Иван Проданов
Николай Хаджииванов
Иван Чобанов

Сборник от задачи по диференциално и интегрално смятане

Функции на една променлива

Второ стереотипно издание

София, 1992

РЕШЕНИЯ

Първа глава

1. Две множества A и B се наричат равни и се пише $A = B$, когато A и B са тъждествени, т. е. представляват един и същ обект. Това означава, че всеки елемент на A е елемент на B и обратно.

4. Множеството $\mathbf{I}$ на целите числа.

5. Нека $x \in \bigcup_{\nu=1}^{n} M(s_\nu)$. Това означава, че за някое μ $(1 \leqq \mu \leqq n)$ е в сила $x \in M(s_\mu)$, т. е. x не се дели на s_μ. Тогава x не се дели и на най-малкото общо кратно $\langle s_1, s_2, \ldots, s_n \rangle$, т. е. $x \in M(\langle s_1, s_2, \ldots, s_n \rangle)$. С това е доказано включването

$$\bigcup_{\nu=1}^{n} M(s_\nu) \subset M(\langle s_1, s_2, \ldots, s_n \rangle). \tag{1}$$

Нека сега, обратно, $y \in M(\langle s_1, s_2, \ldots, s_n \rangle)$. Това означава, че y не се дели на $\langle s_1, s_2, \ldots, s_n \rangle$ и следователно y не се дели поне на едно от числата $s_1, s_2, \ldots, s_n$. Тогава съществува такова μ $(1 \leqq \mu \leqq n)$, че y не се дели на s_μ, т. е. $y \in M(s_\mu)$, поради което $y \in \bigcup_{\nu=1}^{n} M(s_\nu)$. По такъв начин е доказано и включването

$$M(\langle s_1, s_2, \ldots, s_n \rangle) \subset \bigcup_{\nu=1}^{n} M(s_\nu). \tag{2}$$

Сега твърдението следва от (1), (2) и зад. 1.

7. Множеството на целите числа, които се делят на 12.

8. Нека $x \in \bigcap_{\nu=1}^{n} M[s_\nu]$. Това означава, че $x \in M[s_\nu]$ за всяко $\nu = 1, 2, \ldots, n$, т. е. x се дели на всяко s_ν. Тогава x се дели и на $\langle s_1, s_2, \ldots, s_n\rangle$, т. е. $x \in M[\langle s_1, s_2, \ldots, s_n\rangle]$. С това е доказано включването

$$(1) \qquad \bigcap_{\nu=1}^{n} M[s_\nu] \subset M[\langle s_1, s_2, \ldots, s_n\rangle].$$

Нека, обратно, $y \in M[\langle s_1, s_2, \ldots, s_n\rangle]$. Това означава, че y се дели на $\langle s_1, s_2, \ldots, s_n\rangle$, т. е. y се дели на всяко от числата s_ν ($\nu = 1, 2, \ldots, n$). Тогава $y \in M[s_\nu]$ ($\nu = 1, 2, \ldots, n$) и следователно $y \in \bigcap_{\nu=1}^{n} M[s_\nu]$. По този начин е доказано и включването

$$(2) \qquad M[\langle s_1, s_2, \ldots, s_n\rangle] \subset \bigcap_{\nu=1}^{n} M[s_\nu].$$

Твърдението следва от (1), (2) и зад. 1.

10. Ще докажем само равенството **е**). Нека е в сила $x \in \cup\{X_\alpha \mid \alpha \in A\} \cap Y$. Това означава, че $x \in \cup\{X_\alpha \mid \alpha \in A\}$ и $x \in Y$. От първата релация следва, че съществува такова $\beta \in A$, че $x \in X_\beta$. Оттук и от $x \in Y$ следва, че $x \in X_\beta \cap Y$, поради което $x \in \cup\{X_\alpha \cap Y \mid \alpha \in A\}$. Обратно, нека $y \in \cup\{X_\alpha \cap Y \mid \alpha \in A\}$. Тогава съществува $\gamma \in A$, за което $y \in X_\gamma \cap Y$, следователно $y \in X_\gamma$. Ето защо $y \in \cup\{X_\alpha \mid \alpha \in A\}$, което заедно с $y \in Y$ дава $y \in \cup\{X_\alpha \mid \alpha \in A\} \cap Y$.

13. Ще докажем само равенството **г**). Нека е в сила $x \in M \setminus \cap\{M_\alpha \mid \alpha \in A\}$. Тогава $x \in M$ и $x \notin \cap\{M_\alpha \mid \alpha \in A\}$. От последната релация следва, че съществува $\beta \in A$ с $x \notin M_\beta$. Заедно с $x \in M$ това дава $x \in M \setminus M_\beta$ и следователно е в сила $x \in \cup\{M \setminus M_\alpha \mid \alpha \in A\}$. Обратно, нека $y \in \cup\{M \setminus M_\alpha \mid \alpha \in A\}$. Тогава съществува $\gamma \in A$ с $y \in M \setminus M_\gamma$, т. е. $y \in M$ и $y \notin M_\gamma$. От последната релация следва $y \notin \cap\{M_\alpha \mid \alpha \in A\}$, което заедно с $y \in M$ дава $y \in M \setminus \cap\{M_\alpha \mid \alpha \in A\}$.

15. Понеже $M \subset (M \setminus N) \cup N$, от зад. 14 а) следва $f(M) \subset f((M \setminus N) \cup N) = f(M \setminus N) \cup f(N)$ и съгласно зад. 12 в) е в сила $f(M) \setminus f(N) \subset f(M \setminus N)$.

19. **а)** 1. **б)** $\left\{\frac{1}{n} \,\middle|\, n \in \mathbf{N}\right\}$. **в)** 1. **г)** 1. **д)** 1. **е)** **I**. **ж)** **Q**. **з)** $\varnothing$. **и)** $\varnothing$.

20. **в)** Разгледайте сечението на всички стабилни подмножества на X, които съдържат A. **д)** Тъй като $f^{-1}(M) \subset M$, в сила е $f^{-1}(M) \cap X \setminus M = \varnothing$; следователно $M \cap f(X \setminus M) = \varnothing$, т. е. $f(X \setminus M) \subset X \setminus M$. От друга страна, от $f(M) \subset M$ следва $f(M) \cap X \setminus M = \varnothing$, поради което $M \cap f^{-1}(X \setminus M) = \varnothing$, т. е. $f^{-1}(X \setminus M) \subset X \setminus M$. **ж)** От $\Phi(x) \cap \Phi(y) \neq \varnothing$ следва $x \in \Phi(y)$ и $y \in \Phi(x)$. Наистина, ако допуснем, че например $x \notin \Phi(y)$, ще имаме $x \in X \setminus \Phi(y)$ и тъй като съгласно **д**) множеството $X \setminus \Phi(y)$ е стабилно, то $\Phi(x) \in X \setminus \Phi(y)$, което не е възможно. Следователно $\Phi(x) \subset \Phi(y)$ и $\Phi(y) \subset \Phi(x)$. **з)** Множеството $\cup\{\Phi(x) \mid x \in A\}$ е стабилно съгласно **б**) и очевидно съдържа A. Следователно $\Phi(A) \subset \cup\{\Phi(x) \mid x \in A\}$. Обратното включване е очевидно, тъй като $\Phi(x) \subset \Phi(A)$ за всяко $x \in A$.

21. а) A_ν, когато никое от множествата $A_1, A_2, \ldots, A_n$ не е празно, и $\varnothing$ в противен случай.

б) $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_{\nu-1} \times M \times A_{\nu+1} \times \ldots \times A_n$.

24. Нека най-напред е изпълнено включването

$$(1) \qquad (A_1 \cup B_1) \times (A_2 \cup B_2) \subset (A_1 \times A_2) \cup (B_1 \times B_2).$$

Като използуваме а) и б) от зад. 21, получаваме следната редица от равенства:

$$\begin{aligned}(A_1 \cup B_1) \times (A_2 \cup B_2) &= (A_1 \cup (B_1 \setminus A_1)) \times (A_2 \cup (B_2 \setminus A_2)) \\ &= [(A_1 \cup (B_1 \setminus A_1)) \times A_2] \cup [(A_1 \cup (B_1 \setminus A_1)) \times (B_2 \setminus A_2)] \\ &= (A_1 \times A_2) \cup ((B_1 \setminus A_1) \times A_2) \cup (A_1 \times (B_2 \setminus A_2)) \cup ((B_1 \setminus A_1) \times (B_2 \setminus A_2)),\end{aligned}$$

което заедно с (1) дава

$$(2) \qquad \begin{cases}(B_1 \setminus A_1) \times A_2 \subset (A_1 \times A_2) \cup (B_1 \times B_2), \\ A_1 \times (B_2 \setminus A_2) \subset (A_1 \times A_2) \cup (B_1 \times B_2).\end{cases}$$

За $B_1 \setminus A_1$ са възможни случаите

$$(3) \qquad B_1 \setminus A_1 \neq \varnothing,$$

$$(4) \qquad B_1 \setminus A_1 = \varnothing,$$

а за $B_2 \setminus A_2$ са възможни случаите

$$(5) \qquad B_2 \setminus A_2 \neq \varnothing,$$

$$(6) \qquad B_2 \setminus A_2 = \varnothing.$$

В случая (3) от първото равенство (2) следва $(B_1 \setminus A_1) \times A_2 \subset B_1 \times B_2$, което заедно със з) от зад. 23 дава $A_2 \subset B_2$. В случая (4) очевидно $B_1 \subset A_1$. Аналогично от (5) следва $A_1 \subset B_1$, а от (6) имаме $B_2 \subset A_2$. Окончателно налице са следните 4 възможности: (3) и (5), (3) и (6), (4) и (5), (4) и (6). В първия случай $A_1 \subset B_1$ и $A_2 \subset B_2$, във втория $A_2 = B_2$, в третия $A_1 = B_1$, и в четвъртия $B_1 \subset A_1$ и $B_2 \subset A_2$. Читателят лесно ще провери сам, че във всеки от тези четири случая, обратно, е изпълнено включването (1).

26. Нека $x \in X$. Съгласно условието съществува $\xi \in X$, за което $f(\xi) = x$. Тогава $f(x) = f(f(\xi)) = f \circ f(\xi) = f(\xi) = x$.

27. Ирационалните числа.

28. Да се разгледат поотделно случаите, когато α е рационално и когато α е ирационално.

29. Всички изображения $g : f(X) \to X$.

30. **в)** Нека $y \in f(X)$. Тогава множеството $f^{-1}(y)$ не е празно. Нека x е произволен елемент на $f^{-1}(y)$; да положим $g(y) = x$. Тогава $f(g(y)) = f(x) = y$. За да получим втората част на твърдението, е достатъчно от множеството $f^{-1}(f(\xi))$ да изберем точно елемента ξ. **д)** Нека f е обратимо. Тогава за всяко $y \in f(X)$ множеството $f^{-1}(y)$ има само един елемент и съгласно а), ако g е обратно изображение на f, то $g(y) = f^{-1}(y)$. Нека сега f не е обратимо. Тогава съществуват x_1 и x_2 от X с $x_1 \neq x_2$, но $f(x_1) = f(x_2) = y$; съгласно в) ще съществуват две обратни изображения g_1 и g_2 на f, за които са в сила равенствата $g_1(f(x_1)) = x_1$ и $g_2(f(x_2)) = x_2$. Тогава $g_1(y) = g_1(f(x_1)) = x_1 \neq x_2 = g_2(f(x_2)) = g_2(y)$, т. е. $g_1 \neq g_2$.

31. Нека $x \in X$. Тогава $f(g(f(x))) = f \circ g(f(x)) = f(x)$, защото $f \circ g$ е идентитетът на $f(X)$ съгласно дефиницията на обратно изображение. Тъй като f е обратимо изображение, то $g(f(x)) = x$.

32. Ако f е обратимо, нека h е обратното му изображение. От зад. 31 следва, че h има желаното свойство. Обратно, нека съществува изображение $h : f(x) \to X$ с $h(f(x)) = x$ за всяко x от X. От $x_1 \neq x_2$ следва $h(f(x_1)) = x_1 \neq x_2 = h(f(x_2))$, откъдето $f(x_1) \neq f(x_2)$, поради което f е обратимо. Нека g е обратното му изображение. Тогава $f \circ g$ е идентитетът на $f(X)$ и следователно $h = h \circ (f \circ g) = (h \circ f) \circ g = g$, понеже $h \circ f$ по условие е идентитетът на X.

33. $g(y) = \dfrac{1}{a} y \quad (y \in \mathbf{R})$.

34. f е обратимо тогава и само тогава, когато $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$. В този случай обратното изображение g се дава от формулите на Крамер $g(u, v) = \left(\dfrac{\begin{vmatrix} u & b \\ v & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}, \dfrac{\begin{vmatrix} a & u \\ c & v \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} \right)$, където $(u, v) \in \mathbf{R}^2$.

35. Нека $f(x_1) = f(x_2)$, т. е.

$$\frac{x_1}{1+|x_1|} = \frac{x_2}{1+|x_2|}. \tag{1}$$

Тогава $\dfrac{|x_1|}{1+|x_1|} = \dfrac{|x_2|}{1+|x_2|}$, откъдето $|x_1| = |x_2|$. Сега от (1) следва $x_1 = x_2$, поради което f е обратимо. Да намерим $f(\mathbf{R})$. Очевидно $|f(x)| = \dfrac{|x|}{1+|x|} < 1$ и следователно $f(\mathbf{R}) \subset (-1, 1)$. Нека сега $y \in (-1, 1)$. Ще покажем, че съществува $x \in \mathbf{R}$, за което $f(x) = y$, т. е.

$$\frac{x}{1+|x|} = y. \tag{2}$$

От (2) получаваме $\dfrac{|x|}{1+|x|} = |y|$, откъдето $|x| = \dfrac{|y|}{1-|y|}$. Като заместим този израз за $|x|$ в (2), намираме $x = \dfrac{y}{1-|y|}$, откъдето виждаме, че $f(\mathbf{R}) = (-1, 1)$ и че изображението $g : (-1, 1) \to \mathbf{R}$, дефинирано с $g(y) = \dfrac{y}{1-|y|}$, е обратното на f.

36. Използувайте зад. 35.

37. Да положим $M = \ldots \cup f^{-1}(f^{-1}(A)) \cup f^{-1}(A) \cup A \cup f(A) \cup f(f(A)) \cup \ldots$ Тъй като $A \subset \Phi(A)$ и $\Phi(A)$ е стабилно, то $f(A) \subset f(\Phi(A)) \subset \Phi(A)$, $f^{-1}(A) \subset f^{-1}(\Phi(A)) \subset \Phi(A)$ и т.н. Следователно $M \subset \Phi(A)$. Понеже стабилната обвивка $\Phi(A)$ на A се съдържа във всяко стабилно множество, което съдържа A, за да докажем обратното включване, е достатъчно да се убедим, че M е стабилно. За тази цел да пресметнем $f(M)$. Съгласно зад. 14 а) ще имаме $f(M) = \ldots \cup f(f^{-1}(f^{-1}(A))) \cup f(f^{-1}(A)) \cup f(A) \cup f(f(A)) \cup f(f(f(A))) \cup \ldots \subset M$, тъй като за произволно множество B съгласно зад. 18 в) е в сила $f(f^{-1}(B)) \subset B$. Аналогично съгласно зад. 16 а) е в сила $f^{-1}(M) = \ldots \cup f^{-1}(f^{-1}(f^{-1}(A))) \cup f^{-1}(f^{-1}(A)) \cup f^{-1}(A) \cup f^{-1}(f(A)) \cup f^{-1}(f(f(A))) \cup \ldots \subset M$, тъй като за произволно множество B и обратимо изображение f е в сила $f^{-1}(f(B)) = B$ (това е единственото място в решението, където се използува обратимостта на f).

40. Наредете елементите на A в крайна редица $a_1, a_2, \ldots, a_n$ и дефинирайте изображение $\varphi : Y^A \to Y^n$ по следния начин: $\varphi(f) = (f(a_1), f(a_2), \ldots, f(a_n))$, където f е произволен елемент на Y^A (изображение от A в Y). Проверете, че φ е обратимо и че $\varphi(Y^A) = Y^n$.

41. Съгласно зад. 40 е в сила $B^A \sim B^a$ и следователно трябва да се пресметне броят на елементите на B^a, което става с индукция спрямо a.

42. б) Нека $\varphi : X_1 \to X$ и $\psi : Y \to Y_1$ са обратими и $\varphi(X_1) = X$ и $\psi(Y) = Y_1$. Дефинирайте изображение $\lambda : Y^X \to Y_1^{X_1}$ по следния начин $\lambda(f) = \psi \circ f \circ \varphi$, където f е произволен елемент на Y^X (изображение на X в Y). Това е онагледено на следната диаграма:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] & Y \arrow[d, "\psi"] \\ X_1 \arrow[u, "\varphi"] \arrow[r, dotted, "\lambda(f)"'] & Y_1 \end{tikzcd}$$

Проверете, че λ е обратимо и че $\lambda(Y^X) = Y_1^{X_1}$.

43. Разгледайте изображението $\psi : Z^{X\times Y} \to (Z^X)^Y$, дефинирано по следния начин. Нека $f \in Z^{X\times Y}$, т. е. f е изображение от вида $f : X \times Y \to Z$. За произволно $y \in Y$ нека $f_y : X \to Z$ означава изображението, дефинирано с $f_y(x) = f(x,y)$. По този начин на всяко y от Y е съпоставено $f_y \in Z^X$ и следователно е налице изображение $\varphi : Y \to Z^X$ (за което $\varphi(y) = f_y$). Очевидно $\varphi \in (Z^X)^Y$. Сега дефинираме ψ с $\psi(f) = \varphi$. Докажете, че ψ е обратимо и че $\psi(Z^{X\times Y}) = (Z^X)^Y$.

44. Докажете, че $(a,b) \sim (-1, 1)$, като си послужите с линейната функция $l(x) = kx + n$, за която $l(a) = -1$ и $l(b) = 1$. След това използвайте зад. 35, в която по същество е доказано, че $(-1, 1) \sim \mathbf{R}$.

45. Нека $x_1 = \xi, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ е безкрайна редица от различни елементи на X. Дефинирайте изображение $\varphi : X \to X \setminus \{\xi\}$ по следния начин:

$$\varphi(x) = \begin{cases} x & \text{при } x \neq x_n, \\ x_{n+1} & \text{при } x = x_n \quad (n = 1, 2, \ldots). \end{cases}$$

Докажете, че φ е обратимо и че $\varphi(X) = X \setminus \{\xi\}$.

46. Използвайте зад. 44 и 45.

47. Нека X е изброимо. Тогава съществува обратимо изображение $f : \mathbf{N} \to X$, за което $f(\mathbf{N}) = X$. Нека $x_n = f(n)$, тогава $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$. Обратно, от последното равенство, където $x_\mu \neq x_\nu$ при $\mu \neq \nu$, може да се положи $f(n) = x_n$.

48. Нека X е безкрайно. Тогава X не е празно и следователно съществува елемент x_1 на X. Тъй като X е безкрайно,

множеството $X \setminus \{x_1\}$ не е празно и следователно съществува елемент x_2 на $X \setminus \{x_1\}$ и т.н. По този начин се получава редица $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ от различни елементи на X.

50. Като забележите, че във всеки кръг се съдържат краен брой точки от $\mathbf{I}^2$, покрийте равнината с редица от кръгове $K_1, K_2, \ldots, K_n, \ldots$ Първо наредете една след друга точките на множеството $K_1 \cap \mathbf{I}^2$, след това точките на $(K_2 \setminus K_1) \cap \mathbf{I}^2$, после точките на $(K_3 \setminus K_2) \cap \mathbf{I}^2$ и т.н.

51. Нека елементите на изброимото множество X са подредени в редица $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ и X' е безкрайно подмножество на X. Нека x_{n_1} е елементът на X' с най-малък номер, x_{n_2} — елементът на $X' \setminus \{x_{n_1}\}$ с най-малък номер и т.н. По този начин елементите на X' се подреждат в безкрайна редица $x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots, x_{n_\nu}, \ldots$

52. Докажете, че всеки кръг с радиус, не по-малък от 1, съдържа поне една точка с цели координати. След това приложете зад. 50 и 51.

53. Използвайте зад. 50.

54. Използвайте зад. 53 и индукция спрямо броя на множителите.

55. Нека всяко от множествата $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ е изброимо. Ще докажем, че е изброимо и обединението им $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$. Нека

$$\begin{aligned} X_1 &= \{x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{1n}, \ldots\}, \\ X_2 &= \{x_{21}, x_{22}, \ldots, x_{2n}, \ldots\}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ X_n &= \{x_{n1}, x_{n2}, \ldots, x_{nn}, \ldots\}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Нареждаме елементите на X в редица по диагонали:

$x_{11};\ x_{12},\ x_{21};\ x_{13},\ x_{22},\ x_{31};\ x_{14},\ x_{23},\ x_{32},\ x_{41};\ \ldots$

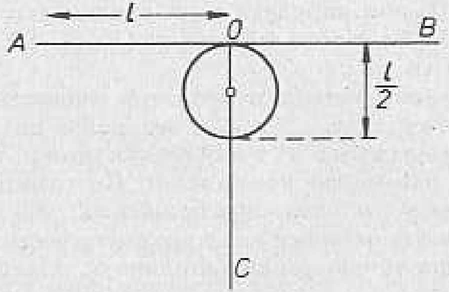
След това в тази редица зачертаваме всеки член, който се среща по-рано в редицата. По този начин получаваме нареждане на елементите на X в безкрайна редица.

56. Подложете равнината на хомотетия с коефициент $\frac{1}{\alpha}$ и приложете зад. 52.

57. Нека M е даденото множество от кръгове, а M_n $(n = 1, 2, \ldots)$ са множествата от онези кръгове на M, чиито радиуси не са по-малки от $\frac{1}{n}$. Докажете, че $M = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n$. Съгласно зад. 56

множеството M_n е крайно или изброимо. След това приложете зад. 55.

58. Приложете зад. 57.



Фиг. 6

59. Нека l е дължината на най-късата от трите отсечки с начало в тройната точка O на буквата T (фиг. 6). С център върху отсечката OC построяваме кръг с радиус $\frac{l}{4}$, който се допира до отсечката AB, и го съпоставяме на избраната буква T. По този начин получаваме обратимо изображение на даденото множество от букви T върху безкрайно множество от непресичащи се един друг кръгове в равнината. След това може да се използува зад. 57.

60. Нека M е даденото множество, а M_n — онова негово подмножество, което се състои от буквите T, за които дължината на всяка от трите отсечки, излизащи от тройните точки, е най-малко $\frac{1}{n}$. На всеки елемент на M_n съпоставяме кръг, както е показано на фиг. 6, но този път с радиус $\frac{1}{4n}$. По този начин се получава обратимо изображение на M_n върху безкрайно множество от непресичащи се един друг кръгове в равнината. Съгласно зад. 57 последното множество, а с него и M_n е крайно или изброимо. След това се използува зад. 55.

61. Докажете, че за произволно цяло число $q > 0$ множеството Q_q на несъкратимите дроби със знаменател q е изброимо. След това забележете, че $\mathbb{Q} = \bigcup_{q=1}^{\infty} Q_q$, и използувайте зад. 55.

62. Нека X е изброимо множество, а X_n са множествата на всички крайни подмножества на X съответно с по n елемента ($n = 0, 1, 2, \ldots$). Ако на произволно n елементно подмножество на X съпоставим някоя от наредените n-орки, образувани от неговите елементи, получаваме обратимо изображение $f : X_n \to X^n$. Множеството X_n, а следователно и равномощното му множество $f(X_n)$ са очевидно безкрайни. От друга страна, $f(X_n) \subset X^n$ и съгласно зад. 54 и 51 множеството $f(X_n)$, а следователно и X_n са изброими. Остава само да отбележим, че множеството на всичките крайни подмножества на X съвпада с $\bigcup_{n=0}^{\infty} X_n$, и да приложим зад. 55.

63. За произволно $n = 1, 2, \ldots$ да означим с π_n множеството на всички полиноми от n-та степен с цели коефициенти. Съгласно зад. 54 множеството π_n е изброимо. Сега от зад. 55 следва, че множеството на всичките полиноми с цели коефициенти е изброимо. След това разгледайте произволно нареждане на полиномите с цели коефициенти в редица $P_1, P_2, \ldots, P_n, \ldots$ и използувайте, че всеки полином има краен брой нули, което дава възможност алгебричните числа да се наредят в безкрайна редица.

64. За произволно $n = 1, 2, \ldots$ докажете, че множеството $M_n = \{x \mid x \in M, \frac{1}{n} \leq x\}$ е крайно, и използувайте, че $M = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n$.

67. За всяко x от X множеството $\Phi(x)$ е различно от празното, защото $x \in \Phi(x)$. Очевидно $\bigcup_{x \in X} \Phi(x) = X$. Остава само да се докаже, че от $\Phi(x) \neq \Phi(y)$ следва $\Phi(x) \cap \Phi(y) = \varnothing$, което се получава от зад. 20 ж).

69. Съгласно зад. 37 е в сила $\Phi(a) = \ldots f^{-2}(a) \cup f^{-1}(a) \cup a \cup f(a) \cup f^2(a) \cup \ldots$. Тъй като f е обратимо, всяко от събираемите е най-много 1-елементно, поради което $\Phi(a)$ е най-много изброимо. Ако допуснем, че $\Phi(a)$ и $\Phi(a) \cap Y$ не са равномощни, ще се окаже, че $\Phi(a) \cap Y$ е крайно (зад. 51). Нека сега $x \in \Phi(a)$. Тъй като $\Phi(a)$ е стабилно множество, което съдържа x, то $\Phi(x) \subset \Phi(a)$ и следователно $\Phi(x) \cap Y$ е крайно. Да разгледаме редицата $f(x)$, $f^2(x), \ldots, f^n(x), \ldots$. Всичките ѝ членове принадлежат на Y, защото f изобразява X в Y. Освен това те принадлежат на $\Phi(x)$ съгласно зад. 37. Следователно всичките членове на тази редица принадлежат на крайното множество $\Phi(x) \cap Y$. Ето защо съществуват членове $f^n(x)$ и $f^{n+k}(x)$ $(0 < k)$ на тази редица, които съвпадат, т. е. $f^n(x) = f^{n+k}(x)$. Тъй като изображението f е обратимо, от последното равенство следва $x = f^k(x)$ и тогава $x \in Y$. И така за всяко x от $\Phi(a)$ е в сила $x \in Y$, поради което $\Phi(a) \subset Y$, т. е. $\Phi(a) = \Phi(a) \cap Y$, което противоречи на допускането, че тези две множества не са равномощни.

70. Използувайте зад 67 — 69.

71. Съгласно условието съществуват обратими изображения $f : X \to Z$ и $h : Z \to X$. Нека $f = h \circ g$ и $Y = h(Z)$. Тогава f е обратимо изображение на X в Y и $Y \subset X$. Съгласно зад. 70 е в сила $X \sim Y$. Но тъй като $h(Z) = Y$ и h е обратимо изображение, то $Y \sim Z$. Съгласно зад. 39 в) оттук следва, че $X \sim Z$.

72. Нека y_0 и y_1 са два различни елемента на Y. На всеки елемент x на X съпоставяме изображението $f_x : X \to Y$, дефинирано със

$$f_x(z) = \begin{cases} y_1 & \text{при } z \neq x, \\ y_0 & \text{при } z = x. \end{cases}$$

По този начин на всеки елемент x на X е съпоставен по един елемент f_x на Y^X. Изображението $\Phi : X \to Y^X$, дефинирано с $\Phi(x) = f_x$ $(x \in X)$, е обратимо.

73. Допускаме противното и с $\Phi : X \to Y^X$ означаваме изображение, за което $Y^X = \Phi(X)$. Нека $x \in X$. Тогава $\Phi(x) \in Y^X$, т. е. $\Phi(x)$ е изображение на X в Y; ще го означим с $f_x : X \to Y$. Тъй като Y има поне два различни елемента, съществува елемент $f(x)$ на Y, за който $f(x) \neq f_x(x)$. По този начин е дефинирано изображение $f : X \to Y$, различно от f_x при произволно x от X (това следва от факта, че $f(x) \neq f_x(x)$). И така $f \neq \Phi(x)$ за всяко x от X, а това противоречи на $Y^X = \Phi(X)$.

74. Нека Y е множеството, съставено само от двата елемента 0 и 1. Съгласно зад. 73 е достатъчно да покажем, че $P(A) \sim Y^X$. Нека изображението $\Phi : Y^X \to P(A)$ е дефинирано по следния начин: $\Phi(f) = f^{-1}(0)$ за произволно $f \in Y^X$. Докажете, че Φ е обратимо и че $\Phi(Y^X) = P(A)$.

75. Нерефлексивни са б), д). **77.** а), д), е), з).
79. Използувайте зад. 78. **81.** Всичките без д).
83. Използувайте зад. 82. **85.** Използувайте зад. 84.
87. а), з). **89.** Използувайте зад. 88.

Втора глава

1. **ж)** За произволно естествено число n да означим с P_n твърдението:

(1) $\quad 1^7 + 2^7 + \ldots + n^7 = \dfrac{1}{24}n^2(n+1)^2(3n^4 + 6n^3 - n^2 - 4n + 2).$

Така получаваме една редица $P_1, P_2, \ldots, P_n, \ldots$ от твърдения. Ще се убедим, че тази редица притежава свойствата а) и б) от формулировката на принципа за математическата индукция. Твърдението P_1 изразява, че равенството (1) е валидно при $n = 1$, което се проверява непосредствено. Нека сега твърдението P_n е вярно, т. е. в сила е (1). Тогава

$$1^7 + 2^7 + \cdots + (n+1)^7 = \frac{1}{24}n^2(n+1)^2(3n^4 + 6n^3 - n^2 - 4n + 2) + (n+1)^7$$

$$= \frac{1}{24}(n+1)^2(n+2)^2[3(n+1)^4 + 6(n+1)^3 - (n+1)^2 - 4(n+1) + 2].$$

Съгласно принципа за математическата индукция всички твърдения от редицата $P_1, P_2, \ldots, P_n, \ldots$ са верни, т. е. равенството (1) е изпълнено за всяко естествено n.

2. е) Верността на равенството за $n=1$ се проверява непосредствено. Нека то е вярно за n, т. е. $\sum\limits_{\nu=1}^{n} \nu!\nu = (n+1)! - 1$. Тогава от

$$\sum_{\nu=1}^{n+1} \nu!\nu = (n+1)! - 1 + (n+1)!(n+1) = (n+2)! - 1$$

следва верността му и за $n+1$.

3. а) Верността на равенството за $n = 1$ се проверява непосредствено. Нека то е вярно за n, т. е.

$$\prod_{\nu=1}^{n} \cos\frac{x}{2^\nu} = \frac{1}{2^n} \cdot \frac{\sin x}{\sin\frac{x}{2^n}}.$$

Тогава

$$\prod_{\nu=1}^{n+1} \cos\frac{x}{2^\nu} = \frac{1}{2^n} \cdot \frac{\sin x}{\sin\frac{x}{2^n}} \cos\frac{x}{2^{n+1}} = \frac{\sin x \cos\frac{x}{2^{n+1}}}{2^{n+1}\sin\frac{x}{2^{n+1}}\cos\frac{x}{2^{n+1}}}$$

$$= \frac{\sin x}{2^{n+1}\sin\frac{x}{2^{n+1}}},$$

т. е. равенството е вярно и за $n+1$.

б) Верността на равенството за $n = 1$ се проверява непосредствено. Нека то е вярно за n, т. е. $\prod\limits_{\nu=0}^{n-1}(1 + x^{2^\nu}) = \sum\limits_{\nu=0}^{2^n-1} x^\nu$. Тогава от

$$\prod_{\nu=0}^{n}(1+x^{2^\nu}) = \sum_{\nu=0}^{2^n-1} x^\nu(1+x^{2^n}) = \sum_{\nu=0}^{2^n-1} x^\nu + \sum_{\nu=0}^{2^n-1} x^{\nu+2^n}$$

$$= \sum_{\nu=0}^{2^n-1} x^\nu + \sum_{\nu=2^n}^{2^{n+1}-1} x^\nu = \sum_{\nu=0}^{2^{n+1}-1} x^\nu$$

следва верността му и за $n+1$.

5. в) Верността на равенството за $n=1$ се установява непосредствено. Нека то е вярно за n. Тогава

$$\sum_{\nu=1}^{n+1}(a+(\nu-1)b)x^{\nu-1}$$

$$= \frac{a-(a+(n-1)b)x^n}{1-x} + \frac{bx(1-x^{n-1})}{(1-x)^2} + (a+nb)x^n$$

$$= \frac{a-(a+nb)x^{n+1}}{1-x} + \frac{bx(1-x^n)}{(1-x)^2},$$

т. е. равенството е вярно и за $n+1$.

7. Достатъчността на условието е очевидна. За да докажем необходимостта му, нека P е полином от степен n и нека $P(a)=0$. Ако $P(x) = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu x^{n-\nu}$ $(a_0 \neq 0)$, последното условие се записва така: $\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu a^{n-\nu} = 0$. Следователно

$$P(x) = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu (x^{n-\nu} - a^{n-\nu})$$

$$= (x-a)\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu (x^{n-\nu-1} + x^{n-\nu-2}a + \cdots + a^{n-\nu-1})$$

съгласно зад. 6 а). Но $\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu(x^{n-\nu-1} + x^{n-\nu-2}a + \cdots + a^{n-\nu-1})$ е очевидно полином от степен $n-1$.

8. При $n=1$ твърдението е очевидно. Нека то е вярно за някое n. Да допуснем, че при това предположение то не е вярно за $n+1$. Тогава ще съществува полином P от степен $n+1$, който се анулира за повече от $n+1$ различни стойности на аргумента. Нека например $P(x_\nu) = 0$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n+2)$, където $x_\mu \neq x_\nu$ при $\mu \neq \nu$. Съгласно зад. 7 $P(x) = (x - x_{n+2})Q(x)$, където $Q(x)$ е полином от степен n. От последното равенство следва, че полиномът Q се анулира за $x = x_\nu$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n+1)$, което противоречи на индукционното предположение.

9. Нека условието е изпълнено за полиномите $P(x) = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu x^{n-\nu}$ и $Q(x) = \sum_{\nu=0}^{n} b_\nu x^{n-\nu}$. Тогава полиномът $P(x) - Q(x) = \sum_{\nu=0}^{n}(a_\nu - b_\nu)x^{n-\nu}$, чиято степен е най-много равна на n, ще се анулира за $n+1$ различни стойности на x. Ако допуснем, че степента му е n, ще влезем в противоречие с твърдението в зад. 8, поради което $a_0 - b_0 = 0$. По същия начин, ако допуснем, че този полином е от степен $n-1$, ще получим противоречие със зад. 8, поради което $a_1 - b_1 = 0$, и т.н.

10. Като се освободим от знаменателите, получаваме равенството $(a+b)x + (a-1) = 0$, което трябва да е в сила за всяка различна от 0 и -1 стойност на x, а такива има поне две. И така полиномът $(a+b)x + (a-1)$ от първа степен се анулира за поне две различни стойности на x, което съгласно принципа за сравняване на коефициентите (зад. 9) показва, че $a+b=0$ и $a-1=0$, т. е. $a=1$ и $b=-1$.

11. $a = \frac{1}{2}$, $b = -\frac{1}{2}$, $c = \frac{1}{2}$.

12. Приложете принципа за сравняване на коефициентите.

14. б) Следва от зад. 13 индуктивно, а зад. 14 а) се получава от 14 б), когато числото $x = r$ е естествено.

15. Използвайте индукция спрямо m. За да докажете, че от m-тото твърдение следва $(m+1)$-вото, разгледайте произволно множество M с $m+1$ елемента. Имате да докажете, че за всяко цяло неотрицателно n броят на n-елементните подмножества на M е $\binom{m+1}{n}$. При $n=0$ това е очевидно. За да докажете твърдението, когато n е естествено число, изберете произволен елемент a на M и разделете n-елементните подмножества на M на два класа по следния признак: към единия клас причислете онези n-елементни подмножества на M, които съдържат a, а към другия — останалите. Като използувате индукционното предположение, пребройте елементите на всеки от тези два класа и си послужете със зад. 13.

16. За $n=1$ твърдението е очевидно. От верността му за n следва

$$(a+b)^{n+1} = \left(\sum_{\nu=0}^{n}\binom{n}{\nu}a^{n-\nu}b^{\nu}\right)(a+b)$$
$$= \sum_{\nu=0}^{n}\binom{n}{\nu}a^{n-\nu+1}b^{\nu} + \sum_{\nu=0}^{n}\binom{n}{\nu}a^{n-\nu}b^{\nu+1}$$
$$= \sum_{\nu=0}^{n}\binom{n}{\nu}a^{n-\nu+1}b^{\nu} + \sum_{\nu=1}^{n+1}\binom{n}{\nu-1}a^{n-\nu+1}b^{\nu}$$
$$= \binom{n}{0}a^{n+1}b^{0} + \sum_{\nu=1}^{n}\left[\binom{n}{\nu}+\binom{n}{\nu-1}\right]a^{n+1-\nu}b^{\nu} + \binom{n}{n}a^{0}b^{n+1}$$
$$= \sum_{\nu=0}^{n+1}\binom{n+1}{\nu}a^{n+1-\nu}b^{\nu},$$

където са използувани зад. 13 и очевидно верните за всяка естествена стойност на x равенства $\binom{x}{0} = 1$ и $\binom{x}{x} = 1$.

Дайте друго решение на задачата, като използувате очевидното равенство

$$(a+b)^n = \sum_{\nu=0}^{n} C_\nu a^{n-\nu}b^\nu,$$

а за пресмятане на коефициентите C_ν използувайте зад. 15.

17. Ако приравним коефициентите пред p-тите степени на z в лявата и дясната страна на тъждеството

$$(1+z)^m(1+z)^n = \sum_{\mu=0}^{m}\binom{m}{\mu}z^\mu \sum_{\nu=0}^{n}\binom{n}{\nu}z^\nu = \sum_{\lambda=0}^{m+n}\binom{m+n}{\lambda}z^\lambda = (1+z)^{m+n},$$

ще получим желаното равенство за естествени x и y. Нека y е произволно цяло неотрицателно число. Тогава двете страни на равенството, което трябва да докажем, са полиноми на x. Съгласно току-що доказаното те приемат равни стойности за всичките естествени числа x, които са безбройно много. Като приложим принципа за сравняване на коефициентите, заключаваме,че коефициентите на тези полиноми, а следователно и самите полиноми съвпадат. По този начин равенството е доказано за всяко цяло неотрицателно y и за всяко реално x. Сега фиксираме по произволен начин реалното число x и повтаряме разсъжденията, като разменяме ролите на x и y.

Дайте друго решение на задачата за естествени x и y, като използувате зад. 15.

18. Непосредствено следствие от зад. 17 и от равенството $\binom{m}{n} = \binom{m}{m-n}$.

19. За естествени стойности на x може да се разсъждава, както в зад. 17, но като се използува тъждеството $(1+z)^x(1-z)^x = (1-z^2)^x$. За да се докаже верността на равенството за всяко реално x, достатъчно е да се забележи, че лявата и дясната страна са полиноми на x, и да се приложи принципът за сравняване на коефициентите.

20. **а)** Полагаме $a = b = 1$ в биномната формула. **б)** Използувайте а) и зад. 15.

21. Непосредствено следствие от зад. 20.

22. За $n = 1$ е ясно. От верността за някое n следва

$$(\cos x + i\sin x)^{n+1} = (\cos nx + i\sin nx)(\cos x + i\sin x)$$
$$= \cos(n+1)x + i\sin(n+1)x$$

съгласно формулата за умножение на комплексни числа в тригонометричен вид. Нека $m = -n$, където n е естествено число. Тогава

$$(\cos x + i\sin x)^m = \frac{1}{(\cos x + i\sin x)^n} = \frac{1}{\cos nx + i\sin nx}$$
$$= \cos nx - i\sin nx = \cos(-nx) + i\sin(-nx) = \cos mx + i\sin mx.$$

С това твърдението е доказано, тъй като при $n = 0$ то е очевидно вярно.

23. В биномната формула $(1+x)^n = \sum_{\nu=0}^{n}\binom{n}{\nu}x^\nu$ полагаме последователно $x = 1$, ε и ε^2, където ε е кой да е корен на уравнението $x^2 + x + 1 = 0$. Получаваме

$$(1)\qquad \sum_{\nu=0}^{n}\binom{n}{\nu} = 2^n,\quad \sum_{\nu=0}^{n}\binom{n}{\nu}\varepsilon^\nu = (1+\varepsilon)^n,\quad \sum_{\nu=0}^{n}\binom{n}{\nu}\varepsilon^{2\nu} = (1+\varepsilon^2)^n.$$

От $\varepsilon^2 + \varepsilon + 1 = 0$ чрез умножаване с $\varepsilon - 1$ следва $\varepsilon^3 = 1$, а като умножим с ε^2 и използуваме последното равенство, получаваме $\varepsilon^4 + \varepsilon^2 + 1 = 0$, т. е. ε^2 също е корен на уравнението $x^2 + x + 1 = 0$. Сега можем да докажем, че

$$(2)\qquad 1 + \varepsilon^\nu + \varepsilon^{2\nu} = \begin{cases} 0, & \text{когато } \nu \text{ не се дели на } 3,\\ 3, & \text{когато } \nu \text{ се дели на } 3.\end{cases}$$

Наистина, когато ν не се дели на 3, числото ε^ν е или ε, или ε^2 (тъй като $\varepsilon^3 = 1$), и в този случай (2) следва от това, че както ε, така и ε^2 са корени на уравнението $x^2 + x + 1 = 0$. Когато ν се дели на 3, е в сила $\varepsilon^\nu = 1$ и $\varepsilon^{2\nu} = 1$ и верността на (2) в този случай се вижда веднага. Като съберем левите и десните страни на равенствата (1) и използваме (2), получаваме

$$
\begin{aligned}
2^n + (1+\varepsilon)^n + (1+\varepsilon^2)^n &= \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu}(1 + \varepsilon^\nu + \varepsilon^{2\nu}) \\
&= 3\left[\binom{n}{0} + \binom{n}{3} + \binom{n}{6} + \cdots\right].
\end{aligned} \tag{3}
$$

Остана да пресметнем лявата страна на (3). Като решим уравнението $x^2 + x + 1 = 0$ и приведем корените му в тригонометричен вид, получаваме $\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}$, откъдето

$$
\begin{cases}
1+\varepsilon = -\varepsilon^2 = -\cos\frac{4\pi}{3} - i\sin\frac{4\pi}{3} = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}, \\
1+\varepsilon^2 = -\varepsilon = -\cos\frac{2\pi}{3} - i\sin\frac{2\pi}{3} = \cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3}.
\end{cases} \tag{4}
$$

От (4) намираме $2^n + (1+\varepsilon)^n + (1+\varepsilon^2)^n = 2^n + 2\cos\frac{n\pi}{3}$, откъдето поради (3) следва равенството а) на задачата. Другите две равенства се доказват аналогично, като се разглеждат съответно сумите

$$2^n + \varepsilon(1+\varepsilon)^n + \varepsilon^2(1+\varepsilon^2)^n \text{ и } 2^n + \varepsilon^2(1+\varepsilon)^n + \varepsilon(1+\varepsilon^2)^n.$$

24. Решава се аналогично на зад. 23, като се разглежда $(1+i)^n$.

