, че

$$0 \leq v_n \leq |u_n| \quad \text{и} \quad 0 \leq w_n \leq |u_n|.$$

Да разгледаме редовете

$$v_1 + v_2 + \cdots + v_n + \cdots \tag{6}$$

и

$$w_1 + w_2 + \cdots + w_n + \cdots \tag{7}$$

Това са два реда с неотрицателни членове. При това n-тият член на всеки от тях не надминава n-тия член на реда (5), който по условие е сходящ.

Съгласно принципа за сравняване на редове с неотрицателни членове редовете (6) и (7) ще бъдат също сходящи.

Но от равенството

$$u_n = v_n - w_n$$

е ясно, че редът

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots$$

се получава чрез почленно изваждане от редовете (6) и (7), и следователно и той ще бъде сходящ, което искахме да докажем.

Всеки сходящ ред с неотрицателни членове е абсолютно сходящ. Не е трудно да посочим и по-интересни примери. Така например редът

$$1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n^2} + \cdots \tag{8}$$

е абсолютно сходящ, тъй като редът, образуван от абсолютните стойности на членовете му, както видяхме в § 10 (пример 3), е сходящ.

Съществуват обаче сходящи редове, които не са абсолютно сходящи. Такъв е например редът

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n} + \cdots \tag{9}$$

Съгласно критерия на Лайбниц той е сходящ, но редът от абсолютните стойности на членовете му е хармоничният ред, който, както знаем, е разходящ.

Нека обърнем внимание на това, че извършвайки доказателството на теорема 1, ние установихме следното твърдение:

Всеки абсолютно сходящ ред може да се представи като разлика на два сходящи реда с неотрицателни членове.

Именно това обстоятелство ще използуваме при доказателството на следната теорема, която изразява едно характерно свойство на абсолютно сходящите редове.

Теорема 2. *При абсолютно сходящите редове е в сила комутативният закон.*

Д о к а з а т е л с т в о. Нека редът

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots \tag{10}$$

е абсолютно сходящ и има сума S. Трябва да покажем, че ако редът

$$u_{n_1} + u_{n_2} + \cdots + u_{n_k} + \cdots \tag{11}$$

е получен от реда (10) чрез произволно разместване на членовете му, то той е също абсолютно сходящ и има сума S.

Преди всичко нека уточним: когато казваме, че редът (11) е получен от реда (10) посредством разместване на членовете му, ние разбираме следното: редът (11) е съставен от членовете на реда (10), като всеки член на реда (10) участвува, и то само веднъж, в реда (11). (Нека подчертаем, че редицата от членовете на реда (11) не е подредица на редицата от членовете на реда (10) — k-тият член на реда (11) е n_k-ти член на реда (10), но неравенствата $n_{k-1} < n_k$, които бяха задължителни при образуването на подредица, тук не са изпълнени.)

Преминавайки към самото доказателство на теоремата, ще разгледаме най-напред случая, когато даденият ред (10) е ред с неотрицателни членове. Нека k е произволно естествено число и σ_k е k-тата частична сума на реда (11). Ясно е, че ако вземем естественото число m достатъчно голямо, то m-тата частична сума S_m на реда (10) ще съдържа всички членове на сумата σ_k. Тъй като всички членове на сумата S_m са неотрицателни, то ще имаме $\sigma_k \leqq S_m$. От друга страна, редицата от частичните суми на реда (10) е растяща, поради което имаме $S_m \leqq S$. Следователно $\sigma_k \leqq S$. Това показва, че редицата от частичните суми на реда (11) е ограничена отгоре. Понеже тази редица също е растяща, тя ще бъде сходяща. При това, ако нейната граница, т. е. сумата на реда (11), е σ, то ще имаме $\sigma \leqq S$.

Ние можем обаче да разглеждаме и реда (10) като получен от реда (11) чрез разместване на неговите членове. Тогава горните разсъждения ще ни доведат до неравенството $S \leqq \sigma$. Оттук заключаваме, че е в сила равенството $\sigma = S$. По този начин теоремата е доказана за случая на редове с неотрицателни членове.

Нека сега редът (10) е произволен абсолютно сходящ ред. Тогава ще съществуват два сходящи реда с неотрицателни членове

(12) $$v_1 + v_2 + \cdots + v_n + \cdots$$
и
(13) $$w_1 + w_2 + \cdots + w_n + \cdots$$

такива, че $u_n = v_n - w_n$. Ако S' и S'' са съответно сумите на редовете (12) и (13), то $S = S' - S''$. Съгласно доказаното редовете

(14) $$v_{n_1} + v_{n_2} + \ldots + v_{n_k} + \ldots$$
и
(15) $$w_{n_1} + w_{n_2} + \ldots + w_{n_k} + \ldots$$

ще бъдат също сходящи и също ще имат суми съответно S' и S''. Оттук следва, че редът (11), явяващ се разлика на редовете (14) и (15), ще бъде сходящ и неговата сума ще бъде равна на $S' - S'' = S$. Що се отнася до неговата абсолютна сходимост, тя се вижда от неравенството $|u_{n_k}| \leqq v_{n_k} + w_{n_k}$ и от сходимостта на редовете (14) и (15). С това теоремата е доказана докрай.

Ще отбележим накрая, че е в сила и следната

Теорема 3. *Ако редът*

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots$$

е абсолютно сходящ, то неговата сума удовлетворява неравенството

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} u_n \right| \leqq \sum_{n=1}^{\infty} |u_n|.$$

Доказателството на тази теорема е съвсем просто и може да бъде предоставено на читателя.

Упражнения. Посочете кои от редовете, написани по-долу, са абсолютно сходящи, кои са сходящи, но не абсолютно, и кои са разходящи.

1. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{2n-1}$.
2. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n^3}{2^n}$.
3. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{2.4\ldots 2n}{1.3\ldots(2n-1)}$.
4. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1.3\ldots(2n-1)}{2.4\ldots 2n} \cdot \frac{1}{n}$.
5. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(2n)!}{n^n}$.
6. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left(\frac{1}{2n+1}\right)^n$.

§ 13*. Умножаване на редове

Нека са дадени два безкрайни реда

(1) $$u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots$$
и
(2) $$v_1 + v_2 + \cdots + v_n + \cdots$$

Редът

(3) $$w_1 + w_2 + \cdots + w_n + \cdots,$$

където

$$w_n = u_1 v_n + u_2 v_{n-1} + \cdots + u_n v_1,$$

по дефиниция се нарича *ред, получен от умножаването на редовете* (1) *и* (2) *по правилото на Коши.* Както се вижда, n-тият член на реда (3) представлява сума от всички произведения от вида $u_i v_j$, за които $i + j = n + 1$. По-подробно записан, редът (3) следователно изглежда така:

$$u_1 v_1 + (u_1 v_2 + u_2 v_1) + (u_1 v_3 + u_2 v_2 + u_3 v_1)$$
$$+ \cdots + (u_1 v_n + u_2 v_{n-1} + \cdots + u_n v_1) + \cdots$$

Предмет на настоящия параграф е следната теорема, която в известен смисъл оправдава дадената по-горе дефиниция.

Теорема на Коши. *Ако редовете* (1) *и* (2) *са абсолютно сходящи и имат суми съответно S' и S'', то и редът* (3), *получен от тяхното умножаване, е абсолютно сходящ и сумата му е $S'S''$.*

Доказателство. По условие двата реда

(4) $$|u_1| + |u_2| + \cdots + |u_n| + \cdots$$
и
(5) $$|v_1| + |v_2| + \cdots + |v_n| + \cdots$$

са сходящи. Ето защо, ако означим n-тата частична сума на реда (4) със σ_n', а на реда (5) — със σ_n'', ще можем да намерим такова число K, че за всяко n да имаме $\sigma_n' < K$ и $\sigma_n'' < K$. Да разгледаме сега реда

$$|w_1|+|w_2|+\cdots+|w_n|+\cdots \tag{6}$$

Ако със σ_n означим неговата n-та частична сума, ще имаме

$$\sigma_n = \sum_{k=1}^{n} |w_k| = \sum_{k=1}^{n} |u_1 v_k + u_2 v_{k-1} + \cdots + u_k v_1|$$

$$\leqq \sum_{k=1}^{n} (|u_1||v_k| + |u_2||v_{k-1}| + \cdots + |u_k||v_1|)$$

$$\leqq (|u_1|+|u_2|+\cdots+|u_n|)(|v_1|+|v_2|+\cdots+|v_n|) = \sigma_n' \sigma_n'' < K^2.$$

Виждаме, че редицата от частичните суми на реда (6) е ограничена отгоре. Следователно тя е сходяща, значи и редът (6) е сходящ. Това пък означава, че редът (3) е абсолютно сходящ.

Остава да се занимаем с въпроса за сумата S на реда (3). Да означим с S_n' n-тата частична сума на реда (1), с S_n'' — на реда (2) и с S_n — на реда (3).

В случай че редовете (1) и (2) са с неотрицателни членове, лесно се проверяват неравенствата

$$S_n \leqq S_n' S_n'' \leqq S_{2n}.$$

От тези неравенства заключаваме, че $S \leqq S'S'' \leqq S$ и следователно $S = S'S''$.

В общия случай нека образуваме реда

$$w_1^* + w_2^* + \cdots + w_n^* + \cdots, \tag{7}$$

получен чрез умножаване на редовете (4) и (5). Тъй като това са редове с неотрицателни членове, съгласно това, което току-що видяхме, сумата от реда (7) ще бъде равна на произведението на техните суми. Така че, ако σ_n^* е n-тата частична сума на реда (7), то

$$\lim \sigma_n^* = \lim \sigma_n' \sigma_n'', \tag{8}$$

където σ_n' и σ_n'' са, както и по-рано, n-тите частични суми на редовете (4) и (5).

Да разгледаме разликата $S_n - S_n' S_n''$. Ще имаме

$$|S_n - S_n' S_n''| = |u_2 v_n + u_3 (v_{n-1} + v_n) + \cdots + u_n (v_2 + v_3 + \cdots + v_n)|$$

$$\leqq |u_2||v_n| + |u_3|(|v_{n-1}| + |v_n|) + \cdots + |u_n|(|v_2| + |v_3| + \cdots + |v_n|)$$

$$= \sigma_n' \sigma_n'' - \sigma_n^*.$$

Оттук поради (8) заключаваме, че $\lim (S_n - S_n' S_n'') = 0$, т. е. че $\lim S_n = \lim S_n' S_n''$. И така $S = S'S''$. С това теоремата е доказана.

Упражнение. Покажете, че чрез умножаване на редовете

$$1 + \frac{\alpha}{1!} + \frac{\alpha^2}{2!} + \cdots + \frac{\alpha^n}{n!} + \cdots$$

и

$$1 + \frac{\beta}{1!} + \frac{\beta^2}{2!} + \cdots + \frac{\beta^n}{n!} + \cdots,$$

където α и β са две реални числа, стигаме до реда

$$1 + \frac{\alpha+\beta}{1!} + \frac{(\alpha+\beta)^2}{2!} + \cdots + \frac{(\alpha+\beta)^n}{n!} + \cdots$$

Докажете също, че тези редове са абсолютно сходящи.