25. **а)** За $n = 1$ верността се проверява непосредствено. От верността му за n следва

$$\sum_{\nu=1}^{n+1} \sin \nu x = \frac{\sin\frac{n}{2}x \sin\frac{n+1}{2}x}{\sin\frac{x}{2}} + \sin(n+1)x = \frac{\sin\frac{n+1}{2}x \sin\frac{n+2}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}.$$

б) Аналогично на а). Паралелно доказателство на а) и б) може да се получи чрез формулата на Моавър. Нека $A = \sum_{\nu=1}^{n} \cos \nu x$, $B = \sum_{\nu=1}^{n} \sin \nu x$. Тогава

$$A + iB = \sum_{\nu=1}^{n} (\cos \nu x + i \sin \nu x) = \sum_{\nu=1}^{n} (\cos x + i \sin x)^\nu$$

$$= \frac{1 - (\cos x + i\sin x)^{n+1}}{1 - (\cos x + i\sin x)} - 1 = \frac{1 - \cos(n+1)x - i\sin(n+1)x}{1 - \cos x - i\sin x} - 1$$

съгласно зад. 22 и 5 а). По-нататък правим елементарните преобразувания

$$1 - \cos(n+1)x - i\sin(n+1)x = 2\sin^2\frac{n+1}{2}x - 2i\sin\frac{n+1}{2}x\cos\frac{n+1}{2}x,$$

$$1 - \cos x - i\sin x = 2\sin^2\frac{x}{2} - 2i\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2},$$

откъдето следва

$$
\begin{aligned}
A + iB &= \frac{\sin\frac{n+1}{2}x}{\sin\frac{x}{2}} \cdot \frac{-i\left(\cos\frac{n+1}{2}x + i\sin\frac{n+1}{2}x\right)}{-i\left(\cos\frac{x}{2} + i\sin\frac{x}{2}\right)} - 1 \\
&= \frac{\sin\frac{n+1}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}\left(\cos\frac{nx}{2} + i\sin\frac{nx}{2}\right) - 1.
\end{aligned}
$$

Като приравним реалните и имагинерните части, получаваме

$$A = \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}} - \frac{1}{2}, \qquad B = \frac{\sin\frac{n+1}{2}x\cos\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}.$$

в) — е) Аналогично.

26. Както зад. 25.

27. Представете квадратите чрез удвоени ъгли и приложете зад. 25.

28. Аналогично на зад. 25, като вместо зад. 5 а) се използва зад. 5 б).

29. Приложете формулата на Моавър и биномната формула към $(\cos x + i\sin x)^n$ и сравнете реалните и имагинерните части в полученото равенство.

30. От

$$z = \cos x + i\sin x \tag{1}$$

следва

$$z^{-1} = \cos x - i\sin x. \tag{2}$$

От (1) и (2) следват равенствата

$$\sin x = \frac{1}{2i}(z - z^{-1}) \tag{3}$$

и

$$\cos x = \frac{1}{2}(z + z^{-1}). \tag{4}$$

Равенството а) се доказва чрез вдигане на двете страни на (3) в степен $2n$:

$$\begin{aligned}\sin^{2n} x &= \frac{(-1)^n}{4^n}\sum_{\nu=0}^{2n}(-1)^\nu\binom{2n}{\nu}z^{2(n-\nu)}\\ &= (-1)^n 4^{-n}\sum_{\nu=0}^{2n}(-1)^\nu\binom{2n}{\nu}[\cos 2(n-\nu)x + i\sin 2(n-\nu)x],\end{aligned} \tag{5}$$

и сравняване на реалните части в (5) (където второто равенство е написано въз основа на (1) и на формулата на Моавър). Получава се

$$\sin^{2n} x = \frac{(-1)^n}{4^n}\sum_{\nu=0}^{2n}(-1)^\nu\binom{2n}{\nu}\cos 2(n-\nu)x. \tag{6}$$

От (6) следва

$$\begin{aligned}4^n\sin^{2n} x &= \sum_{\nu=0}^{n-1}(-1)^{n-\nu}\binom{2n}{\nu}\cos 2(n-\nu)x + \binom{2n}{n}\\ &+ \sum_{\nu=n+1}^{2n}(-1)^{n-\nu}\binom{2n}{\nu}\cos 2(n-\nu)x.\end{aligned} \tag{7}$$

От (7) чрез смяната $\nu = 2n - \mu$ на индексите, последвана от формална замяна на μ с ν, се получава равенството а) на задачата поради

$$\begin{aligned}\sum_{\nu=n+1}^{2n}(-1)^{n-\nu}\binom{2n}{\nu}\cos 2(n-\nu)x &= \sum_{\mu=0}^{n-1}(-1)^{\mu-n}\binom{2n}{2n-\mu}\cos 2(\mu-n)x\\ &= \sum_{\nu=0}^{n-1}(-1)^{n-\nu}\binom{2n}{\nu}\cos 2(n-\nu)x;\end{aligned}$$

тук са съобразени равенствата

$$(-1)^{\mu-n} = (-1)^{n-\mu}, \binom{2n}{2n-\mu} = \binom{2n}{\mu}, \cos 2(\mu-n)x = \cos 2(n-\mu)x.$$

Равенствата б) — г) се доказват аналогично. Да отбележим между другото, че сравняването на имагинерните части в равенството (5) води до равенството

$$\sum_{\nu=0}^{2n}(-1)^\nu\binom{2n}{\nu}\sin 2(n-\nu)x = 0,$$

чиято верност лесно може да се съобрази и непосредствено.

31. Стандартно прилагане на индукция. Така например за а) верността при $n = 1$ се проверява директно. От верността на равенството за някое n следва

$$\sum_{\nu=1}^{n+1} 4^\nu \sin^4\frac{x}{2^\nu} = 4^n\sin^2\frac{x}{2^n} - \sin^2 x + 4^{n+1}\sin^4\frac{x}{2^{n+1}}.$$

Но

$$\begin{aligned}&4^n\sin^2\frac{x}{2^n} + 4^{n+1}\sin^4\frac{x}{2^{n+1}}\\ &= 4^{n+1}\sin^2\frac{x}{2^{n+1}}\cos^2\frac{x}{2^{n+1}} + 4^{n+1}\sin^4\frac{x}{2^{n+1}} = 4^{n+1}\sin^2\frac{x}{2^{n+1}},\end{aligned}$$

което доказва верността на равенството за $n+1$.

32. Верността на неравенството за $n = 1$ се проверява непосредствено (в този случай то преминава в равенство). Нека то е вярно за n, т. е. $(1+nx) \leqq (1+x)^n$. Тогава $(1+x)^{n+1} = (1+x)^n(1+x) \geqq (1+nx)(1+x) = 1+(n+1)x+nx^2 \geqq 1+(n+1)x$ поради $1+x \geqq 0$ и $x^2 \geqq 0$, т. е. неравенството е вярно и за $n+1$.

34. Очевидно $n! = n(n-1)\ldots 3.2 \geqq 2^{n-1}$, поради което

$$\begin{aligned}1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} &\leqq 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}\\ &= 1 + \frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}} < 3.\end{aligned}$$

35. Верността на неравенството за $n = 1$ се проверява непосредствено (в този случай то преминава в равенство). Нека то е вярно за n, т. е. $|\sin nx| \leqq n|\sin x|$. Тогава $|\sin(n+1)x| \leqq |\sin nx||\cos x| + |\cos nx||\sin x| \leqq n|\sin x| + |\sin x| = (n+1)|\sin x|$ поради $|\cos x| \leqq 1$ и $|\cos nx| \leqq 1$, т. е. неравенството е вярно и за $n+1$.

37. а) Индукция по n. При $n=1$ верността на твърдението е очевидна. Нека то е вярно за някое n и нека за естествените числа $x_1, x_2, \dots, x_{n+1}$ е в сила $x_1 < x_2 < \dots < x_{n+1}$. Тогава

$$(1)\qquad \begin{aligned} x_1 + x_2 + \dots + x_n &\leqq 1+2+3+\dots+(x_n-1)+x_n \\ &= \frac{1+x_n}{2}x_n \leqq \frac{x_{n+1}(x_{n+1}-1)}{2}, \end{aligned}$$

откъдето

$$2(x_1+x_2+\dots+x_n)x_{n+1} + x_{n+1}^2 \leqq x_{n+1}^3,$$

което заедно с индуктивното предположение $(x_1+x_2+\dots+x_n)^2 \leqq x_1^3+x_2^3+\dots+x_n^3$ дава верността на неравенството за $n+1$:

$$(2)\qquad (x_1+x_2+\dots+x_n+x_{n+1})^2 \leqq x_1^3+x_2^3+\dots+x_n^3+x_{n+1}^3.$$

За равенство в (2) е необходимо последното неравенство на (1) да се обръща в равенство, т. е. $x_{n+1} = x_n+1$. Освен това първото неравенство (1) също трябва да се обръща в равенство, което е възможно само при $x_\nu = \nu$ ($\nu = 1, 2, \dots, n$). **б)** Индукция по n. При $n=1$ неравенството става $2x_1^6 \leqq x_1^5 + x_1^7$, което е еквивалентно на $0 \leqq (x_1-1)^2$, така че в този случай твърдението е очевидно. Да предположим, че то е вярно за някое n:

$$(1)\qquad 2(x_1^3+x_2^3+\dots+x_n^3)^2 \leqq x_1^5+\dots+x_n^5+x_1^7+\dots+x_n^7,$$

и нека $x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}$ са естествени числа, за които $x_1 < x_2 < \dots < x_n < x_{n+1}$. Тогава

$$(2)\qquad \begin{aligned} x_1^3+x_2^3+\dots+x_n^3 &\leqq 1^3+2^3+3^3+\dots+(x_n-1)^3+x_n^3 \\ &= \frac{x_n^2(x_n+1)^2}{4} \leqq \frac{(x_{n+1}-1)^2 x_{n+1}^2}{4} \end{aligned}$$

съгласно зад. 1 в). От (1) и (2) следва

$$(3)\qquad 2(x_1^3+x_2^3+\dots+x_{n+1}^3)^2 \leqq x_1^5+\dots+x_{n+1}^5+x_1^7+\dots+x_{n+1}^7,$$

т. е. верността на неравенството за $n+1$. За да има равенство в (3), е необходимо последното неравенство в (2) да се обръща в равенство, т. е. да имаме $x_{n+1} = x_n+1$. Освен това първото от неравенствата (2) също трябва да се обръща в равенство, което е възможно само когато $x\nu = \nu$ ($\nu = 1, 2, \dots, n$).

38. Събираме почленно равенствата $a_{\nu+1}^2 = 1 + 2a_\nu + a_\nu^2$ за $\nu = 0, 1, \dots, n$. Ще получим $a_{n+1}^2 = n + 2(a_1+\dots+a_n)$, откъдето желаното неравенство следва очевидно.

39. При решаването на тази задача ще използваме следната еквивалентна формулировка на принципа за математическата индукция:

Нека редицата от твърдения

$$(1)\qquad P_1, P_2, \dots, P_n, \dots$$

притежава следните свойства:

а) твърдението P_1 е вярно;

б) за всяко естествено число n от верността на $P_1, P_2, \dots, P_n$ следва верността на P_{n+1}.

Тогава всички твърдения от редицата (1) са верни.

В някои случаи е удобно индукцията да започва не от 1, а от 0; така ще процедираме в настоящата задача.

За $n=0$ твърдението се проверява непосредствено, тъй като очевидно полиномът x е сумираща функция за полинома $x^0 = 1$.

Да предположим сега, че твърдението е вярно за полиномите $x^0, x^1, x^2, \dots, x^n$: съществуват полиноми $\beta_{\nu+1}(x)$ от степени $\nu+1$ ($\nu = 0, 1, \dots, n$), които са сумиращи функции за x^ν. От биномната формула

$$(x+1)^{n+2} = x^{n+2} + (n+2)x^{n+1} + \sum_{\nu=2}^{n+2}\binom{n+2}{\nu}x^{n+2-\nu}$$

получаваме

$$\begin{aligned} x^{n+1} &= \frac{1}{n+2}\left\{(x+1)^{n+2} - x^{n+2} - \sum_{\nu=2}^{n+2}\binom{n+2}{\nu}(\beta_{n+3-\nu}(x+1) - \beta_{n+3-\nu}(x))\right\} \\ &= \frac{1}{n+2}(\beta_{n+2}(x+1) - \beta_{n+2}(x)) \end{aligned}$$

при

$$\beta_{n+2}(x) = \frac{1}{n+2}\left(x^{n+2} - \sum_{\nu=2}^{n+2}\binom{n+2}{\nu}\beta_{n+3-\nu}(x)\right).$$

41. По условие $P_1(x+1) - P_1(x) = f(x)$ и $P_2(x+1) - P_2(x) = f(x)$, така че $P_2(x+1) - P_1(x+1) = P_2(x) - P_1(x)$. Следователно полиномът $Q(x) = P_2(x) - P_1(x)$ притежава свойството $Q(x+1) = Q(x)$ за всяко x. Оттук по индукция следва $Q(n) = Q(0)$ за всяко естествено n, което показва, че полиномът $Q(x) - Q(0)$ има безбройно много нули и следователно $Q(x) = Q(0) = c$ за всяко x.

42. Приложете принципа за сравняване на коефициентите.

43. Да изберем числото a толкова голямо (по-голямо от всички нули на знаменателя на R), че $R(x)$ да има смисъл за всяко

$x \geq a$. По индукция се установява лесно, че $R(n+a) = R(a)$, което показва, че рационалната функция $R(x+a) - R(a)$ се анулира безбройно много пъти. Като използуваме принципа за сравняване на коефициентите, оттук заключаваме, че $R(x+a) = R(a)$ за всяко x от дефиниционната област на R, което показва, че R е константа.

44. Приложете зад. 43.

45. Ще разгледаме подробно само случая $k = 1$. Ако такава рационална функция R съществуваше, бихме имали $R(n+1) - R(n) = \frac{1}{n}$, откъдето съгласно принципа за сравняване на коефициентите бихме получили

$$R(x+1) - R(x) = \frac{1}{x}. \tag{1}$$

Нека $R = \frac{P}{Q}$, където полиномите P и Q са взаимно прости. Тогава от (1) следва

$$xP(x+1)Q(x) - xP(x)Q(x+1) = Q(x)Q(x+1) \tag{2}$$

за всяко x. Полиномите $xP(x+1)Q(x)$ и $Q(x)Q(x+1)$ се делят на $Q(x)$ и от (2) следва, че и полиномът $xP(x)Q(x+1)$ трябва да се дели на $Q(x)$. Но полиномите $P(x)$ и $Q(x)$ са взаимно прости по условие, поради което полиномът $xQ(x+1)$ трябва да се дели на $Q(x)$, т. е. трябва да съществува полином $ax+b$, за който

$$xQ(x+1) = (ax+b)Q(x) \quad (a \neq 0) \tag{3}$$

за всяко x. С аналогични разсъждения за $Q(x+1)$ вместо за $Q(x)$ се убеждаваме, че съществува полином $cx+d$, за който

$$xQ(x) = (cx+d)Q(x+1) \quad (c \neq 0) \tag{4}$$

за всяко x. Като умножим почленно (3) и (4) и съкратим на полинома $Q(x)Q(x+1)$, получаваме

$$x^2 = acx^2 + (ad+bc)x + bd \tag{5}$$

за всяко x. От (5) следва $b = 0$ и сега (3) дава

$$Q(x+1) = aQ(x). \tag{6}$$

Като сравним коефициентите на най-високите степени на x в (6), се убеждаваме, че $a = 1$, и тогава от зад. 43 следва, че Q е константа, т. е. че функцията R е полином. Но тогава (1) е невъзможно.

Случаят на произволно естествено число k се третира аналогично.

46. Ще си послужим с индукция спрямо n, за да докажем, че когато остатъкът от делението на $P(x)$ с $x(x+1)\ldots(x+n)$ е от степен, не по-голяма от $n-1$, дадената рационална функция притежава рационална сумираща функция. При $n = 1$ по условие остатъкът от делението на $P(x)$ с $x(x+1)$ трябва да бъде константа:

$$\frac{P(x)}{x(x+1)} = Q(x) + \frac{a}{x(x+1)}, \tag{1}$$

където Q е полином. Тъй като полиномът Q притежава сумираща функция (зад. 40), твърдението ще бъде доказано, ако се убедим, че второто събираемо в дясната страна на (1) притежава сумираща функция. Това е очевидно, тъй като $\frac{a}{x(x+1)} = -\frac{a}{x+1} + \frac{a}{x}$.

Нека твърдението е вярно за някое n; ще докажем верността му за $n+1$. Всяка от функциите

$$Q_\nu(x) = \frac{x^\nu}{x(x+1)\ldots(x+n+1)} \quad (\nu = 0, 1, \ldots, n) \tag{2}$$

притежава сумираща. При $\nu = 0$ това се вижда така:

$$Q_0(x) = \frac{1}{x(x+1)\ldots(x+n+1)} = \frac{(x+n+1) - x}{(n+1)x(x+1)\ldots(x+n+1)}$$

$$= \frac{1}{n+1} \cdot \frac{1}{x(x+1)\ldots(x+n)} - \frac{1}{n+1} \cdot \frac{1}{(x+1)(x+2)\ldots(x+n+1)}.$$

При $\nu = 1, 2, \ldots, n$ имаме

$$Q_\nu(x) = \frac{x^{\nu-1}}{(x+1)(x+2)\ldots(x+n+1)} = \frac{(v-1)^{\nu-1}}{v(v+1)\ldots(v+n)}$$

при $v = x+1$ и верността на твърдението следва от индуктивното предположение. Случаят на произволен полином $P(x)$ чрез деление с $x(x+1)\ldots(x+n+1)$ се свежда до полином от степен, не по-висока от n, а след това до линейна комбинация на функции от вида (2), които притежават сумиращи. С това е доказана достатъчността.

Сега да предположим, че остатъкът от делението на $P(x)$ с $x(x+1)\ldots(x+n)$ има по-висока степен от $n-1$. Тъй като той не може да бъде от степен, по-висока от n, степента му ще бъде точно n. Тогава

$$\frac{P(x)}{x(x+1)\ldots(x+n)} = Q(x) + \frac{ax^n + S(x)}{x(x+1)\ldots(x+n)}, \tag{3}$$

където $a \neq 0$ е константа, а $Q(x)$ и $S(x)$ са полиноми, като степента на последния не надминава $n-1$. Трябва да докажем, че лявата страна на (3) не притежава сумираща функция. Тъй като $Q(x)$ притежава сумираща съгласно зад. 40, а съгласно вече доказаното функцията $\frac{S(x)}{x(x+1)\dots(x+n)}$ също притежава сумираща функция, остава да установим, че функцията $\frac{x^n}{x(x+1)\dots(x+n)}$ няма сумираща. Ще докажем това с индукция спрямо n. При $n=0$ твърдението следва от зад. 45 (с $k=1$). Ако твърдението е вярно за n, ще установим верността му за $n+1$. Имаме

$$\frac{x^{n+1}}{x(x+1)\dots(x+n+1)} = \frac{x^n}{(x+1)(x+2)\dots(x+n+1)}$$

$$(4)\qquad = \frac{v^n}{v(v+1)\dots(v+n)} + \frac{\sum_{\nu=1}^{n}(-1)^\nu\binom{n}{\nu}v^{n-\nu}}{v(v+1)\dots(v+n)},$$

където след полагането $v = x+1$ е приложена биномната формула. Съгласно индукционното предположение първото събираемо в дясната страна на (4) няма сумираща функция, а второто събираемо има съгласно доказаната вече достатъчност.

Трета глава

1. Това не е вярно за празното множество.

3. Нека y е произволен елемент на N. Съгласно условието за всяко x от M ще бъде изпълнено неравенството $x \leqq y$, което показва, че y е мажоранта на M. Числото $r = \sup M$ е най-малката мажоранта на M. Следователно $r \leqq y$. Тъй като y е произволен елемент на N, остава да се докаже само, че $x \leqq r$ за всяко x от M, което е вярно, понеже r по дефиниция е мажоранта на M.

6. Нека $x \in M$ и $x \neq \sup M$. Тогава $x < \sup M$ и съгласно условието $x < \sup N$. Следователно x не е горна граница на N, поради което съществува y от N, за което $x < y$.

7. Нека $x \in M$. Съгласно условието съществува y от N, за което $x \leqq y$. Но $y \leqq \sup N$, така че $x \leqq \sup N$. Следователно $\sup N$ е горна граница на M. Но $\sup M$ е най-малката горна граница на M, откъдето следва $\sup M \leqq \sup N$.

8. Приложете зад. 7.

9. Докажете, че от $\beta \in A$ и $\gamma \in A$ следва $a_\beta \leqq b_\gamma$ и приложете принципа за отделимост.

10. Допуснете противното. Тогава всичките реални числа биха могли да се подредят в редица $x_1, x_2, \dots$ с $x_m \neq x_n$ при $m \neq n$. По-нататък разделете интервала $\Delta_0 = [0, 1]$ на три равни затворени подинтервала и означете с Δ_1 някой от тях, който не съдържа x_1, и т. н. Съгласно теоремата на Кантор — Хели (зад. 9) съществува точка ξ, която принадлежи на всичките интервали $\Delta_0, \Delta_1, \Delta_2, \dots$ Покажете, че за всяко естествено n е в сила $\xi \neq x_n$, и по този начин ще получите противоречие.

11. Едно число се нарича *трансцендентно*, когато не е алгебрично (за дефиницията на алгебрично число вж. гл. I, текста преди зад. 63). Ако допуснем, че множеството на трансцендентните числа е изброимо или крайно, ще се окаже (понеже множеството на алгебричните числа е изброимо, вж. гл. I, зад. 63), че множеството на реалните числа също е изброимо (гл. I, зад. 51 и 55), което противоречи на зад. 10.

12. Ако допуснем противното, ще се окаже, че множеството $N = [a, \infty) \setminus M$ не е празно. Очевидно a е долна граница на N. Да положим $t = \inf N$. Тогава $a \leqq t$. Очевидно $[a, t) \subset M$ и съгласно условието съществува $\varepsilon > 0$, за което $[a, t+\varepsilon) \subset M$. Следователно $t+\varepsilon$ е миноранта на N, което е противоречие.

13. Да означим с M множеството на онези x с $x \geqq a$, за които затвореният интервал $[a, x]$ може да се покрие с краен брой интервали Δ_α. Целта ни е да покажем, че $b \in M$. Допускаме противното:

$$(1)\qquad b \notin M.$$

За да получим противоречие, ще използваме континуална индукция (зад. 12). Нека

$$(2)\qquad [a, t) \subset M \quad (a \leqq t).$$

От (1) и (2) следва $t \leqq b$. Нека $\Delta_\beta = (p, q)$ е интервал от покритието, който съдържа t, т. е. $p < t < q$. Избираме число ε така, че $0 < \varepsilon < q - t$. Тогава интервалът $[a, t+\varepsilon]$ може да се покрие с краен брой от интервалите Δ_α; наистина, ако $p \leqq a$, това е очевидно, понеже $[a, t+\varepsilon) \subset (p, q) = \Delta_\beta$; ако пък $a < p$, то е в сила $p \in [a, t) \subset M$ и следователно $[a, p]$ се покрива от краен брой интервали Δ_α, а тъй като $[a, t+\varepsilon] \subset [a, p] \cup (p, q)$, то и $[a, t+\varepsilon]$ се покрива с краен брой интервали Δ_α. И така от $a \leqq t$ и $[a, t) \subset M$ следва $t+\varepsilon \in M$. От дефиницията на M следва, че $[a, t+\varepsilon] \subset M$. Като приложим континуална индукция, заключаваме, че $[a, \infty) \subset M$, което противоречи на (1).

19. Нека a е мажоранта на M. Понеже $M_\alpha \subset M$, числото a ще бъде мажоранта и на M_α, поради което множеството M_α е мажорирано. Тъй като $\sup M_\alpha$ е най-малката мажоранта на M_α, в сила е $\sup M_\alpha \leqq a$ за всяко α от A. По този начин се убеждаваме, че множеството $\{\sup M_\alpha \mid \alpha \in A\}$ е мажорирано и че всяка мажоранта a на M е мажоранта и на $\{\sup M_\alpha \mid \alpha \in A\}$. Следователно $S = \sup\{\sup M_\alpha \mid \alpha \in A\} \leqq \sup M$. За да докажем противоположното неравенство, нека $x \in M$. Тогава $x \in M_\beta$ за някое β от A и следователно $x \leqq \sup M_\beta$, поради което $x \leqq S$. И така S е мажоранта на M. Но $\sup M$ е най-малката мажоранта на M. Ето защо $\sup M \leqq S$.

20. Нека $x \in M$ и $y \in N$. Тогава $x + y \in M + N$ и следователно $x + y \leqq \sup(M + N)$. Ако фиксираме y и го прехвърлим от другата страна, ще получим $x \leqq \sup(M+N) - y$ за всяко $x \in M$. Това неравенство показва, че $\sup(M+N)-y$ е мажоранта на M. Но най-малката мажоранта на M е $\sup M$; ето защо $\sup M \leqq \sup(M+N) - y$, което е еквивалентно с $y \leqq \sup(M+N) - \sup M$. Оттук следва, че $\sup(M+N) - \sup M$ е мажоранта на N. Следователно $\sup N \leqq \sup(M+N) - \sup M$ и

$$\sup M + \sup N \leqq \sup(M+N). \tag{1}$$

Нека сега $z \in M + N$. Тогава $z = x + y$, където $x \in M$ и $y \in N$. Следователно $x \leqq \sup M$, $y \leqq \sup N$, поради което $z \leqq \sup M + \sup N$. Това неравенство показва, че $\sup M + \sup N$ е мажоранта на $M + N$, а тъй като най-малката мажоранта на $M+N$ е $\sup(M+N)$, то $\sup(M+N) \leqq \sup M + \sup N$. Последното неравенство и (1) дават желаното равенство.

21. Ако $(\sup M)(\sup N) = 0$, твърдението е очевидно. В противен случай решението е аналогично на онова на зад. 20. За n множителя твърдението се доказва по индукция.

22. Понеже по дефиниция $M - N = M + (-N)$, то $\inf(M-N) = \inf(M + (-N)) = \inf M + \inf(-N) = \inf M - \sup N$ съгласно модификацията на зад. 18 за inf и зад. 14.

27. Приложете зад. 21 и 15.

29. Тъй като $\{x^2 \mid x \in M\} \subset MM$, съгласно зад. 8 ще имаме $\sup\{x^2 \mid x \in M\} \leqq \sup(MM)$. От друга страна, от $y \in M$ и $z \in M$ следва $yz \leqq |y||z| \leqq \max(y^2, z^2) \in \{x^2 \mid x \in M\}$ и $\sup(MM) \leqq \sup\{x^2 \mid x \in M\}$ съгласно зад. 7.

30. Разсъжденията са аналогични на онези от зад. 29.

31. Послужете си със зад. 21, като имате пред вид, че

$$LM = \{x_l y_m \mid l,\ m \in \mathbf{N}\}.$$

32. Нека $N = \{q^{n+1} \mid n \in \mathbf{N}\}$. Очевидно $N = qM$ и съгласно аналога на зад. 21 за inf е в сила $\inf N = q \inf M$. От друга страна, $N \subset M$ и от аналога на зад. 8 за inf следва $\inf M \leqq \inf N$. И така

$\inf M \leqq q \inf M$. Тъй като $q < 1$, от последното неравенство следва $\inf M \leqq 0$. Но 0 е миноранта на M и следователно $0 \leqq \inf M$. Последните две неравенства дават $\inf M = 0$.

33. Допуснете противното и използувайте зад. 17 и 32, за да получите противоречие.

34. Нека $N = \left\{\dfrac{1}{2n} \,\middle|\, n \in \mathbf{N}\right\}$. Очевидно $N = \dfrac{1}{2}M$ и съгласно аналога на зад. 21 за inf е в сила $\inf N = \dfrac{1}{2}\inf M$. От друга страна, $N \subset M$ и от аналога на зад. 8 за inf следва $\inf M \leqq 0$. Но 0 е миноранта на M, поради което $\inf M \geqq 0$. Последните две неравенства дават $\inf M = 0$.

35. Съгласно зад. 23 и 34 $\sup M = a - \inf\left\{\dfrac{1}{n} \,\middle|\, n \in \mathbf{N}\right\} = a$.

36. От $\dfrac{n}{n+1} < \dfrac{n+1}{n+2}$ следва $\left(\dfrac{1}{2}\right)^k < \left(\dfrac{2}{3}\right)^k < \ldots < \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^k < \ldots$ Положете $M_k = \left\{\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^k \,\middle|\, n \in \mathbf{N}\right\}$ и докажете, че $\sup M_k = 1$, като си послужите със зад. 21 и 31 и работите индуктивно.

37. Най-напред ще покажем, че редицата $1q$, $2q^2$, $3q^3, \ldots, nq^n, \ldots$ е стриктно намаляваща, след като от нея се отстранят краен брой членове. Наистина неравенството $nq^n > (n+1)q^{n+1}$ е еквивалентно с $n > \dfrac{q}{1-q}$. Следователно горната редица е мажорирана. Нека a е нейна мажоранта. Очевидно

$$\begin{aligned}\inf\{nq^n \mid n \in \mathbf{N}\} &\leqq \inf\{2nq^{2n} \mid n \in \mathbf{N}\} = \inf\{2nq^n . q^n \mid n \in \mathbf{N}\} \\ &\leqq \inf\{2aq^n \mid n \in \mathbf{N}\} = 2a \inf\{q^n \mid n \in \mathbf{N}\} = 0\end{aligned}$$

съгласно аналозите за inf на зад. 7, 8 и 21 и зад. 32.

38. Най-напред покажете, че редицата с общ член $n^k q^n$ $(n \in \mathbf{N})$ е стриктно намаляваща от известно място нататък. За целта забележете, че неравенството $n^k q^n > (n+1)^k q^{n+1}$ е еквивалентно с $q < \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^k$, и използувайте неравенството $q < 1$ и зад. 36. Оттук следва, че тази редица е ограничена. По-нататък разсъжденията са, както в зад. 37.

39. Числото $b = \max(a, 1)$ е горна граница на множеството M. Наистина от $x \in M$ и $b < x$ следва $b^2 < x^2$; но $a \leqq b^2$, т. е.

$a<x^2$, което е невъзможно. От зад. 21 следва $(\sup M)^2=\sup(MM)$, а от зад. 29 имаме $\sup(MM)=\sup\{x^2 \mid x\in M\} \leqq a$. И така

$$(1)\qquad (\sup M)^2 \leqq a.$$

Нека $N=\{x \mid 0<x,\ a \leqq x^2\}$. Сега от аналога на зад. 21 за inf и от зад. 30 следва

$$(2)\qquad a \leqq (\inf N)^2.$$

От (1) и (2) получаваме $\sup M \leqq \inf N$. Това неравенство не може да бъде строго. Наистина в противен случай би съществувало число z, за което $\sup M<z<\inf N$. От лявото неравенство следва $z\notin M$, т. е. $z^2>a$, а от дясното имаме $z\notin N$, т. е. $z^2<a$, което е противоречие. Следователно $\sup M=\inf N$, което заедно с (1) и (2) дава $(\sup M)^2=a$. Да отбележим изрично, че горното доказателство не предполага съществуването на $\sqrt{a}$. Нещо повече, в него се установява това съществуване.

41. Очевидно $a^{\frac{1}{n}}<1$ и следователно $\sup M \leqq 1$. Ако допуснем, че това неравенство е строго, ще съществува число q с $0<q<1$, за което $a^{\frac{1}{n}}<q$ ($n\in\mathbf{N}$), откъдето $a<q^n$ ($n\in\mathbf{N}$), а това противоречи на зад. 32.

42. Като се използуват зад. 16 и 41, да се докаже, че $\inf M=1$.

43. Ще докажем, че $\inf M=1$. Да допуснем противното. Тъй като всичките елементи на M са по-големи от 1, ще имаме $1<\inf M=\xi$. Тогава за всяко n, за което $n-1\in\mathbf{N}$, ще бъде в сила $\xi \leqq n^{\frac{1}{n}}$ и следователно $1 \leqq n\left(\frac{1}{\xi}\right)^n$, което противоречи на зад. 37.

45. Неограничените отгоре множества притежават това свойство. Наистина нека M не е мажорирано и $x\in M$. Тъй като M няма мажоранти, числото $\frac{x^2+1}{2}$ не е негова горна граница и следователно съществува елемент y на M, за който $\frac{x^2+1}{2}<y$, т. е. $x^2+1 \leqq 2y$. Нека сега M е ограничено отгоре и $\xi=\sup M$. Да предположим, че M има желаното свойство. Тогава за всяко x от M ще имаме $x^2+1 \leqq 2y$ за някое y от M и следователно $x^2+1 \leqq 2\xi$, т. е. $x^2 \leqq 2\xi-1$. Ето защо $2\xi-1$ е горна граница на множеството $\{x^2 \mid x\in M\}$, поради което е в сила $\sup\{x^2 \mid x\in M\} \leqq 2\xi-1$. Но съгласно зад. 29 и 28 ще имаме $\sup\{x^2 \mid x\in M\}=\sup(MM) \geqq (\sup M)^2=\xi^2$, следователно $\xi^2 \leqq 2\xi-1$, т. е. $(\xi-1)^2 \leqq 0$, откъдето намираме $\xi=1$ или $\sup M=1$.

Нека $x\in M$. Съгласно предположението съществува такова y от M, че $x^2+1 \leqq 2y$. Тъй като $y \leqq \sup M=1$, то $x^2+1 \leqq 2$, или $x^2 \leqq 1$. И така, ако множеството M притежава желаното свойство, то $M\subset[-1,1]$ и $\sup M=1$. Да отбележим освен това, че ако $-1\in M$, то $1\in M$. Наистина от $-1\in M$ следва, че съществува y от M, за което $(-1)^2+1 \leqq 2y$, т. е. $1 \leqq y$, а тъй като, от друга страна, $y \leqq \sup M=1$, то $y=1$.

Окончателно: Доказахме, че за всяко ограничено M с желаното свойство имаме:

а) $\sup M=1$;
б) $M\subset[-1,1]$;
в) от $-1\in M$ следва $1\in M$.

За да решим задачата, ще докажем, че всяко множество, което удовлетворява условията а) — в), притежава желаното свойство. Наистина нека M е такова множество и $x\in M$. Ако $x=-1$, съгласно в) е в сила $1\in M$ и освен това очевидно $x^2+1=2 \leqq 2y$, където $y=1$. Ако $x=1$, отново можем да положим $y=1$. Найпосле нека $-1<x<1$. Тогава $x^2+1<2$, т. е. $\frac{x^2+1}{2}<1=\sup M$. Следователно съществува y от M, за което $\frac{x^2+1}{2}<y$, т. е. $x^2+1<2y$. Ето защо M притежава желаното свойство.

46. Решението е аналогично на онова на зад. 45. Първо се убеждаваме, че неограничените множества притежават желаното свойство. После, както в зад. 45, установяваме, че ако M е ограничено множество, числото $\xi=\sup M$ удовлетворява неравенството $\xi^2+6 \leqq 5\xi$. Това показва, че е в сила $(\xi-2)(\xi-3) \leqq 0$, т. е.

$$(1)\qquad 2 \leqq \xi \leqq 3.$$

По-нататък пак аналогично на решението на зад. 45 се доказва, че $M\subset[-\sqrt{5\xi-6},\sqrt{5\xi-6}]$. Като се вземе пред вид, че $\xi \leqq \sqrt{5\xi-6}$ и $\xi=\sup M$, се получава

$$(2)\qquad M\subset[-\sqrt{5\xi-6},\xi].$$

Ако $-\sqrt{5\xi-6}\in M$, за някое y от M е в сила $(-\sqrt{5\xi-6})^2+6 \leqq 5y$, т. е. $\xi \leqq y$, откъдето следва $y=\xi$. И така

$$(3)\qquad \text{от } -\sqrt{5\xi-6}\in M \text{ следва } \xi\in M.$$

Следователно всяко ограничено множество M с желаното свойство удовлетворява условията (1) — (3). Като се работи аналогично на решението на зад. 45, се показва, че, обратно, всяко множество с (1) — (3) притежава желаното свойство.

47. Когато $0 < \alpha+\beta$, може да се разсъждава, както в зад. 46. Случаят $\alpha+\beta<0$ се свежда до горния, като се разгледа множеството $-M$. Най-после случаят $\alpha+\beta=0$ се решава съвсем просто директно.

48. Такова е например множеството $\left\{1-\frac{1}{n}\,\middle|\, n\in\mathbf{N}\right\}$.

49. Нека елементите на M са подредени в безкрайна редица $x_1 < x_2 < \ldots$ и N е безкрайно подмножество на M. Ако x_m е произволен елемент на M, ще има елемент x_n на N, за който $m < n$, следователно $x_m < x_n$: съществуването му се осигурява от безкрайността на множеството N. От зад. 7 следва $\sup M \leqq \sup N$. От друга страна, $N \subset M$ и съгласно зад. 8 $\sup N \leqq \sup M$. Последните две неравенства дават $\sup M = \sup N$. С това е доказано „тогава". За да докажем „само тогава", нека M е такова ограничено безкрайно множество без най-голям елемент, че равенството $\sup M = \sup N$ да е в сила за всяко безкрайно подмножество N на M. За произволно $n \in \mathbf{N}$ да положим

$$N_n = \left\{x \,\middle|\, x\in M, x < \sup M - \frac{1}{n}\right\}.$$

Очевидно $N_n \subset M$ и $\sup N_n \leqq \sup M - \frac{1}{n} < \sup M$ и значи N_n е крайно. От друга страна, $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} N_n \subset M$. За да докажем противоположното включване, забелязваме, че при произволен избор на x от M е в сила $x < \sup M$, тъй като M няма най-голям елемент. От зад. 35 следва $\sup\left\{\sup M - \frac{1}{n}\,\middle|\, n\in\mathbf{N}\right\} = \sup M > x$. Ето защо за някое n ще имаме $\sup M - \frac{1}{n} > x$, което показва, че $x \in N_n$ и толкова повече $x \in \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} N_n$. С това е установено, че $M = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} N_n$, и за да подредим елементите на M в стриктно растяща редица, е достатъчно да направим това за $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} N_n$. Да отбележим най-напред, че от $x \in N_m$ и $y \in N_n \setminus N_m$ следва $x < y$. Наистина в противен случай бихме имали $y \leqq x$ и от дефиницията на N_m бихме получили $y \in N_m$, което противоречи на $y \in N_n \setminus N_m$. Следователно елементите на всеки от членовете на

редицата N_1, $N_2 \setminus N_1$, $N_3 \setminus N_2, \ldots$ са по-малки от тези на следващия. От друга страна (тъй като всичките множества N_n са крайни), елементите на обединението $N_1 \cup (N_2\setminus N_1) \cup (N_3 \setminus N_2) \cup \ldots \cup (N_{n+1}\setminus N_n) \cup \ldots$ могат да се подредят в стриктно растяща редица, като най-напред се напишат в нарастващ ред елементите на N_1, след това в нарастващ ред тези на $N_2 \setminus N_1$ и т. н. Следователно, за да решим задачата, остава само да проверим, че $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} N_n = N_1 \cup (N_2\setminus N_1) \cup (N_3\setminus N_2) \cup \ldots \cup (N_{n+1}\setminus N_n) \cup \ldots$, което е очевидно.

50. За да установите достатъчността, използувайте зад. 49, а за да докажете необходимостта — равенството $\sup M = \sup\left\{\sup M - \frac{1}{n}\,\middle|\, n\in\mathbf{N}\right\}$, като имате пред вид, че при $N = M \cap \left(\sup M - \frac{1}{n}, \infty\right)$ е в сила $\sup(M\setminus N) \leqq \sup M - \frac{1}{n} < \sup M$.

51. **в)** Ако $U = \cup\{\Delta_\alpha \mid \alpha\in A\}$ и $V = \cup\{\Delta'_\beta \mid \beta \in B\}$, то $U\cap V = \cup\{\Delta_\alpha \cap \Delta'_\beta \mid \alpha\in A, \beta\in B\}$ (гл. I, зад. 10 з)).

52. Нека дадената фамилия е $\{\Delta_\alpha \mid \alpha \in A\}$. Положете $p = \inf \cup\{\Delta_\alpha \mid \alpha\in A\}$, когато множеството $U = \cup\{\Delta_\alpha \mid \alpha \in A\}$ е минорирано, и $p=-\infty$ в противен случай; аналогично положете $q = \sup U$, когато множеството U е мажорирано, и $q = \infty$, когато не е. Докажете, че $(p,q) \subset U$, и оттук заключете, че или $U = (p,q)$, или $U = [p,q)$, или $U = (p,q]$, или $U = [p,q]$.

54. а) Ако допуснем, че $\Delta' \cap \Delta'' \neq \varnothing$, множеството $\Delta' \cup \Delta''$ ще се окаже отворен интервал. Освен това ще имаме $\Delta' \subset \Delta' \cup \Delta'' \subset U$, така че $\Delta' = \Delta' \cup \Delta''$, откъдето $\Delta'' \subset \Delta'$; аналогично $\Delta' \subset \Delta''$. б) Нека Δ_1 е обединението на всички отворени интервали, които съдържат Δ и се съдържат в U. Очевидно $\Delta \subset \Delta_1 \subset U$ и съгласно зад. 53 Δ_1 е отворен интервал. Нека сега $\Delta_1 \subset \Delta' \subset U$, където Δ' е отворен интервал. Съгласно дефиницията на Δ_1 ще имаме $\Delta' = \Delta_1$. в) Ако Δ се се състои от една точка, твърдението следва от б). Нека сега Δ има непразна вътрешност $\mathring{\Delta}$. Съгласно б) $\mathring{\Delta}$ се съдържа в някоя от компонентите Δ_1 на U. Ако p е край на Δ, който принадлежи на Δ, то $p\in U$ и следователно (съгласно бележката, с която започнахме) p се съдържа в някоя от компонентите Δ_2 на U. Понеже Δ_2 е отворен интервал, който съдържа p, а p е край на $\mathring{\Delta}$, то $\Delta_2 \cap \mathring{\Delta} \neq \varnothing$ и толкова повече $\Delta_2 \cap \Delta_1 \neq \varnothing$. Съгласно а) това има за следствие $\Delta_1 = \Delta_2$ и значи $p \in \Delta_1$. Следователно Δ се съдържа в Δ_1. **е)** Съгласно б) всеки от интервалите Δ_α се съдържа в някоя компонента Δ. Нека p е край на Δ_α. Тогава $p \notin U$ и следователно $p \notin \Delta$. И така $\Delta_\alpha \subset \Delta$ и краищата на Δ_α не принадлежат на Δ. Следователно $\Delta_\alpha = \Delta$. **ж)** От всяка компонента изберете по една рационална точка.

55. Използувайте д) и е) на зад. 52.

56. **б)** Нека $\{M_\alpha \mid \alpha \in A\}$ е фамилия от свързани множества и $c \in M_\alpha$ за всяко α от A. Нека U и V са отворени множества, $U \cup V = \varnothing$ и $M = \cup\{M_\alpha \mid \alpha \in A\} \subset U \cup V$. Да вземем някое β от A. Тъй като M_β е свързано множество, то например $M_\beta \subset U$. За произволно α от A от свързаността на M_α следва $M_\alpha \subset U$ или $M_\alpha \subset V$. Това заедно с $M_\beta \subset U$ и $M_\alpha \cap M_\beta \neq \varnothing$ води до $M_\alpha \subset U$, поради което $M \subset U$. **в)** Допуснете противното. Тогава за някое c от (a, b) ще имате $c \notin M$. Положете $U = (-\infty, c)$ и $V = (c, \infty)$, за да получите противоречие с дефиницията на свързано множество. **г)** Нека M е даденото свързано множество и $c \in M$. От $M = \cup\{[x, y] \mid x \leqq c \leqq y, x \in M, y \in M\}$ съгласно в) и от зад. 52 следва, че M е интервал.

57. Нека Δ е интервал и $\Delta \subset U \cup V$, където U и V са отворени множества и $U \cap V = \varnothing$. Нека $U = \bigcup_\mu \Delta_\mu$ и $V = \bigcup_\nu \Delta'_\nu$ са представянията на U и V чрез компоненти (зад. 54). Съгласно зад. 55 компонентите на $U \cup V$ са Δ_μ и Δ'_ν. Тъй като $\Delta \subset U \cup V$, от зад. 54 в) следва, че или $\Delta \subset \Delta_\mu$ за някое μ, или $\Delta \subset \Delta'_\nu$ за някое ν. В първия случай $\Delta \subset U$, а във втория $\Delta \subset V$.

58. Тъй като $[a, b] \not\subset U$ и $[a, b] \subset U \cup V$, то $[a, b] \cap V \neq \varnothing$. Нека Δ е компонента на V, която съдържа някоя точка от $[a, b] \cap V$. Понеже $[a, b] \not\subset V$, толкова повече $[a, b] \not\subset \Delta$ и в същото време $[a, b] \cap \Delta \neq \varnothing$, поради което поне единият от краищата на Δ принадлежи на $[a, b]$; без ограничение на общността можем да предположим, че например левият край a_1 на Δ принадлежи на $[a, b]$. Очевидно $a_1 \neq b$, защото от $a_1 = b$ би следвало $[a, b] \cap \Delta = \varnothing$. И така $a \leqq a_1 < b$. Понеже $a_1 \notin V$, $a_1 \in [a, b]$ и $[a, b] \subset U \cup V$, то $a_1 \in U$. Следователно съществува такова b_1, че $a_1 < b_1 < b$ и $[a_1, b_1] \subset U$. Тъй като a_1 е левият край на компонентата Δ на V, то $[a_1, b_1] \cap V \neq \varnothing$, $a_1 \notin V$, откъдето $[a_1, b_1] \not\subset V$.

59. Допускаме противното. Това означава, че би било вярно твърдението: поне две от множествата U_n $(n \in \mathbb{N})$ не съдържат $[a, b]$. Ще въведем следната дефиниция: ще казваме, че един интервал $[c, d]$ притежава свойството D относно една редица V_1, $V_2, \ldots$ от отворени множества, когато са изпълнени условията:

А) $[c, d] \cap \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} V_n\right) = \varnothing$; Б) от $m \neq n$ следва $[c, d] \subset V_m \cup V_n$;

В) поне две от множествата V_n $(n \in \mathbb{N})$ не съдържат $[c, d]$. По същество в задачата се твърди, че никой интервал не притежава свойството D, но това още не е доказано. За да докажем това твърдение, допуснахме противното. При това допускане интервалът $[a, b]$ очевидно притежава свойството D относно редицата U_1, $U_2, \ldots$.

Ще докажем твърдението α): Ако интервалът $[c, d]$ притежава свойството D относно редицата $V_1, V_2, \ldots$, непременно съществува подинтервал $[c_1, d_1]$ на $[c, d]$, който се съдържа във V_1 и притежава свойството D относно $V_2, V_3, \ldots$.

Съществуват следните две възможности: 1) $[c, d] \not\subset V_1$ и 2) $[c, d] \subset V_1$.

Да разгледаме най-напред случая 1). Съгласно В) съществува такова множество V_{n_0} с $n_0 \neq 1$, че $[c, d] \not\subset V_{n_0}$. Съгласно Б) е в сила $[c, d] \subset V_1 \cup V_{n_0}$, а от зад. 58 следва, че съществува интервал $[c_1, d_1]$, за който $[c_1, d_1] \subset [c, d]$, $[c_1, d_1] \subset V_1$, $[c_1, d_1] \not\subset V_{n_0}$ и $[c_1, d_1] \cap V_{n_0} \neq \varnothing$. Остава да докажем, че $[c_1, d_1]$ притежава свойството D относно редицата $V_2, V_3, \ldots$. Първо ще установим, че $[c_1, d_1] \cap \left(\bigcap_{n=2}^{\infty} V_n\right) = \varnothing$. Наистина съгласно А) имаме $[c_1, d_1] \cap \left(\bigcap_{n=2}^{\infty} V_n\right) \subset [c, d] \cap \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} V_n\right) = \varnothing$, тъй като $[c_1, d_1] \subset [c, d]$ и $[c_1, d_1] \subset V_1$. Освен това съгласно Б) е в сила $[c_1, d_1] \subset [c, d] \subset V_m \cup V_n$ $(m, n \geqq 2)$. Накрая ще покажем, че поне две от множествата V_n $(n \geqq 2)$ не съдържат интервала $[c_1, d_1]$. Едно такова множество е V_{n_0} съгласно 1). Да допуснем, че друго такова множество няма. Тогава бихме имали $[c_1, d_1] \subset V_n$ за всяко естествено n с $n \neq n_0$ и съгласно 1) бихме получили $\varnothing \neq [c_1, d_1] \cap V_{n_0}$ $\subset [c_1, d_1] \cap \left(\bigcap_{\substack{n=1 \\ n \neq n_0}}^{\infty} V_n\right) \cap V_{n_0} \subset [c, d] \cap \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} V_n\right)$, което противоречи на А). С това е доказано, че интервалът $[c_1, d_1]$ притежава свойството D относно редицата $V_2, V_3, \ldots$, и по този начин твърдението α) е установено в случая 1).

За да се убедим във верността на α) и в случая 2), е достатъчно да положим $[c_1, d_1] = [c, d]$.

Сега с помощта на твърдението α) ще покажем, че допускането В) води до противоречие. Наистина вече видяхме, че интервалът $[a, b]$ има свойството D относно редицата $U_1, U_2, \ldots$. Тогава от α) следва, че ще съществува интервал $[a_1, b_1]$, за който $[a_1, b_1] \subset [a, b]$, $[a_1, b_1] \subset U_1$ и който има свойството D относно редицата $U_2, U_3, \ldots$. Като приложим отново α) за $[a_1, b_1]$ и за редицата

$U_2, U_3, \ldots$, ще получим интервал $[a_2, b_2]$ с $[a_2, b_2] \subset [a_1, b_1]$ и $[a_2, b_2] \subset U_2$, който има свойството D относно редицата $U_3, U_4, \ldots$, и т. н. Като продължим този процес неограничено, ще получим редица от затворени интервали $[a_n, b_n]$ $(n \in \mathbb{N})$, за която $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$, $[a_n, b_n] \subset U_n$ $(n \in \mathbb{N})$. Съгласно теоремата на Кантор — Хели (зад. 9) съществува такава точка ξ, че $\xi \in [a_n, b_n]$ $(n \in \mathbb{N})$, и следователно $\xi \in [a, b] \cap \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n\right)$, което е противоречие.

Четвърта глава

1. Индукция спрямо n. При $n = 1$ проверката е тривиална. Нека твърдението е вярно за някое n, а $P_{n+1}(x) = \sum_{\nu=0}^{n+1} a_\nu x^{n+1-\nu}$ е полином от степен $n+1$ с $a_0 > 0$. Поради верността на твърдението за $n = 1$ съществува число $N_1 > 0$, за което

$$a_0 x > 1 - a_1 \tag{1}$$

за всяко $x > N_1$. От (1) следва

$$a_0 x^{n+1} + a_1 x^n > x^n \tag{2}$$

за $x > N_1$. За всички такива x от (2) имаме

$$P_{n+1}(x) > x^n + \sum_{\nu=2}^{n+1} a_\nu x^{n+1-\nu}, \tag{3}$$

т. е. $P_{n+1}(x)$ се минорира от полином от степен n със старши коефициент 1. Съгласно индукционното предположение ще съществува такова N_2, че за всяко $x > N_2$ да бъде в сила

$$x^n + \sum_{\nu=2}^{n+1} a_\nu x^{n+1-\nu} > 0. \tag{4}$$

При $N = \max(N_1, N_2)$ от (3) и (4) следва, че неравенството $P_{n+1}(x) > 0$ е вярно за $x > N$.

2. Нека $p_1, p_2, \ldots$ са различни прости числа. Положете $A_n = \{p_n, p_n^2, p_n^3, \ldots\}$.

5. **а)** Не. **б)** Да съгласно зад 1. **в)** Не съгласно зад. 1. **г)** Не. **д)** Неравенството от условието е равносилно с $\frac{1}{n} < \frac{1}{1000}$, т. е. с $n > 1000$, поради което въпросното множество е кофинитно. **е)** Неравенството от условието е равносилно с $\frac{n+1}{n^2+1} < \varepsilon$, т. е. с $\varepsilon n^2 - n + (\varepsilon - 1) > 0$. Ето защо от $\varepsilon > 0$ и от зад. 1 следва, че разглежданото множество е кофинитно. **ж)** Да, решението е аналогично на е). **з)** Неравенството от условието е равносилно с $n^2 - 200n - 10 < 0$, поради което от зад. 1 следва, че въпросното множество не е кофинитно. **и)** Да, решението е аналогично на е). **й)** Също. **к)** Също.

6. **а)** Въпросното неравенство може да се запише във вида $(1+10^{-5})^n > n$. Като използваме биномната формула, виждаме, че последното неравенство е равносилно със

$$\sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} 10^{-5\nu} > n. \tag{1}$$

Тъй като $\binom{n}{2} 10^{-10} = \frac{n(n-1)}{2} 10^{-10} > n$ за всички достатъчно големи n и всичките събираеми в лявата страна на (1) са положителни, (1) е в сила за всички достатъчно големи n. **б)** Работи се, както в а), но вместо $\binom{n}{2} 10^{-10}$ се разглежда $\binom{n}{11} 10^{-55}$.

7. Нека f е полином от степен k. Да представим q във вида $q = 1 + \alpha$, където $\alpha > 0$. Тогава съгласно биномната формула въпросното неравенство е равносилно със

$$\sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} \alpha^\nu > P(n). \tag{1}$$

При достатъчно големи n съществуват естествени числа ν с $k < \nu < n$. Избираме едно такова ν и го фиксираме. Разликата

$$\binom{n}{\nu} \alpha^\nu - P(n) \tag{2}$$

е полином на n от степен ν. Поради $\nu > k$ старшият коефициент на (2) ще бъде $\frac{\alpha^\nu}{\nu!}$, т. е. положителен. Ето защо от зад. 1 следва, че полиномът (2) на n приема положителни стойности за всички достатъчно големи n, което доказва (1), тъй като всичките събираеми в лявата страна са положителни.

8. Нека

$$(1)\qquad P(x)=\sum_{\nu=0}^{k}a_\nu x^{k-\nu}$$

и

$$(2)\qquad Q(x)=\sum_{\nu=0}^{k}|a_\nu|x^{k-\nu}.$$

От (1) и (2) следва $Q(x) \geqq P(x)$ за всички $x \geqq 0$. Неравенството в условието на задачата ще бъде доказано, ако се установи, че

$$(3)\qquad Q(x) < q^x$$

за всички достатъчно големи x. Съгласно зад. 7 съществува такова N, че за всяко естествено $n > N$ да е в сила

$$(4)\qquad Q(n+1) < q^n.$$

Нека сега $x > N+1$, а n е естествено число, за което $x-1 < n \leqq x$. Тогава $n > N$ и следователно за това n е в сила (4). Тъй като $n \leqq x$ и $q > 1$, то

$$(5)\qquad q^x \geqq q^n.$$

Понеже коефициентите на Q са неотрицателни и $n+1 > x$, то

$$(6)\qquad Q(n+1) \geqq Q(x).$$

От (4) — (6) следва (3), което решава задачата.

9. а) При $q=0$ твърдението е очевидно. Нека сега $0<q<1$. Тогава $\frac{1}{q} > 1$ и съгласно зад. 7 с $P(x)=\frac{1}{\varepsilon}$ съществува такова число N, че за всяко $n > N$ е в сила неравенството $\left(\frac{1}{q}\right)^n > \frac{1}{\varepsilon}$. б) Следва от зад. 7 при $P(x)=l$. в) Следва от зад. 7 при $P(x)=\frac{x}{\varepsilon}$. г) Неравенствата $1-\varepsilon < \sqrt[n]{a} < 1+\varepsilon$ са равносилни с $(1-\varepsilon)^n < a < (1+\varepsilon)^n$ при $\varepsilon < 1$. От б) при $q=1+\varepsilon$ и $l=a$ се вижда, че множеството на всичките n, за които $a < (1+\varepsilon)^n$, е кофинитно. Аналогично от а) се вижда, че множеството на всичките n, за които $(1-\varepsilon)^n < a$, е кофинитно. Но сечение на две кофинитни множества е кофинитно съгласно зад. 3. д) Въпросното неравенство е равносилно с $n < (1+\varepsilon)^n$ и от зад. 7 се вижда, че разглежданото множество действително е кофинитно. е) Ако $0 < a < 1$, то $\log_a n \leqq 0$ и твърдението е тривиално. Нека сега $a > 1$. Тогава въпросното неравенство е равносилно с $n < a^{\varepsilon n} = (a^\varepsilon)^n$. От $\varepsilon > 0$ и $a > 1$ следва $a^\varepsilon > 1$. Тогава зад. 7 с $q = a^\varepsilon$ и $P(x)=x$ завършва доказателството.

10. Нека $\varepsilon > 0$. Твърдението е равносилно със съществуването на такова ν, че за $n > \nu$ да е в сила $\left|\frac{1}{n}-0\right| < \varepsilon$, т. е.

$$(1)\qquad \frac{1}{n} < \varepsilon.$$

Но (1) очевидно е равносилно със

$$(2)\qquad \frac{1}{\varepsilon} < n.$$

Нека сега по дефиниция $\nu = \frac{1}{\varepsilon}$ и $n > \nu$. Тогава е в сила (2), т. е. (1), което доказва твърдението.

11. Тъй като числото a е граница на редицата $a_1, a_2, \ldots$ от реални числа точно когато за всяко $\varepsilon > 0$ множеството на естествените числа n, за които $|a_n - a| < \varepsilon$, е кофинитно, твърдението се свежда към зад. 5.

12. Нека $a = \inf\left\{\frac{a_n}{n}\,\middle|\, n \in \mathbf{N}\right\}$ и $\varepsilon > 0$. Съгласно дефиницията a е най-голямата долна граница на множеството $\left\{\frac{a_n}{n}\,\middle|\, n \in \mathbf{N}\right\}$. Тъй като $a + \frac{\varepsilon}{2} > a$, числото $a + \frac{\varepsilon}{2}$ не е долна граница на това множество. Ето защо съществува номер m, за който $\frac{a_m}{m} < a + \frac{\varepsilon}{2}$. Нека сега n е произволно естествено число. Тогава то може да се представи във вида $n = km + l$, където k и l са цели и $k \geqq 0$, $0 \leqq l < m$. Съгласно условието на задачата $a_n \leqq ka_m + a_l$. Ето защо $a \leqq \frac{a_n}{n} \leqq \frac{km}{km+l}\cdot\frac{a_m}{m} + \frac{a_l}{n} < a + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{a_l}{n}$. Оттук следва

$$(1)\qquad a \leqq \frac{a_n}{n} < a + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{a_l}{n}.$$

Да фиксираме m. Нека α е най-голямото от положителните числа a_l $(0 \leqq l < m)$. Ако $\nu = \frac{2\alpha}{\varepsilon}$, при $n > \nu$ от (1) следва

$$(2)\qquad a - \varepsilon < \frac{a_n}{n} < a + \varepsilon,$$

което е равносилно със

$$(3)\qquad \left|\frac{a_n}{n} - a\right| < \varepsilon.$$

Тъй като (2) е в сила при $n > \nu$, (3) също е изпълнено за всяко $n > \nu$, което доказва твърдението.

13. Допускаме противното и полагаме

$$(1) \qquad \lim_{n\to\infty} a_n = a.$$

Нека

$$(2) \qquad b_n = \frac{1}{a_n} = \frac{10n^2+8n+1}{n^3+2n+1}.$$

Съгласно зад. 11 д) (при $k = 2$, $l = 3$) ще имаме

$$(3) \qquad \lim_{n\to\infty} b_n = 0.$$

От (1) и (3) следва $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = 0$. Но съгласно (2) $a_n b_n = 1$, което е противоречие.

14. Лесно се съобразява, че дефиницията на $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ може да се прередактира по следния начин: Казва се, че редицата $a_1, a_2, \ldots$ клони към плюс безкрайност, когато за всяко число N множеството $\{n \mid n \in \mathrm{N},\ a_n > N\}$ е кофинитно. Аналогична забележка важи и за дефиницията на $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$. При това положение твърдението следва от зад. 5 к) при $k = 3$ и $l = 2$.

15. Използувайте дефинициите.

16. Също.

17. Сведете твърдението към зад. 5 к) съгласно забележката в решението на зад. 14.

18. Да допуснем, че такава рационална функция R съществува; нека k и l са съответно степените на числителя и знаменателя на R. За k и l са налице следните три възможности: 1) $k < l$, 2) $k = l$ и 3) $k > l$. В случаите 1) и 2) от зад 11 в) и д) следва, че редицата с общ член $R(n)$ ще бъде сходяща. Да положим $\lim\limits_{n\to\infty} R(n) = a$. Тогава за всички достатъчно големи n ще бъдат в сила неравенствата $a - 1 < R(n) < a + 1$, т. е. $R(n) \in [a-1,\ a+1]$ за всички достатъчно големи n. Следователно само краен брой рационални числа измежду онези, които са извън интервала $[a-1, a+1]$, принадлежат на $R(\mathrm{N})$. Ако разширим интервала $[a-1, a+1]$ по такъв начин, че да включим и тези краен брой рационални числа, ще се убедим, че съществува краен интервал $[\alpha, \beta]$, за който $R(\mathrm{N}) \subset [\alpha, \beta]$. По аналогичен начин се доказва, че съществува краен интервал $[\gamma, \delta]$, такъв, че $R(-n) \in [\gamma, \delta]$ за всяко естествено n. Ето защо рационалните числа, които са извън интервалите $[\alpha, \beta]$ и $[\gamma, \delta]$, не могат да се представят като стойности на R за

целочислени стойности на аргумента. И така случаите 1) и 2) са невъзможни. В случая 3) от зад. 17 следва, че $\lim\limits_{n\to\infty} |R(n)| = \infty$, поради което $|R(n)| > 1$ за всички достатъчно големи n. Ето защо само краен брой рационални числа от интервала $[-1, 1]$ принадлежат на $R(\mathrm{N})$. Аналогично се доказва, че само краен брой рационални числа от този интервал могат да се представят във вида $R(-n)$ при $n \in \mathrm{N}$. И така отговорът на поставения въпрос е отрицателен.

19. а) От $\dfrac{1}{\nu(\nu+1)} = \dfrac{1}{\nu} - \dfrac{1}{\nu+1}$ следва $\sum\limits_{\nu=1}^{n} \dfrac{1}{\nu(\nu+1)} = \dfrac{n}{n+1}$ и търсената граница е 1. б) Вж. в). в) От

$$\frac{1}{\nu(\nu+1)\ldots(\nu+m)} = \frac{1}{m}\cdot\frac{(\nu+m)-\nu}{\nu(\nu+1)\ldots(\nu+m)}$$
$$= \frac{1}{m}\left(\frac{1}{\nu(\nu+1)\ldots(\nu+m-1)} - \frac{1}{(\nu+1)(\nu+2)\ldots(\nu+m)}\right)$$

следва

$$\sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\nu(\nu+1)\ldots(\nu+m)} = \frac{1}{m}\left(\frac{1}{1.2.\ldots.m} - \frac{1}{(n+1)(n+2)\ldots(n+m)}\right)$$

и търсената граница е $\dfrac{1}{m.m!}$.

20. а) $\dfrac{1}{2}$. б) $\dfrac{1}{12}$. в) $\dfrac{1}{2m}\cdot\dfrac{1}{1.3.5\ldots(2m-1)}$.

21. Опростете общите членове на редиците чрез подходящи преобразувания и съкращения.

22. Използувайте резултатите от зад. 1. гл. II. Отговорите са съответно: а) $\dfrac{1}{2}$. б) $\dfrac{1}{3}$. в) $\dfrac{1}{4}$. г) Съгласно зад. 39, гл. II функцията x^k притежава сумиращ полином $\beta_{k+1}(x)$ от степен $k+1$. Тогава

$$(1) \qquad \begin{cases} 1^k = \beta_{k+1}(2) - \beta_{k+1}(1), \\ 2^k = \beta_{k+1}(3) - \beta_{k+1}(2), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ n^k = \beta_{k+1}(n+1) - \beta_{k+1}(n). \end{cases}$$

Чрез почленно събиране на равенствата (1) се получава

$$(2) \qquad \sum_{\nu=1}^{n} \nu^k = \beta_{k+1}(n+1) - \beta_{k+1}(1).$$

Ето защо съгласно зад. 11 в) търсената граница е равна на старшия коефициент на полинома $\beta_{k+1}(x)$. Но съгласно решението на зад. 39, гл. II този старши коефициент е $\frac{1}{k+1}$. Това обяснява и директно получените отговори на случаите а) — в).

23. б) Съгласно биномната формула имаме

$$\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n}\left(a+\frac{\nu}{n}\right)^k=\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n}\sum_{\mu=0}^{k}\binom{k}{\mu}a^{k-\mu}\left(\frac{\nu}{n}\right)^{\mu}$$

$$=\sum_{\mu=0}^{k}\binom{k}{\mu}a^{k-\mu}\frac{1}{n^{\mu+1}}\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{\mu}.$$

Тогава

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n}\left(a+\frac{\nu}{n}\right)^k=\sum_{\mu=0}^{k}\binom{k}{\mu}a^{k-\mu}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{\mu+1}}\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{\mu}$$

(1) $$=\sum_{\mu=0}^{k}\frac{1}{\mu+1}\binom{k}{\mu}a^{k-\mu}$$

съгласно зад. 22. Но

(2) $$\frac{1}{\mu+1}\binom{k}{\mu}=\frac{1}{k+1}\binom{k+1}{\mu+1}$$

и

(3) $$\sum_{\mu=0}^{k}\binom{k+1}{\mu+1}a^{k-\mu}=(a+1)^{k+1}-a^{k+1}.$$

От (1) — (3) следва, че търсената граница е $\frac{(a+1)^{k+1}-a^{k+1}}{k+1}$.

24. а), б). Следва от зад. 9 а) и дефиницията на сходимост с помощта на кофинитни множества. в) При $q=0$ твърдението е тривиално, затова нека $q\neq 0$. При $\varepsilon>0$ от зад. 7 с $\frac{1}{|q|}$ вместо q и $P(x)=\frac{x^k}{\varepsilon}$ следва, че съществува такова число N, че за всяко $n>N$ е в сила $\frac{1}{|q|^n}>\frac{n^k}{\varepsilon}$. Това неравенство е равносилно с $|n^kq^n|<\varepsilon$, което решава задачата.

25. Следва от зад. 7.

26. а) $\frac{1}{1-q}$. б) Приложете зад. 5 б), гл. II и зад. 24 в), за да получите, че търсената граница е $\frac{1}{(1-q)^2}$. в) От а) и б) следва, че търсената граница е $\frac{11}{16}$. г) Умножете произведението с $1-q$ и опростете получения резултат. След това приложете зад. 24 б), за да получите за търсената граница стойността $\frac{1}{1-q}$.

27. а) 0. б) 1. в) 3. г) 0 при $|a|<1$; 1 при $|a|>1$; $\frac{1}{2}$ при $a=1$; при $a=-1$ редицата не е дефинирана. д) 0 при $|a|\neq 1$; $\frac{1}{2}$ при $a=1$; при $a=-1$ редицата е $-\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{1}{2},\dots$ и следователно е разходяща. е) Редицата не е дефинирана при $a=0$. При $a\neq 0$ общият член може да се запише във вида $\frac{a^{2n}-1}{a^{2n}+1}$, откъдето се вижда, че при $|a|<1$ границата е -1, при $|a|=1$ тя е 0, а при $|a|>1$ е 1. ж) 0 за всяко $a\neq -1$.

28. Приложете дефинициите.

29. а) 1. б) 0. в) $\frac{1}{3}$.

30. б) Втората редица е дефинирана за $a_n\geqq 0$ при четно k; при нечетни k няма ограничения. При $a=0$ трябва да докажем, че за всяко $\varepsilon>0$ е в сила

(1) $$|\sqrt[k]{a_n}|<\varepsilon$$

за всички достатъчно големи n. Но (1) е равносилно с $|a_n|<\varepsilon^k$, което е изпълнено за всички достатъчно големи n поради $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$. При $a\neq 0$ всички a_n с достатъчно големи номера имат знака на a. От тъждеството $x-y=(x^k-y^k)\sum\limits_{\nu=0}^{k-1}x^{k-1-\nu}y^{\nu}$ при $x=\sqrt[k]{a_n}$ и $y=\sqrt[k]{a}$ следва

$$\left|\sqrt[k]{a_n}-\sqrt[k]{a}\right|=\frac{|a_n-a|}{\sum\limits_{\nu=0}^{k-1}\left(\sqrt[k]{a_n}\right)^{k-1-\nu}\left(\sqrt[k]{a}\right)^{\nu}},$$

откъдето поради $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$ следва

$$\left|\sqrt[k]{a_n}-\sqrt[k]{a}\right| < \frac{|a_n - a|}{\left(\sqrt[k]{a}\right)^{k-1}} < \varepsilon$$

за всички достатъчно големи n.

31. а) -1. б) 1. в) -1. г) 1.

32. а) 0. б) 0. в) 0. г) 1. д) 0. е) $\frac{1}{2}$. ж) $-\frac{1}{4}$. з) $\frac{1}{4\sqrt{2}}$. и) $\frac{1}{k}\sum_{\nu=1}^{k} a_\nu$. й) $\frac{2}{3}$.

33. Използувайте, че $0 < (n+1)^p - n^p = n^p\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^p - 1\right] \leqq n^p\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)-1\right] = n^{p-1}$ и че $p-1<0$.

34. а) $\frac{1}{3}$. б) $\frac{2}{3}$. в) -8. г) 6. д) k. е) $\frac{k}{l}$. ж) -1. з) $\frac{k-l}{2}$.

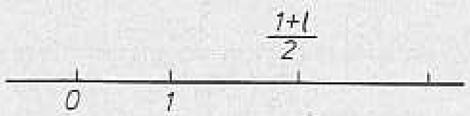
35. Прилагат се многократно правилата за действия със сходящи редици.

36. а) $\frac{1}{3}$. б) $\frac{1}{k}$. в) $\frac{5}{3}$. г) $\frac{1}{2}$. д) 1. е) $\frac{1}{2}$.

38. Следва от неравенството $||x|-|y|| \leqq |x-y|$.

40. Следва от тъждествата $\max(x, y) = \frac{x+y+|x-y|}{2}$, $\min(x, y) = \frac{x+y-|x-y|}{2}$ и от зад. 38.

41. а) Чрез почленно умножение на първите n от дадените неравенства получаваме $\left|\frac{a_{n+1}}{a_1}\right| \leqq q^n$ и резултатът следва от зад. 24 б) и 39. б) Да положим $\left|\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = l$. Тогава $0 \leqq l < 1$, поради което $0 \leqq l < \frac{1}{2}(l+1) < 1$ (фиг. 7). Нека $q = \frac{l+1}{2}$. Тогава



Фиг. 7

$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = l < q$ и следователно $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < q$ за всички достатъчно големи n; тогава съгласно а) $\lim_{n\to\infty}|a_n| = 0$, което заедно със зад. 39 дава желания резултат. в) Аналогично на а) намираме $\frac{a_{n+1}}{a_1} \geqq q^n$ и резултатът следва от зад. 25 а).

42. По условие съществува константа l, за която е в сила $-l \leqq \frac{na_{n+1}}{a_n} \leqq l$. Ето защо $-\frac{l}{n} \leqq \frac{a_{n+1}}{a_n} \leqq \frac{l}{n}$. Сега твърдението следва от зад. 41 б).

43. а), б) Следва от зад. 41 б). в) Нека $N > 0$. Тогава съгласно б) е в сила $\lim_{n\to\infty}\frac{N^n}{n!} = 0$. Ето защо за всички достатъчно големи n ще бъде изпълнено неравенството $\frac{N^n}{n!} < 1$, откъдето следва $N < \sqrt[n]{n!}$ за всички достатъчно големи n.

44. а) Очевидно $\sum_{\nu=1}^{n}\frac{n}{n^2+n} \leqq a_n \leqq \sum_{\nu=1}^{n}\frac{n}{n^2+1}$. Но

$$\sum_{\nu=1}^{n}\frac{n}{n^2+n} = \frac{n^2}{n^2+n}, \quad \sum_{\nu=1}^{n}\frac{n}{n^2+1} = \frac{n^2}{n^2+1}.$$

От

$$\frac{n^2}{n^2+n} \leqq a_n \leqq \frac{n^2}{n^2+1} \quad \text{и} \quad \lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2+n} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2+1} = 1$$

следва $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$. б) 1. в) 1. г) Поради

$$\sqrt{1+\frac{\nu}{n^2}} - 1 = \frac{\nu}{n(n+\sqrt{n^2+\nu})}$$

е в сила

$$\frac{\nu}{n(n+\sqrt{n^2+n})} \leqq \frac{\nu}{n(n+\sqrt{n^2+\nu})} \leqq \frac{\nu}{n(n+\sqrt{n^2+1})}$$

($\nu = 1, 2, \ldots, n$). Ето защо

$$\sum_{\nu=1}^{n}\frac{\nu}{n(n+\sqrt{n^2+n})} \leqq a_n \leqq \sum_{\nu=1}^{n}\frac{\nu}{n(n+\sqrt{n^2+1})},$$

т. е.

$$\frac{1}{n(n+\sqrt{n^2+n})}\cdot\frac{n(n+1)}{2} \leqq a_n \leqq \frac{1}{n(n+\sqrt{n^2+1})}\cdot\frac{n(n+1)}{2}.$$

Но
$$\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{n(n+\sqrt{n^2+n})}=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{n(n+\sqrt{n^2+1})}=\frac{1}{2}.$$

Следователно $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\frac{1}{4}$.

д) Работи се, както в случая г), но вместо формулата за сумата на първите n естествени числа се използува тази за сумата на квадратите им. Резултатът е $\frac{1}{9}$. Препоръчва се на читателя в обобщение на случаите г) и д) да се пресметне границата
$$\lim_{n\to\infty}\sum_{\nu=1}^{n}\left(\sqrt[k+1]{1+\frac{\nu^k}{n^{k+1}}}-1\right)\qquad (k\in\mathrm{N}),$$
като за целта използува резултата на зад. 22 г).

45. От очевидното неравенство $\sqrt[n]{a^n}\leqq\sqrt[n]{\sum\limits_{\nu=1}^{m}a_\nu^n}\leqq\sqrt[n]{ma^n}$ и от $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{m}=1$ резултатът следва веднага.

46. От неравенството на Бернули (зад. 32, гл. II) следва, че за всички достатъчно големи n е в сила

(1) $$1+\frac{a}{n}\leqq\left(1+\frac{a}{n^2}\right)^n.$$

От друга страна,

(2) $$\left(1+\frac{a}{n^2}\right)^n=\left(1-\frac{a}{n^2+a}\right)^{-n}.$$

Пак от неравенството на Бернули следва

(3) $$\left(1-\frac{a}{n^2+a}\right)^n\geqq 1-\frac{na}{n^2+a}=\frac{n^2-na+a}{n^2+a}.$$

От (2) и (3) се получава $\left(1+\frac{a}{n^2}\right)^n\leqq\frac{n^2+a}{n^2-na+a}$, което заедно с (1) дава

(4) $$1+\frac{a}{n}\leqq\left(1+\frac{a}{n^2}\right)^n\leqq\frac{n^2+a}{n^2-na+a}.$$

Тъй като при неограниченото нарастване на n лявата и дясната страна на (4) очевидно клонят към 1, резултатът следва веднага.

47. а) Следва от зад. 9 г) и от дефиницията на понятието сходимост. б) Нека $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$. Тогава за всички достатъчно големи n ще имаме $0<\frac{a}{2}<a_n<a+1$. Ето защо $\sqrt[n]{\frac{a}{2}}<\sqrt[n]{a_n}<\sqrt[n]{a+1}$ и твърдението следва от а). в) Зад. 9 д). г) Зад. 8. д) Нека $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{n^3+n^2+1}=a$. Тогава за всички достатъчно големи n ще бъдат в сила неравенствата $0<\frac{a}{2}<\frac{a_n}{n^3+n^2+1}<a+1$. Ето защо
$$\sqrt[n]{\frac{a}{2}(n^3+n^2+1)}<a_n<\sqrt[n]{(a+1)(n^3+n^2+1)}.$$
Сега твърдението следва от г).

48. Нека $OP=x$. Да разделим отсечката OP (фиг. 3) на n равни части и върху всяка от тях да построим по един вписан и един описан правоъгълник, както е посочено на фигурата. Нека s_n и S_n са съответно лицата на вписаната и описаната стъпаловидна фигура. Тъй като височините на отделните правоъгълници са съответно ординатите на точките от параболата с абсциси $\frac{x}{n}, \frac{2x}{n}, \ldots, \frac{nx}{n}$, те са съответно $\frac{ax^2}{n^2}, \frac{a(2x)^2}{n^2}, \ldots, \frac{a(nx)^2}{n^2}$. Тогава
$$s_n=\frac{x}{n}\sum_{\nu=1}^{n-1}a\frac{(\nu x)^2}{n^2}=\frac{ax^3}{n^3}\cdot\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}$$
и
$$S_n=\frac{x}{n}\sum_{\nu=1}^{n}a\frac{(\nu x)^2}{n^2}=\frac{ax^3}{n^3}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$
Очевидно $s_n<S<S_n$ и от $\lim\limits_{n\to\infty}s_n=\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\frac{ax^3}{3}$ следва $S=\frac{ax^3}{3}$.

49. а) Нека $\varepsilon>0$. Поради $|\sin x|\leqq|x|$ от $\sin a_n-\sin a=2\sin\frac{a_n-a}{2}\cos\frac{a_n+a}{2}$ следва $|\sin a_n-\sin a|\leqq|a_n-a|$. Поради $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$ е в сила $|a_n-a|\to 0$, което доказва твърдението. б) Аналогично. в) и г) следват от а) и б) и от теоремата за граница на частно.

50. а) Редицата $q,\ q^2,\ q^3,\dots$ е намаляваща, защото $q^{n+1} = q\cdot q^n < q^n$ поради $0 < q < 1$. Освен това тя е ограничена отдолу, защото $0 < q$. Следователно е сходяща. Нека l е границата ѝ. Редицата $q^2,\ q^3,\ q^4,\dots$ се получава от нея чрез изпускане на първия член, поради което има същата граница l. Ако в тъждеството $q^{n+1} = q\cdot q^n$ оставим n да расте неограничено, в граница получаваме $l = ql$, откъдето поради $q \neq 1$ следва $l = 0$. б) Поради $q > 1$ дадената редица е растяща. Тя е неограничена отгоре. Наистина в противен случай тя би била сходяща и чрез разсъждения, аналогични на онези от а), бихме заключили, че границата ѝ е 0, което е невъзможно поради $q^n > 1$. Сега твърдението следва от очевидната забележка, че неограничените отгоре растящи редици дивергират към ∞. в) Нека $a_n = n^k q^n$. Тогава $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^k q$ и поради $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^k = 1$ и $q < 1$ ще имаме $\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ за всички достатъчно големи n. Поради $a_n > 0$ това дава $a_{n+1} < a_n$. Ето защо от известно място нататък редицата е намаляваща. Тъй като е ограничена отдолу от 0, тя е сходяща. Нека l е границата ѝ. Ще докажем, че $l = 0$. В противен случай чрез граничен преход при $n\to\infty$ в равенството $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^k q$ бихме получили $q = 1$, което е противоречие. г) Аналогично. д) Обобщение на а), в) и г), което се доказва по същия начин.

51. Равенството $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$ може да се запише във вида

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n = e. \tag{1}$$

Нека p е произволно естествено число. Тогава

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n-p} = e. \tag{2}$$

Наистина за всяко n е в сила

$$\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n-p} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n\left(\frac{n}{n+1}\right)^p. \tag{3}$$

Тъй като p е фиксирано, то $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^p = 1$ и чрез граничен преход в (3) при $n\to\infty$ се получава (2), като се използува (1).

Тъй като редицата с общ член $\left(\frac{n+p+1}{n+p}\right)^n$ се получава от редицата с общ член $\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n-p}$ чрез изпускане на първите p члена, от (2) следва

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+p+1}{n+p}\right)^n = e. \tag{4}$$

Сега решението на задачата следва непосредствено. Така например от $\left(\frac{n+3}{n}\right)^n = \left(\frac{n+3}{n+2}\right)^n\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^n\left(\frac{n+1}{n}\right)^n$ и от (4) при $p = 0,\ 1,\ 2$ следва $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+3}{n}\right)^n = e^3$. Индуктивно се убеждаваме, че $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{k}{n}\right)^n = e^k$.

52. Аналогично на зад. 51 се получава $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{k}{n}\right)^n = e^{-k}$.

53. а) e. б) e^{-10}. в) e^{-7}.

54. Нека $x \geqq 0$. Ще покажем, че дадената редица е монотонно растяща и ограничена отгоре. Неравенството

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \leqq \left(1+\frac{x}{n+1}\right)^{n+1} \tag{1}$$

е равносилно с $(n+x)^n(n+1)^{n+1} \leqq (n+1+x)^{n+1}n^n$, т. е. със

$$(n^2+nx+n+x)^n(n+1) \leqq (n^2+n+nx)^n(n+1+x),$$

или със

$$\frac{n+1}{n+1+x} \leqq \left(\frac{n^2+n+nx}{n^2+nx+n+x}\right)^n.$$

Последното неравенство е равносилно с

$$1-\frac{x}{n+1+x} \leqq \left(1-\frac{x}{n^2+nx+n+x}\right)^n. \tag{2}$$

От неравенството на Бернули (зад. 32, гл. II) следва

$$1-\frac{nx}{n^2+nx+n+x} \leqq \left(1-\frac{x}{n^2+nx+n+x}\right)^n. \tag{3}$$

Непосредствено се убеждаваме, че

(4) $$1-\frac{x}{n+1+x} \leqq 1-\frac{nx}{n^2+nx+n+x}.$$

От (3) и (4) следва (2), т. е. (1). С това е доказана монотонността на дадената редица. Ограничеността ѝ се доказва по следния начин: Нека k е естествено число, $k \geqq x$. Тогава очевидно

(5) $$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \leqq \left(1+\frac{k}{n}\right)^n.$$

Но съгласно зад. 51 редицата в дясната страна на (5) е сходяща и следователно ограничена. Нека сега $x<0$. Очевидно

(6) $$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n=\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)^n\left(1-\frac{x}{n}\right)^{-n}.$$

От друга страна, $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)^n = 1$ съгласно зад. 46. Вече видяхме, че $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{x}{n}\right)^n$ съществува, тъй като $-x>0$. Но $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{x}{n}\right)^n \geqq 1$. Ето защо съществува и $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{x}{n}\right)^{-n}$. От (6) следва, че редицата с общ член $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$ е сходяща.

55. Приложете неравенството на Бернули.

56. От тъждеството $a^n-b^n=(a-b)\sum\limits_{\nu=0}^{n-1}a^{n-\nu-1}b^\nu$ очевидно следва неравенството

(1) $$a^n-b^n \leqq n(a-b)a^{n-1}$$

при $a \geqq b \geqq 0$. Търсеното неравенство следва от (1) при $a=1+\frac{y}{n}$, $b=1+\frac{x}{n}$ и от $1+\frac{x}{n}>0$ за всички достатъчно големи n.

57. Следва от зад. 56 и от дефиницията на функцията E.

58. Аналогично на (1) от решението на зад. 56 се доказва неравенството

(1) $$|a^n-b^n| \leqq n|a-b|c^{n-1}$$

при $0 \leqq a \leqq c$ и $0 \leqq b \leqq c$. Тъй като за всички достатъчно големи n са в сила неравенствата $0 \leqq 1+\frac{x_n}{n} \leqq 1+\frac{M}{n}$, $0 \leqq 1+\frac{x}{n} \leqq 1+\frac{M}{n}$, където M е горна граница на редицата $x_1, x_2, \dots$, от (1) при $a=1+\frac{x_n}{n}$, $b=1+\frac{x}{n}$, $c=1+\frac{M}{n}$ следва

(2) $$\left|\left(1+\frac{x_n}{n}\right)^n-\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\right| \leqq |x_n-x|\left(1+\frac{M}{n}\right)^{n-1}.$$

От $\lim\limits_{n\to\infty}|x_n-x|=0$ и $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{M}{n}\right)^{n-1}=E(M)$ получаваме, че дясната страна на (2), а с нея и лявата клонят към 0. Но $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n=E(x)$; следователно $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{x_n}{n}\right)^n=E(x)$.

59. Следва от зад. 58 и от дефиницията на функцията E.

60. **а)** Следва от дефиницията на функцията E. **б)** При $x \geqq 0$ следва от зад. 55, а при $x<0$ от $E(x)E(-x)=E(x-x)=E(0)=1$ (зад. 59) и $E(-x)>0$ (съгласно току-що доказаното) следва $E(x)>0$. **в)** Следва от зад. 59.

61. От дефиницията на функцията E имаме $E(1)=e$. От зад. 59 следва

$$\left(E\left(\frac{1}{q}\right)\right)^q=\underbrace{E\left(\frac{1}{q}\right)E\left(\frac{1}{q}\right)\dots E\left(\frac{1}{q}\right)}_{q \text{ пъти}}=E\left(q\frac{1}{q}\right)=E(1)=e$$

за всяко естествено q. Но $E\left(\frac{1}{q}\right)>0$ съгласно зад. 60 б). Следователно $E\left(\frac{1}{q}\right)=\sqrt[q]{e}=e^{\frac{1}{q}}$. Тогава желаното равенство се получава от зад. 59 и 60 в).

62. Нека $x<y$ и $z=y-x$. Тогава от зад. 55 следва $E(z)>1$, т. е. $\frac{E(y)}{E(x)}>1$ (зад. 60 в)).

63. Следва от зад. 57 и 62.

64. **а)** Следва от зад. 55. **б)** Следва от а) и от зад. 60 в).

65. 2.

66. За рационални x — зад. 61. Ако x е ирационално, избираме редица $x_1, x_2, \dots$ от рационални числа с граница x. Тогава за всяко естествено n ще имаме $E(x_n)=e^{x_n}$ и желаното следва от зад. 63 чрез граничен преход.

67. Ще докажем, че редицата е монотонно намаляваща и ограничена отдолу. Първото твърдение се свежда до неравенството

$n\left(\sqrt[n]{x}-1\right) \geqq (n+1)\left(\sqrt[n+1]{x}-1\right)$, което при $x^{\frac{1}{n(n+1)}} = y$ поради $y>0$ добива вида

(1) $$n(y^{n+1}-1) \geqq (n+1)(y^n-1).$$

При $y=1$ неравенството (1) е очевидно вярно. Нека $y>1$. Тогава (1) е равносилно със

$$n(1+y+y^2+\dots+y^n) \geqq (n+1)(1+y+y^2+\dots+y^{n-1}),$$

т. е. със

(2) $$ny^n \geqq 1+y+y^2+\dots+y^{n-1},$$

което се доказва със събиране на очевидните неравенства $y^n \geqq y^\nu$ ($\nu = 0, 1, 2, \dots, n-1$). Нека сега $0<y<1$. Тогава (1) е равносилно със

(3) $$ny^n \leqq 1+y+y^2+\dots+y^{n-1},$$

което е вярно, понеже в този случай $y^n \leqq y^\nu$ ($\nu = 0, 1, 2, \dots, n-1$). С това е доказано, че разглежданата редица е намаляваща. За да се убедим, че тя е ограничена отдолу, ще докажем неравенството

(4) $$n\left(\sqrt[n]{x}-1\right) \geqq 1-\frac{1}{x}.$$

При $z = x^{\frac{1}{n}}$ (4) добива вида $n(z-1)z^n \geqq z^n-1$, което е очевидно при $z=1$, при $z>1$ се свежда до (2), а при $0<z<1$ се свежда до (3).

68. Следва от очевидната верига от равенства $n\left(\sqrt[n]{xy}-1\right) = n\left(\sqrt[n]{xy}-\sqrt[n]{y}\right) + n\left(\sqrt[n]{y}-1\right) = n\sqrt[n]{y}\left(\sqrt[n]{x}-1\right) + n\left(\sqrt[n]{y}-1\right)$ и от зад. 47 а).

69. Чрез субституциите $\xi = \sqrt[n]{x}$ и $\eta = \sqrt[n]{y}$ даденото неравенство се свежда до $n\xi^{n-1} \leqq \sum_{\nu=0}^{n-1}\xi^\nu\eta^{n-\nu-1}$.

70. Следва от зад. 69 и 47 а), като се вземе пред вид дефиницията на функцията L.

71. а) Очевидно съществуват числата a и A, за които $0<a \leqq x_n \leqq A$ при всяко естествено n. Тогава $a \leqq x \leqq A$ и от зад. 69 лесно следва

(1) $$\left|n\left(\sqrt[n]{x_n}-1\right)-n\left(\sqrt[n]{x}-1\right)\right| \leqq \frac{|x_n-x|}{a}\sqrt[n]{A}$$

за всяко естествено n. От $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ и зад. 47 а) получаваме, че дясната страна на (1), а с нея и лявата клонят към 0. Сега твърдението следва веднага, тъй като по дефиниция $\lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt[n]{x}-1\right) = L(x)$.   б) Трябва да се докаже, че за всяко N е в сила

(2) $$n\left(\sqrt[n]{x_n}-1\right) < N$$

за всички достатъчно големи n. Но (2) е равносилно със

(3) $$\left(1+\frac{N}{n}\right)^n > x_n$$

при $n+N>0$, т. е. при всички достатъчно големи n. Лявата страна на (3) клони към e^N съгласно зад. 66 и дефиницията на функцията E. Ето защо $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{N}{n}\right)^n > 0$. Тъй като $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$, от последното неравенство следва, че (3), а заедно с него и (2) ще бъдат изпълнени за всички достатъчно големи n.

72. Най-напред да отбележим, че съгласно зад. 58 и 66 от $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ следва

(1) $$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x_n}{n}\right)^n = e^x.$$

По дефиниция $\lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt[n]{x}-1\right) = L(x)$. Ето защо от (1) следва

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{n\left(\sqrt[n]{x}-1\right)}{n}\right)^n = e^{L(x)},$$ т. е. търсеното равенство.

73. Следва от зад. 60 б) и 72.

74. Очевидно съществува число $a>0$, за което $a \leqq x_n$ за всяко n. Тогава $a \leqq x$. Сега не е трудно от зад. 70 да се получи неравенството $|\ln x_n - \ln x| \leqq \frac{|x_n-x|}{a}$, откъдето веднага следва твърдението.

75. От равенството $x = e^{\ln x}$ чрез логаритмуване при основа a се получава $\log_a x = \log_a e \cdot \ln x$ и твърдението следва веднага.

76. Неравенствата $\ln x > N$ и $\ln x < N$ са равносилни съответно с $x > e^N$ и $x < e^N$. Неравенствата $\frac{\ln x}{x} < \varepsilon$ и $-\varepsilon < x\ln x$ са равносилни съответно с $x < e^{\varepsilon x}$ и $\frac{1}{x} < e^{\frac{\varepsilon}{x}}$. Сега може да се приложи зад. 8.

77. а) От очевидното равенство $\frac{1+\sqrt[n]{a}}{2} = 1 + \frac{n\left(\sqrt[n]{a}-1\right)}{2n}$ и от $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\sqrt[n]{a}-1\right) = \ln a$ следва $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1+\sqrt[n]{a}}{2}\right)^n = e^{\frac{1}{2}\ln x} = \sqrt{a}$ съгласно зад. 58. б) Следва от равенствата $\frac{1}{3}\left(\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}+\sqrt[n]{c}\right)$ $= 1 + \frac{1}{3}\left(\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}+\sqrt[n]{c}\right) - 1 = 1 + \frac{1}{3}\left(\sqrt[n]{a}-1+\sqrt[n]{b}-1+\sqrt[n]{c}-1\right)$ $= 1 + \frac{1}{3n}\left[n\left(\sqrt[n]{a}-1\right)+n\left(\sqrt[n]{b}-1\right)+n\left(\sqrt[n]{c}-1\right)\right]$ и от зад. 58. е) Следва от равенството $\frac{1}{2}\left(\sqrt[n]{a_n}+\sqrt[n]{b_n}\right)$ $= 1 + \frac{1}{2n}\left[n\left(\sqrt[n]{a_n}-1\right)+n\left(\sqrt[n]{b_n}-1\right)\right]$ и от зад. 58.

78. Сравнете със зад. 53. а) e^{-2}. б) 1. в) $e^{a_1-b_1}$.

80. Трябва да се докаже, че за всяко n е в сила неравенството $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} \geqq \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+2}$, т. е. $\frac{(n+1)^{n+1}}{n^{n+1}} \geqq \frac{(n+2)^{n+2}}{(n+1)^{n+2}}$, или $(n^2+2n+1)^{n+1}(n+1) \geqq (n^2+2n)^{n+1}(n+2)$, което е равносилно с $\left(1+\frac{1}{n^2+2n}\right)^{n+1} \geqq 1 + \frac{1}{n+1}$. Последното неравенство следва от неравенството на Бернули (зад. 32. гл. II).

81. Тъй като редицата с общ член $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ е монотонно растяща и клони към e, а редицата с общ член $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ е монотонно намаляваща и също клони към e (зад. 79 и 80), то $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leqq e \leqq \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$, откъдето чрез логаритмуване при основа e следват желаните неравенства.

82. Следва от зад. 81.

83. Нека $a_n = \sum\limits_{\nu=1}^{n}\frac{1}{\nu} - \ln n$ и $b_n = \sum\limits_{\nu=1}^{n}\frac{1}{\nu} - \ln(n+1)$. Сега $a_n - b_n = \ln(n+1) - \ln n > 0$. От зад. 82 следва $a_1 \geqq a_n > b_n \geqq b_1$, което показва, че горните редици са ограничени. Тъй като са и монотонни съгласно зад. 82, те са сходящи. Освен това

$$\lim_{n\to\infty} a_n - \lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = \lim_{n\to\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \ln 1 = 0$$

съгласно зад. 74.

84. а) От зад. 83 следва, че редицата с общ член

$$b_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln(n+1) \tag{1}$$

е сходяща; границата ѝ бе означена с C. Редиците с общи членове b_{n-1} и b_{2n} са сходящи като подредици на (1) и имат същата граница. Ето защо $\lim\limits_{n\to\infty}(b_{2n} - b_{n-1}) = 0$, т. е.

$$\lim_{n\to\infty}\left[\sum_{\nu=n}^{2n}\frac{1}{\nu} - \ln(2n+1) + \ln n\right] = 0. \tag{2}$$

Сега твърдението следва от (2) и от $\lim\limits_{n\to\infty}\ln\frac{2n+1}{n}$ $= \lim\limits_{n\to\infty}\ln\left(2+\frac{1}{n}\right) = \ln 2$ съгласно зад. 74. б) $\ln 3$. в) $\ln\frac{l}{k}$.

86. Сравнете със зад. 45, гл. II. Използувайте зад. 85 и 82.

87. а) Да отбележим най-напред, че от $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = l$ следва $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1} = l$ и граничният преход в рекурентната зависимост $a_{n+1} = \frac{1}{2}(1+a_n^2)$ дава $l = \frac{1}{2}(1+l^2)$, откъдето $l = 1$. И така, ако разглежданата редица е сходяща, границата ѝ трябва да бъде числото 1. Това обаче не решава въпроса за сходимостта на дадената редица. За да отговорим на този въпрос, първо забелязваме, че редицата е монотонно растяща. Наистина $a_{n+1} - a_n$ $= \frac{1}{2}(1+a_n^2) - a_n = \frac{1}{2}(1-a_n)^2 \geqq 0$. Ако редицата е ограничена отгоре, числото 1 непременно е нейна горна граница. Наистина при направеното предположение тя би била сходяща и понеже е растяща, членовете ѝ не биха надминавали намерената вече граница 1. Ще покажем, че 1 наистина е горна граница на редицата. С индукция спрямо n ще покажем, че $0 \leqq a_n \leqq 1$. За $n = 1$ твърдението е вярно по условие. Нека то е вярно за n. Тогава очевидно $a_{n+1} \geqq 0$ и в същото време $a_{n+1} = \frac{1}{2}(1+a_n^2) \leqq \frac{1}{2}(1+1)$ $= 1$. И така дадената редица е растяща и ограничена отгоре. Ето защо тя е сходяща с граница 1. б) Да отбележим, че голяма част от разсъжденията в решението на а) не зависят от a_1. Това важи например за стойността 1 на границата на редицата и за монотонността ѝ. Напротив, ограничеността на редицата съществено зависи от стойността на a_1; настоящата задача е пример за

това. Да допуснем, че редицата не дивергира към ∞. Тъй като е монотонна, тя не би била ограничена отгоре и би била сходяща с граница 1 съгласно а). Понеже е монотонно растяща, членовете ѝ не биха надминавали 1. Но това заключение противоречи на условието $a_1 = 2$.

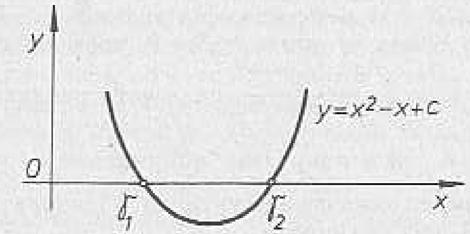
88. От равенството $a_{n+1} - a_n = \frac{1}{2}(a_n^2 + 4) > 0$ следва, че редицата е растяща. Ако допуснем, че е сходяща с граница l, чрез граничен преход при $n \to \infty$ в дадената рекурентна зависимост бихме получили $l = \frac{1}{2}(l^2 + 2l + 4)$, т. е. $l^2 + 4 = 0$, което е невъзможно при реално l. Следователно $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ за всяко λ.

89. Редицата е намаляваща с граница 0.

90. Редицата намалява от втория член нататък и границата ѝ е 0.

91. От зад. 55 следва $e^{\frac{1}{x^2}} \geqq 1 + \frac{1}{x^2}$ за $x \neq 0$. От друга страна, $1 + \frac{1}{x^2} > \frac{1}{x}$ за $x > 0$. Ето защо $e^{\frac{1}{x^2}} > \frac{1}{x}$ и следователно $x > e^{-\frac{1}{x^2}}$ при $x > 0$. Използувайте този резултат, за да докажете, че редицата е намаляваща от втория член нататък. Тя е ограничена отдолу от 0. Следователно е сходяща с граница $l \geqq 0$. Ако $l > 0$, граничен преход в зависимостта $a_{n+1} = e^{-\frac{1}{a_n^2}}$ би дал $l = e^{-\frac{1}{l^2}}$, което е невъзможно поради доказаното строго неравенство $x > e^{-\frac{1}{x^2}}$. Ето защо $l = 0$.

92. При направеното предположение за c дискриминантата на квадратното уравнение $x^2 - x + c = 0$ е положителна и то има два различни реални корена γ_1 и γ_2. Те са положителни. Затова при $\gamma_1 < \gamma_2$ графиката на функцията прилича на кривата от фиг. 8. Най-напред $0 < \lambda \leqq \gamma_1$. Ще докажем индуктивно, че $0 < a_n \leqq \gamma_1$. При $n = 1$ твърдението е очевидно, тъй като $a_1 = \lambda$. Нека то е вярно за n. Очевидно $a_{n+1} > 0$. От друга страна, $a_{n+1} = a_n^2 + c \leqq \gamma_1^2 + c = \gamma_1$ съгласно индукционното предположение, т. е. твърдението е вярно и за $n+1$. Квадратният тричлен $x^2 - x + c$ е неотрицателен при $x \leqq \gamma_1$ (фиг. 8). Ето защо $a_{n+1} - a_n = a_n^2 - a_n + c \geqq 0$ и разглежданата редица е растяща. Поради доказаната ограниченост тя е сходяща. Ако границата ѝ е l, чрез граничен преход в зависимостта $a_{n+1} = a_n^2 + c$ се получава $l^2 - l + c = 0$, откъдето $l = \gamma_1$ или $l = \gamma_2$. От $a_n \leqq \gamma_1 < \gamma_2$ следва, че вторият случай е невъзможен и $l = \gamma_1$. При $\gamma_1 \leqq \lambda < \gamma_2$ редицата е монотонно намаляваща и клони към γ_1. При $\lambda = \gamma_2$ всички членове на редицата са равни на γ_2. При $\lambda > \gamma_2$ редицата расте неограничено.



Фиг. 8

93. При $0 \leqq a_1 \leqq 2$ редицата е растяща и клони към 2. При $2 \leqq a_1 < 3$ тя е намаляваща и клони към 2. При $a_1 = 3$ всичките ѝ членове са равни на 3. При $a_1 > 3$ редицата дивергира към ∞, като расте монотонно.

94. При $\lambda < -4$ всичките членове на редицата са по-малки от -4 и тя е разходяща. При $\lambda = -4$ редицата не е дефинирана. При $\lambda > -4$ са възможни следните случаи: При $-4 < \lambda < -\frac{3}{2}$ и при $\lambda > 2$ редицата дивергира към ∞. При $\lambda = -\frac{3}{2}$ и при $\lambda = 2$ тя има граница 2. При $-\frac{3}{2} < \lambda < 2$ границата ѝ е 1.

95. При $0 \leqq \lambda < 2$ редицата е сходяща с граница 1. При $\lambda = 2$ всички членове на редицата са равни на 2.

96. При $0 \leqq \lambda \leqq z_1$ редицата е растяща с граница z_1. При $z_1 \leqq \lambda < z_2$ редицата е намаляваща с граница z_1. При $\lambda = z_2$ всички членове на редицата са равни на z_2.

97. При $\lambda < -9$ редицата дивергира към $-\infty$, като намалява. При $\lambda = -9$ тя не е дефинирана. При $-9 < \lambda < -\frac{7}{3}$ и при $\lambda > 3$ редицата дивергира към ∞, като расте. При $\lambda = -\frac{7}{3}$ и $\lambda = 3$ редицата има граница 3. При $-\frac{7}{3} < \lambda < 3$ границата ѝ е 1.

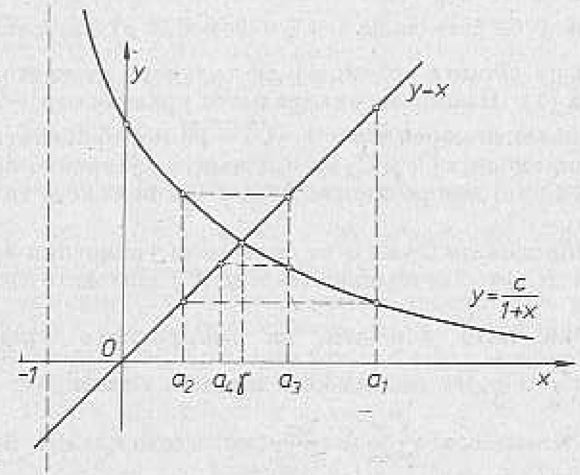
98. При $0 < \beta < \alpha$ редицата има граница α. За да се подсетим как ще изглежда a_n при $\alpha = \beta > 0$, извършваме граничния преход $\beta \to \alpha$ в $a_n = \dfrac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha^n - \beta^n}$, след като разделим числителя и знаменателя с $\alpha - \beta$ и съкратим; получаваме $a_n = \dfrac{n+1}{n}\alpha$. Този резултат лесно се доказва индуктивно. Следователно и в този случай редицата има граница α.

99. $\sqrt{\mu}$.

100. а) При $\lambda < -2$ редицата не е дефинирана. При $-2 \leqq \lambda$ тя е сходяща с граница 2, като при $-2 \leqq \lambda \leqq 2$ е растяща, а при $\lambda \geqq 2$ е намаляваща. б) Редицата е сходяща при $\lambda \geqq -c$ и клони към положителния корен на уравнението $x^2 - x - c = 0$.

101. Редицата е получена чрез итерация от функцията $f(x) = \dfrac{c}{1+x}$. Абсцисите на пресечните точки на хиперболата $y = \dfrac{c}{1+x}$ и на правата $y = x$ са корени на квадратното уравнение $x^2 + x - c = 0$. Нека γ е положителният измежду тях. От фиг. 9 се вижда, че ако $a_1 \geqq \gamma$, редицата $\{a_{2n-1}\}_{n=1}^{\infty}$ клони към γ, като намалява монотонно, а редицата $\{a_{2n}\}_{n=1}^{\infty}$ клони към γ, като расте монотонно. За да докажем това, ще установим: 1) От $x > \gamma$ следва $\dfrac{c}{1+x} < \gamma$. 2) От $0 < x < \gamma$ следва $\dfrac{c}{1+x} > \gamma$. Да проверим например верността на 1). Заключението е равносилно с $c < \gamma + \gamma x$. Тъй като съгласно дефиницията на γ е в сила $c = \gamma + \gamma^2$, трябва да покажем, че $\gamma + \gamma^2 < \gamma + \gamma x$. Но това следва от $x > \gamma$. Аналогично се доказва и 2). От 1) и 2) по индукция се получава, че от $\lambda > \gamma$ следва $a_{2n-1} > \gamma$ и $a_{2n} < \gamma$ за всяко естествено n. По-нататък се доказва, че в случая 1) е в сила $x - \gamma > \gamma - \dfrac{c}{1+x}$, а в случая 2) поради $0 < c \leqq 2$ е в сила $\gamma - x > \dfrac{c}{1+x} - \gamma$. Оттук следва $a_1 - \gamma > \gamma - a_2 > a_3 - \gamma > \gamma - a_4 > \ldots$. Ето защо редицата на членовете с нечетни номера намалява, а редицата на членовете с четни номера расте. Поради доказаната ограниченост на тези редици те са сходящи. Те имат обща граница. Наистина от рекурентната зависимост следва $a_{n+2} = \dfrac{c}{1 + \dfrac{c}{1+a_n}} = \dfrac{c(1+a_n)}{1+c+a_n}$. Ако l е границата на една от тези две редици, чрез граничен преход в горното равенство при $n \to \infty$ се получава $l^2 + l - c = 0$, т. е. общата граница l е равна на положителния корен γ на това квадратно уравнение. При $\lambda < \gamma$ разсъжденията са аналогични. При $\lambda = \gamma$ всичките членове на редицата са равни на γ.

102. Ще докажем, че $a_n < 0$. При $n = 1$ това е вярно по условие; нека е вярно за n. От рекурентната зависимост следва $a_n \geqq \lambda$ за всяко n. От $\lambda \leqq a_n < 0$ и от рекурентната зависимост следва $a_{n+1} \leqq \lambda + \dfrac{\lambda^2}{2} < 0$, тъй като по условие $-\dfrac{3}{2} < \lambda < 0$. Както и в предишната задача, редицата не е монотонна, но сега е растяща редицата на членовете с нечетни номера, а е намаляваща редицата на членовете с четни номера. Наистина от рекурентната зависимост следват равенствата



Фиг. 9

$$a_{2n+1} - a_{2n-1} = \frac{1}{2}(a_{2n}^2 - a_{2n-2}^2)$$

и

$$a_{2n+2} - a_{2n} = \frac{1}{2}(a_{2n+1}^2 - a_{2n-1}^2),$$

откъдето твърдението следва индуктивно, като се вземе пред вид, че $a_3 = \lambda + \dfrac{a_2^2}{2} = a_1 + \dfrac{a_2^2}{2} > a_1$. Тъй като двете редици са заключени между λ и 0, те са сходящи. Нека границите им са съответно p и q. Ако запишем дадената рекурентна зависимост веднъж с четно, а втори път с нечетно n и извършим граничен преход при $n \to \infty$, получаваме

$$(1) \qquad q = \lambda + \frac{p^2}{2}, \quad p = \lambda + \frac{q^2}{2},$$

откъдето

$$(2) \qquad (p-q)(p+q+2) = 0.$$

Да допуснем, че $p+q+2=0$. Тогава от второто равенство (1) следва $q^2+2q+4+2\lambda = 0$, което уравнение няма реален корен q при $-\frac{3}{2} < \lambda < 0$. Ето защо $p+q+2 \neq 0$ и от (2) следва $p = q$. Стойността на общата граница p се получава от което и да е от равенствата (1). Намираме квадратното уравнение $p^2-2p+2\lambda=0$, чийто отрицателен корен е $p = 1-\sqrt{1-2\lambda}$ и е търсената граница.

103. Определете C_1 и C_2 от системата уравнения $a_1 = C_1+C_2$ и $a_2 = C_1\alpha + C_2\beta$ с детерминанта $\beta-\alpha \neq 0$ и докажете твърдението индуктивно.

104. Определете C_1 и C_2 от системата уравнения $a_1 = C_1+C_2$ и $a_2 = (C_1+2C_2)\alpha$ с детерминанта $\alpha \neq 0$ и докажете твърдението индуктивно.

105. Тъй като корените на квадратното уравнение $x^2 = \frac{5}{6}x - \frac{1}{6}$ са $\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{3}$, от зад. 103 следва, че съществуват константи C_1 и C_2, за които $a_n = \frac{C_1}{2^{n-1}} + \frac{C_2}{3^{n-1}}$, откъдето следва $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

106. $2a_2 - a_1$. **107.** $\frac{1}{3}(a_1+2a_2)$. **108.** $\frac{\mu a_1 + a_2}{\mu+1}$.

109. Корените на уравнението $x^2 = x+2$ са -1 и 2. Ето защо съгласно зад. 103 съществуват такива константи C_1 и C_2, че $a_n = (-1)^{n-1}C_1 + 2^{n-1}C_2$ за всяко n. От последното равенство и от предположението, че редицата е сходяща, следва $C_1 = C_2 = 0$.

110. Приложете зад. 104, за да получите, че границата е 0.

111. Уравнението $x^2 = 4x-4$ има двоен корен 2. Ето защо съгласно зад. 104 съществуват такива константи C_1 и C_2, че $a_n = (C_1+C_2n)2^{n-1}$ за всяко n. От последното равенство и от предположението, че редицата е сходяща, следва $C_1 = C_2 = 0$.

112. Следствие от зад. 103 и 104.

113. Нека корените са α и β. Ако твърдението не е вярно, ще имаме $|\alpha| > 1$ и $|\beta| > 1$. Възможни са случаите: 1) $\alpha \neq \beta$ и 2) $\alpha = \beta$. В случая 1) съгласно зад. 103 съществуват такива константи C_1 и C_2, че $a_n = C_1\alpha^{n-1} + C_2\beta^{n-1}$ за всяко n. От $|a_1|+|a_2| \neq 0$ следва $|C_1|+|C_2| \neq 0$. Ако някое от числата C_1 и C_2 е 0, редицата $a_1, a_2, \ldots$ е очевидно неограничена, което противоречи на условието; следователно $C_1C_2 \neq 0$. Ако $|\alpha| \neq |\beta|$, например $|\alpha| < |\beta|$, то $\frac{a_n}{\beta^{n-1}} = C_1\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{n-1} + C_2$. Следователно $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{\beta^{n-1}} = C_2 \neq 0$ и редицата $a_1, a_2, \ldots$ не е ограничена. Ако $|\alpha| = |\beta|$, от $\alpha \neq \beta$ получаваме $\alpha = -\beta$ и $a_n = [C_1 + (-1)^{n-1}C_2]\alpha^{n-1}$. Тъй като изразът в скобите приема една и съща различна от 0 стойност за безбройно много n, а α^n расте неограничено, редицата е неограничена. В случая 2) съгласно зад. 104 съществуват такива константи C_1 и C_2, че $a_n = (C_1+C_2n)\alpha^{n-1}$. Както по-горе, се убеждаваме, че $|C_1|+|C_2| \neq 0$, поради което редицата не е ограничена.

114. Проведете изследването в духа на предишните две задачи.

115. За да установите сходимостта на двете редици, докажете неравенствата $b_n \leqq b_{n+1} \leqq a_{n+1} \leqq a_n$ за всяко n. За да докажете равенството на границите им, извършете граничен преход в равенството $a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n+b_n)$. Тази граница се нарича *средно аритметико-геометрично* на числата a_1 и b_1.

116. Сходимостта на редиците и равенството на границите им се доказват, както в предишната задача. Стойността на границата се пресмята след граничен преход в равенството $a_nb_n = a_1b_1$, валидно за всяко n, което се доказва индуктивно.

117. Да положим $q = \max(|a|+|b|, \ |c|+|d|)$ и $\rho_n = \max(|x_n-\xi|, |y_n-\eta|)$. От дадените рекурентни зависимости следва $|x_{n+1}-\xi| = |a(x_n-\xi)+b(y_n-\eta)| \leqq (|a|+|b|)\rho_n \leqq q\rho_n$. Аналогично се доказва $|y_{n+1}-\eta| \leqq q\rho_n$. Ето защо за всяко n е в сила $\rho_{n+1} \leqq q\rho_n$ и следователно $0 \leqq \rho_n \leqq q^{n-1}\rho_1$. Поради очевидното неравенство $0 \leqq q < 1$ сега следва, че $\lim\limits_{n\to\infty} \rho_n = 0$, което заедно с дефиницията на ρ_n доказва твърдението.

118. Тъй като $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\right)^k = 0$ и $a > 0$, за всички достатъчно големи n ще бъде в сила неравенството $\left(\frac{1}{n}\right)^k < a$, поради което $s_n > 1$. Ето защо $s_n - 1$ е естествено число и от дефиницията на s_n следват неравенствата

$$(1) \qquad \left(\frac{s_n-1}{n}\right)^k < a \leqq \left(\frac{s_n}{n}\right)^k.$$

Ето защо, ако m и n са достатъчно големи естествени числа, ще бъдат в сила неравенствата $\left(\frac{s_n-1}{n}\right)^k < \left(\frac{s_m}{m}\right)^k$ и $\left(\frac{s_m-1}{m}\right)^k < \left(\frac{s_n}{n}\right)^k$, откъдето $\frac{s_n-1}{n} < \frac{s_m}{m}$ и $\frac{s_m-1}{m} < \frac{s_n}{n}$; следователно

$$(2) \qquad \left|\frac{s_m}{m} - \frac{s_n}{n}\right| < \frac{1}{m} + \frac{1}{n}.$$

От (2) следва, че редицата с общ член $\frac{s_n}{n}$ удовлетворява условието на Коши, поради което е сходяща. Нека $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{s_n}{n} = l$. Като извършим граничен преход в (1), получаваме $l^k \leqq a \leqq l^k$, с което задачата е решена.

119. Задачата се решава аналогично на предишната и търсената граница е $\log_a b$.

121. Равенствата $a_{n+1} = \frac{q}{1+a_n^2} + b$ и $a_n = \frac{q}{1+a_{n-1}^2} + b$ след изваждане дават

$$(1) \qquad |a_{n+1} - a_n| = \frac{q(a_n + a_{n-1})|a_n - a_{n-1}|}{(1+a_n^2)(1+a_{n-1}^2)}.$$

Не е трудно обаче да се съобрази, че

$$(2) \qquad 0 \leqq \frac{x+y}{(1+x^2)(1+y^2)} \leqq 1$$

за всеки две неотрицателни x и y. Наистина (2) е равносилно с $\left(\frac{1}{2} - x + x^2\right) + \left(\frac{1}{2} - y + y^2\right) + x^2y^2 \geqq 0$, което е очевидно поради $\frac{1}{2} - x + x^2 \geqq 0$ за всяко реално x. От (1) и (2) следва $|a_{n+1} - a_n| \leqq q|a_n - a_{n-1}|$, откъдето с индукция непосредствено получаваме $|a_{n+1} - a_n| \leqq q^{n-1}|a_2 - a_1|$. Ето защо $|a_s - a_t| \leqq |a_s - a_{s-1}| + |a_{s-1} - a_{s-2}| + \cdots + |a_{t+1} - a_t| \leqq (q^{s-2} + q^{s-3} + \cdots + q^{t-1})|a_2 - a_1| = q^{t-1}\frac{1-q^{s-t}}{1-q}|a_2 - a_1|$ при $s > t$, откъдето

$$(3) \qquad |a_s - a_t| < \frac{2|q|^{t-1}}{|1-q|}|a_2 - a_1|.$$

Поради $|q| < 1$ е в сила $\lim\limits_{t\to\infty} |q|^t = 0$. Сега от (3) следва, че дадената редица удовлетворява условието на Коши и следователно е сходяща. Границата ѝ се намира с граничен преход в дадената рекурентна зависимост.

122. Равенствата $a_{n+1} = q\sin a_n + b$ и $a_n = q\sin a_{n-1} + b$ след изваждане дават $a_{n+1} - a_n = q.(\sin a_n - \sin a_{n-1})$, откъдето $|a_{n+1} - a_n| \leqq |q| \cdot |a_n - a_{n-1}|$ поради $|\sin a_n - \sin a_{n-1}| \leqq |a_n - a_{n-1}|$ съгласно решението на зад. 49 а). Оттук с индукция спрямо n следва $|a_{n+1} - a_n| \leqq |q|^{n-1}|a_2 - a_1|$. Ето защо $|a_s - a_t| \leqq |a_s - a_{s-1}| + |a_{s-1} - a_{s-2}| + \cdots + |a_{t+1} - a_t| \leqq \frac{2|q|^{t-1}}{1-|q|}|a_2 - a_1|$. Оттук, както в предишната задача, следва, че дадената редица удовлетворява условието на Коши, поради което е сходяща. Ако положим $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \xi$, с граничен преход в дадената рекурентна зависимост се стига до $\xi = q\sin\xi + b$ съгласно зад. 49 а). Единствеността на корена на това уравнение се установява така: Нека наред с ξ и η е негов корен, т. е. $\eta = q\sin\eta + b$. Тогава $|\xi - \eta| = |q||\sin\xi - \sin\eta| \leqq |q||\xi - \eta|$, откъдето следва $\xi = \eta$ поради $|q| < 1$.

123. Нека $a_1, a_2, \ldots$ е произволна редица от реални числа. Един индекс n (само в решението на тази задача) ще наричаме *регулярен*, когато за всички $m > n$ е в сила неравенството $a_n < a_m$. Ако съществуват безбройно много регулярни индекси, редицата $a_1, a_2, \ldots$ очевидно притежава монотонно растяща подредица. Ако пък регулярните индекси са само краен брой, за всички достатъчно големи n ще съществуват индекси m, за които $a_n \geqq a_m$ и $m > n$; следователно сега дадената редица притежава монотонно намаляваща подредица.

124. Ако $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, всяка подредица на дадената редица е сходяща и има граница a, така че в едната посока твърдението е тривиално вярно. За да докажем верността и на обратното твърдение, да допуснем противното, т. е. че всяка подредица $a_{n_1}, a_{n_2}, \ldots$ на дадената редица притежава подредица с граница a и въпреки това дадената редица не клони към a. Тогава съществува положително число ε_0 със свойството: за всяко число ν съществува n с $n > \nu$ и $|a_n - a| \geqq \varepsilon_0$. Ако положим тук $\nu = 1$, ще получим индекс n_1 с $|a_{n_1} - a| \geqq \varepsilon_0$. Ако положим сега $\nu = n_1$, ще получим индекс n_2 с $n_2 > n_1$ и $|a_{n_2} - a| \geqq \varepsilon_0$. Като продължим този процес неограничено, ще получим стриктно растяща редица от индекси $n_1, n_2, \ldots$, за които $|a_{n_k} - a| \geqq \varepsilon_0$ за всяко естествено k. От подредицата $a_{n_1}, a_{n_2}, \ldots$ на дадената редица не може да се избере клоняща към a подредица.

127. Използувайте зад. 61, гл. I.

131. а) Ако интервалът $(-\infty, x)$ съдържаше безбройно много членове на редицата $a_1, a_2, \ldots$, те биха образували подредица, която би имала точка на сгъстяване a съгласно зад. 128. Непосредствено се съобразява, че $a \leqq x$, което заедно с $x < \liminf a_n$ противоречи на обстоятелството, че $\liminf a_n$ е най-лявата точка на сгъстяване на редицата. Ето защо $(-\infty, x)$ съдържа само краен брой членове на редицата. Аналогично се доказва и твърдението за интервала (y, ∞). **б)** Интервалът $(-\infty, x')$ е околност на $\liminf a_n$, а последното число е точка на сгъстяване на редицата. Ето защо този интервал съдържа безбройно много нейни членове. Аналогично се доказва и твърдението за интервала (y', ∞).

132. **а)** За да докажете, че $a \liminf b_n$ е точка на сгъстяване на редицата $a_1b_1, a_2b_2, \ldots$, използувайте зад. 126. За да установите, че това е най-лявата точка на сгъстяване на тази редица, е достатъчно да се убедите, че всеки интервал от вида $(-\infty, x)$ с $x < a \liminf b_n$ съдържа само краен брой членове на редицата. От $x < a \liminf b_n$ и $a > 0$ следва $\frac{x}{a} < \liminf b_n$. Нека ξ е реално число, за което

(1) $$\frac{x}{a} < \xi < \liminf b_n.$$

Сега зад. 131 показва, че неравенството

(2) $$\xi \leqq b_n$$

е в сила за всички достатъчно големи индекси n. От друга страна, от (1) и $a > 0$ следва $x < a\xi$, което заедно с $\lim\limits_{n\to\infty} a_n\xi = a\xi$ показва, че неравенството

(3) $$x < a_n\xi$$

е в сила за всички достатъчно големи n. Поради $a > 0$ е изпълнено $a_n > 0$ за всички достатъчно големи n. Ето защо от (2) следва $\xi a_n \leqq a_n b_n$ за всички достатъчно големи n. От (3) и последното неравенство следва $x < \xi b_n$ за всички достатъчно големи n, поради което интервалът $(-\infty, x)$ действително съдържа само краен брой членове на редицата $a_1b_1, a_2b_2, \ldots$.

133. **а)** Следва от зад. 130. **б)** Нека ε е произволно положително число. Тогава интервалите $(-\infty, \liminf a_n - \varepsilon)$ и $(-\infty, \liminf b_n - \varepsilon)$ съдържат краен брой членове съответно на редиците $a_1, a_2, \ldots$ и $b_1, b_2, \ldots$. Ето защо неравенствата $a_n \geqq \liminf a_n - \varepsilon$ и $b_n \geqq \liminf b_n - \varepsilon$ ще бъдат изпълнени за всички достатъчно големи n. След събиране последните неравенства дават $a_n + b_n \geqq \liminf a_n + \liminf b_n - 2\varepsilon$ за всички достатъчно големи n. Ето защо $\liminf(a_n + b_n) \geqq \liminf a_n + \liminf b_n - 2\varepsilon$. Тъй като ε е произволно положително число, интересуващото ни неравенство е доказано. **в)** Аналогично.

134. **а)** Ако $\liminf a_n = -\infty$, твърдението е очевидно. Ако $\liminf a_n = \infty$, то $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$. Нека N е произволно реално число. Съществува такова ν, че от $n > \nu$ да следва $a_n > N$. Тогава при $n > \nu$ ще бъдат в сила неравенствата $\frac{1}{n}\sum_{\mu=1}^{n} a_\mu > \frac{1}{n}\sum_{\mu=1}^{\nu} a_\mu + \frac{1}{n}(n-\nu)N$ $= \frac{1}{n}\left(\sum_{\mu=1}^{\nu} a_\mu - \nu N\right) + N$. При фиксирани N и ν първото от събираемите в дясната страна е не по-малко от -1 за всички достатъчно големи n, защото това събираемо клони към 0, когато n расте неограничено. Ето защо $\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu > N - 1$ за всички достатъчно големи n, което поради произволността на N доказва твърдението в този случай. Остава да се разгледа нетривиалният случай, когато съществува число $a = \liminf a_n$. Нека $\varepsilon > 0$. Тогава интервалът $(-\infty, a - \varepsilon)$ съдържа само краен брой членове на редицата $a_1, a_2, \ldots$ Нека ν е такъв индекс, че от $n > \nu$ да следва $a_n > a - \varepsilon$. Ще покажем, че за всички достатъчно големи n е в сила неравенството

(1) $$\frac{1}{n}\sum_{\mu=1}^{n} a_\mu > a - 3\varepsilon,$$

с което доказателството ще бъде завършено. Очевидно

(2) $$\frac{1}{n}\sum_{\mu=1}^{n} a_\mu = \frac{1}{n}\sum_{\mu=1}^{\nu} a_\mu + \frac{1}{n-\nu}\sum_{\mu=\nu+1}^{n} a_\mu \frac{n-\nu}{n}.$$

От друга страна, неравенството

(3) $$\frac{1}{n}\sum_{\mu=1}^{\nu} a_\mu > -\varepsilon$$

е изпълнено за всички достатъчно големи n, тъй като лявата му страна клони към 0 с неограниченото нарастване на n. Същевременно

(4) $$\frac{1}{n-\nu}\sum_{\mu=\nu+1}^{n} a_\mu > a - \varepsilon,$$

понеже дробта в лявата страна е средно аритметично на $n - \nu$ числа, всяко от които е по-голямо от $a - \varepsilon$. От (2) — (4) следва

(5) $$\frac{1}{n}\sum_{\mu=1}^{n} a_\mu > -\varepsilon + (a-\varepsilon)\frac{n-\nu}{n}$$

за всички достатъчно големи n. Тъй като $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n-\nu}{n}=1$, от (5) следва, че за всички достатъчно големи n е в сила (1), с което твърдението е доказано. б) Аналогично.

135. Тъй като по условие $\liminf a_n = \limsup a_n = a$, от зад. 134 следва

$$\liminf \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} = \limsup \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} = a.$$

Понякога тази задача се формулира накратко така: Ако една редица е сходяща, редицата от средните ѝ аритметични е сходяща и има същата граница. Обратното не винаги е вярно. Така например редицата $\{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty}$ е очевидно разходяща, а редицата от средните ѝ аритметични е сходяща и има граница 0. Това дава възможност да се обобщят понятията *сходимост* и *граница*. А именно една редица $a_1, a_2, \ldots$ се нарича *лимитируема*, когато редицата от средните ѝ аритметични е сходяща, а границата на последната се нарича *граница* на редицата $a_1, a_2, \ldots$ *по Чезаро*. Това е един от първите примери, подтикнали развитието на един обширен дял от класическия анализ, известен под името *сумиране на разходящи редове*.

136. Следва от зад. 135 и 47. **137.** Следва от зад. 135.

138. Свежда се към зад. 137 с логаритмуване и антилогаритмуване.

139. Следва от дефиницията на liminf, респективно на limsup, и от обстоятелството, че $\ln x < \ln y$ точно когато $x < y$.

140. Свежда се към зад. 139 и 134, също както зад. 138 се свежда към зад. 137.

141. а) Като използувате очевидното равенство $\frac{1}{n}\sqrt[n]{n!} = \sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}}$, сведете към зад. 138 с полагането $a_n = \frac{n!}{n^n}$ и пресмятане на $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$. б) — ж) Аналогично.

142. Нека $\varepsilon > 0$. Тогава съществувва такъв индекс ν, че за всяко $n \geqq \nu$ е в сила

$$(1)\qquad l-\varepsilon < \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} < l+\varepsilon.$$

Поради $b_n < b_{n+1}$ неравенствата (1) са равносилни със

$$(2)\qquad (l-\varepsilon)(b_{n+1}-b_n) < a_{n+1}-a_n < (l+\varepsilon)(b_{n+1}-b_n)$$

за всяко $n \geqq \nu$. Ако в (2) заместим n последователно с ν, $\nu+1, \ldots, n-1$, след събиране получаваме

$$(3)\qquad (l-\varepsilon)(b_n-b_\nu) < a_n-a_\nu < (l+\varepsilon)(b_n-b_\nu)$$

за всяко $n > \nu$. Ако разделим двете страни на (3) с b_n, ще получим

$$(l-\varepsilon)\left(1-\frac{b_\nu}{b_n}\right) < \frac{a_n}{b_n}-\frac{a_\nu}{b_n} < (l+\varepsilon)\left(1-\frac{b_\nu}{b_n}\right),$$

откъдето след очевидни преобразувания следва

$$(4)\qquad -\varepsilon+\frac{1}{b_n}(a_\nu-(l-\varepsilon)b_\nu) < \frac{a_n}{b_n}-l < \varepsilon+\frac{1}{b_n}(a_\nu-(l+\varepsilon)b_\nu).$$

Тъй като $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty$, при фиксирани ε и ν е в сила

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{b_n}[a_\nu-(l-\varepsilon)b_\nu] = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{b_n}[a_n-(l+\varepsilon)b_\nu] = 0,$$

което заедно с (4) показва, че за всички достатъчно големи n са изпълнени неравенствата $-2\varepsilon < \frac{a_n}{b_n} - l < 2\varepsilon$ и задачата е решена. Да отбележим, че зад. 135 и 137 са частни случаи на тази задача.

143. Свежда се към зад. 142. а) $\frac{1}{k+1}$. б) $\frac{1}{2}$.

144. Нека най-напред $b=0$. За всяко $\varepsilon > 0$ съществува такъв индекс ν, че от $n \geqq \nu$ да следва $|b_n| < \varepsilon$. Ако положим

$$(1)\qquad c_n = \frac{1}{n+1}\sum_{\mu=0}^{n} a_\mu b_{n-\mu},$$

ще имаме

$$(2)\qquad |c_n| \leqq \frac{1}{n+1}\sum_{\mu=0}^{n-\nu}|a_\mu|\varepsilon + \frac{M}{n+1}\sum_{\mu=0}^{\nu-1}|b_\mu|,$$

където M е мажоранта на $|a_n|$ за всяко неотрицателно n. Но

$$(3)\qquad \frac{1}{n+1}\sum_{\mu=0}^{n-\nu}|a_\mu| \leqq \frac{1}{n+1}\sum_{\mu=0}^{n}|a_\mu|$$

и

$$(4)\qquad \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\sum_{\mu=0}^{n}|a_\mu| = |a|$$

съгласно зад. 135. От (3) и (4) следва

$$(5)\qquad \frac{1}{n+1}\sum_{\mu=0}^{n-\nu}|a_\mu| < |a|+\varepsilon$$

за всички достатъчно големи n. От друга страна,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\sum_{\mu=0}^{\nu-1}|b_\mu| = 0. \tag{6}$$

Сега от (2),(5) и (6) следва $|c_n| < |\alpha|\varepsilon+\varepsilon^2+\varepsilon$ за всички достатъчно големи n. От последното неравенство следва $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = 0$, с което твърдението е доказано при $b = 0$. Нека сега b е произволно. От (1) получаваме

$$c_n = \frac{1}{n+1}\sum_{\mu=0}^{n} a_\mu(b_{n-\mu} - b) + \frac{l}{n+1}\sum_{\mu=0}^{n} a_\mu.$$

От току-що доказаното следва, че първото събираемо в дясната страна клони към 0 с неограниченото нарастване на n, а от зад. 135 се вижда, че второто събираемо клони към ab, с което задачата е решена.

145. Ако вече е известно, че $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ съществува, равенството $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \dfrac{l}{1+\alpha}$ ще следва незабавно от $b_n = a_n + \alpha a_{n-1}$ с граничен преход. Ето защо е достатъчно да се установи сходимостта на редицата $a_1, a_2, \ldots$ За тази цел умножаваме равенствата

$$\begin{cases} b_0 = a_0, \\ b_1 = a_1 + \alpha a_0, \\ \dots\dots\dots\dots \\ b_n = a_n + \alpha a_{n-1} \end{cases}$$

съответно с $(-\alpha)^n, (-\alpha)^{n-1}, \ldots, 1$ и събираме:

$$a_n = \sum_{\mu=0}^{n}(-1)^\mu \alpha^\mu b_{n-\mu}. \tag{1}$$

Нека най-напред $l = 0$. За всяко $\varepsilon > 0$ съществува такъв индекс ν, че от $n > \nu$ да следва $|b_n| < \varepsilon$. От (1) следва

$$|a_n| \leqq \varepsilon\sum_{\mu=0}^{n-\nu}|\alpha|^\mu + M\sum_{\mu=n-\nu+1}^{n}|\alpha|^\mu, \tag{2}$$

където M е мажоранта на $|b_1|, |b_2|, \ldots$ Очевидно

$$\sum_{\mu=0}^{n-\nu}|\alpha|^\mu \leqq \frac{1}{1-|\alpha|} \tag{3}$$

и

$$\sum_{\mu=n-\nu+1}^{n}|\alpha|^\mu \leqq \frac{|\alpha|^{n-\nu+1}}{1-|\alpha|}. \tag{4}$$

От (4) поради $|\alpha| < 1$ следва $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{\mu=n-\nu+1}^{n}|\alpha|^\mu = 0$, което заедно с (2) и (3) дава $|a_n| < \dfrac{\varepsilon}{1-|\alpha|} + \varepsilon$ за всички достатъчно големи n. Ето защо $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. Случаят на произволно l се свежда към вече разгледания с помощта на равенството

$$a_n = \sum_{\mu=0}^{n}\alpha^\mu(b_{n-\mu} - l) + l\sum_{\mu=0}^{n}\alpha^\mu.$$

146. Индукция спрямо k. При $k = 1$ задачата се свежда до зад. 145. Нека твърдението е вярно за $k-1$; ще докажем верността му и за k. Нека $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k$ са корените на уравнението $x^k + \sum\limits_{\nu=1}^{k}\alpha_\nu x^{k-\nu} = 0$. Да разгледаме уравнението $x^{k-1} + \sum\limits_{\nu=1}^{k-1}\beta_\nu x^{k-1-\nu} = 0$ с корени $\xi_2, \xi_3, \ldots, \xi_k$. Очевидно

$$x^k + \sum_{\nu=1}^{k}\alpha_\nu x^{k-\nu} = (x-\xi_1)\left(x^{k-1} + \sum_{\nu=1}^{k-1}\beta_\nu x^{k-1-\nu}\right). \tag{1}$$

Като сравним коефициентите на еднаквите степени на x в (1), получаваме

$$\begin{cases} \beta_1 - \xi_1 = \alpha_1, \\ \beta_2 - \xi_1\beta_1 = \alpha_2, \\ \dots\dots\dots\dots \\ \beta_{k-1} - \xi_1\beta_{k-2} = \alpha_{k-1}, \\ -\xi_1\beta_{k-1} = \alpha_k. \end{cases} \tag{2}$$

Нека

$$c_n = a_n + \sum_{\nu=1}^{k-1}\beta_\nu a_{n-\nu}. \tag{3}$$

От (2) следва $c_n - \xi_1 c_{n-1} = b_n$, което съгласно зад. 145 дава

$$\lim_{n\to\infty} c_n = \frac{l}{1-\xi_1}. \tag{4}$$

Като приложим индукционното предположение за (3), получаваме

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{l}{1-\xi_1}\left(1+\sum_{\nu=1}^{k-1}\beta_\nu\right)^{-1} \tag{5}$$

съгласно (4). От (5) и (1) следва твърдението.

Да отбележим, че в условието на задачата не се иска корените на уравнението да са само реални. Почти цялата теория на границите се пренася в комплексната област, за която доказателството запазва валидността си.

147. Нека ξ е корен на разглежданото уравнение. Редиците $b_n = 0$ и $a_n = \xi^n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ удовлетворяват дадената рекурентна зависимост. Следователно редицата $\xi, \xi^2, \xi^3, \ldots$ е сходяща. Това означава, че или $|\xi| < 1$, или $\xi = 1$. За да се убедим, че последният случай не е възможен, най-напред ще отбележим, че ако той би бил налице, бихме имали

$$1+\sum_{\nu=1}^{k}\alpha_\nu = 0. \tag{1}$$

Нека сега $a_n = n$ и

$$b_n = a_n + \sum_{\nu=1}^{k}\alpha_\nu a_{n-\nu} \quad (n > k). \tag{2}$$

От (1), (2) и дефиницията на a_n получаваме $b_n = b_{k+1}$ при $n \geq k+1$ и следователно редицата $b_1, b_2, \ldots$ е сходяща. В такъв случай и редицата $a_1, a_2, \ldots$ би трябвало да е сходяща, което е невъзможно поради $a_n = n$.

148. Както в зад. 10, гл. III, се доказва, че множеството на реалните числа от всеки неизроден интервал не е изброимо.

149. Зад. 63, гл. I и зад. 148.

151. Ако θ е рационално число, въпросното множество очевидно не е гъсто. Ще установим, че когато θ е ирационално число, множеството на числата $m\theta + n$ е гъсто. Нека Δ е произволен интервал. Разделяме интервала $[0, 1]$ на подинтервали $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_k$ с дължини, по-малки от дължината на Δ. За всяко цяло m съществува такова цяло n, че числото $m\theta+n$ да се намира в интервала $[0, 1]$. Тъй като целите числа m са безбройно много, а интервалите $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_k$ са само краен брой, съществуват цели числа m_1, n_1, и m_2, n_2, такива, че $m_1 \neq m_2$ и $(m_\nu\theta+n_\nu) \in \Delta_s$ $(\nu = 1, 2)$, където s е някое от числата $1, 2, \ldots, k$. Очевидно числото $|(m_1\theta + n_1) - (m_2\theta + n_2)|$ е по-малко от дължината на Δ. От друга

страна, $(m_1\theta+n_1)-(m_2\theta+n_2) \neq 0$, тъй като в противен случай от $m_1 \neq m_2$ би следвало $\theta = \dfrac{n_2-n_1}{m_1-m_2}$ противно на ирационалността на θ. И така числото $(m_1 - m_2)\theta + (n_1 - n_2)$ е различно от нула и модулът му е по-малък от дължината на Δ. Тогава някое от неговите целочислени кратни, което също е число от вида $m\theta + n$ с цели m и n, ще принадлежи на Δ и с това задачата е решена.

152. Ако $\theta = \dfrac{p}{q}$, където p и $q > 0$ са взаимно прости цели числа, точките на сгъстяване на редицата са $\sin\dfrac{2\pi\nu}{q}$ $(\nu = 0, 1, \ldots, q-1)$. Ако θ е ирационално число, точките на сгъстяване изпълват целия интервал $[-1, 1]$, както това следва от зад. 151, 150 и 49 а).

162. Нека C е компактно множество. Очевидно $C \subset \bigcup_{n=1}^{\infty}(-n, n)$. Сега от дефиницията на компактно множество следва $C \subset (-n, n)$ за някое n, поради което C е ограничено. За да се убедим, че C е и затворено, нека $\lim_{n\to\infty} x_n = \xi$, където $x_n \in C$ $(n \in \mathbb{N})$. Ако допуснем, че $\xi \notin C$, множествата $U_n = \mathbb{R}\setminus\left[\xi-\dfrac{1}{n}, \xi+\dfrac{1}{n}\right]$ очевидно ще удовлетворяват условието $C \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$. Тъй като те са отворени, краен брой от тях ще покриват C съгласно дефиницията на компактно множество. Ето защо за някое n ще бъде в сила включването $C \subset \mathbb{R}\setminus\left[\xi-\dfrac{1}{n}, \xi+\dfrac{1}{n}\right]$, поради което $C \cap \left[\xi-\dfrac{1}{n}, \xi+\dfrac{1}{n}\right] = \varnothing$ в противоречие с $x_n \in C$ и $\lim_{n\to\infty} x_n = \xi$. Сега остава да се приложи зад. 157.

Нека, обратно, C е ограничено и затворено множество, а $[a, b]$ е ограничен и затворен интервал с $C \subset [a, b]$. Нека освен това $\{U_\alpha \mid \alpha \in A\}$ е фамилия от отворени множества, за които $C \subset \cup\{U_\alpha \mid \alpha \in A\}$. Наред с множествата U_α да разгледаме и отвореното множество $U = \mathbb{R}\setminus C$. Очевидно отворените множества U_α и U покриват интервала $[a, b]$. Сега от зад. 50, гл. III следва, че съществува крайно подпокритие $U, U_{\alpha_1}, U_{\alpha_2}, \ldots, U_{\alpha_n}$ на $[a, b]$. От дефиницията на U следва $C \cap U = \varnothing$. Ето защо $C \subset U_{\alpha_1} \cup U_{\alpha_2} \cup \ldots \cup U_{\alpha_n}$, т. е. C е компактно.

Пета глава

1. Ако $\delta < 1$, от $|x-1| < \delta$ и $|a-b| \geqq |a| - |b|$ следва $|x| - 1 < \delta < 1$, т. е. $|x| < 2$. Следователно при $|x-1| < \delta$ ще бъде в сила $|x^2 - 1| = |x-1||x+1| \leqq |x-1|(|x|+1) \leqq |x-1| \cdot 3 < 3\delta$. Оттук следва, че за да бъде изпълнено неравенството $|x^2-1| < 0{,}01$ при $|x-1| < \delta < 1$, е достатъчно да бъде в сила неравенството $3\delta \leqq 0{,}01$, т. е. $\delta \leqq \frac{1}{300}$.

2. Тъй като неравенството $|x^2-1| < 0{,}01$ е равносилно с $1 - 0{,}01 < x^2 < 1 + 0{,}01$, то е очевидно еквивалентно с $\sqrt{1-0{,}01} < |x| < \sqrt{1+0{,}01}$ и следователно ще бъде изпълнено точно когато x удовлетворява някое от неравенствата $\sqrt{0{,}99} < x < \sqrt{1{,}01}$ или $\sqrt{0{,}99} < -x < \sqrt{1{,}01}$. Ето защо търсената най-голяма околност на числото 1, за която важи неравенството $|x^2 - 1| < 0{,}01$, е интервалът $(\sqrt{0{,}99}, \sqrt{1{,}01})$.

3. В зад. 2 видяхме, че най-голямата околност на числото 1, в която е изпълнено неравенството $|x^2-1| < 0{,}01$, е интервалът $(\sqrt{0{,}99}, \sqrt{1{,}01})$. За да намерим най-малката симетрична околност на 1 с това свойство, трябва да си изясним коя от разликите $\sqrt{1{,}01} - 1$ и $1 - \sqrt{0{,}99}$ е по-малка. Не е трудно чрез вдигане в квадрат да се установи, че $\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x} < 2$ при $0 < x < 1$, откъдето $\sqrt{1+x} - 1 < 1 - \sqrt{1-x}$ при $0 < x < 1$ и следователно $\sqrt{1{,}01} - 1 < 1 - \sqrt{0{,}99}$. Така виждаме, че радиусът на търсената околност е $\delta = \sqrt{1{,}01} - 1$.

4. $0 < \delta \leqq \sqrt[3]{1{,}001} - 1$. **5.** $0 < \delta \leqq \sqrt[3]{1+\varepsilon} - 1$.

6. $0 < \delta \leqq \sqrt[3]{a^3 + 0{,}01} - a$ при $a \geqq 0$ и $0 < \delta \leqq a - \sqrt[3]{a^3 - 0{,}01}$ при $a \leqq 0$.

7. $0 < \delta \leqq \sqrt[3]{a^3+\varepsilon} - a$ при $a \geqq 0$ и $0 < \delta \leqq a - \sqrt[3]{a^3 - \varepsilon}$ при $a \leqq 0$.

8. Очевидно

$$\left|\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\right| = \left|\frac{1-xy}{(1+x^2)(1+y^2)}\right| \leqq \frac{1+|xy|}{(1+x^2)(1+y^2)} \leqq 1,$$

така че можем да вземем $\delta = \varepsilon$.

10. Начертайте графиката на функцията $[x]$.

12. Например всяко едноточково множество.

13. а) $\mathbf{R}$. б) $\mathbf{I}$. в) $[0, 1]$.

14. а) 9. б) $-\frac{1}{4}$. в) 0. г) 0. д) $-\frac{2}{5}$. е) $\frac{1}{2}$.

ж) 6. з) -1. и) 0. й) $\frac{m}{n}$. к) 0. л) 4. м) $\frac{1}{4}$.
н) $\frac{1}{3}$. о) $\frac{2}{3}$. п) $\frac{1}{4a\sqrt{a-b}}$. р) $\frac{n}{m}$. с) $\frac{1}{2}$. т) $-\frac{1}{3}$.

15. а) $\frac{1}{2}$. б) $-\frac{1}{8}$. в) $\frac{1}{16}$. г) $-\frac{5}{128}$. д) $\frac{1}{n}$. е) $\frac{1-n}{2n^2}$.
ж) $\frac{(n-1)(2n-1)}{6n^3}$. За да решите задачата, можете да рационализирате числителите или пък да положите $1 + x = y^2$ за а) — г) и $1 + x = y^n$ за д) — ж).

17. а) От очевидните неравенства $\sin x < x < \operatorname{tg} x$ при $0 < x < \frac{\pi}{2}$ получете неравенствата $0 < 1 - \frac{\sin x}{x} < \frac{x^2}{2}$ при $x \neq 0$, от които се заключава, че търсената граница е 0. б) От веригата равенства

$$\frac{\operatorname{tg} x - x}{x^2} = \frac{1}{\cos x} \cdot \frac{\sin x - x\cos x}{x^2} = \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \frac{1-\cos x}{x^2} + \frac{\sin x - x}{x^2}$$
$$= \frac{1}{\cos x} \cdot \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2} x + \frac{\sin x - x}{x^2}$$

и от а) следва, че търсената граница е 0.

18. а) 3. б) a. в) $\frac{3}{7}$. г) $\frac{a}{b}$.

19. а) $-\pi$. б) 2π. в) $-\frac{3}{4}$. г) $(-1)^{m+n}\frac{m}{n}$.

20. а) -1. б) 1. в) $(-1)^{n+1}(2n+1)\frac{\pi}{2}$. г) $(-1)^{m+n}\frac{2m+1}{2n+1}$.

21. а) $\cos a$. б) $-\sin a$. в) $\frac{1}{\cos^2 a}$. г) $-\frac{1}{\sin^2 a}$.

22. а) $a - b$. б) 0. в) $a - b$. г) $\frac{b-a}{ab}$.

23. а) $1 - \cos 1$. б) $\sin 1$. в) $\frac{\cos a - \cos b}{b-a}$ при $a \neq b$ и $\sin a$ при $a = b$. г) $\frac{\sin b - \sin a}{b-a}$ при $a \neq b$ и $\cos a$ при $a = b$. Използувайте: за а) зад. 25 а), гл. II; за б) — зад. 25 б), гл. II; за в) — зад. 25 в), гл. II; за г) — зад 25 г), гл. II. Съставете аналогични задачи, като използувате зад. 26, гл. II.

24. а) $\dfrac{\sin x}{x}$ при $x \neq 0$ и 1 при $x = 0$. б) Свежда се до а) при $x = \dfrac{\pi}{2}$. в) $x^2 - \sin^2 x$. г) $\dfrac{1}{\sin^2 x} - \dfrac{1}{x^2}$. д) $\dfrac{1}{x} - 2\operatorname{ctg} 2x$. е) $\dfrac{8}{3} + 4\operatorname{ctg}^2 2x - \dfrac{1}{x^2}$. Използувайте: за а) зад. 2 а), гл. II; за в) — зад. 31 а), гл. II; за г) — зад. 31 б), гл. II; за д) — зад. 31 в), гл. II; за е) — зад. 31 г), гл. II.

25. а) 0. б) От неравенствата $1 \geqq \cos^n \dfrac{x}{n} = \left(1 - \sin^2 \dfrac{x}{n}\right)^{\frac{n}{2}} \geqq \sqrt{1 - \dfrac{n}{2}\sin^2 \dfrac{x}{n}}$, последното от които следва от неравенството на Бернули (зад. 32, гл. II), и от очевидното равенство $\lim\limits_{n\to\infty} n\sin^2 \dfrac{x}{n} = 0$ се получава, че търсената граница е 1. в) Очевидно

$$\left(\cos\frac{x}{n} + \lambda\sin\frac{x}{n}\right)^n = \cos^n\frac{x}{n}\left(1 + \frac{\lambda\operatorname{tg}\frac{x}{n}\cdot n}{n}\right)^n \quad \text{и} \quad \lim_{n\to\infty} n\lambda\operatorname{tg}\frac{x}{n} = \lambda x.$$

Ето защо търсената граница е $e^{\lambda x}$ съгласно зад. 58, гл. IV.
г) Очевидно

$$\cos^n \frac{x}{\sqrt{n}} = \left(1 - \sin^2\frac{x}{\sqrt{n}}\right)^{\frac{n}{2}} = \sqrt{\left[1 - x^2\cdot\frac{\sin^2\frac{x}{\sqrt{n}}}{\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)^2}\cdot\frac{1}{n}\right]^n}.$$

Сега използувайте зад. 58, гл. IV, за да заключите, че търсената граница е $e^{\frac{x^2}{2}}$.

26. а) 0. б) $\dfrac{1}{2}$. в) $-\dfrac{1}{4}$. г) $\dfrac{b^2 - a^2}{2}$. д) $\dfrac{5}{2}$. е) $\dfrac{a^2 + b^2}{2}$. ж) $\dfrac{1}{2}\sum\limits_{\nu=1}^{k} a_\nu^2$; използувайте е) и индукция спрямо k. з) $\dfrac{n}{2}$; частен случай на ж).

27. а) $\dfrac{3}{2}$. б) Частен случай на в). в) Очевидно

$$\frac{1}{x^2}\left(\sqrt[n]{1 + x^{2-\alpha}\sin^\alpha x} - \cos ax\right)$$

$$= \frac{\sqrt[n]{1 - x^{2-\alpha}\sin^\alpha x} - 1}{x^{2-\alpha}\sin^\alpha x}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^\alpha + \frac{1 - \cos ax}{x^2},$$

откъдето съгласно зад. 15 д) и 26 б) следва, че търсената граница е $\dfrac{1}{n} + \dfrac{a^2}{2}$.

28. а) Частен случай на б). б) Съгласно зад. 29, гл. II е в сила

$$\sin x = n\cos^{n-1}\frac{x}{n}\sin\frac{x}{n} - \binom{n}{3}\cos^{n-3}\frac{x}{n}\sin^3\frac{x}{n} + \binom{n}{5}\cos^{n-5}\frac{x}{n}\sin^5\frac{x}{n} - \cdots,$$

откъдето

$$\frac{n\sin\frac{x}{n} - \sin x}{x^3} = \frac{n\sin\frac{x}{n}}{x}\cdot\frac{1 - n\cos^{n-1}\frac{x}{n}}{x^2} + \binom{n}{3}\cos^{n-3}\frac{x}{n}\cdot\frac{\sin^3\frac{x}{n}}{x^3} - \binom{n}{5}\cos^{n-5}\frac{x}{n}\cdot\frac{\sin^5\frac{x}{n}}{x^3} + \cdots$$

Сега от зад. 26 з) следва, че търсената граница е

$$\frac{n-1}{2n^2} + \frac{\binom{n}{3}}{n^3} = \frac{1}{n^3}\binom{n+1}{3}.$$

29. Тъй като двете неравенства се доказват аналогично, ще се ограничим само с първото от тях. От зад. 39, гл. II следва

$$\sin x - \sum_{\nu=0}^{k}(-1)^\nu\binom{n}{2\nu+1}\cos^{n-2\nu-1}\frac{x}{n}\sin^{2\nu+1}\frac{x}{n}$$

$$= (-1)^{k+1}\binom{n}{2k+3}\cos^{n-2k-3}\frac{x}{n}\sin^{2k+3}\frac{x}{n} + (-1)^{k+2}\binom{n}{2k+5}\cos^{n-2k-5}\frac{x}{n}\sin^{2k+5}\frac{x}{n} + \cdots$$

Тази сума, разбира се, е крайна поради $\binom{n}{\nu} = 0$ при $\nu > n$. От друга страна,

$$\left|(-1)^{k+1}\binom{n}{2k+3}\cos^{n-2k-3}\frac{x}{n}\sin^{2k+3}\frac{x}{n} + (-1)^{k+2}\binom{n}{2k+5}\cos^{n-2k-5}\frac{x}{n}\sin^{2k+5}\frac{x}{n} + \cdots\right|$$

$$\leqq \binom{n}{2k+3}\left(\frac{|x|}{n}\right)^{2k+3} + \binom{n}{2k+5}\left(\frac{|x|}{n}\right)^{2k+5} + \cdots$$

$$\leqq \frac{|x|^{2k+3}}{(2k+3)!}\left\{1 + \frac{x^2}{(2k+4)(2k+5)} + \frac{x^4}{(2k+4)(2k+5)(2k+6)(2k+7)} + \cdots\right\}$$

$$\leqq \frac{|x|^{2k+3}}{(2k+3)!}\left(1 + \left(\frac{x}{k}\right)^2 + \left(\frac{x}{k}\right)^4 + \cdots\right) \leqq \frac{|x|^{2k+3}}{(2k+3)!}\cdot\frac{k^2}{k^2 - x^2},$$

откъдето веднага следва търсеното неравенство.

30. От зад. 25 б) следва $\lim\limits_{n\to\infty} \cos^{n-\nu}\frac{x}{n} = 1$. Ето защо

$$\lim_{n\to\infty}\binom{n}{\nu}\cos^{n-\nu}\frac{x}{n}\sin^{\nu}\frac{x}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n^{\nu}(n-\nu)!}\left(\frac{\sin\frac{x}{n}}{\frac{x}{n}}\right)^{\nu}\frac{x^{\nu}}{\nu!} = \frac{x^{\nu}}{\nu!}.$$

31. **Оставете n да расте неограничено в зад. 29 и използувайте зад. 30.**

32. **Оставете k да расте неограничено в зад. 31 и използувайте зад. 43 б), гл. IV.**

33. а) $-\frac{1}{6}$. б) $\frac{1}{5!}$. в) $\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}$. г) $\frac{1}{4!}$. д) $\frac{(-1)^k}{(2k)!}$.

Случаите а) и б) са частни случаи на в), а г) — на д). За да решите например в), разделете двете страни на неравенството от зад. 31 а) с x^{2k+1}.

34. $$\left|\left(1+\frac{x}{n}\right)^n - \sum_{\nu=0}^{k}\binom{n}{\nu}\frac{x^{\nu}}{n^{\nu}}\right| = \left|\sum_{\nu=k+1}^{n}\binom{n}{\nu}\frac{x^{\nu}}{n^{\nu}}\right| \leqq \sum_{\nu=k+1}^{n}\binom{n}{\nu}\frac{|x|^{\nu}}{n^{\nu}}$$

$$= \sum_{\nu=k+1}^{n}\frac{n(n-1)\ldots(n-\nu+1)}{n^{\nu}}\cdot\frac{|x|^{\nu}}{\nu!} \leqq \frac{|x|^{k+1}}{(k+1)!}\left(1 + \frac{|x|}{k} + \frac{|x|^2}{k^2} + \cdots\right)$$

$$\leqq \frac{|x|^{k+1}}{(k+1)!}\cdot\frac{k}{k-|x|}.$$

35. В зад. 34 оставете n да расте неограничено.

36. Използувайте зад. 35 и зад. 43 б), гл. IV.

37. а) 1. б) $\frac{1}{2}$. в) $\frac{1}{6}$. г) $\frac{1}{k!}$; използувайте зад. 35.

38. а) $\ln a$. б) $\frac{(\ln a)^2}{2}$. в) $\frac{(\ln a)^k}{k!}$; в зад. 37 заместете x с $x\ln a$ и използувайте равенството $a^x = e^{x\ln a}$.

39. а) Очевидно $10^{\circ} = \frac{\pi}{18}$; сега се използува зад. 31 и се получава 0,1736. б) От зад. 35 следва, че търсеното приближение е 2,718281.

40. а) 0. б) ∞. в) 0. г) -1. д) $\frac{\sqrt{2}}{8}$. е) $\frac{1}{n}\sum\limits_{\nu=1}^{n} a_{\nu}$. ж) $\frac{5}{7}$. з) $\frac{\alpha-\beta}{n}$. и) 0 при $\alpha < \frac{n-1}{n}\gamma$, $\frac{2}{n}$ при $\alpha = \frac{n-1}{n}\gamma$ и ∞ при $\alpha > \frac{n-1}{n}\gamma$. й) 0. к) 0, вж. зад. 33, гл. IV.

41. Формализирайте тези очевидни от графиките на съответните функции свойства.

42. а) $\alpha > 0$. б) $\alpha < 0$. в) За никое α. г) За всяко $\alpha > 0$.

43. а) $\frac{a_0}{b_0}$ при $m = n$, 0 при $n < m$, ∞ при $n > m$ и $a_0b_0 > 0$, $-\infty$ при $n > m$ и $a_0b_0 < 0$. б) $\frac{a_0}{b_0}$ при $m = n$, 0 при $n < m$, ∞ при $n > m$ и при $(-1)^{m+n}a_0b_0 > 0$, $-\infty$ при $n > m$ и при $(-1)^{m+n}a_0b_0 < 0$.

44. б) От зад. 15 и 25 б), гл. IV следва $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{a^n} = 0$. Ето защо $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{a^n} = 0$. Следователно за всяко $\varepsilon > 0$ съществува такова ν, че за всяко $n > \nu$ да е в сила

$$(1) \qquad \frac{n+1}{a^n} < \varepsilon.$$

Нека $x > \nu + 1$ и $n = [x]$. Тогава $\nu < n \leqq x < n+1$ и следователно $\frac{x}{a^x} < \frac{n+1}{a^n}$. Ето защо от (1) следва, че неравенството $0 < \frac{x}{a^x} < \varepsilon$ е изпълнено за всяко $x > \nu + 1$. в) Използувайте равенството $\frac{x^2}{a^x} = \left(\frac{x}{(\sqrt{a})^x}\right)^2$ и б). е) Послужете си с неравенството $\frac{x^{\alpha}}{a^x} \leqq \frac{x^{[\alpha]+1}}{a^x}$ $(x \geqq 1)$ и г).

45. а) Положете $u = \ln x$ и по този начин сведете към зад. 44 б) с $a = e$. б) Послужете си с равенството $\frac{\ln x}{x^{\alpha}} = \frac{1}{\alpha}\cdot\frac{\ln x^{\alpha}}{x^{\alpha}}$ и с а). г) Използувайте равенството $x^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{\ln x}{x}}$ и а).

46. а) Използувайте зад. 44 г).

47. а) Положете $y = \frac{1}{x}$ и използувайте зад. 45 а). д) Използувайте а). е) Послужете си с неравенството $x^{\frac{1}{x}} \leqq x$ при $0 < x < 1$. ж) Послужете си с а) и с неравенството от упътването към е).

48. а) 1. б) 0. в) 1. г) Докажете, че при $\lambda < 1$ неравенствата $e^{\lambda x} < e^x - x^2 < e^x$ са изпълнени за всички достатъчно големи x; след това логаритмувайте и докажете, че търсената граница е 1. д) 1. е) Докажете, че неравенството $x + (\ln x)^2 < 2x$ е в сила за всички достатъчно големи x, за да заключите, че търсената граница е 1. ж) ∞ при $\alpha > 0$ и $-\infty$ при $\alpha \leqq 0$. з) $\frac{3}{2}$. и) ∞. й) 0. к) Докажете, че неравенствата $2^{\sqrt{3x}-1} \leqq 2^{\sqrt{3x-1}} \leqq x + 2^{\sqrt{3x-1}} \leqq 2^{\sqrt{3x}+1}$ са в сила за всички достатъчно големи x, за да установите, че търсената граница е $\sqrt{3}\ln 2$.

49. В противен случай би могло да се заключи, че е в сила неравенството $(f(x))^{g(x)} > 1$ за всички достатъчно близки до a стойности на x и от $g(x) \geqq 0$ би следвало $f(x) \geqq 1$ в противоречие с $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$.

51. а) Очевидно

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n} = e$$

и следователно за всяко $\varepsilon > 0$ съществува такова естествено число ν, че при $n \geqq \nu$ да са в сила неравенствата

$$(1) \qquad \left|\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} - e\right| < \varepsilon$$

и

$$(2) \qquad \left|\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n} - e\right| < \varepsilon.$$

Нека сега $x \geqq \nu$. Да положим $n = [x]$. Тогава са в сила неравенствата $n \leqq x < n+1$. Ето защо

$$(3) \qquad \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n} < \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1},$$

тъй като очевидно $n \geqq \nu$. От (1) — (3) следва $\left|\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} - e\right| < \varepsilon$ при $x \geqq \nu$. б) Аналогично на а), като се използува зад. 52, гл. IV. в) Свежда се към а) и б) и към зад. 50 б).

52. а) Ако $a \neq 0$, за всички достатъчно големи x е в сила

$$\left(1+\frac{f(x)}{x}\right)^{x} = \left(\left(1+\frac{f(x)}{x}\right)^{\frac{x}{f(x)}}\right)^{f(x)},$$

тъй като очевидно $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{f(x)} = \infty$ или $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{f(x)} = -\infty$, и задачата се свежда към зад. 51. Ако $a = 0$, за всяко $\varepsilon > 0$ ще бъде в сила $-\varepsilon < f(x) < \varepsilon$ за всички достатъчно големи x. Ето защо $\left(1-\frac{\varepsilon}{x}\right)^{x} < \left(1+\frac{f(x)}{x}\right)^{x} < \left(1+\frac{\varepsilon}{x}\right)^{x}$ за всички достатъчно големи x. Сега от разгледания вече случай $a \neq 0$ следва, че за достатъчно големи x ще бъдат налице неравенствата $e^{-\varepsilon} - \varepsilon < \left(1+\frac{f(x)}{x}\right)^{x} < e^{\varepsilon} + \varepsilon$. По-нататък всичко следва от $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} e^{\varepsilon} = 1$. б) Очевидно за произволно реално N ще бъде в сила $f(x) > N$ за всички достатъчно големи x, поради което неравенството $\left(1+\frac{f(x)}{x}\right)^{x} > \left(1+\frac{N}{x}\right)^{x}$ ще бъде изпълнено за всички достатъчно големи x. По-нататък разсъжденията завършват, както във втората част на а). в) Аналогично на б), като се използува $\lim\limits_{N\to-\infty} e^{N} = 0$.

53. Аналогично на зад. 52.

54. Сведете към зад. 52, 53 и 50.

55. а) $e^{\frac{a-b}{a+b}}$. б) e^{-2}. в) 1. г) $e^{a_1-b_1}$. Сведете към зад. 54.

56. а) e. б) e. в) e^{12}. Сведете към зад. 54.

57. Нека най-напред $a > 0$, а $x_1, x_2, \ldots$ е редица от точки на дефиниционната област на f, за които $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ и $x_n \neq 0$ за всяко естествено n. Съгласно теоремата на Хайне е достатъчно да се установи, че

$$(1) \qquad \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \ln a.$$

В противен случай би съществувала подредица $x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots$ на горната редица, за която $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = b \neq \ln a$. Тук b може да бъде и някой от символите $-\infty$ или ∞. Тогава съгласно зад. 54, приложена за ограничението на f до множеството от членовете на подредицата $x_{n_1}, x_{n_2}, \dots$, бихме получили противоречащото на условието равенство $\lim\limits_{k\to\infty}(1+x_{n_k}f(x_{n_k}))^{\frac{1}{x_{n_k}}} = e^b$, с което (1) е доказано. При $a=0$ решението е аналогично.

58. Положете $f(x) = \dfrac{a^x-1}{x}$ и използувайте зад. 57.

59. Аналогично на предишната задача.

60. а) $a^b \ln a$. б) e^ξ. в) $\lambda e^{\lambda\xi}$.

61. Използувайте зад. 58.

63. а) $(\ln a)^2$. б) $\ln a$. в) $\ln a$.

64. а) Да определим функцията f от равенството $\dfrac{2^{\frac{1}{x}}+3^{\frac{1}{x}}}{2} = 1+\dfrac{f(x)}{x}$. Тогава $f(x) = \dfrac{1}{2}\left[x\left(\sqrt[x]{2}-1\right)+x\left(\sqrt[x]{3}-1\right)\right]$ и следователно $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \dfrac{1}{2}(\ln 2+\ln 3) = \ln\sqrt{6}$ съгласно зад. 61. Ето защо

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\left(\sqrt[x]{2}+\sqrt[x]{3}\right)\right)^x = e^{\lim\limits_{x\to\infty} f(x)} = e^{\ln\sqrt{6}} = \sqrt{6}$$

съгласно зад. 52 а). б) $\sqrt[5]{72}$. в) $\lambda^p\mu^q$. г) $\sqrt{3}$.

65. а) 1. б) Очевидно $\dfrac{1}{x^2}(2^{\cos x}-2) = 2\cdot\dfrac{2^{\cos x-1}-1}{\cos x-1}\cdot\dfrac{\cos x-1}{x^2}$, поради което търсената граница е $-\ln 2$ съгласно зад. 26 б) и 58. в) $\dfrac{a}{2}\ln a$. г) $-\dfrac{a}{8}\ln a$. д) $\dfrac{a}{16}\ln a$. е) $\dfrac{a}{2}\ln a$.

66. Използувайте очевидното равенство

$$\frac{a^{f(x)}-a^{g(x)}}{x^\alpha} = a^{g(x)}\cdot\frac{\left(a^{\frac{f(x)-g(x)}{x^\alpha}}\right)^{x^\alpha}-1}{x^\alpha}$$

и зад. 59 и 16.

67. а) $\ln\dfrac{2}{3}$. б) $\ln 2$. в) 0 при $\alpha>1$, $\ln a$ при $\alpha=1$ и ∞ при $0<\alpha<1$. г) $\ln 2$ при $\alpha>1$, $\ln\dfrac{2}{3}$ при $\alpha=1$ и $-\infty$ при $0<\alpha<1$.

68. Използувайте равенството $\dfrac{\ln(1+x)}{x} = \ln(1+x)^{\frac{1}{x}}$ и зад. 51 в), както и зад. 74, гл. IV.

69. а) -1. б) От зад. 68 и от равенството

$$\frac{\sqrt[3]{x^3+2x^4}}{\ln(1+2x)} = \frac{1}{2}\sqrt[3]{1+2x}\,\frac{2x}{\ln(1+2x)}$$

следва, че търсената граница е $\dfrac{1}{2}$. в) $\dfrac{1}{a}$.

70. а) $4a^2$. б) 1. в) $-\dfrac{1}{2}$. г) $3e^3$.

71. а) Очевидно

(1) $$x-\ln(1+x) = \ln\frac{e^x}{1+x}.$$

Да определим функцията φ от равенството

(2) $$e^x = 1+x+x^2\varphi(x).$$

Тогава $\varphi(x) = \dfrac{e^x-1-x}{x^2}$ и от зад. 37 б) следва

(3) $$\lim_{x\to 0}\varphi(x) = \frac{1}{2}.$$

От (1) и (2) следва

$$\frac{\ln(1+x)-x}{x^2} = -\frac{1}{x^2}\ln\frac{1+x+x^2\varphi(x)}{1+x} = -\frac{\ln\left(1+x^2\frac{\varphi(x)}{1+x}\right)}{x^2\frac{\varphi(x)}{1+x}}\cdot\frac{\varphi(x)}{1+x},$$

което заедно с (3) и зад. 68 показва, че търсената граница е $-\dfrac{1}{2}$.

б) Очевидно

(4) $$x-\frac{x^2}{2}-\ln(1+x) = \ln\frac{e^{x-\frac{x^2}{2}}}{1+x}.$$

Да определим функцията ψ от равенството

(5) $$e^u = 1+u+\frac{u^2}{2}+u^3\psi(u).$$

Тогава $\psi(u) = \dfrac{1}{u^3}\left(e^u-1-u-\dfrac{u^2}{2}\right)$ и следователно

(6) $$\lim_{u\to 0}\psi(u) = \frac{1}{6}$$

съгласно зад. 37 в). От (4) и (5) следва $\frac{1}{x^3}\left(\ln(1+x)-x+\frac{x^2}{2}\right)$

$$=-\frac{1}{x^3}\ln\frac{1+\left(x-\frac{x^2}{2}\right)+\frac{1}{2}\left(x-\frac{x^2}{2}\right)^2+\left(x-\frac{x^2}{2}\right)^3\psi\left(x-\frac{x^2}{2}\right)}{1+x}$$

$$=-\frac{1}{x^3}\ln\left[1+x^3\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{x}{4}-1\right)+\left(1-\frac{x}{2}\right)^3\psi\left(x-\frac{x^2}{2}\right)}{1+x}\right].$$

При $\theta(x)=\frac{1}{1+x}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{x}{4}-1\right)+\left(1-\frac{x}{2}\right)^3\psi\left(x-\frac{x^2}{2}\right)\right)$ оттук следва

$$\frac{1}{x^3}\left(\ln(1+x)-x+\frac{x^2}{2}\right)=-\frac{\ln(1+x^3\theta(x))}{x^3\theta(x)}\theta(x) \tag{7}$$

и

$$\lim_{x\to 0}\theta(x)=-\frac{1}{3} \tag{8}$$

съгласно (6). Сега съгласно зад. 68 от (7) и (8) следва, че търсената граница е $\frac{1}{3}$.

72. Нека $f(x)=\frac{(1+x)^a-1}{x}$. Тогава $\lim\limits_{x\to 0}(1+xf(x))^{\frac{1}{x}}$ $=\lim\limits_{x\to 0}\left((1+x)^{\frac{1}{x}}\right)^a=e^a$ и от зад. 57 следва $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\ln e^a=a$.

73. Използувайте зад. 72.

74. а) $\frac{\pi}{e}2^{\pi-e}$. б) $\frac{a}{b}3^{a-b}$. в) $\frac{1}{7\alpha}$. г) $\frac{1}{12}$.

75. а) От равенството $\frac{1-\cos^\alpha x}{x^2}=\frac{1-\cos^\alpha x}{1-\cos x}\cdot\frac{1-\cos x}{x^2}$, от зад. 73 с $a=1$ и от зад. 26 б) следва, че търсената граница е $\frac{\alpha}{2}$.

б) $\frac{1}{2}(b^2\beta-a^2\alpha)$; сведете решението до а). в) $\frac{1}{2}(\alpha a^2+\beta b^2)$.

г) $\frac{1}{2}\sum\limits_{\nu=1}^{k}\alpha_\nu a_\nu^2$; приложете индукция спрямо k. д) $\alpha+\frac{a^2}{2}$; използувайте зад. 72.

76. а) Очевидно $(1+x)^a-1-ax=e^{a\ln(1+x)}-1-ax$. Да въведем функцията φ с равенството (2) от решението на зад. 71 а). Тогава

$$\frac{(1+x)^a-1-ax}{x^2}=a\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}+a^2\left(\frac{\ln(1+x)}{x}\right)^2\varphi(a\ln(1+x)),$$ от-

където следва, че търсената граница е $\frac{a^2}{2}-\frac{a}{2}=\binom{a}{2}$ съгласно зад. 71 а) и 68 и съгласно (3) от решението на зад. 71 а).

б) $\binom{a}{3}$.

77. а) $\alpha+1$. б) Приложете теоремата на Шолц (зад. 142, гл. IV) и резултата от а), за да заключите, че търсената граница е $\frac{1}{\alpha+1}$. Сравнете със зад. 143 а), гл. IV.

78. а) $\binom{\alpha+1}{2}$. б) От очевидното равенство

$$\frac{(x+1)^{\alpha+1}-x^{\alpha+1}-(\alpha+1)(x+1)^\alpha}{x^{\alpha-1}}$$
$$=\frac{(x+1)^{\alpha+1}-x^{\alpha+1}-(\alpha+1)x^\alpha}{x^{\alpha-1}}-(\alpha+1)\frac{(x+1)^\alpha-x^\alpha}{x^{\alpha-1}},$$

от а) и от зад. 77 а) следва, че търсената граница е $\binom{\alpha+1}{2}$ $-\alpha(\alpha+1)=-\binom{\alpha+1}{2}$. в) $\frac{\alpha+1}{2}$. г) $\frac{1}{2}$; приложете теоремата на Шолц и в); сравнете със зад. 143 б), гл. IV.

79. а) Положете $u=\frac{1}{x}$. Тогава дадeният израз придобива вида

$$\lim_{u\to 0}\frac{(\alpha+1)(1+u)^\alpha u-2((1+u)^{\alpha+1}-1)+(\alpha+1)u}{u^3}$$
$$=\lim_{u\to 0}\frac{(\alpha+1)((1+u)^\alpha-1-\alpha u)u}{u^3}$$
$$-2\lim_{u\to 0}\frac{(1+u)^{\alpha+1}-1-(\alpha+1)u-\binom{\alpha+1}{2}u^2}{u^3}$$
$$=(\alpha+1)\binom{\alpha}{2}-2\binom{\alpha+1}{3}=\binom{\alpha+1}{3}$$

съгласно зад. 76. б) Използувайте теоремата на Шолц и а), за да получите отговора $\frac{\alpha}{12}$. Сравнете със зад. 77 б) и 78 г).

80. а) За произволно положително ε неравенствата $(\gamma-\varepsilon)x < (1+x)^\gamma - 1 < (\gamma+\varepsilon)x$ са в сила за всички достатъчно близки до 0 положителни x съгласно зад. 72. Ето защо за всички достатъчно големи n ще бъдат изпълнени неравенствата $(\gamma-\varepsilon)\frac{k}{n^2} < \left(1+\frac{k}{n^2}\right)^\gamma - 1 < (\gamma+\varepsilon)\frac{k}{n^2}$ $(k = 1, 2, \dots, n)$. След събирането им се получават неравенствата

$$(\gamma-\varepsilon)\frac{n(n+1)}{2n^2} < \sum_{k=1}^{n}\left(\left(1+\frac{k}{n^2}\right)^\gamma - 1\right) < (\gamma+\varepsilon)\frac{n(n+1)}{2n^2},$$

от които следва, че търсената граница е $\frac{\gamma}{2}$. Сравнете със зад. 44 г), гл. IV. б) Работи се аналогично на а) и за границата се получава 0 при $\alpha+1<\beta$, $\frac{\gamma a}{\beta}$ при $\alpha+1=\beta$, ∞ при $\alpha+1>\beta$ и $a\gamma>0$, $-\infty$ при $\alpha+1>\beta$ и $a\gamma<0$. При $a=0$ границата очевидно е 0. Сравнете със зад. 44 г) и д), гл. IV. в) Работете, както в а), като вместо със зад. 72 си послужите със зад. 58; търсената граница е 0 при $\alpha+1<\beta$, $\frac{b\ln a}{\beta}$ при $\alpha+1=\beta$, ∞ при $\alpha+1>\beta$ и $b>0$, $-\infty$ при $\alpha+1>\beta$ и $\beta<0$. При $b=0$ границата е очевидно 0. г) Използвайте $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$. Търсената граница е 0 при $\alpha+1<\beta$, $\frac{a}{\beta}$ при $\alpha+1=\beta$, ∞ при $\alpha+1>\beta$ и $a>0$, $-\infty$ при $\alpha+1>\beta$ и $a<0$. При $a=0$ границата очевидно е 0.

81. Работете, както в зад. 80. Отговорите са: 0 при $\alpha+\frac{1}{\gamma}<\beta$, $\frac{la^\gamma}{\beta\gamma}$ при $\alpha+\frac{1}{\gamma}=\beta$, ∞ при $\alpha+\frac{1}{\gamma}>\beta$ и $l>0$, $-\infty$ при $\alpha+\frac{1}{\gamma}>\beta$ и $l<0$.

82. а) и б) са частни случаи на в), което пък от своя страна е частен случай на г). От г) ще разгледаме случая $a>0$. При $a_n=\prod\limits_{\nu=1}^{n}\left(1+\frac{\nu^\alpha a}{n^\beta}\right)$ е в сила

$$\ln a_n = \sum_{\nu=1}^{n}\ln\left(1+\frac{\nu^\alpha a}{n^\beta}\right). \tag{1}$$

Тъй като $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$, приложима е зад. 81 с $\gamma=l=1$. Ето защо границата на (1) при неограниченото нарастване на n ще бъде 0 при $\alpha+1<\beta$, $\frac{a}{\beta}$ при $\alpha+1=\beta$ и ∞ при $\alpha+1>\beta$. Чрез антилогаритмуване оттук следва, че търсената граница е 1 при $\alpha+1<\beta$, $e^{\frac{a}{\beta}}$ при $\alpha+1=\beta$ и ∞ при $\alpha+1>\beta$. Ако $a<0$, изменение претърпява само последният случай, в който границата става 0. При $a=0$ търсената граница е очевидно 1.

83. а) $e^{-\frac{1}{6}}$. б) 1 при $\alpha>\frac{3}{2}$, $e^{-\frac{a^2}{6}}$ при $\alpha=\frac{3}{2}$, 0 при $\alpha<\frac{3}{2}$ $(a\neq 0)$. в) 1 при $\alpha+\frac{1}{2}<\beta$, $e^{-\frac{a^2}{4\beta}}$ при $\alpha+\frac{1}{2}=\beta$ и 0 при $\alpha+\frac{1}{2}>\beta$ $(a\neq 0)$. г) 1 при $\alpha>\frac{1}{2}$, $e^{-\frac{a^2}{2}}$ при $\alpha=\frac{1}{2}$ и 0 при $\alpha<\frac{1}{2}$ $(a\neq 0)$.

84. Допуснете противното и ще получите противоречие.

85. а) $\mathbb{R}$. б) $\varnothing$. в) $[0,1)$. г) $[0,1)$.

87. Директно прилагане на дефинициите.

88. Нека например f е растяща. Докажете, че тогава

$$\lim_{x\to a+0} f(x)=\inf_{x>a} f(x) \quad\text{и}\quad \lim_{x\to a-0} f(x)=\sup_{x<a} f(x).$$

Шеста глава

1. а) Използвайте зад. 7, гл. V. б) Вж. зад. 9, гл. V.

3. Функцията е прекъсната при $x=0$, вж. фиг. 10.

4. Функцията е непрекъсната, вж. фиг. 11.

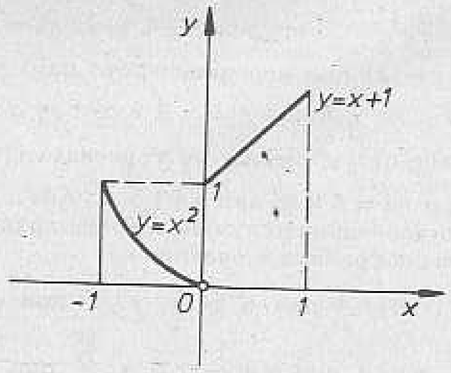
5. а) От $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$ следва $\lambda=0$. б) $\lambda=0$, понеже $\lim\limits_{x\to 0} x\ln|x|=0$ съгласно зад. 47 в), гл. V.

6. а) Точката ξ е *изолирана* за X, т. е. съществува околност U на ξ с $U\cap X=\{\xi\}$. б) Всичките точки на $\mathbb{I}$ са изолирани. г) Когато $\lim\limits_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{n}\right)=f(0)$.

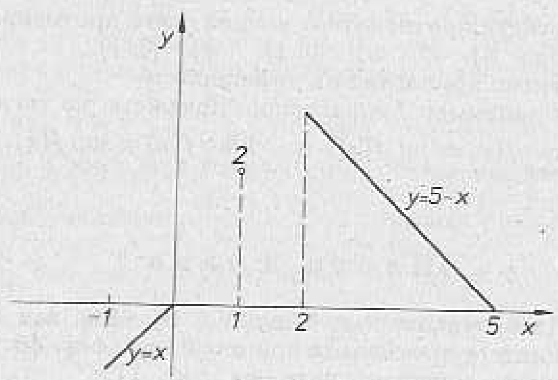
7. Всяка точка x на X трябва да бъде изолирана.

9. Начертайте графиките.

10. б) Използвайте теоремата за непрекъснатост на произведение и частно.



Фиг. 10



Фиг. 11

11. Приложете зад. 10 а).

13. а) Разгледайте например функцията $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, дефинирана с $f(x) = -1$ за рационални x и $f(x) = 1$ за ирационални x. б) Използувайте непрекъснатостта на функцията $\sqrt[3]{u}$ и теоремата за непрекъснатост на непрекъсната функция от непрекъсната функция.

14. а) Разгледайте например функцията от упътването към зад. 13 а). б) Нека φ е функцията от упътването към зад. 13 а). Разгледайте функцията $f\varphi$ и използувайте зад. 10 б).

15. а) Разгледайте например функцията $\sin\frac{\pi}{x}D(x)$, където D е функцията на Дирихле. б) Разгледайте например функцията от а) в точките $-1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \ldots$

16. а) Ако $q_1, q_2, \ldots$ не дивергираше към ∞, би съществувала ограничена, а следователно и сходяща подредица $q_{n_1}, q_{n_2}, \ldots$ Тъй като числата q_n са естествени, от някое място нататък всички членове на тази сходяща подредица трябва да съвпадат, така че без ограничение на общността може да се предположи, че $q_{n_k} = q$ $(k = 1, 2, \ldots)$. Тогава редицата с общ член $p_{n_k} = \frac{p_{n_k}}{q_{n_k}} q_{n_k}$ $(k = 1, 2, \ldots)$ би била сходяща, поради което от някой номер нататък числата p_{n_k} биха съвпадали, т. е. $p_{n_k} = p$ $(k = 1, 2, \ldots)$. Ето защо редицата $\frac{p_n}{q_n}$ би притежавала подредица, всичките членове на която са равни на $\frac{p}{q}$ в противоречие с ирационалността на ξ. б) Прекъснатостта в рационалните точки е очевидна. Непрекъснатостта в ирационалните точки следва от а).

17. Нека функцията f е непрекъсната, U е отворено множество и $V = f^{-1}(U)$. За произволно ξ от V е в сила $f(\xi) \in U$, поради което съществува околност E на $f(\xi)$ с $E \subset U$. Избираме такава околност Δ на ξ, че да е налице включването $f(\Delta) \subset E$. Тогава $\Delta \subset f^{-1}(E) \subset V$. И така всяка точка ξ на V притежава околност Δ, която изцяло се съдържа във V. Ето защо множеството $f^{-1}(U)$ е отворено. Нека, обратно, множеството $f^{-1}(U)$ е отворено винаги когато U е отворено, и нека ξ е произволно реално число. За произволна околност U на $f(\xi)$ множеството $f^{-1}(U)$ ще бъде отворено и същевременно ще бъде в сила $\xi \in f^{-1}(U)$. Ето защо съществува такава околност V на ξ, че $V \subset f^{-1}(U)$. Ясно е, че за тази околност е в сила $f(V) \subset U$, с което непрекъснатостта на f е установена.

18. Сведете към зад. 17.

19. Нека a е произволна точка от L, а ε е произволно положително число. Съгласно дефиницията на g съществува такова положително число δ, че от

$$|x - a| < \delta \quad (a \neq x \in X) \tag{1}$$

да следва

$$|f(x) - g(a)| \leqq \varepsilon. \tag{2}$$

Нека сега ξ е произволна точка от L, за която

(3) $$|\xi - a| < \delta.$$

Тъй като ξ е точка на сгъстяване на X, съществува редица x_1, $x_2, \ldots$ с $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \xi$, $x_n \neq \xi$ и $x_n \in X$ $(n = 1, 2, \ldots)$. От дефиницията на g и от теоремата на Хайне следва

(4) $$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = g(\xi).$$

От друга страна, от (3) следва, че числото $\delta - |\xi - a|$ е положително. Ето защо за всички достатъчно големи n ще бъде в сила неравенството $|x_n - \xi| < \delta - |\xi - a|$. Следователно $|x_n - a| \leqq |x_n - \xi| + |\xi - a| + \delta$ за всички достатъчно големи n. Тъй като освен това $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \xi$, при $\xi \neq a$ ще бъде в сила $x_n \neq a$ за всички достатъчно големи n. Понеже числото δ е избрано така, че от (1) да следва (2), ще бъде изпълнено неравенството

(5) $$|f(x_n) - g(a)| \leqq \varepsilon$$

за всички достатъчно големи n. От (4) и (5) след граничен преход се получава

(6) $$|g(\xi) - g(a)| \leqq \varepsilon$$

за всяко $\xi \neq a$ със свойството (3). При $\xi = a$ (6) е тривиално вярно. По този начин се убедихме, че за всяко положително число ε съществува такова положително число δ, че за всяка точка ξ от L, за която е изпълнено неравенството (3), да е в сила и неравенството (6). С това е установено, че функцията g е непрекъсната в произволна точка a на L.

20. а) За произволно цяло k дефинираме f в интервала $[k, k+1]$ линейно, т. е. с равенството $f(x) = (k + 1 - x)f(k) + (x - k)f(k+1)$ $(k \leqq x \leqq k + 1)$. б) Нека $X \setminus F = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} (a_n, b_n)$, където (a_n, b_n) $(n \in \mathrm{N})$ са непресичащи се два по два отворени интервала (компонентите на отвореното множество $\mathrm{R} \setminus F$, вж. зад. 54, гл. III). Положете $f(x) = g(x)$ за всяко x от F и $g(x) = \dfrac{b_n - x}{b_n - a_n} f(a_n) + \dfrac{x - a_n}{b_n - a_n} f(b_n)$, когато $x \in (a_n, b_n)$ и a_n и b_n са крайни. Ако $b_n = \infty$, положете $g(x) = f(a_n)$ при $x > a_n$, а ако $a_n = -\infty$, положете $g(x) = f(b_n)$ при $x < b_n$. По този начин ще получите функция $g : \mathrm{R} \to \mathrm{R}$. Убедете се, че тя е търсеното продължение. в) Нека $\xi \in [X] \setminus X$. Положете $f(x) = \dfrac{1}{x - \xi}$.

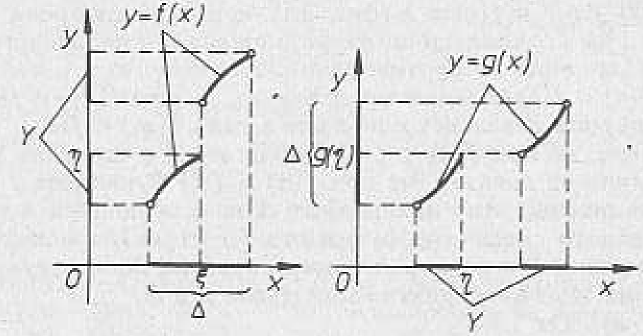
21. а) Поради непрекъснатостта на функцията $\sin x - \cos x$ задачата се свежда до решаване на уравнението $\sin x - \cos x = 0$ съгласно теоремата на Болцано. Корените му в интервала $[0, 2\pi]$ са $\dfrac{\pi}{4}$ и $\dfrac{5\pi}{4}$. Те разделят интервала $[0, 2\pi]$ на подинтервалите $\left[0, \dfrac{\pi}{4}\right]$, $\left(\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{5\pi}{4}\right)$ и $\left[\dfrac{5\pi}{4}, 2\pi\right]$. Функцията $\sin x - \cos x$ запазва знака си във всеки от тези подинтервали. Поради това за определяне на знака ѝ е достатъчно да се намери стойността ѝ в някоя вътрешна точка. Така се убеждаваме, че в интервала $\left(\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{5\pi}{4}\right)$ е в сила $\sin x - \cos x > 0$, а в другите подинтервали е валидно обратното неравенство. Поради периодичността на $\sin x$ и $\cos x$ решението на неравенството се състои в обединението на интервалите $\left(\dfrac{\pi}{4} + 2\nu\pi, \dfrac{5\pi}{4} + 2\nu\pi\right)$ $(\nu \in \mathrm{I})$. б) $0 < x < \pi$, $\dfrac{3}{2}\pi < x < 3\pi$, $\dfrac{9}{2}\pi < x < 6\pi$ и т. н. в) $(-3, -1) \cup (1, 3)$. г) $(-\infty, -2) \cup (3, \infty)$ при $0 < a < 1$ и $(-2, 3)$ при $a > 1$. д) $\left(\dfrac{3 - e}{2}, \dfrac{3 + e}{2}\right)$.

23. а) Да, защото разглежданият полином приема стойности с противоположни знаци в точките 1 и 2. б) Да. в) Да. г) Не. д) Да. е) Не, защото $x^5 + x^4 - 9x^3 - 9x^2 + 14x + 14 = x^3(x^2-9) + x^2(x^2-9) + (14x+14)$ и първите две събираеми в дясната страна са неотрицателни, а третото е положително при $x \geqq 3$. ж) Нека $P(x) = \sum\limits_{\nu=0}^{n} a_\nu x^{n-\nu}$. Без ограничение на общността може да се разгледа само случаят $a_0 > 0$. Поради нечетността на n старшият коефициент на полинома $P(-x) = \sum\limits_{\nu=0}^{n} (-1)^{n-\nu} a_\nu x^{n-\nu}$ е отрицателен. Сега от зад. 1, гл. IV следва, че съществуват такива числа a и b, че $P(a) > 0$, $P(-b) < 0$. Остава да се приложи теоремата на Болцано към непрекъснатата функция P в интервала $(a, -b)$. з) Не. и) Да. При $k = 1$ това се установява например така: $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}+0} (\operatorname{tg} x - x) = -\infty$ и $\lim\limits_{x\to\frac{3\pi}{2}-0} (\operatorname{tg} x - x) = \infty$, поради което твърдението следва от теоремата на Болцано, приложена към непрекъснатата функция $\operatorname{tg} x - x$ в някой интервал $[\xi, \eta]$ с лява граница ξ, по-голяма от $\dfrac{\pi}{2}$ и достатъчно близка до $\dfrac{\pi}{2}$, и дясна граница η, по-малка от $\dfrac{3\pi}{2}$ и достатъчно близка до $\dfrac{3\pi}{2}$.

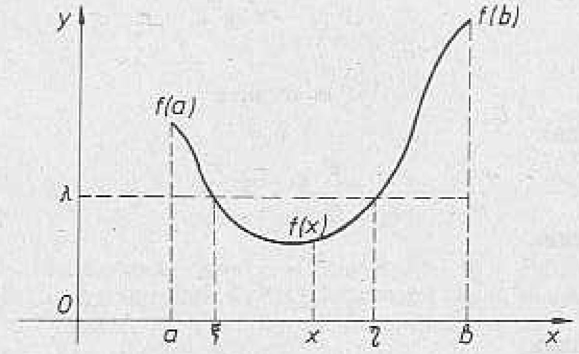
й) Аналогично на и).

24. а) Най-напред ще установим, че за всеки такъв полином е в сила $a = 0$. Наистина да допуснем противното и да положим $f(x) = ax^2 + bx + c$. Тогава за произволно цяло n ще имаме $f(n+1) - f(n) = 2an + a + b$, което поради $a \neq 0$ показва, че дължината на интервала $[f(n), f(n+1)]$ е по-голяма от 1 за всички достатъчно големи n. Ето защо за всички такива n интервалът $[f(n), f(n+1)]$ ще съдържа във вътрешността си цели числа. Сега теоремата на Болцано показва, че съществува ξ с $n < \xi < n+1$, за което числото $f(\xi)$ е цяло. Поради предположеното свойство на f числото ξ също би трябвало да е цяло, което противоречи на избора му. Ето защо $a = 0$. По-нататък е лесно да се установи, че $b = 1$ или $b = -1$ и че c е цяло. б) $x+n$ и $-x+n$ с произволно цяло n.

25. а) Нека f е например стриктно растяща. Ако x_1 и x_2 са точки от Δ с $x_1 \neq x_2$, ще бъде в сила поне едно от неравенствата $x_1 < x_2$ или $x_2 < x_1$ и тъй като f е стриктно растяща, поне едно от неравенствата $f(x_1) < f(x_2)$ или $f(x_2) < f(x_1)$ е в сила. Ето защо $f(x_1) \neq f(x_2)$, поради което f е обратима. Нека $Y = f(\Delta)$ и $g : Y \to \Delta$ е обратната функция на f. За произволна точка η на Y да положим $\xi = g(\eta)$. Тогава $\eta = f(\xi)$. Възможни са два случая: 1) ξ е вътрешна за Δ и 2) ξ е край на Δ. В случая 1) нека ε е произволно положително число. Съществуват точки x_1 и x_2 от Δ, за които $\xi - \varepsilon < x_1 < \xi < x_2 < \xi + \varepsilon$. Да положим $y_1 = f(x_1)$ и $y_2 = f(x_2)$. Тогава y_1 и y_2 са точки от Y и са в сила неравенствата $y_1 < \eta < y_2$, тъй като f е стриктно растяща. Ето защо интервалът (y_1, y_2) е околност на η. Нека сега $y \in (y_1, y_2) \cap Y$ и $x = g(y)$. Твърдим, че $x_1 < x < x_2$. Наистина в противен случай от монотонността на f би следвало, че е в сила поне едно от неравенствата $y = f(x) \leqq f(x_1) = y_1$ или $y_2 = f(x_2) \leqq f(x) = y$, всяко от които противоречи на избора на y. И така валидно е неравенството $x_1 < g(y) < x_2$, което заедно с избора на x_1 и x_2 показва, че са изпълнени неравенствата $g(\eta) - \varepsilon < g(y) < g(\eta) + \varepsilon$. С това е установена непрекъснатостта на g в случая, когато ξ е вътрешна точка на Δ. В случая 2) доказателството се свежда към 1) чрез подходящо додефиниране на f със запазване на стриктната монотонност на тази функция до интервал, за който ξ е вътрешна точка. Да отбележим изрично, че в тази задача не се предполага непрекъснатост на f (фиг. 12). От това обстоятелство в частност следва, че ако множеството на стойностите на една стриктно монотонна функция е интервал, то тя е непрекъсната. За да се установи това, е достатъчно да се приложи твърдението в разглежданата задача към обратната на



Фиг. 12



Фиг. 13

една такава функция. б) За дефиницията на обратимо изображение вж. текста преди зад. 27, гл. I. За простота най-напред ще разгледаме случая, когато Δ е ограниченият и затворен интервал $[a, b]$. От обратимостта на f следва $f(a) \neq f(b)$. Ето защо $f(a) < f(b)$ или $f(b) < f(a)$. За определеност ще разгледаме неограничителния случай $f(a) < f(b)$ и ще установим, че тогава f е стриктно растяща. За тази цел първо ще докажем, че за всяка точка x от (a, b) са в сила неравенствата $f(a) < f(x) < f(b)$. В противен случай от обратимостта на f би следвало $f(x) < f(a)$ или $f(b) < f(x)$ за някое x от (a, b). Нека например $f(x) < f(a)$ и нека λ е реално число с $f(x) < \lambda < f(a)$. Сега от теоремата на Болцано следва, че съществуват точка ξ от (a, x) и точка η от

(x, b) с $f(\xi) = \lambda$ и $f(\eta) = \lambda$ (фиг. 13), което противоречи на обратимостта на f. Аналогично се установява, че неравенството $f(b) < f(x)$ също води до противоречие. Ето защо от $a < x < b$ следва $f(a) < f(x) < f(b)$. Ако сега $a \leqq x_1 < x_2 \leqq b$, то $f(x_1) < f(b)$ и съгласно току-що доказаното ще бъде в сила $f(x_1) < f(x_2)$. С това е установено, че при $f(a) < f(b)$ функцията f е стриктно растяща. Аналогично се доказва, че при $f(a) > f(b)$ функцията f е стриктно намаляваща. Ако интервалът Δ не е ограничен и затворен, от доказаното следва, че функцията f е стриктно монотонна във всеки ограничен и затворен подинтервал на Δ, а оттук лесно се заключава, че тя е стриктно монотонна и в Δ.

26. **а)** От

(1) $$-1 \leqq x \leqq 1$$

следва

(2) $$-1 \leqq -x \leqq 1.$$

При

(3) $$\xi = \arcsin x$$

от (1) следва

(4) $$-\frac{\pi}{2} \leqq \xi \leqq \frac{\pi}{2}.$$

От (4) следва

(5) $$-\frac{\pi}{2} \leqq -\xi \leqq \frac{\pi}{2}.$$

От (3) следва

(6) $$-x = -\sin\xi = \sin(-\xi).$$

От (2), (5) и (6) следва

(7) $$-\xi = \arcsin(-x).$$

Сега твърдението се получава от (3) и (7). **б)** — **г)** Аналогично на а).

27. **а)** От

(1) $$-\frac{\pi}{2} + 2n\pi \leqq x \leqq \frac{\pi}{2} + 2n\pi$$

и

(2) $$y = x - 2n\pi$$

следват

(3) $$-\frac{\pi}{2} \leqq y \leqq \frac{\pi}{2}$$

и

(4) $$\sin x = \sin y.$$

От (2) — (4) следва $\arcsin(\sin x) = x - 2n\pi$. От

(5) $$-\frac{\pi}{2} + (2n+1)\pi \leqq x \leqq \frac{\pi}{2} + (2n+1)\pi$$

и

(6) $$y = -x + (2n+1)\pi$$

следват (3) и (4). От (3), (4) и (6) следва $\arcsin(\sin x) = -x + (2n+1)\pi$. **б)** — **г)** Аналогично на а).

29. **а)** От

(1) $$0 \leqq x \leqq 1$$

и

(2) $$\xi = \arcsin x$$

следват

(3) $$0 \leqq \xi \leqq \frac{\pi}{2}$$

и

(4) $$\cos\xi = \sqrt{1 - x^2}.$$

От (2) — (4) следва $\arcsin x = \arccos\sqrt{1 - x^2}$. Втората част на твърдението се получава от първата част чрез замяна на x с $-x$ поради зад. 26 а). **б)** и **в)** Аналогично на а).

33. **а)** От $-1 \leqq x \leqq 1$ и

(1) $$\xi = \arccos x$$

следват

(2) $$x = \cos\xi$$

и

(3) $$0 \leqq \xi \leqq \pi.$$

От (2) следва

(4) $$\sin\xi = \sqrt{1 - \cos^2\xi} = \sqrt{1 - x^2},$$

където знакът пред корена е плюс поради (3). Твърдението се получава от (4) и (1). **б)** и **в)** Аналогично на а).

37. **а)** Използувайте тъждеството $\sin 2\alpha = \dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 + \operatorname{tg}^2\alpha}$.

б) Използувайте тъждеството $\cos 2\alpha = \dfrac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}$.

42. Приложете зад. 29, гл. II.

43. а) Дефиницията на полиним на Чебишов от първи род и тъждеството $\cos\alpha+\cos\beta = 2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$. б) Аналогично, но с тъждеството $\sin\alpha+\sin\beta = 2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$. в) Аналогично, но с тъждеството $\sin(n+1)\alpha = \sin n\alpha\cos\alpha + \sin\alpha\cos n\alpha$. г) Аналогично, но с тъждеството $\cos(n+1)\alpha = \cos n\alpha\cos\alpha - \sin n\alpha\sin\alpha$.

44. Зад. 42 и зад. 29, гл. II или пък зад. 43 а) и б) с индукция спрямо n.

45. Нулите на T_n са $x_\nu = \cos\dfrac{\pi+2\nu\pi}{2n}$ $(\nu = 0, 1, 2, \dots, n-1)$, а нулите на U_n са $x_\nu = \cos\dfrac{\nu\pi}{n+1}$ $(\nu = 1, 2, \dots, n)$.

46. От $T_n(x) = \cos(n\arccos x)$ $(|x| \leqq 1)$ следва $\left|\dfrac{1}{2^{n-1}}T_n(x)\right| \leqq \dfrac{1}{2^{n-1}}$ $(-1 \leqq x \leqq 1)$. Ето защо полиномът $\dfrac{1}{2^{n-1}}T_n$ удовлетворява въпросното неравенство. Нека сега P е полином от степен n със старши коефициент 1, за който е в сила неравенството

$$|P(x)| \leqq \frac{1}{2^{n-1}} \quad (-1 \leqq x \leqq 1), \tag{1}$$

и нека

$$x_\nu = \cos\frac{\nu\pi}{n} \quad (\nu = 0, 1, 2, \dots, n). \tag{2}$$

Тогава

$$\begin{aligned}\frac{1}{2^{n-1}}T_n(x_\nu) &= \frac{1}{2^{n-1}}\cos\left(n\arccos\left(\cos\frac{\nu\pi}{n}\right)\right) = \frac{1}{2^{n-1}}\cos\nu\pi \\ &= \frac{(-1)^\nu}{2^{n-1}} \quad (\nu = 0, 1, 2, \dots, n).\end{aligned} \tag{3}$$

Разликата

$$D = \frac{1}{2^{n-1}}T_n - P \tag{4}$$

очевидно е полином от степен, по-малка от n. От друга страна, от (1) и (3) следва

$$(-1)^\nu D(x_\nu) \geqq 0 \quad (\nu = 0, 1, 2, \dots, n). \tag{5}$$

Равенството

$$\begin{aligned}D(x) = D(x_0)&\frac{(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\dots(x_0-x_n)} \\ &+ D(x_1)\frac{(x-x_0)(x-x_2)\dots(x-x_n)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\dots(x_1-x_n)} \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &+ D(x_n)\frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_0)(x_n-x_1)\dots(x_n-x_{n-1})}\end{aligned} \tag{6}$$

(*интерполационна формула на Лагранж*) е очевидно вярно за $x = x_\nu$ $(\nu = 0, 1, 2, \dots, n)$, т. е. полиномите в двете страни на (6) съвпадат за $n+1$ различни стойности на аргумента. От принципа за сравняване на коефициентите (зад. 9, гл. II) сега следва, че коефициентите на x^n в двете страни на (6) са равни, т. е.

$$\begin{aligned}0 = &\frac{D(x_0)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\dots(x_0-x_n)} \\ &+ \frac{D(x_1)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\dots(x_1-x_n)} \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &+ \frac{D(x_n)}{(x_n-x_0)(x_n-x_1)\dots(x_n-x_{n-1})}.\end{aligned} \tag{7}$$

От друга страна, от (2) непосредствено следват неравенствата

$$x_0 > x_1 > x_2 > \dots > x_n, \tag{8}$$

които заедно с (5) показват, че всичките събираеми в дясната страна на (7) са неотрицателни. Ето защо от (7) следват равенствата

$$D(x_0) = D(x_1) = D(x_2) = \dots = D(x_n) = 0. \tag{9}$$

Сега от (6) и (9) следва, че D е нулевият полином, което заедно с (4) показва, че полиномът P е идентичен с полинома $\dfrac{1}{2^{n-1}}T_n$.

47. Използувайте зад. 27 б).

49 и **50.** Директно приложение на дефинициите.

51. Включванията $\operatorname{ch}\mathbb{R} \subset [1, \infty)$, $\operatorname{sh}\mathbb{R} \subset \mathbb{R}$, $\operatorname{th}\mathbb{R} \subset (-1, 1)$, $\operatorname{cth}(\mathbb{R}\setminus\{0\}) \subset (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$ следват директно от дефинициите, а обратните включвания — от теоремата на Болцано.

52. а) Нека

$$0 \leqq x_1 < x_2. \qquad (1)$$

Трябва да се докаже, че

$$e^{x_1} + e^{-x_1} < e^{x_2} + e^{-x_2}. \qquad (2)$$

За тази цел нека $y_1 = e^{x_1}$ и $y_2 = e^{x_2}$. Тогава (2) добива вида

$$y_1 + \frac{1}{y_1} < y_2 + \frac{1}{y_2}, \qquad (3)$$

а от (1) следва

$$1 \leqq y_1 < y_2, \qquad (4)$$

тъй като функцията e^x е стриктно растяща. Следователно задачата ще бъде решена, ако се покаже, че от (4) следва (3). Тъй като (3) е равносилно с $(y_2 - y_1)\left(1 - \frac{1}{y_1 y_2}\right) > 0$, последното твърдение е очевидно. б) — г) Аналогично.

53. а) Тъй като функцията $\ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$ е дефинирана в $[1, \infty)$ (зад. 51) и стойностите ѝ принадлежат на интервала $[0, \infty)$, твърдението ще бъде установено, ако се докаже равенството $\operatorname{ch}\ln(x + \sqrt{x^2-1}) = x$ за всяко $x \geqq 1$, а то е пряко следствие от дефинициите. б) — г) Аналогично.

54. Зад. 53.

55. а) Да. б) Най-малка — не, най-голяма — да. в) Най-малка — да, най-голяма — не. г) Да. д) Най-малка — не, най-голяма — да. е) Най-малка — да, най-голяма — не.

56. Такава е например функцията, дефинирана с $f(0) = 0$ и $f(x) = -\left|x \sin \frac{1}{x}\right|$ за $x \neq 0$ при $\xi = 0$.

57. а) Ще разгледаме най-напред случая, когато са в сила $\lim\limits_{x\to a} f(x) \in \mathbf{R}$ и $\lim\limits_{x\to b} f(x) \in \mathbf{R}$. Нека функцията $g : [a, b] \to \mathbf{R}$ е дефинирана с равенствата

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{при } a < x < b, \\ \lim\limits_{x\to a} f(x) & \text{при } x = a, \\ \lim\limits_{x\to b} f(x) & \text{при } x = b. \end{cases}$$

Тя е непрекъсната съгласно зад. 19. Тъй като е дефинирана в ограничен и затворен интервал, между стойностите ѝ има една най-голяма $g(c)$ $(a \leqq c \leqq b)$. Ако $a < c < b$, задачата е решена;

затова нека например $c = a$. Тогава най-голямата стойност на f в интервала (a, b) е $f(\xi)$. В случая, когато някоя от границите $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ или $\lim\limits_{x\to b} f(x)$ е $-\infty$, твърдението се свежда към теоремата на Вайерщрас и към вече решената част от задачата чрез подходящо скъсяване на интервала (a, b). б) Ще се ограничим със случая, когато $f(\xi) > \lim\limits_{x\to a} f(x)$ и $f(\xi) > \lim\limits_{x\to b} f(x)$. Тогава съществуват числа A и B, такива че $a < A < B < b$ и $f(x) < f(\xi)$ при $a < x < A$ и при $B < x < b$. От теоремата на Вайерщрас следва, че функцията f притежава най-голяма стойност в интервала $[A, B]$. Не е трудно да се съобрази, че това е най-голямата стойност на f и в интервала (a, b).

58. Сведете към зад. 57 в).

59. Също.

60. а) Функцията очевидно е непрекъсната в интервала $[1, \infty)$ и клони към $-\infty$ при x, клонящо към ∞. Ето защо е приложима зад. 57 б). б) Сега функцията е $f(x) = \operatorname{arctg}\frac{1}{x} - \frac{1}{2}\ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)$. Очевидно $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$. От друга страна, $f(1) = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2 > 0 = \lim\limits_{x\to\infty} f(x)$, както това следва от неравенствата $\sqrt{2} < \sqrt{e} < e^{\frac{\pi}{4}}$ след логаритмуване. Ето защо функцията притежава най-голяма стойност в посочения интервал. За да се убедим, че тя притежава и най-малка стойност, е достатъчно да установим, че $f\left(\frac{1}{10}\right) < \lim\limits_{x\to\infty} f(x)$, т. е. че $\operatorname{arctg} 10 - \frac{1}{2}\ln 101 < 0$, което следва от $\operatorname{arctg} 10 < \frac{\pi}{2}$ и $\frac{1}{2}\ln 101 > \ln 10 > \ln e^2 = 2$. в) В този случай функцията клони към ∞ при x, клонящо към ∞.

61. Очевидно $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$. От друга страна, $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty$ поради $\lim\limits_{x\to 0} x\ln x = 0$ съгласно зад. 47 а), гл. V. От зад. 36, гл. V следва $e^{\frac{1}{x}} > 1 + \frac{1}{x}$, т. е. $e > \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ при $x > 0$. Ето защо $\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) < \frac{1}{x}$, поради което $f(x) < 0$ за всяко $x > 0$. Следователно функцията няма нито най-голяма, нито най-малка стойност в интервала $(0, \infty)$. При $x < -1$ имаме $\lim\limits_{x\to-1} f(x) = \infty$.

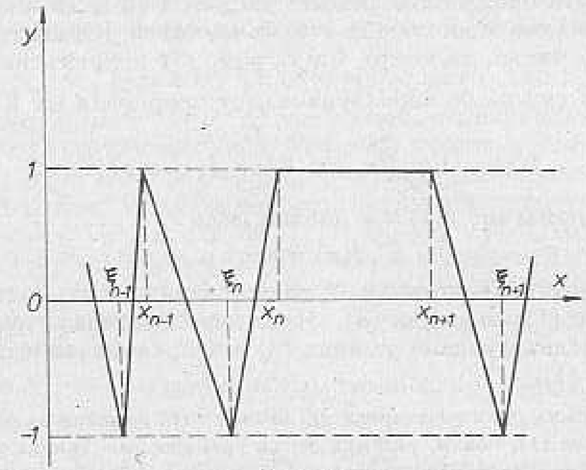
Ще се убедим, че в този случай функцията също няма нито най-голяма, нито най-малка стойност. За тази цел е достатъчно да се покаже верността на неравенството $\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) > \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1}$ при $x > -1$. Ако положим $x+1 = -\xi$, въпросното неравенство се свежда до неравенството $\ln\left(1+\frac{1}{\xi}\right) < \frac{1}{\xi} + \frac{1}{\xi+1}$ при $\xi > 0$, което, както вече видяхме е вярно.

62. а) Да. б) Да. в) Не. г) Не. д) Не. е) Да.

63. а) Разглеждаме функцията $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, дефинирана, както в решението на зад. 57 а). Тя е равномерно непрекъсната съгласно теоремата на Кантор, което осигурява равномерната непрекъснатост и на f. б) Разглежданият интервал се скъсява до ограничен и се прилага теоремата на Кантор.

64. а) Да, съгласно зад. 51 а), гл. V и зад. 63 б). б) Не, защото не е ограничена около нулата. в) Да. г) Да. д) Да. е) Да. ж) Не. з) Не. и) Да, съгласно зад. 44 в), гл. V. й) Не. к) Да. л) Не. м) Да.

65. а) Доказателството на това обобщение на теоремата на Кантор повтаря доказателството на самата теорема с използване на зад. 162 и 157, гл. IV. б) Например множеството на естествените числа. в) Най-напред ще се убедим, че множеството X е ограничено. В противен случай би съществувала редица $x_1, x_2, \ldots$ от елементи на X с $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$ или $\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty$. Нека е налице например първият случай. Чрез преминаване към подредици без ограничение на общността можем да предположим, че $x_{n+1} > x_n + 1$ $(n \in N)$. Тъй като по условие x_n е точка на сгъстяване на X, съществува ξ_n от X, за която $\xi_n \neq x_n$ и $|x_n - \xi_n| < \frac{1}{n}$. Сега разглеждаме произволна непрекъсната функция $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, за която $f(\xi_n) = -1$ и $f(x_n) = 1$ (фиг. 14). Поради $|x_n - \xi_n| < \frac{1}{n}$ и $|f(x_n) - f(\xi_n)| = 2$ тя не е равномерно непрекъсната, с което е установена ограничеността на X. Сега ще докажем, че множеството X е затворено. Наистина в противен случай от зад. 157, гл. IV би следвало, че съществува сходяща редица $x_1, x_2, \ldots$ от елементи на X, чиято граница ξ не принадлежи на X. Сега не е трудно да се съобрази, че функцията $f : X \to \mathbf{R}$, дефинирана с $f(x) = \frac{1}{x-\xi}$ $(x \in X)$, не е равномерно непрекъсната. Ето защо множеството X е затворено. Тогава от зад. 162, гл. IV следва,



Фиг. 14

че X е компактно множество.

66. Доказателството на това обобщение на теоремата на Кантор е почти буквално повторение на доказателството на самата теорема.

67. Нека $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ е такава непрекъсната функция, че

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \tag{1}$$

за всеки две реални числа x и y. Ако в (1) положим $x = y = 0$, ще получим $f(0) = 2f(0)$, откъдето

$$f(0) = 0. \tag{2}$$

Ако сега в (1) заместим y с $-x$, ще получим $f(0) = f(x) + f(-x)$, откъдето

$$f(-x) = -f(x). \tag{3}$$

От (1) и (2) с индукция се получава $f(mx) = mf(x)$ $(m = 0, 1, 2, \ldots)$, което заедно с (3) дава

$$f(nx) = nf(x) \quad (n \in \mathbf{I},\ x \in \mathbf{R}). \tag{4}$$

Сега от (4) за всеки две цели числа p и $q \neq 0$ се получава последователно

$$f\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{1}{q}\left(qf\left(\frac{p}{q}\right)\right) = \frac{1}{q}f\left(q\frac{p}{q}\right) = \frac{1}{q}f(p) = \frac{p}{q}f(1), \tag{5}$$

т. е.

$$f(r) = rf(1) \quad (r \in \mathbf{Q}). \tag{6}$$

Нека сега x е произволно реално число. Тъй като множеството $\mathbf{Q}$ на рационалните числа е гъсто, съществува редица $r_1, r_2, \ldots$ от рационални числа, за която $\lim_{n\to\infty} r_n = x$. От непрекъснатостта на f (която до тук не бе използувана), от теоремата на Хайне и от (6) следва

(7) $$f(x) = \lim_{n\to\infty} f(r_n) = \lim_{n\to\infty} r_n f(1) = x f(1),$$

което след полагане $f(1) = a$ добива вида

(8) $$f(x) = ax,$$

където a е реална константа. И така всяка непрекъсната функция $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ с (1) има вида (8). Чрез непосредствена проверка се вижда, че всяка функция от вида (8) е непрекъсната и притежава свойството (1).

Да отбележим, че съществуват различни от (8) решения на функционалното уравнение (1), които, разбира се, са прекъснати. Такива решения се строят с помощта на т. нар. *аксиома на избора*.

69. Задачата може да се реши, като почти дословно се *приложи схемата на решението* на предишната задача. Ще покажем как зад. 69 може да се *сведе* към зад. 68.

Нека $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ е такава непрекъсната функция, че

(1) $$f(x+y) = f(x)\,f(y)$$

за всеки две реални числа x и y. Ако в (1) положим $x = y = 0$, ще получим $f(0) = (f(0))^2$, откъдето

(2) $$f(0) = 1$$

или

(3) $$f(0) = 0.$$

Най-напред ще се занимаем със случая (2). Ако в (1) заместим y с $-x$, ще получим $f(0) = f(x)\,f(-x)$, което заедно с (2) дава

(4) $$f(x) \neq 0 \quad (x \in \mathbf{R})$$

и

(5) $$f(-x) = (f(x))^{-1} \quad (x \in \mathbf{R}).$$

Поради непрекъснатостта на f от (2) и (4) следва $f(x) > 0$ $(x \in \mathbf{R})$ съгласно теоремата на Болцано. Ето защо може да се образува функцията $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ с помощта на равенството $g(x) = \ln f(x)$ за всяко реално x. Тя, разбира се, е непрекъсната и от (1) следва

(6) $$g(x+y) = \ln f(x+y) = \ln(f(x)f(y)) = \ln f(x) + \ln f(y) = g(x) + g(y).$$

Ето защо от зад. 68 следва, че съществува такава константа α, че $g(x) = \alpha x$ за всяко реално x. Тогава

(7) $$f(x) = e^{g(x)} = e^{\alpha x} = (e^{\alpha})^x = a^x,$$

където е положено $e^{\alpha} = a$. И така всяка непрекъсната функция $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ с (1) и (2) има вида $f(x) = a^x$, където a е положителна константа. Чрез непосредствена проверка се установява, че всяка функция от вида a^x с $a > 0$ е непрекъсната и притежава свойството (1). В случая (3) от (1) следва $f(x) = f(x+0) = f(x)\,f(0) = 0$, което показва, че f е константата 0. И така единствените непрекъснати решения на функционалното уравнение (1) са експоненциалните функции и константата 0.

70. Да положим

(1) $$g(x) = f(e^x) \quad (x \in \mathbf{R}).$$

Тогава

(2) $$g(x+y) = f(e^{x+y}) = f(e^x e^y) = f(e^x) + f(e^y) = g(x) + g(y)$$

за всеки две реални числа x и y и тъй като функцията g е очевидно непрекъсната, от зад. 68 следва, че съществува константа α, за която $g(x) = \alpha x$ за всяко реално x. Сега (1) дава $f(e^x) = \alpha x$ за всяко реално x, което след заместване на x с $\ln x$ показва, че

(3) $$f(x) = \alpha \ln x \quad (x > 0).$$

И така всяко решение на разглежданото функционално уравнение има вида (3) при подходяща константа α. Чрез непосредствена проверка се установява, че всяка функция от вида (3) наистина е решение на това уравнение.

71. Да положим

(1) $$f(x) = c(x) + s(x), \quad g(x) = c(x) - s(x) \quad (x \in \mathbf{R}).$$

От дадената система функционални уравнения следва непосредствено

(2) $$f(x+y) = f(x)f(y), \quad g(x+y) = g(x)g(y) \quad (x,\ y \in \mathbf{R})$$

и тъй като функциите f и g са очевидно непрекъснати, от зад. 69 получаваме, че всяка от тях е или експоненциална, или е константата 0. Последната възможност отпада, тъй като от $s(0) = 0$, $c(0) = 1$ и (1) следва $f(0) = g(0) = 1$. Ето защо съществуват такива положителни константи a и b, че $f(x) = a^x$ и $g(x) = b^x$ за всяко реално x. Сега от (1) следва

(3) $$c(x) = \frac{a^x + b^x}{2}, \quad s(x) = \frac{a^x - b^x}{2} \quad (x \in \mathbf{R}).$$

И така всяка система от непрекъснати решения на разглежданите функционални уравнения е от вида (3). Непосредствена проверка показва, че всяка двойка функции от вида (3) е решение на задачата.

72. Ако в първите две от дадените функционални уравнения положим $y = -x$ и използуваме $s(0) = 0$ и $c(0) = 1$, получаваме

$$(1) \qquad \begin{cases} 0 = s(x)c(-x) + c(x)s(-x), \\ 1 = c(x)c(-x) - s(x)s(-x). \end{cases}$$

Ако разглеждаме (1) като система от две уравнения с неизвестни $c(-x)$ и $s(-x)$ и използуваме третото от дадените функционални уравнения, получаваме

$$(2) \qquad s(-x) = -s(x), \quad c(-x) = c(x).$$

При $y = x$ второто от функционалните уравнения дава $c^2(x) - s^2(x) = c(2x)$, което, събрано с третото уравнение, води до $c^2(x) = \dfrac{1+c(2x)}{2}$. Смяна на x с $\dfrac{x}{2}$ в последното равенство дава

$$(3) \qquad c^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1+c(x)}{2} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Тъй като по условие $c(0) = 1 > 0$, от непрекъснатостта на функцията $c(x)$ следва съществуването на такава околност U на началото 0, че за всяко x от U да е в сила $c(x) > 0$. Сега от (3) следва

$$(4) \qquad c\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{\frac{1+c(x)}{2}}$$

за всяко x от U. Аналогично, но с използуване на първото от дадените функционални уравнения може да се заключи, че за всяко x от U

$$(5) \qquad s\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{s(x)}{2c\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

Сега ще се убедим, че за всяко реално x съществува такова реално число a (за което не е ясно дали зависи от x или не), че да са в сила равенствата

$$(6) \qquad \sin ax = s(x), \quad \cos ax = c(x).$$

Наистина при $x = 0$ равенствата (6) са верни за произволно a, тъй като $\sin 0 = 0 = s(0)$ и $\cos 0 = 1 = c(0)$. При $x \neq 0$ поради $c^2(x) + s^2(x) = 1$ и свойствата на тригонометричните функции съществува реално число ξ, за което $\sin\xi = s(x)$ и $\cos\xi = c(x)$. Сега е достатъчно да се положи $a = \dfrac{\xi}{x}$.

Не е трудно да се съобрази, че може да се положи

$$(7) \qquad a = \varepsilon\frac{\arccos(c(x))}{x},$$

където $\varepsilon = 1$ при $s(x) \geqq 0$ и $\varepsilon = -1$ при $s(x) < 0$. Тъй като $c(0) = 1$ и $\arccos 1 = 0$, от непрекъснатостта на функцията $\arccos(c(x))$ и от (7) следва, че за всички достатъчно малки по абсолютна стойност x произведението ax принадлежи на околността U на числото 0. Ето защо съществуват числа $\xi > 0$ и a, за които

$$(8) \qquad \xi \in U, \quad a\xi \in U$$

и

$$(9) \qquad \sin a\xi = s(\xi), \quad \cos a\xi = c(\xi).$$

В по-нататъшните разсъждения ще фиксираме ξ, поради което и a ще бъде фиксирано. Ще докажем, че

$$(10) \qquad c\left(\frac{\xi}{2^n}\right) = \cos\frac{a\xi}{2^n}, \quad s\left(\frac{\xi}{2^n}\right) = \sin\frac{a\xi}{2^n} \quad (n+1 \in \mathbb{N}).$$

При $n = 0$ равенствата (10) са верни поради (9). Да предположим верността им за някое n. Тогава

$$(11) \qquad c\left(\frac{\xi}{2^{n+1}}\right) = \sqrt{\frac{1+c\left(\frac{\xi}{2^n}\right)}{2}} = \sqrt{\frac{1+\cos\frac{a\xi}{2^n}}{2}} = \cos\frac{a\xi}{2^{n+1}}$$

съгласно(4)и аналогичната формула за косинус от половин ъгъл, тъй като $\dfrac{\xi}{2^n}$ и $\dfrac{a\xi}{2^n}$ очевидно принадлежат на U, а околността на U може да се избере толкова малка, че в нея косинусът да бъде положителен. Същевременно

$$(12) \qquad s\left(\frac{\xi}{2^{n+1}}\right) = \frac{s\left(\frac{\xi}{2^n}\right)}{2c\left(\frac{\xi}{2^{n+1}}\right)} = \frac{\sin\frac{a\xi}{2^n}}{2\cos\frac{a\xi}{2^{n+1}}} = \sin\frac{a\xi}{2^{n+1}}$$

съгласно (5), аналогичната формула за синус от половин ъгъл и (11). С това равенствата (10) са доказани индуктивно. Сега ще се убедим във валидността на равенствата

$$(13)\qquad c\left(\frac{m\xi}{2^n}\right)=\cos\frac{ma\xi}{2^n},\quad s\left(\frac{m\xi}{2^n}\right)=\sin\frac{ma\xi}{2^n}\quad (m+1,\ n+1\in\mathbf{N}).$$

За тази цел ще проведем индукция спрямо m при произволно фиксирано n. При $m=0$ равенствата (13) са очевидно верни. Нека те са в сила за някое m. Тогава

$$(14)\qquad c\left(\frac{(m+1)\xi}{2^n}\right)=c\left(\frac{m\xi}{2^n}+\frac{\xi}{2^n}\right)=c\left(\frac{m\xi}{2^n}\right)c\left(\frac{\xi}{2^n}\right)$$

$$-s\left(\frac{m\xi}{2^n}\right)s\left(\frac{\xi}{2^n}\right)=\cos\frac{ma\xi}{2^n}\cos\frac{a\xi}{2^n}-\sin\frac{ma\xi}{2^n}\sin\frac{a\xi}{2^n}=\cos\frac{(m+1)a\xi}{2^n}$$

съгласно първото от дадените функционални уравнения, (10), (13) и формулата за косинус от сума. Аналогично се проверява, че

$$(15)\qquad s\left(\frac{(m+1)\xi}{2^n}\right)=\sin\frac{(m+1)a\xi}{2^n},$$

с което верността на (13) е установена. От (2) сега следва, че равенствата (13) са в сила за произволно цяло m и за произволно цяло неотрицателно n, тъй като функцията косинус е четна, а функцията синус — нечетна. Не е трудно да се съобрази, че за произволно различно от нула число ξ числата $\frac{m\xi}{2^n}$ образуват гъсто множество. Това обстоятелство заедно с непрекъснатостта на функциите c, $\cos$, s и $\sin$ поради (13) показва, че

$$(16)\qquad c(x)=\cos ax,\quad s(x)=\sin ax$$

за всяко реално x. И така всяка система от непрекъснати решения на разглежданите функционални уравнения е от вида (16). Чрез непосредствена проверка се установява, че всяка двойка функции от вида (16) е решение на задачата.

73. Да положим

$$(1)\qquad f(x)=C^2(x)+S^2(x)\quad (x\in\mathbf{R}).$$

Директна проверка, при която се използват дадените функционални уравнения, показва, че

$$(2)\qquad f(x+y)=f(x)\,f(y)$$

за всеки две реални числа x и y. Тъй като, от друга страна,

$f(0)=C^2(0)+S^2(0)=1$, от зад. 69 следва, че съществува положителна константа A, такава че $f(x)=A^{2x}$ за всяко реално x. От последното равенство и от (1) следва

$$(3)\qquad C^2(x)+S^2(x)=A^{2x}\quad (x\in\mathbf{R}).$$

Да положим още

$$(4)\qquad s(x)=\frac{S(x)}{A^x},\quad c(x)=\frac{C(x)}{A^x}\quad (x\in\mathbf{R}).$$

От (3), (4) и от дадените функционални уравнения следва, че функциите s и c удовлетворяват предположенията на зад. 72. Ето защо съществува константа a, за която

$$(5)\qquad s(x)=\sin ax,\quad c(x)=\cos ax\quad (x\in\mathbf{R}).$$

От (4) и (5) следва

$$(6)\qquad S(x)=A^x\sin ax,\quad C(x)=A^x\cos ax\quad (x\in\mathbf{R}).$$

И така всяка система от непрекъснати решения на разглежданите функционални уравнения е от вида (6). Непосредствена проверка показва, че всяка двойка функции от вида (6) е решение на задачата.

74. а) 1. б) 0. в) 2 при $|f(0)|\leqq 1$ и $1+|f(0)|$ при $|f(0)|\geqq 1$. г) Както във в).

78. а) 1. б) Ако числото a е ирационално, използвайте непрекъснатостта на σ в точката a, за да докажете, че $\omega_a(\sigma)=0$. Ако пък a е рационално и $a=\frac{p}{q}$, където p е цяло, а q — взаимно просто с него естествено число, забележете, че всяка ограничена околност на a съдържа ирационални числа и само краен брой рационални числа от вида $b=\frac{r}{s}$, където r е цяло, а s — взаимно просто с него естествено число и $s\leqq q$. В този случай $\omega_a(\sigma)=\frac{1}{q}$.

80. а) Нека $\xi\in A=\{x\,|\,\omega_x(f)<\varepsilon\}$. Тогава $\omega_\xi(f)<\varepsilon$ и съгласно дефиницията на осцилация в точка съществува околност U на ξ, за която $\omega(U,f)<\varepsilon$. Докажете, че $U\subset A$. б) Разгледайте например функцията $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, дефинирана с равенствата

$$f(x)=\begin{cases}1+\dfrac{1}{n} & \text{при } x=\dfrac{1}{n}\ (n\in\mathbf{N}),\\ 0 & \text{при всички останали } x.\end{cases}$$

в) Разгледайте например функцията $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, дефинирана с

$$f(x)=\begin{cases}2 & \text{за } x=\dfrac{1}{n}\ (n\in\mathbf{N}),\\ 0 & \text{за останалите } x.\end{cases}$$

83. а) Нека $x_0 \in \mathbf{R}$ и $\varepsilon_0 > 0$. Трябва да посочим такава точка ξ, че

$$(1) \qquad \xi \in \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$$

и $\xi \in (x_0 - \varepsilon_0,\, x_0 + \varepsilon_0)$. Понеже множеството U_1 по условие е гъсто, то

$$(2) \qquad (x_0 - \varepsilon_0,\, x_0 + \varepsilon_0) \cap U_1 \neq \varnothing.$$

Тъй като множеството в лявата страна на (2) е отворено и не е празно, то ще съдържа цял интервал. Избираме x_1 от $\mathbf{R}$ и $\varepsilon_1 > 0$ по такъв начин, че да е в сила

$$(3) \qquad [x_1 - \varepsilon_1,\, x_1 + \varepsilon_1] \subset (x_0 - \varepsilon_0,\, x_0 + \varepsilon_0) \cap U_1.$$

Аналогично, като се използува гъстотата на U_2, се вижда, че отвореното множество $(x_1 - \varepsilon_1,\, x_1 + \varepsilon_1) \cap U_2$ не е празно. Ето защо съществуват x_2 от $\mathbf{R}$ и $\varepsilon_2 > 0$, за които

$$(4) \qquad [x_2 - \varepsilon_2,\, x_2 + \varepsilon_2] \subset (x_1 - \varepsilon_1,\, x_1 + \varepsilon_1) \cap U_2$$

и т. н. По този начин индуктивно се построяват редици $x_1, x_2, \dots$ и $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots$, за които $x_n \in \mathbf{R}$, $\varepsilon_n > 0$ и

$$(5) \qquad [x_n - \varepsilon_n,\, x_n + \varepsilon_n] \subset (x_{n-1} - \varepsilon_{n-1},\, x_{n-1} + \varepsilon_{n-1}) \cap U_n \quad (n \in \mathbf{N}).$$

От (5) преди всичко следва, че

$$(6) \qquad x_n \in [x_k - \varepsilon_k,\, x_k + \varepsilon_k] \subset U_k$$

при $n \geqq k$. От (6) следва, че редицата $x_1, x_2, \dots$ е ограничена. Нека ξ е произволна точка на сгъстяване на тази редица. Отново от (6) следва, че $\xi \in U_k$ $(k \in \mathbf{N})$, т. е. (1). От друга страна, пак от (6) следва $\xi \in [x_1 - \varepsilon_1,\, x_1 + \varepsilon_1] \subset (x_0 - \varepsilon_0,\, x_0 + \varepsilon_0)$ съгласно (3). б) Например подредете рационалните числа в редица $r_1, r_2, \dots$, в която всяко рационално число се среща само веднъж, и положете $A_n = \{r_\nu\}_{\nu=n}^{\infty}$. в) Да допуснем противното. Нека $A = \{a_\nu\}_{\nu=1}^{\infty}$ е изброимо и гъсто множество и $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$, където множествата U_n $(n \in \mathbf{N})$ са отворени. Да положим $V_n = \mathbf{R} \setminus \{a_n\}$ $(n \in \mathbf{N})$. Тогава множествата V_n са отворени и гъсти и $\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} V_n\right) \cap \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n\right) = \varnothing$ в противоречие с а).

84. а) Нека C е множеството на точките на непрекъснатост на f. От зад. 79 следва $C = \{x \mid \omega_x(f) = 0\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left\{x \mid \omega_x(f) < \frac{1}{n}\right\}$,

което заедно със зад. 80 а) доказва твърдението за множеството на точките на непрекъснатост. Второто твърдение се доказва чрез преминаване към допълнения. б) Очевидно без ограничение на общността може да се предположи, че $U_1 = \mathbf{R}$ и $U_1 \supset U_2 \supset \dots \supset U_n \supset \dots$ Ако $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$, полагаме $f(x) = 0$. Ако $x \notin \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$, съществува единствено n, за което $x \in U_n \setminus U_{n+1}$. Сега полагаме $f(x) = \frac{1}{2n}$ при рационално x и $f(x) = \frac{1}{2n+1}$ при ирационално x. Нека $a \in \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$. Ще покажем, че дефинираната по-горе функция f е непрекъсната в точката a. Тъй като U_n е околност на a и е в сила $|f(x) - f(a)| = f(x) < \frac{1}{n}$ за всяко x от U_n, твърдението е установено. Нека сега $a \notin \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$ и $a \in U_n \setminus U_{n+1}$. Ако a е рационално число, избираме редица $x_1, x_2, \dots$ от ирационални числа, за които $\lim_{k \to \infty} x_k = a$ и $x_k \in U_n$ $(k \in \mathbf{N})$. Ако $x_k \notin U_{n+1}$, то $f(a) - f(x_k) = \frac{1}{2n} - \frac{1}{2n+1}$. Ако пък $x_k \in U_{n+1}$, то $f(a) - f(x_k) \geqq \frac{1}{2n} - \frac{1}{2(n+1)+1} > \frac{1}{2n} - \frac{1}{2n+1}$. Ето защо $|f(x_k) - f(a)| \geqq \frac{1}{2n(2n+1)}$ $(k \in \mathbf{N})$ и следователно функцията f е прекъсната в точката a. Случаят на ирационално a се разглежда аналогично.

85. Допуснете противното, т. е. че съществува функция $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, чието множество на точките на непрекъснатост съвпада с множеството $\mathbf{Q}$ на рационалните числа. Съгласно зад. 84 а) ще съществува редица $U_1, U_2, \dots$ от отворени в $\mathbf{R}$ множества, за която $\mathbf{Q} = \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$. От зад. 61, гл. I следва, че множеството на рационалните числа може да се подреди в редица $r_1, r_2, \dots$. Наред с гъстите отворени множества $U_1, U_2, \dots$ разгледайте и гъстите отворени множества $\mathbf{R} \setminus \{r_n\}$ $(n \in \mathbf{N})$. След това приложете зад. 83 а), за да получите противоречие.

86. Нека например функцията f е растяща. Достатъчно е да се установи, че множеството на вътрешните точки на Δ, в които f е прекъсната, е крайно или изброимо. Нека ξ е вътрешна точка на Δ, в която f е прекъсната. Тогава границата $\lim_{x \to \xi} f(x)$ не съществува. Тъй като, от друга страна, границите $\lim\limits_{x\to\xi-0} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to\xi+0} f(x)$ съществуват съгласно зад. 88, гл. V, от зад. 87, гл. V следва, че те са различни. Тъй като функцията f е растяща, от това следва $f(\xi-0) < f(\xi+0)$, т. е. че интервалът $(f(\xi-0), f(\xi+0))$ е неизроден. Ако η е друга вътрешна за Δ точка на прекъсване на f, интервалите $(f(\xi-0), f(\xi+0))$ и $(f(\eta-0), f(\eta+0))$ нямат общи точки. Наистина, ако например $\xi < \eta$, съществува такава точка a от Δ, че $\xi < a < \eta$. Сега не е трудно да се съобрази, че $f(\xi+0) \leqq f(a) \leqq f(\eta-0)$. По този начин на всяка вътрешна за Δ точка на прекъсване ξ на f бе съпоставен по един неизроден интервал $(f(\xi-0), f(\xi+0))$, при което съответстващите на различни точки на прекъсване интервали нямат общи точки. Сега твърдението следва от зад. 58, гл. I.

Седма глава

1. От дефинициите на хиперболичните функции и производната на e^x.

2. Зад. 53, гл. VI.

3. а) $4x^3-6x+5$. б) $\frac{1}{2\sqrt{x}}$. в) $\frac{f'}{2\sqrt{f}}$.

г) $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$. д) $\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$. е) $-\frac{1}{x^2}$.

ж) $-\frac{f'}{f^2}$. з) $-\frac{2x+2}{(x^2+2x+2)^2}$. и) $-\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}}{(\sqrt{x}+\sqrt[4]{x})^2}$.

й) $-\frac{2}{x^3}$. к) $-\frac{2f'}{f^3}$. л) $-\frac{\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt[4]{x^3}}}{(\sqrt{x}+2\sqrt[4]{x})^3}$.

м) $-\frac{1}{2\sqrt{x^3}}$. н) $\frac{3}{2}\sqrt{x}+\frac{2}{3\sqrt[3]{x^5}}$. о) $\frac{2(1-x^2)}{(x^2-x+1)^2}$.

п) $\frac{4x+5\sqrt[5]{x^4}+1}{5\sqrt[5]{x^4}\left(\sqrt[5]{x}+1\right)^2}$. р) $\frac{-2(\sqrt{x^2+1}-x)^2}{\sqrt{x^2+1}}$.

с) $-\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{(1+x)^2}\sqrt[3]{\frac{1+x}{1-x}}$. т) $\sum\limits_{\nu=0}^{n-1}\frac{x^\nu}{\nu!}$.

у) $\sum\limits_{\nu=0}^{n}(-1)^\nu\frac{x^{2\nu}}{(2\nu)!}$. ф) $\sum\limits_{\nu=1}^{n}(-1)^\nu\frac{x^{2\nu-1}}{(2\nu-1)!}$.

х) $af^{a-1}f'$. Желателно е резултатите в), ж), к) и х) да се помнят наизуст.

4. а) $2xe^{x^2}$. б) e^x+ex^{e-1}. в) $\frac{4xe^{\frac{1+x^2}{1-x^2}}}{(1-x^2)^2}$.

г) $2e^{-\frac{1}{x^2}}\cdot\frac{1}{x^3}$. д) $\frac{1-2x}{2\sqrt{x}}e^{-x}$.

е) $\frac{2x^4-x^3-6x^2-6x-4}{2x^3\sqrt{x^2+x+1}}e^{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}$. ж) $e^f f'$.

Желателно е резултатът ж) да се помни наизуст.

5. а) $(2^x(\ln 2-1)-x^3+3x^2)e^{-x}$.

б) $(x^2\ln 10+(2-10\ln 10)x+(3\ln 10-10))10^x$.

в) $\frac{-6\ln 3.9^x}{(1+9^x)^2}$. г) $2.10^{2x-3}\ln 10$. д) $\ln 2\ln 3.2^{3^x}.3^x$.

е) $a^f\ln af'$. Желателно е този резултат да се помни наизуст.

6. а) $x(2\ln x+1)$. б) $-\frac{1}{x(\ln x)^2}$.

в) $\frac{x\ln x-x+1}{x(\ln x)^2}$. г) $-\frac{2}{x(1+\ln x)^2}$.

д) $x^{n-1}(n\ln x+1)$. е) $\frac{e^x(x\ln x+1)}{x}$.

ж) $-\frac{2}{1-2x}$. з) $2\frac{\ln x}{x}$. и) $\frac{1}{2x\sqrt{\ln x}}$.

й) $\frac{1+x^2-2x^2\ln x}{x(1+x^2)^2}$. к) $\frac{\ln x}{x\sqrt{1+(\ln x)^2}}$. л) $\frac{2x}{x^2+4}$.

м) $\frac{1}{x\ln x}$. н) $\frac{(\ln x-1)\ln 2}{(\ln x)^2}\cdot 2^{\frac{x}{\ln x}}$.

о) $\frac{e^{\sqrt{\ln x}}}{2x\sqrt{\ln x}}$. п) $\frac{(2ax+b)e^{\sqrt{\ln(ax^2+bx+c)}}}{2(ax^2+bx+c)\sqrt{\ln(ax^2+bx+c)}}$.

р) $\frac{f'}{f}$. Желателно е този резултат да се помни наизуст.

7. а) $x^{n-1}\left(n\lg x+\frac{1}{\ln 10}\right)$. б) $\frac{1}{\ln 2.\ln 3.\ln 5.\log_3\log_5 x.\log_5 x.x}$.

в) $\frac{x\ln 2+2^x(x(\ln 2)^2\log_2 x+1)}{x\ln 2(x+2^{x\log_2 x})}$. г) $\frac{-\ln 2}{x(\ln x)^2}$, поради $\log_x 2$

$= \dfrac{\ln 2}{\ln x}$. д) $\dfrac{2\pi^x x^{\pi-1}(x\ln\pi - 1)}{(\pi^{2x} - x^{2\pi})\ln\pi}$. е) $\dfrac{\ln 3 . \ln 6}{\ln 2(\ln 3 - \ln x)^2 x}$.

ж) $\dfrac{f'}{f\ln a}$.

8. а) $2x\cos x^2 + \sin 2x$. б) $-\dfrac{\cos\frac{1}{x}}{x^2}$.

в) $\cos x . \cos\sin x$. г) $-\dfrac{3\sin^2\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\cos\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^2}$.

д) $\operatorname{ctg} x + \dfrac{1}{x}\cos\ln x$. е) $\dfrac{e^{\sin^2\sqrt{x}}\sin 2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} + \cos e^{\sqrt{x}} . \dfrac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$.

ж) $e^{-ax}[b\cos(bx+c) - a\sin(bx+c)]$. з) $\cos f.f'$. Желателно е този резултат да се помни наизуст.

9. а) $\dfrac{(\cos x - \sin x)(e^{2x}\cos^2 x - 1)}{e^x\cos^2 x}$. б) $3\sin 2x(\cos x - 1)$.

в) $\dfrac{1+\sin x + e^x}{x - \cos x + e^x}$. г) $-3x^2\sin x^3 - 3\cos^2 x\sin x$.

д) $\dfrac{-4(2+\cos 2x)}{\sin^2 2x}$. е) $-(\sin\sin x)\cos x - (\cos\cos x)\sin x$.

ж) $-n(\sin x\sin^n x)\sin^{n-1} x\cos x - n(\cos\cos^n x)\cos^{n-1} x\sin x$.

з) $n(\sin^{n-1} x + \cos^{n-1} x)\cos(n+1)x$.

и) $n(\sin^{n-1} x - \cos^{n-1} x)\sin(n+1)x$.

й) $-\sin f.f'$. Желателно е този резултат да се помни наизуст.

10. а) $\operatorname{tg}^4 x$. б) $\dfrac{\cos x}{\cos^2(\sin x)} + \dfrac{\cos\operatorname{tg} x}{\cos^2 x}$.

в) $\dfrac{-n\cos^{n-1} x\sin x}{\cos^2(\cos^n x)} - \dfrac{n(\sin\operatorname{tg}^n x)\operatorname{tg}^{n-1} x}{\cos^2 x}$.

г) $\dfrac{1}{\cos^2(\operatorname{tg}\operatorname{tg} x)} \cdot \dfrac{1}{\cos^2(\operatorname{tg} x)} \cdot \dfrac{1}{\cos^2 x}$.

д) $\dfrac{1}{\sin x} + \dfrac{1}{x\cos^2\ln\frac{x}{2}}$. е) $\dfrac{e^{\operatorname{tg} x}}{\cos^2 x} + \dfrac{e^x}{\cos^2 e^x}$.

ж) $\dfrac{6(\operatorname{tg}\operatorname{tg}^3 x)\operatorname{tg}^2 x}{(\cos^2\operatorname{tg}^2\operatorname{tg}^3 x)(\cos^2\operatorname{tg}^3 x)\cos^2 x}$. з) $\dfrac{-2}{1+\sin 2x}$.

и) $\dfrac{f'}{\cos^2 f}$. Желателно е този резултат да се помни наизуст.

11. а) $-\cos 2x$. б) $\dfrac{\ln(1+\sin x)}{\sin^2 x}$. в) $\dfrac{1}{\cos^5 x}$.

г) $\dfrac{-1}{\sin^2\left(1+\frac{1}{1+\operatorname{ctg} x}\right)(1+\sin 2x)}$.

д) $-\dfrac{n\operatorname{tg}^{n-1} x}{(\sin^2\operatorname{tg}^n x)\cos^2 x} - \dfrac{n\operatorname{ctg}^{n-1} x}{(\cos^2\operatorname{ctg}^n x)\sin^2 x}$.

е) $\dfrac{-f'}{\sin^2 f}$. Желателно е този резултат да се помни наизуст.

12. а) $nx^{n-1}\arcsin x + \dfrac{x^n}{\sqrt{1-x^2}}$. б) $9x^2\arcsin x$.

в) $\dfrac{x}{\sqrt{4+2x-x^2}}$. г) $\arcsin^2 x$. д) $\dfrac{f'}{\sqrt{1-f^2}}$.

Желателно е този резултат да се помни наизуст.

13. а) $\dfrac{2xe^{\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2-e^{x^2}}}$. б) $\dfrac{-\left(\arccos\sqrt{x^2+2x}\right)^{-\frac{3}{4}}(x+1)}{4\sqrt{1-x^2-2x}.\sqrt{x^2+2x}}$.

в) 0, вж. зад. 28 а), гл. VI.

г) $\dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}\left(\dfrac{1}{\sqrt{1-(\arcsin x)^2}} + \dfrac{1}{\sqrt{1-(\arccos x)^2}}\right)$. д) Подлежащият на диференциране израз няма смисъл за никое x.

е) $\dfrac{-f'}{\sqrt{1-f^2}}$. Желателно е този резултат да се помни наизуст.

14. а) $\dfrac{1}{1+(\arcsin x)^2}\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \dfrac{1}{\sqrt{1-(\operatorname{arctg} x)^2}}\dfrac{1}{1+x^2}$.

б) $\dfrac{1}{2(1+x^2)}$. в) $\dfrac{nx^{n-1}}{1+x^{2n}} + \dfrac{n(\operatorname{arctg} x)^{n-1}}{1+x^2}$.

г) $\dfrac{e^{\operatorname{arctg}\sqrt{1+\ln(2x+3)}}}{(2x+3)(2+\ln(2x+3))\sqrt{1+\ln(2x+3)}}$. д) $\dfrac{\operatorname{arctg} x.}{\sqrt{(1+x^2)^3}}$.

е) $\dfrac{f'}{1+f^2}$. Желателно е този резултат да се помни наизуст.

15. а) $\dfrac{-1}{1+x^2}\left(\dfrac{1}{1+(\operatorname{arctg} x)^2} + \dfrac{1}{1+(\operatorname{arcctg} x)^2}\right)$.

б) $\dfrac{-2}{1+x^2}\left(\dfrac{1}{1+4(\operatorname{arctg} x)^2} + \dfrac{1}{1+4(\operatorname{arcctg} x)^2}\right)$.

в) $\dfrac{\pi}{2(1+x^2)}\left(\dfrac{1}{(\operatorname{arc\,ctg} x)^2}-\dfrac{1}{(\operatorname{arc\,tg} x)^2}\right)$. г) $\dfrac{-f'}{1+f^2}$.
Желателно е този резултат да се помни наизуст.

16. а) $\frac{3}{2}e^x \operatorname{sh} 2x$. б) 0. в) $\operatorname{th} x+\dfrac{\operatorname{sh}\ln x}{x}$.

г) $(\operatorname{ch}\operatorname{ch} x)\operatorname{sh} x+(\operatorname{sh}\operatorname{sh} x)\operatorname{ch} x$. д) $\operatorname{sh} 2x(e^{\operatorname{ch}^2 x}+e^{\operatorname{ch}^2 x})$.

е) $\dfrac{1}{x\operatorname{ch}^2 x\ln x}+\dfrac{1}{x(\ln x)^2\operatorname{sh}^2(\ln x)^{-1}}$.

ж) $nx^{n-1}\operatorname{sh} x+x^n\operatorname{ch} x-n\operatorname{ch}^{n-1}x\operatorname{sh} x$.

17. а) $\dfrac{1}{|\cos x|}+\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}\cdot\dfrac{1}{\cos^2\operatorname{Ar\,sh} x}$.

б) $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}\sqrt{(\operatorname{Ar\,sh} x)^2-1}}+\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}\sqrt{(\operatorname{Ar\,ch} x)^2+1}}$.

в) Сечението на дефиниционните области на функциите $\operatorname{Ar\,th} x$ и $\operatorname{Ar\,cth} x$ е празно. г) $\dfrac{1}{\sqrt{(1+x)(1-x)^3}}-\dfrac{1+\sqrt{1+x^2}}{x|x|\sqrt{1+x^2}}$.

д) $\dfrac{1}{1-x^2}\dfrac{1}{1-(\operatorname{Ar\,cth} x)^2}$.

18. а) $(a\ln x+1)x^{x^a+a-1}$. б) $x^{x^x+x}\left((\ln x)^2+\ln x+\dfrac{1}{x}\right)$.

в) $(\sin x)^{\cos x}\left(\dfrac{\cos^2 x}{\sin x}-\sin x\ln\sin x\right)$.

г) $(\ln x)^x\left(\dfrac{1}{\ln x}+\ln\ln x\right)$.

д) $2\sqrt[x]{(x+1)^2}\left(\dfrac{1}{x(x+1)}-\dfrac{\ln(x+1)}{x^2}\right)$.

е) $x^{\sin x}\left(\cos x\ln x+\dfrac{\sin x}{x}\right)+(\sin x)^x(\ln\sin x+x\operatorname{ctg} x)$.

ж) $\left(\dfrac{x}{x+1}\right)^x\left(\dfrac{1}{x+1}+\ln\dfrac{x}{x+1}\right)+(x^2+1)^{\operatorname{sh} x}\left(\operatorname{ch} x\ln(x^2+1)+\dfrac{2x\operatorname{sh} x}{x^2+1}\right)$.

з) $\dfrac{57x^2-302x+361}{20(x^2-5x+6)}\,\dfrac{(x+1)^2\sqrt[4]{x-2}}{\sqrt[5]{(x-3)^2}}$.

19. а) $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+a}}$. б) $\dfrac{1}{1+x^3}$. в) $\dfrac{3}{2}\,\dfrac{3x^6+3x^2+2}{x^4(1+x^3)^2}$.

г) $\dfrac{2x^2}{1-x^4}$. д) $\dfrac{4x^4}{\sqrt{1+x^2}}$. е) $4x^3\sin^2 x$. ж) $\dfrac{4}{\sin^5 x}$.

з) $\dfrac{2\sqrt2}{1+\sin^2 x}$ при $\sin x\cos x>0$ и $\dfrac{-2\sqrt2}{1+\sin^2 x}$ при $\sin x\cos x<0$.

и) $\dfrac{1}{\sin x\cos^4 x}$. й) $(\arcsin 2x)^2$. к) $3x^2\arccos x$.

л) $\operatorname{arc\,tg} x$. м) $-\dfrac{3}{x^4}\operatorname{arc\,ctg} x$. н) $8e^{2x}\sin^2 x$.

о) $10e^x\sin^3 x$. п) $(a^2+b^2)e^{ax}\sin bx$. р) x^ne^x. с) $2\sin\ln x$.

т) $\dfrac{-2(\ln x)^2}{x^3}$. у) $ax^{a-1}(\ln x)^2$. ф) $3x^2\ln(x^2+1)$.

х) $5x^4\ln(x^2-a^2)$. ц) $(p^2-1)\dfrac{\operatorname{sh}^3 x}{\operatorname{ch}^{p+2} x}$. ч) $\dfrac{2}{(\operatorname{ch} x-1)^2}$.

ш) $\dfrac{2\sqrt2}{1+\operatorname{ch}^2 x}$. щ) $\dfrac{-4}{\operatorname{sh} 2x}$. ъ) $4x\operatorname{Ar\,sh}\dfrac{x}{a}$.

ь) $9x^2\operatorname{Ar\,ch}\dfrac{x}{a}$. ю) $6x^2\operatorname{Ar\,th}\dfrac{x}{a}$. я) $-\dfrac{6a^3}{x^4}\operatorname{Ar\,cth}\dfrac{x}{a}$.

21. а) Диференцирайте тъждеството от зад. 5 а), гл. II; сравнете със зад. 5 б) от същата глава. б) и в) Диференцирайте тъждествата от зад. 31 а) и б), гл. II.

22. а) $\dfrac{2n!}{(1-x)^{n+1}}$. б) $\dfrac{(-1)^{n-1}n!(ad-bc)c^{n-1}}{(cx+d)^{n+1}}$.

в) $(-1)^nn!\left(\dfrac{1}{x^{n+1}}-\dfrac{1}{(x+1)^{n+1}}\right)$. За да получите този резултат, намерете такива константи a и b, че $\dfrac{1}{x(x+1)}=\dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{x+1}$.

г) Намерете такива константи a и b, че $\dfrac{2x+3}{x^2-5x+6}=\dfrac{a}{x-2}+\dfrac{b}{x-3}$, за да получите резултата $(-1)^nn!\left(\dfrac{9}{(x-3)^{n+1}}-\dfrac{7}{(x-2)^{n+1}}\right)$. д) $(n-1)!\left(\dfrac{1}{(1-x)^n}-\dfrac{(-1)^n}{(1+x)^n}\right)$.

е) Очевидно $(\operatorname{arc\,tg} x)'=\dfrac{1}{1+x^2}=\dfrac{1}{2i}\left(\dfrac{1}{x-i}-\dfrac{1}{x+i}\right)$. Ето защо от б) следва

$$(\operatorname{arc\,tg} x)^{(n)}=\frac{1}{2i}(-1)^{n-1}(n-1)!\left(\frac{1}{(x-i)^n}-\frac{1}{(x+i)^n}\right)\quad(n\in\mathbb{N}).$$

От последното равенство след елементарни преобразувания се получава

$$(\operatorname{arctg} x)^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x^2)^n}\sum_{\nu=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}(-1)^\nu\binom{n}{2\nu+1}x^{n-2\nu-1}.$$

Педантично погледнато, горният извод е непълен, тъй като в елементарния курс по диференциално и интегрално смятане обикновено не се разглежда производна на комплексна функция на реален аргумент. Това обаче може да се направи и също така лесно могат да се докажат всички правила за диференциране и в този по-общ случай. Ако читателят не желае да изминава толкова дълъг път, би могъл да докаже последното равенство с индукция спрямо n.

23. а) $-2^{n-1}\cos\left(2x+\frac{n\pi}{2}\right)$. б) $4^{n-1}\cos\left(4x+\frac{n\pi}{2}\right)$.

в) $(\sin^{2k} x)^{(n)} = 2^{n-2k+1}\sum_{\nu=0}^{k-1}(-1)^{k-\nu}\binom{2k}{\nu}(k-\nu)^n\cos\left(2(k-\nu)x+\frac{n\pi}{2}\right)$,

$$(\sin^{2k-1} x)^{(n)} = \frac{(-1)^{k-1}}{4^{k-1}}\sum_{\nu=0}^{k-1}(-1)^\nu\binom{2k-1}{\nu}(2k-2\nu-1)^n\sin\left((2k-2\nu-1)x+\frac{n\pi}{2}\right)$$

съгласно зад. 30, гл. II.

г) $(\cos^{2k} x)^{(n)} = 2^{n-2k+1}\sum_{\nu=0}^{k-1}\binom{2k}{\nu}(k-\nu)^n\cos\left(2(k-\nu)x+\frac{n\pi}{2}\right)$,

$$(\cos^{2k-1} x)^{(n)} = \frac{1}{4^{k-1}}\sum_{\nu=0}^{k-1}\binom{2k-1}{\nu}(2k-2\nu-1)^n\cos\left((2k-2\nu-1)x+\frac{n\pi}{2}\right)$$

съгласно зад. 30, гл. II.

24. а) $\sqrt{2}^n e^x\sin\left(x+\frac{n\pi}{4}\right)$. б) $\sqrt{2}^n e^x\cos\left(x+\frac{n\pi}{4}\right)$.

в) $e^{x\cos\alpha}\sin(x\sin\alpha+n\alpha)$. г) $\sqrt{(a^2+b^2)^n}e^{ax}\cos(bx+c+n\varphi)$,

където φ е такъв ъгъл, че $\sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

25. а) $$(-2x)^n e^{-x^2}\left(1-\frac{n(n-1)}{1!4x^2}+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2!(4x^2)^2}-\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{3!(4x^2)^3}+\cdots\right).$$

б) $$(2x)^n f^{(n)}(x^2)+\frac{n(n-1)}{1!}(2x)^{n-2}f^{(n-1)}(x^2)+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2!}(2x)^{n-4}f^{(n-2)}(x^2)+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{3!}(2x)^{n-6}f^{(n-3)}(x^2)+\cdots$$

Използува се индукция спрямо n.

26. а) $$(-1)^n x^{-n}e^{\frac{1}{x}}\left\{\left(\frac{1}{x}\right)^n+\binom{n-1}{1}\binom{n}{1}\left(\frac{1}{x}\right)^{n-1}+2!\binom{n-1}{2}\binom{n}{2}\left(\frac{1}{x}\right)^{n-2}+3!\binom{n-1}{3}\binom{n}{3}\left(\frac{1}{x}\right)^{n-3}+\cdots\right\}.$$

б) $(-1)^n x^{-2n}\sum_{\nu=0}^{n-1}\nu!\binom{n-1}{\nu}\binom{n}{\nu}x^\nu f^{(n-\nu)}\left(\frac{1}{x}\right)$.

27. а) $\frac{(2n-1)!!}{2^n\sqrt{x}}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{n-1}$, където $(2n-1)!!$ означава произведението на всички нечетни числа от 1 до $2n-1$ включително. Да отбележим между другото, че $(2n)!!$ пък означава произведението на всички четни числа от 2 до $2n$ включително.

б) $$(2\sqrt{x})^{-n}\left\{f^{(n)}(\sqrt{x})-\frac{n(n-1)}{2\sqrt{x}}f^{(n-1)}(\sqrt{x})+\frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{2!(2\sqrt{x})^2}f^{(n-2)}(\sqrt{x})-\cdots\right\}.$$

28. а) $e^{e^x}\sum_{\nu=1}^{n}\frac{e^{\nu x}}{\nu!}\sum_{\mu=0}^{\nu}(-1)^\mu\binom{\nu}{\mu}(\nu-\mu)^n$.

б) $\sum_{\nu=1}^{n}\frac{e^{\nu x}}{\nu!}f^{(\nu)}(e^x)\sum_{\mu=0}^{\nu}(-1)^\mu\binom{\nu}{\mu}(\nu-\mu)^n$.

29. а) $\frac{1}{x^n}\sum_{\nu=0}^{n-1}A_\nu\sin\left(\ln x+\frac{(n-\nu)\pi}{2}\right)$, където A_ν са коефициентите на полинома $z(z-1)(z-2)\dots(z-n+1)$, т. е. числа, за които тъждествено $z(z-1)(z-2)\dots(z-n+1)=\sum_{\nu=0}^{n-1}A_\nu z^{n-\nu}$.

б) $x^{-n}\sum_{\nu=0}^{n-1}A_\nu f^{(n-\nu)}(\ln x)$, където коефициентите A_ν са дефинирани в а).

31. а) $x^2 f^{(n)}(x)+2nxf^{(n-1)}(x)+n(n-1)f^{(n-2)}(x)$.

б) $\sum_{\nu=0}^{k}\nu!\binom{n}{\nu}\binom{k}{\nu}x^{k-\nu}f^{(n-\nu)}(x)$. в) $\sum_{\nu=0}^{n}\nu!\binom{n}{\nu}\binom{a}{\nu}x^{a-\nu}f^{(n-\nu)}(x)$.

32. а) $(-1)^n n!\sum_{\nu=0}^{n}(-1)^\nu\binom{a}{\nu}\binom{b}{n-\nu}x^{a-\nu}(1-x)^{b-n+\nu}$.

б) $\sum_{\nu=0}^{n}\nu!\binom{n}{\nu}\binom{a}{\nu}x^{a-\nu}\sin\left(x+\frac{(n-\nu)\pi}{2}\right)$.

в) $\sum_{\nu=0}^{n}\nu!\binom{n}{\nu}\binom{a}{\nu}x^{a-\nu}\cos\left(x+\frac{(n-\nu)\pi}{2}\right)$.

г) $e^x\sum_{\nu=0}^{n}\nu!\binom{n}{\nu}\binom{a}{\nu}x^{a-\nu}$. д) $n!x^{a-n}\left\{\binom{a}{n}\ln x-\sum_{\nu=1}^{n}\frac{(-1)^\nu}{\nu}\binom{a}{n-\nu}\right\}$.

34. а) Очевидно $(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x}}\frac{1}{\sqrt{1+x}}$. Тогава формулата на Лайбниц дава $(\arcsin x)^{(n+1)}$

$$=\frac{(-1)^n}{2^n\sqrt{1-x^2}}\sum_{\nu=0}^{n}(-1)^\nu\binom{n}{\nu}\frac{(2\nu-1)!!(2n-2\nu-1)!!}{(1+x)^{n-\nu}(1-x)^\nu}.$$

За дефиницията на символа $n!!$ вж. решението на зад. 27 а). Под $(-1)!!$ се разбира 1.

б) $$(\operatorname{Ar}\operatorname{ch}x)^{(n+1)}=\frac{(-1)^n}{2^n\sqrt{x^2-1}}\sum_{\nu=0}^{n}\binom{n}{\nu}\frac{(2\nu-1)!!(2n-2\nu-1)!!}{(x+1)^{n-\nu}(x-1)^\nu}.$$

35. а) Нека $f(x)=\sin(a\arcsin x)$. Тогава $f'(x)$ $=\frac{a\cos(a\arcsin x)}{\sqrt{1-x^2}}$, ето защо $\sqrt{1-x^2}f'(x)=a\cos(a\arcsin x)$. Следователно $\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}f'(x)+\sqrt{1-x^2}f''(x)=-a^2\frac{\sin(a\arcsin x)}{\sqrt{1-x^2}}$, поради което $a^2f(x)=xf'(x)+(x^2-1)f''(x)$. С n-кратно диференциране на последното равенство и прилагане на формулата на Лайбниц се получава $a^2f^{(n)}(x)=xf^{(n+1)}(x)+nf^{(n)}(x)+(x^2-1)f^{(n+2)}(x)$ $+2nxf^{(n+1)}(x)+n(n-1)f^{(n)}(x)$. При $x=0$ последното равенство дава $f^{(n+2)}(0)=(n^2-a^2)f^{(n)}(0)$. От тази рекурентна зависимост могат да се определят производните от четен ред, като се има пред вид, че $f(0)=0$, и от нечетен ред поради $f'(0)=a$. Така се получава $f^{(2n)}(0)=0$ и $f^{(2n+1)}(0)=a\prod_{\nu=1}^{n}((2\nu-1)^2-a^2)$.

б) $$f^{(2n)}(0)=\cos\frac{a\pi}{2}\prod_{\nu=1}^{n-1}(4\nu^2-a^2),$$

$$f^{(2n-1)}(0)=a\sin\frac{a\pi}{2}\prod_{\nu=1}^{n}((2\nu-1)^2-a^2).$$

36. а) $f^{(2n-1)}(0)=0$, $f^{(2n+2)}(0)=2^{2n+1}(\nu!)^2$.

б) $f^{(2n)}(0)=(-1)^{n-1}(2n)!\sum_{\nu=1}^{n}\frac{1}{(2n-2\nu+1)(2\nu-1)}$, $f^{(2n-1)}(0)=0$.

37. $n!\varphi(a)$.

38. Индукция спрямо n с използване на формулата на Лайбниц.

39. За дефинициите на T_n и U_n вж. текста преди зад. 43, гл. VI. После приложете пресмятанията от решението на зад. 35 а).

40. а) Приложете формулата на Лайбниц. б) Нека u_n $=(x^2-1)^n$. Тогава $u'_{n+1}=2(n+1)xu_n$, $u''_{n+1}=(4n+2)xu'_n$ $+2(n+1)u_n-2nxu'_n$, $u'_n=2nxu_{n-1}$. На u''_{n+1} може да се даде видът $u''_{n+1}=(4n+2)xu'_n+2(n+1)u_n-4n^2u_n-4n^2u_{n-1}$. Сега решението се получава, като се диференцира $n-1$ пъти това равенство.

в) Нека отново $u_n=(x^2-1)^n$. Тогава $u'_n(x^2-1)=2nxu_n$. След това диференцирайте $n+1$ пъти, като използвате формулата на Лайбниц.

41. а) Приложете зад. 25 а). б) Съгласно формулата на Лайбниц $H_{n+1}(x)=\frac{d^n}{dx^n}\frac{d}{dx}(e^{-x^2})=\frac{d^n}{dx^n}(-2xe^{-x^2})=-2xH_n(x)$ $-2nH_{n-1}(x)$. в) Очевидно

$$H'_n=2xH_n+H_{n+1} \tag{1}$$

и

$$H''_n=2H_n+2xH'_n+H'_{n+1}. \tag{2}$$

От (1) и б) с $n+1$ вместо n следва

$$H'_{n+1}=-2(n+1)H_n. \tag{3}$$

Сега даденото диференциално уравнение следва от (2) и (3).

42. а) Директно прилагане на формулата на Лайбниц.

б) Нека $u_n=x^ne^{-x}$. Тогава

$$u'_{n+1}=(n+1-x)u_n \text{ и } u''_{n+1}=-u_n+(n+1-x)u'_n$$
$$=(2n+1-x)u'_n-u_n-nu'_n=(2n+1-x)u'_n-u_n-n(n-x)u_{n-1}$$
$$=(2n+1-x)u'_n-u_n-n^2u_{n-1}+nu_n,$$

където в предпоследното равенство бе използвано u'_n $=(n-x)u_{n-1}$, а в последното $xu_{n-1}=u_n$. Оттук след $(n-1)$-кратно диференциране и използване на формулата на Лайбниц резултатът следва непосредствено. в) Нека отново $u_n=x^ne^{-x}$.

Тогава $L_n(x) = e^x u_n^{(n)}$. След двукратно диференциране на това равенство веднага се съобразява, че интересуващото ни диференциално уравнение е равносилно с

$$(1) \qquad x u_n^{(n+2)} + (1+x)u_n^{(n+1)} + (n+1)u_n^{(n)} = 0.$$

От друга страна, непосредствено се вижда, че $xu_n' = (n-x)u_n$, откъдето чрез $(n+1)$-кратно диференциране следва (1).

44. Разгледайте най-напред случая $\varphi(D) = D^k$, като си послужите с формулата на Лайбниц.

45. а) Приложете зад. 43, за да сведете задачата до равенството

$$(\lambda + D)^k x^l\big|_{x=\mu} = (\mu + D)^l x^k\big|_{x=\lambda} \quad (k,\, l = 0,\, 1,\, 2, \ldots),$$

което се установява директно. б) Приложете а) и зад. 44.

46. а) 1 при $x > 0$; -1 при $x < 0$; не съществува при $x = 0$. б) $|2x|$. в) $\frac{1}{x}$. г) $3(x-1)^2$ при $x > 1$; $-3(x-1)^2$ при $x < 1$; 0 при $x = 1$. д) $\cos x$ при $2\nu\pi < x < (2\nu+1)\pi$; $-\cos x$ при $(2\nu-1)\pi < x < 2\nu\pi$; не съществува при $x = \nu\pi$ $(\nu \in \mathrm{I})$. е) $3\sin^2 x \cos x$ при $2\nu\pi \leqq x \leqq (2\nu+1)\pi$; $-3\sin^2 x\cos x$ при $(2\nu+1)\pi \leqq x \leqq 2\nu\pi$. ж) $\dfrac{-1}{x\sqrt{x^2-1}}$ при $|x| > 1$; не съществува при $|x| = 1$. з) $n \sin 2\pi x$ при $n \leqq x \leqq n+1$.

47. а) 1 при $x \leqq 0$ и $\dfrac{1}{1+x}$ при $x \geqq 0$. б) 0 при $|x| \geqq 1$ и $2xe^{-x^2} - 2x^3e^{-x^2}$ при $|x| \leqq 1$.

48. а) $a > 0$. б) $a > 1$. в) $a > 2$.

50. а) Тъждеството $x = \sin(\arcsin x)$ след диференциране дава

$$(1) \qquad 1 = \cos(\arcsin x)(\arcsin x)'$$

за всяко x от $[-1, 1]$, за което функцията $\arcsin$ има производна. Ако допуснем, че тази функция е диференцируема например при $x = -1$, от (1) ще следва $1 = 0$, което е противоречие. При $-1 < x < 1$ функцията $\arcsin$ е диференцируема съгласно теоремата за диференцируемост на обратните функции. б) Аналогично.

51. Разгледайте например функцията $x^2\left|\sin\frac{1}{x}\right|$, като предварително скицирате графиката ѝ.

52. С индукция спрямо n докажете, че функциите $x^{2n}\sin\frac{1}{x}$ и $x^{2n}\cos\frac{1}{x}$, додефинирани в нулата със стойността 0, притежават производни до n-ти ред включително при $x = 0$. По същия начин заключете, че функциите $x^{2n+1}\sin\frac{1}{x}$ и $x^{2n+1}\cos\frac{1}{x}$, додефинирани в нулата със стойността 0, не притежават производни от $(n+1)$-ви ред при $x = 0$.

53. а) Ще докажем по-общото твърдение, че ако Q е произволна рационална функция на x, функцията f, дефинирана с

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x = 0, \\ Q(x)e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{при } x \neq 0, \end{cases}$$

е диференцируема в някоя околност на нулата и производната ѝ е

$$f'(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x = 0, \\ R(x)e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{при } x \neq 0, \end{cases}$$

където R е някоя (зависеща от Q) рационална функция. Наистина при $x \neq 0$ твърдението следва от стандартните правила за диференциране. Ето защо интересна е само точката 0. Тогава е в сила $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \dfrac{Q(x)}{x}e^{-\frac{1}{x^2}}$. Следователно твърдението ще бъде доказано, ако се установи, че $\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{Q(x)}{x}e^{-\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{x\to-0}\dfrac{Q(x)}{x}e^{-\frac{1}{x^2}} = 0$. За да покажем например, че първата от тези граници е нула, ще отбележим, че субституцията $x = \frac{1}{\xi}$ дава $\lim\limits_{x\to-0}\dfrac{Q(x)}{x}e^{-\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{\xi\to\infty}\dfrac{\xi Q\left(\frac{1}{\xi}\right)}{e^{\xi^2}}$. Сега твърдението следва от зад. 44 д), гл. V, тъй като $\xi Q\left(\frac{1}{\xi}\right)$ е рационална функция. Втората граница пък се пресмята с помощта на субституцията $x = -\frac{1}{\xi}$, която дава

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{Q(x)}{x}e^{-\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{\xi\to\infty}\dfrac{-\xi Q\left(-\frac{1}{\xi}\right)}{e^{\xi^2}}$. С това твърдението за f е доказано. Тъй като функцията f' е очевидно от същия вид, както и f, доказаното за f важи и за f', поради което f'' съществува и пак е от същия вид. Така се убеждаваме, че е възможна индукция спрямо n, която показва, че $f^{(n)}(0) = 0$ за всяко естествено n. **б)** Докажете и използувайте по-общото твърдение: ако f и g са безбройно много пъти диференцируеми функции в някоя околност U на точката ξ и ако $f^{(n)}(\xi) = g^{(n)}(\xi)$ $(n+1 \in \mathbf{N})$, функцията $h : U \to \mathbf{R}$, дефинирана с

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{при } x \in (-\infty, \xi) \cap U, \\ g(x) & \text{при } x \in [\xi, \infty) \cap U, \end{cases}$$

е безбройно много пъти диференцируема в U и $h^{(n)}(\xi) = f^{(n)}(\xi) = g^{(n)}(\xi)$ $(n+1 \in \mathbf{N})$.

54. Приложете зад. 53 б).

58. **а)** Произволно. **б)** $\dfrac{a+b}{2}$. **в)** $\sqrt{\dfrac{1}{3}(a^2+ab+b^2)}$.

г) $\ln \dfrac{e^b - e^a}{b-a}$.

60. Диференцирайте спрямо h, за да сведете към зад. 59.

61. **б)** Непосредствено се проверява, че функцията ξ удовлетворява уравнението $\sin \ln x = \sin \ln \xi(x) + \cos \ln \xi(x)$, което след вдигане в квадрат дава $\sin^2 \ln x = 1 + \sin 2 \ln \xi(x)$. Оттук следва, че за всяко $x > 0$ трябва да е в сила неравенството $\sin 2\ln\xi(x) \leqq 0$. Ето защо функцията $2\ln\xi(x)$ не може да приема стойности в никой от интервалите $(2\nu\pi, (2\nu+1)\pi)$ $(\nu \in \mathbf{I})$. От друга страна, от $0 < \xi(x) < x$ следва $\lim\limits_{x\to 0} 2\ln\xi(x) = -\infty$. Ако допуснем, че ξ е непрекъсната функция, такава би била и функцията $2\ln\xi(x)$, което би противоречало на теоремата на Болцано.

64. **б)** Приложете а), за да получите $0 \leqq a \leqq 1$.

67. Достатъчно е да се покаже, че ако η е реално число, а a и b са точки от Δ, за които от $f'(a) < \eta < f'(b)$, съществува точка ξ от Δ, такава че $f'(\xi) = \eta$. Ще се ограничим със случая $a < b$. Нека $0 < h < b - a$, а функцията $\varphi : [a, b-h] \to \mathbf{R}$ е дефинирана с

$$\varphi(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}. \tag{1}$$

Тъй като $\varphi(a) = \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$ и $\varphi(b-h) = \dfrac{f(b+(-h)) - f(b)}{-h}$, ясно е, че h може да се избере толкова малко, че да са в сила неравенствата $\varphi(a) < \eta < \varphi(b-h)$. От друга страна, от (1) следва, че функцията φ е непрекъсната. Ето защо съществува точка ζ,

за която $\varphi(\zeta) = \eta$, т. е. $\dfrac{f(\zeta+h) - f(\zeta)}{h} = \eta$. Сега остава да се приложи теоремата за крайните нараствания.

68. **б)** Ще използуваме индукция спрямо n. При $n = 1$ твърдението се свежда до теоремата за крайните нараствания. Нека сега то е вярно за някое естествено n и нека $f : \Delta \to \mathbf{R}$ е $n+1$ пъти диференцируема функция. Не е трудно да се съобрази, че

$$\sum_{\nu=0}^{n+1} (-1)^\nu \binom{n+1}{\nu} f(a + (n+1-\nu)h) \tag{1}$$

$$= \sum_{\nu=0}^{n} (-1)^\nu \binom{n}{\nu} f(a+h+(n-\nu)h) - \sum_{\nu=0}^{n} (-1)^\nu \binom{n}{\nu} f(a+(n-\nu)h).$$

Нека $\varphi(x) = \sum\limits_{\nu=0}^{n} (-1)^\nu \dbinom{n}{\nu} f(x + (n-\nu)h)$. Тогава от (1) следва

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=0}^{n+1} (-1)^\nu \binom{n+1}{\nu} f(a+(n+1-\nu)h) &= \varphi(a+h) - \varphi(a) \\ &= h\varphi'(\eta) = h\sum_{\nu=0}^{n} (-1)^\nu \binom{n}{\nu} f'(\eta + (n-\nu)h), \end{aligned} \tag{2}$$

където η е точка от интервала Δ. Сега от (2) и от индукционното предположение следва

$$\sum_{\nu=0}^{n+1} (-1)^\nu \binom{n+1}{\nu} f(a+(n+1-\nu)h) = h^{n+1} f^{(n+1)}(\xi),$$

с което твърдението е доказано.

69. **а)** -2. **б)** 2.

в) Прибавете и извадете числото e в числителя, което ще ви даде възможност да сведете решението към намирането на следните две граници:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x+1} - e}{x} = e \text{ и } \lim_{x \to 0} \frac{e - \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x}{x} = -\frac{e}{2}.$$

г) $\dfrac{1}{18}$. **д)** $\dfrac{1}{3}$. **е)** 0. **ж)** 1.

70. Разгледайте например функциите $x^2 \sin \dfrac{1}{x}$ и $\sin x$ около точката 0.

71. а) $\frac{b}{a}$. б) 0. в) 0. г) 0 при $\alpha < 0$, $-\infty$ при $\alpha \geqq 0$.

72. Разгледайте например функциите $\frac{1}{x} + \sin\frac{1}{x^2}$ и $\frac{1}{x} - \sin\frac{1}{x^2}$ около точката 0.

73. а) 1. б) ∞. в) 1. г) $\frac{1}{b}$.

74. а) 0. б) $\frac{1}{a}$. в) 0. г) ∞.

75. а) $e^{\frac{2}{\pi}}$. б) $e^{-\frac{a^2}{2b^2}}$. в) e^{-1}. г) $\sqrt[3]{e}$. д) $e^{-\frac{a^2}{2}}$. е) $e^{-\frac{2}{\pi}}$.

76. а) — г) 1.

77. а) — в) 1. г) ∞. д) 1.

78. а) $-\infty$. б) $\frac{1}{3}$. в) $-\frac{1}{2}$. г) -1.

д) Сведете решението на задачата към намирането на следните две граници:

$$\lim_{x\to\infty}\left((x+a)^{1+\frac{1}{x}} - x^{1+\frac{1}{x}}\right) = a \text{ и } \lim_{x\to\infty}\left(x^{1+\frac{1}{x}} - x^{1+\frac{1}{x+a}}\right) = 0.$$

За да пресметнем първата от тях, ще положим $t = \frac{1}{x}$. Така получаваме

$$(x+a)^{1+\frac{1}{x}} - x^{1+\frac{1}{x}} = x^{\frac{1}{x}}\frac{\left(1+\frac{a}{x}\right)^{1+\frac{1}{x}} - 1}{\frac{1}{x}} = \frac{1}{t^t}\cdot\frac{(1+at)^{1+t}-1}{t}.$$

Границата на първия множител е 1 (вж. 77 а)), а границата на втория множител е равна на производната на функцията $(1+at)^{1+t}$ при $t = 0$, т. е. a.

Втората граница ще пресметнем след преобразуванието

$$x^{1+\frac{1}{x}} - x^{1+\frac{1}{x+a}} = x^{\frac{1}{x}}\frac{1 - x^{-\frac{a}{x(x+a)}}}{\frac{1}{x}}.$$

Знаем, че границата на първия множител е 1, а за да намерим границата на втория, трябва да приложим правилото на Лопитал, тъй като числителят и знаменателят имат граница 0.

83. Приложете зад. 83 а), гл. VI, като означите с U_n множеството на всичките реални числа x, за които $f^{(n)}(x) \neq 0$.

84. Докажете, че функцията $f(x)e^{-\lambda x}$ е константа.

85. Разгледайте функцията $f(x)x^{-a}$.

86. Достатъчността се установява с директна проверка. За да се докаже необходимостта, определете C от равенствата а′) — г′). По този начин ще получите функции на x, за които трябва да докажете, че са константи. За тази цел установете, че производните им са нули, като използвате съответните равенства а) — г).

87. а) Решете системата $f(x) = Ae^x + Be^{2x}$, $f'(x) = Ae^x + 2Be^{2x}$ спрямо A и B. За получените функции на x трябва да докажете, че са константи. За целта се убедете, че производните им са нули.

88. а) Решете системата уравнения $S(x) = A\operatorname{ch} x + B\operatorname{sh} x$, $C(x) = A\operatorname{sh} x + B\operatorname{ch} x$ спрямо A и B.

91. а) Растяща за всяко x. б) Също. в) Растяща в $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right]$; намаляваща в $\left[\frac{1}{2}, \infty\right)$. г) Намаляваща в $(-\infty, -1]$ и $[1, \infty)$; растяща в $[-1, 1]$. д) Намаляваща в $(-\infty, -1]$ и $[1, \infty)$; растяща в $[-1, 1]$. е) Растяща в $\left[\frac{1}{2n+1}, \frac{1}{2n}\right]$ и $[1, \infty)$; намаляваща в $\left[\frac{1}{2n}, \frac{1}{2n-1}\right]$ $(n \in \mathrm{N})$. ж) Намаляваща в $(-\infty, 0]$ и $\left[\frac{2}{\ln 2}, \infty\right)$; растяща в $\left[0, \frac{2}{\ln 2}\right]$. з) Растяща в $[0, a]$; намаляваща в $[a, \infty)$. и) Намаляваща в $\left[0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$; растяща в $\left[\frac{1}{\sqrt{2}}, \infty\right)$.

й) Растяща в $(0, \infty)$.

92. Нека

$$\varphi(x) = \left(1 + \frac{\lambda}{x}\right)^{x+\mu}. \tag{1}$$

Най-напред ще се занимаем със случая $\lambda > 0$. Тогава дефиниционната област на (1) е съставена от интервалите $(-\infty, -\lambda)$ и $(0, \infty)$. Тъй като функцията (1) приема само положителни стойности, тя ще бъде едновременно с логаритъма си растяща или намаляваща, поради което задачата ще бъде решена, ако се намерят интервалите на монотонност на функцията

$$\psi(x) = \ln\varphi(x). \tag{2}$$

Имаме

$$\psi'(x) = \ln\frac{x+\lambda}{x} - \frac{\mu}{x} - \frac{\lambda - \mu}{x+\lambda} \tag{3}$$

и

$$\psi''(x) = \frac{\mu\lambda^2 + (2\lambda\mu - \lambda^2)x}{x^2(x+\lambda)^2}. \tag{4}$$

От (4) се вижда, че знакът на ψ'' съвпада със знака на функцията

$$f(x) = \mu\lambda + (2\mu - \lambda)x. \tag{5}$$

Ще разгледаме случаите

$$\mu = \frac{\lambda}{2}, \tag{6}$$

$$\mu > \frac{\lambda}{2} \tag{7}$$

и

$$\mu < \frac{\lambda}{2}. \tag{8}$$

При (6) поради $\lambda > 0$ от (5) следва $\psi''(x) > 0$. Ето защо производната ψ' расте във всеки от интервалите $(-\infty, -\lambda)$ и $(0, \infty)$. Тъй като, от друга страна,

$$\lim_{x\to-\infty} \psi'(x) = \lim_{x\to\infty} \psi'(x) = 0, \tag{9}$$

то $\psi'(x) > 0$ за x от $(-\infty, -\lambda)$ и $\psi'(x) < 0$ за x от $(0, \infty)$. Поради това при (6) функцията (1) расте в $(-\infty, -\lambda)$ и намалява в $(0, \infty)$.

При (7) от (5) следва $f(x) > 0$ при $x > \dfrac{\mu\lambda}{\lambda - 2\mu}$. Тъй като знакът на ψ'' съвпада със знака на f и в този случай $\dfrac{\mu\lambda}{\lambda-2\mu} < 0$, производната ψ'' е положителна в $(0, \infty)$ и следователно ψ' расте в този интервал. Сега от (9) следва $\psi'(x) < 0$ в $(0, \infty)$, поради което функцията φ намалява в $(0, \infty)$. За да си изясним поведението на φ в интервала $(-\infty, -\lambda)$, да означим с M по-малкото от числата $-\lambda$ и $\dfrac{\lambda\mu}{\lambda-2\mu}$. Както по-горе, се съобразява, че $\psi''(x) < 0$ при $x < M$. Очевидно

$$M = \begin{cases} -\lambda & \text{при } \mu \geqq \lambda, \\ \dfrac{\mu\lambda}{\lambda-2\mu} & \text{при } \mu < \lambda. \end{cases} \tag{10}$$

Ето защо при

$$\mu \geqq \lambda \tag{11}$$

производната ψ'' ще бъде отрицателна в $(-\infty, -\lambda)$, поради което ψ' ще намалява в този интервал. От (9) сега следва, че и φ намалява в интервала $(-\infty, -\lambda)$. Нека сега

$$\frac{\lambda}{2} < \mu < \lambda. \tag{12}$$

Тогава производната ψ'' е отрицателна в $(-\infty, M)$ и положителна в $(M, -\lambda)$. Ето защо ψ' намалява в $(-\infty, M)$ и расте в $(M, -\lambda)$. Сега от (9) следва $\psi'(x) < 0$ в $(-\infty, M)$ и по-специално $\psi'(M) < 0$. От (3) следва $\lim\limits_{x\to-\lambda} \psi'(x) = \infty$ и тъй като ψ' расте стриктно в $(M, -\lambda)$, тя се анулира точно веднъж в някоя точка $\xi(\lambda, \mu)$ от този интервал. Не е трудно да се съобрази, че $\psi'(x) < 0$ в интервала $(-\infty, \xi(\lambda, \mu))$ и $\psi'(x) > 0$ в интервала $(\xi(\lambda, \mu), -\lambda)$. И така при (12) съществува точка $\xi(\lambda, \mu)$ с

$$\frac{\mu\lambda}{\lambda-2\mu} < \xi(\lambda, \mu) < \lambda, \tag{13}$$

за която функцията φ намалява в интервала $(-\infty, \xi(\lambda, \mu))$ и расте в интервала $(\xi(\lambda, \mu), -\lambda)$. Най-после в случая (8) от (5) следва $\psi''(x) > 0$ при $x < \dfrac{\mu\lambda}{\lambda-2\mu}$ и тъй като в този случай $-\lambda \leqq \dfrac{\mu\lambda}{\lambda-2\mu}$, производната ψ'' е положителна в $(-\infty, -\lambda)$, поради което ψ' расте в този интервал. Сега от (9) следва $\psi'(x) > 0$ в $(-\infty, -\lambda)$, поради което функцията φ расте в $(-\infty, -\lambda)$. За да си изясним поведението на φ в интервала $(0, \infty)$, да означим с L по-голямото от числата 0 и $\dfrac{\lambda\mu}{\lambda-2\mu}$. Както по-горе, се съобразява, че $\psi''(x) < 0$ при $x > L$. Очевидно

$$L = \begin{cases} 0 & \text{при } \mu \leqq 0, \\ \dfrac{\mu\lambda}{\lambda-2\mu} & \text{при } \mu > 0. \end{cases} \tag{14}$$

Ето защо при

$$\mu \leqq 0 \tag{15}$$

производната ψ'' ще бъде отрицателна в $(0, \infty)$, поради което ψ' ще намалява в този интервал. Сега от (9) следва, че ψ' приема само положителни стойности в $(0, \infty)$; следователно φ расте в $(0, \infty)$. Нека

$$0 < \mu < \frac{\lambda}{2}. \tag{16}$$

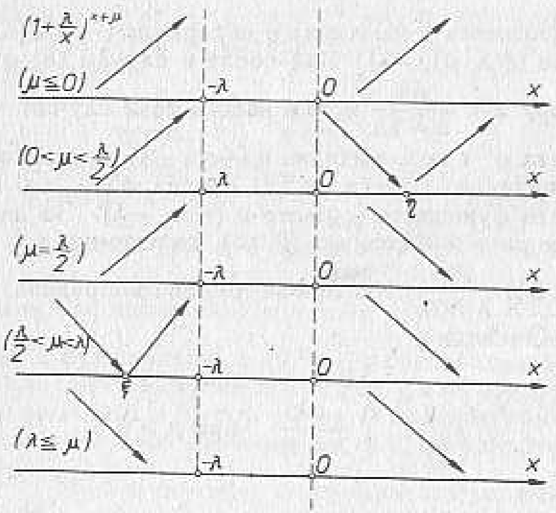
Тогава производната ψ'' е положителна в $(0, L)$ и отрицателна в (L, ∞). Също както и при (12) в този случай се установява, че съществува число $\eta(\lambda, \mu)$, такова че

$$(17) \qquad 0 < \eta(\lambda, \mu) < \frac{\mu\lambda}{\lambda - 2\mu},$$

за което функцията φ намалява в интервала $(0, \eta(\lambda, \mu))$ и расте в интервала $(\eta(\lambda, \mu), \infty)$.

Изучените по-горе случаи на поведение на функцията φ в зависимост от стойностите на λ и μ са онагледени на фиг. 15, където смисълът на стрелките е очевиден. Случаят $\lambda < 0$ се свежда към вече изучения с помощта на равенството

$$(18) \qquad \left(1 + \frac{\lambda}{x}\right)^{x+\mu} = \frac{1}{\left(1 + \frac{(-\lambda)}{(-x)}\right)^{-x-\mu}}.$$



Фиг. 15

93. **б)** Свежда се към а).

94. **д)** Индукция спрямо n. Нека

$$(1) \qquad \varphi_n(x) = e^x - \sum_{\nu=0}^{n} \frac{x^\nu}{\nu!}.$$

Трябва да се докаже неравенството

$$(2) \qquad \varphi_n(x) \geqq 0$$

за всяко $x \geqq 0$ и за всяко естествено n. Очевидно

$$(3) \qquad \varphi_1(x) = e^x - 1 - x.$$

Ето защо $\varphi_1'(x) = e^x - 1 \geqq 0$ при $x \geqq 0$. Следователно функцията φ_1 е растяща в интервала $[0, \infty)$, поради което $\varphi_1(x) \geqq \varphi_1(0) = 0$ при $x \geqq 0$. С това (2) е доказано при $n = 1$. Нека сега (2) е изпълнено за някое n. Тогава $\varphi_{n+1}'(x) = \varphi_n(x) \geqq 0$ при $x \geqq 0$, поради което функцията φ_{n+1} е растяща в $[0, \infty)$. Ето защо $\varphi_{n+1}(x) \geqq \varphi_{n+1}(0) = 0$ при $x \geqq 0$ и твърдението е доказано. е) Приложете същата техника.

95 — 97. Както зад. 94.

98. С помощта на критерия за монотонност г) се свежда към в), в) — към б), б) — към а) и накрая а) — към $\sin x \leqq x$.

99. Свежда се към зад. 98. Сравнете със зад. 31, гл. V.

103. От $\varphi_n(x) = x - \sum_{\nu=0}^{n} (-1)^\nu \frac{\operatorname{tg}^{2\nu+1} x}{2\nu+1}$ следва $\varphi_n'(x) = (-1)^{n-1} \operatorname{tg}^{2n+2} x$, поради което функцията φ_n е намаляваща при четно n и растяща при нечетно n. По-нататък решението е очевидно.

104. **а)** 1,162. **б)** 0,113. **в)** 0,208. **г)** 0,949. **д)** 1,006. **е)** 0,432. **ж)** 1,414. **з)** 0,262.

105. Фиксирайте α, β и y и разгледайте функцията $\varphi : [0, \infty) \to \mathbf{R}$, дефинирана с $\varphi(x) = (x^\alpha + y^\alpha)^{\frac{\beta}{\alpha}} - x^\beta - y^\beta$. Като изследвате знака на първата ѝ производна, докажете, че φ расте.

106. **а)** Фиксирайте p, q и y и разгледайте функцията $\varphi : [0, \infty) \to \mathbf{R}$, дефинирана с $\varphi(x) = \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q} - xy$. Покажете, че φ намалява в $[0, y^{\frac{1}{p-1}}]$ и расте в $[y^{\frac{1}{p-1}}, \infty)$. **б)** При $\sum_{\nu=1}^{n} |a_\nu| \neq 0$ и $\sum_{\nu=1}^{n} |b_\nu| \neq 0$ положете

$$(1) \qquad x_\nu = |a_\nu| \left(\sum_{\nu=1}^{n} |a_\nu|^p\right)^{-\frac{1}{p}}, \quad y_\nu = |b_\nu| \left(\sum_{\nu=1}^{n} |b_\nu|^q\right)^{-\frac{1}{q}}$$

$(\nu = 1, 2, \ldots, n)$. Очевидно

(2) $$\sum_{\nu=1}^{n} x_\nu^p = 1, \quad \sum_{\nu=1}^{n} y_\nu^q = 1.$$

Сега от а) следва

(3) $$\sum_{\nu=1}^{n} x_\nu y_\nu \leqq \sum_{\nu=1}^{n}\left(\frac{x_\nu^p}{p} + \frac{y_\nu^q}{q}\right) = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

поради (2). Неравенството на Хьолдер следва непосредствено от (1) и (3).

107. При $p = 1$ неравенството е очевидно, поради което ще се спрем на случая $p > 1$. Избираме $q > 1$ по такъв начин, че да е в сила равенството

(1) $$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Непосредствено се проверява, че тогава

(2) $$(p-1)q = p.$$

Очевидно

(3) $$\sum_{\nu=1}^{n} |a_\nu + b_\nu|^p \leqq \sum_{\nu=1}^{n} |a_\nu||a_\nu + b_\nu|^{p-1} + \sum_{\nu=1}^{n} |b_\nu||a_\nu + b_\nu|^{p-1}.$$

От друга страна, неравенството на Хьолдер дава

(4) $$\sum_{\nu=1}^{n} |a_\nu||a_\nu + b_\nu|^{p-1} \leqq \left(\sum_{\nu=1}^{n} |a_\nu|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{\nu=1}^{n} |a_\nu + b_\nu|^p\right)^{\frac{1}{q}}$$

и

(5) $$\sum_{\nu=1}^{n} |b_\nu||a_\nu + b_\nu|^{p-1} \leqq \left(\sum_{\nu=1}^{n} |b_\nu|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{\nu=1}^{n} |a_\nu + b_\nu|^p\right)^{\frac{1}{q}}$$

съгласно (2). От (3) — (5) следва

(6) $$\sum_{\nu=1}^{n} |a_\nu + b_\nu|^p \leqq \left[\left(\sum_{\nu=1}^{n} |a_\nu|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{\nu=1}^{n} |b_\nu|^p\right)^{\frac{1}{p}}\right] \left(\sum_{\nu=1}^{n} |a_\nu + b_\nu|^p\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Сега неравенството на Минковски при $\sum_{\nu=1}^{n} |a_\nu + b_\nu| \neq 0$ следва от (6) въз основа на (1), като се съкрати на множителя зад скобите в дясната страна на (6).

108. б) Индукция спрямо n. При $n = 1$ твърдението е очевидно. Нека неравенството

(1) $$\prod_{\nu=1}^{n} a_\nu^{p_\nu} \leqq \sum_{\nu=1}^{n} p_\nu a_\nu$$

е в сила за някое $n \geqq 1$ при всеки избор на неотрицателните числа a_ν и на положителните числа p_ν $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$, за които $\sum_{\nu=1}^{n} p_\nu = 1$, и нека $a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}$ са произволни неотрицателни числа, а $p_1, p_2, \ldots, p_n, p_{n+1}$ — положителни числа, за които

(2) $$\sum_{\nu=1}^{n+1} p_\nu = 1.$$

Да разгледаме функцията $\varphi : [0, \infty) \to \mathbf{R}$, дефинирана със

(3) $$\varphi(x) = \left(\prod_{\nu=1}^{n} a_\nu^{p_\nu}\right) x^{p_{n+1}} - \sum_{\nu=1}^{n} p_\nu a_\nu - p_{n+1} x.$$

Очевидно

(4) $$\varphi'(x) = p_{n+1}\left(\prod_{\nu=1}^{n} a_\nu^{p_\nu}\right) x^{p_{n+1}-1} - p_{n+1}.$$

От (4) се вижда, че при $\prod_{\nu=1}^{n} a_\nu \neq 0$ производната φ' се анулира само в точката

(5) $$\xi = \prod_{\nu=1}^{n} a_\nu^{q_\nu},$$

където

(6) $$q_\nu = \frac{p_\nu}{1 - p_{n+1}} \quad (\nu = 1, 2, \ldots, n),$$

положителна е в интервала $(0, \xi)$ и е отрицателна в (ξ, ∞) поради $p_{n+1} < 1$. Ето защо φ расте в първия от тези интервали и намалява във втория. Оттук непосредствено следва, че е в сила неравенството

(7) $$\varphi(x) \leqq \varphi(\xi) \quad (x \geqq 0),$$

От друга страна, от (3), (5) и (6) следва

$$\varphi(\xi) = (1 - p_{n+1}) \prod_{\nu=1}^{n} a_\nu^{q_\nu} - \sum_{\nu=1}^{n} p_\nu a_\nu \tag{8}$$
$$= (1 - p_{n+1}) \left(\prod_{\nu=1}^{n} a_\nu^{q_\nu} - \sum_{\nu=1}^{n} q_\nu a_\nu \right).$$

От (2) и (6) следва $\sum\limits_{\nu=1}^{n} q_\nu = 1$, което заедно с (1) (с q_ν вместо p_ν) и (8) показва, че $\varphi(\xi) \leqq 0$. Сега от (7) следва $\varphi(x) \leqq 0$ за всяко $x \leqq 0$, което заедно с (3) дава възможност да се установи верността на неравенството

$$\prod_{\nu=1}^{n+1} a_\nu^{p_\nu} \leqq \sum_{\nu=1}^{n+1} p_\nu a_\nu. \tag{9}$$

110. **а)** Нека $f^{(\mu)}(0) \geqq 0$ $(\mu = 1, 2, \ldots, n+1)$. Тогава $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \dfrac{f^{(\mu-1)}(x) - f^{(\mu-1)}(0)}{x} > 0$. Ето защо $f^{(\mu-1)}(x) > f^{(\mu-1)}(0) \geqq 0$ за всички достатъчно малки положителни x. Следователно функцията $f^{(\mu-2)}$ е стриктно растяща в интервал от вида $[0, \delta)$ с $\delta > 0$, поради което $f^{(\mu-2)}(x) > f^{(\mu-2)}(0) \geqq 0$ за всички достатъчно малки положителни x. Като се продължи този процес на намаляване на реда на производната, се стига до заключението, че съществува число b с $0 < b < a$, за което функцията f е стриктно растяща в интервала $[0, b]$. Нека c е най-голямото измежду числата от интервала $[0, a]$, за които функцията f е растяща в интервала $[0, c]$ (съществуването на такова c следва от принципа за непрекъснатост). Трябва да докажем, че $c = a$. В противен случай бихме имали $b \leqq c < a$ и следователно $f(c) \geqq f(b) > f(0) \geqq 0$. Тъй като функцията f е непрекъсната, съществува $\varepsilon > 0$, за което $f(x) \geqq 0$ при $0 \leqq x < c + \varepsilon$. Сега от неравенството $f^{(n)}(x) \geqq \lambda(x) f(x)$ следва $f^{(n)}(x) \geqq 0$ за $0 \leqq x < c + \varepsilon$. Като се използуват неравенствата $f^{(\nu)}(0) \geqq 0$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n-1)$, оттук се заключава последователно, че функциите $f^{(n-1)}, f^{(n-2)}, \ldots, f'$ и f са растящи за $0 \leqq x < c + \varepsilon$. Но последното от тези заключения противоречи на максималността на c, с което задачата е решена. **б)** Индукция спрямо n, като се използуват производни до втори ред. **в)** Свежда се към а) или б).

111. **а)** Минимум в 2, максимум в -2. **б)** Няма екстремуми. **в)** Минимум в 5, максимум в 1. **г)** Минимум в b. **д)** Няма екстремуми. **е)** Максимум в 2, минимуми в 1 и 3. **ж)** Минимум в 3, максимум в 1. **з)** Минимум в 4, максимум в 0. **и)** Минимум в -1, максимум в 1. **й)** Максимум в -1, минимум в 1. **к)** Минимум в $\dfrac{a^2}{a+b}$, максимум в $\dfrac{a^2}{a-b}$. **л)** Минимум в 16, максимум в 4. **м)** Минимум в -1 и 1. **н)** Максимум в $-\sqrt{2}$ и $\sqrt{2}$, минимум в 0. **о)** Минимум в $\dfrac{1}{e}$. **п)** Минимум в $\dfrac{1}{\sqrt{e}}$. **р)** Минимум в $\dfrac{1}{e}$. **с)** Минимум в 1, максимум в $\dfrac{1}{e^2}$. **т)** Максимум в n. При четно n минимум в 0. **у)** Минимум в 0, максимум в -1 и 1. **ф)** Минимум в 0. **х)** Максимум в $\ln 2$. **ц)** Минимум в 1, максимум в $\dfrac{9}{11}$. **ч)** Няма екстремуми. **ш)** Максимум в $\dfrac{\pi}{4} + 2\nu\pi$, минимум в $\dfrac{\pi}{4} + (2\nu - 1)\pi$ $(\nu \in \mathrm{I})$.

112. **а)** $m(\alpha)$ съществува съгласно зад. 59, гл. VI. Разбира се, точките, в които $m(\alpha)$ се достига, са локални минимуми, поради което производната спрямо x трябва да се анулира: $2x + \alpha = 0$. Следователно $m(\alpha)$ се достига при $x = -\dfrac{\alpha}{2}$. Ето защо

$$m(\alpha) = \ln\left(\alpha - \frac{\alpha^2}{4}\right). \tag{1}$$

От (1) се вижда, че $m(\alpha)$ дивергира към $-\infty$ при α, клонящо към 0 или 4. Ето защо от зад. 57 а), гл. VI следва, че измежду стойностите на $m(\alpha)$ има една най-голяма. В точките, в които $m(\alpha)$ достига най-голямата си стойност, функцията (1) има локален максимум. Поради това производната ѝ трябва да се анулира: $1 - \dfrac{\alpha}{2} = 0$. И така търсената стойност на α е 2. **б)** $m(\alpha)$ се достига при $x = \alpha$ и $m(\alpha) = -\dfrac{\alpha + \alpha^2}{1 + \alpha^2}$. Най-голямата си стойност $m(\alpha)$ достига при $\alpha = 1 - \sqrt{2}$. **в)** 1. **г)** $\dfrac{1}{\sqrt{a-1}}$.

113. **а)** Най-малка стойност 0, най-голяма $\dfrac{100}{e}$. **б)** Инфимум 0, най-голяма стойност 1. **в)** Инфимум 0, най-голяма стойност $\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}$. **г)** Най-малка стойност $\dfrac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{3\pi}{4}}$, най-голяма 1.

114. $-\frac{1}{2}$.

115. Квадратът.

116. Правоъгълникът, получен след разполовяване на квадрат, вписан в кръг.

117. Цилиндър с радиус $\frac{a}{\sqrt{2}}$, където a е радиусът на сферата.

118. Цилиндър с радиус $a\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}$, където a е радиусът на сферата.

119. Конус с радиус $\frac{2\sqrt{2}}{3}a$, където a е радиусът на сферата.

120. Конусът от предишната задача.

121. Цилиндър с радиус $\frac{2a}{3}$, където a е радиусът на конуса.

122. $\frac{a}{\sqrt{2}}$, където a е разстоянието от площадката до стълба.

125. **а)** Ако $f''(\xi) > 0$, при достатъчно близки до ξ различни от ξ стойности на x ще бъде в сила неравенството

$$\frac{f'(x)-f'(\xi)}{x-\xi} > 0. \tag{1}$$

Трябва да се докаже неравенството

$$f(\xi)+(x-\xi)f'(\xi) \leqq f(x). \tag{2}$$

За тази цел нека например $x > \xi$. Тогава (2) е еквивалентно с

$$f'(\xi) \leqq \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}. \tag{3}$$

От теоремата за крайните нараствания следва, че (3) ще бъде доказано, ако се убедим, че $f'(\xi) \leqq f'(\eta)$ за всички достатъчно близки до ξ точки η, за които $\eta > \xi$. Но от $f''(\xi) > 0$ следва $\lim\limits_{\eta\to\xi} \frac{f'(\eta)-f'(\xi)}{\eta-\xi} > 0$, поради което (1) е доказано за всички достатъчно близки до ξ точки $x > \xi$. **б)** Нека $x > \xi$ и x е толкова близко до ξ, че е в сила (2). Тогава е в сила (3), което заедно с теоремата за крайните нараствания дава $f'(\xi) \leqq f'(\eta)$ при $\xi < \eta < x$. Ето защо

$$\frac{f'(\eta)-f'(\xi)}{\eta-\xi} \geqq 0. \tag{4}$$

Когато x клони към ξ, η също клони към ξ и твърдението следва от (4). **в)** Следва от а) и от дефиницията на инфлексна точка.

126. **а)** Изпъкнала за $x < 1$, вдлъбната за $x > 1$, инфлексия в $x = 1$. **б)** Изпъкнала за $|x| > \frac{a}{\sqrt{3}}$, вдлъбната за $|x| < \frac{a}{\sqrt{3}}$, инфлексия при $|x| = \frac{a}{\sqrt{3}}$. **в)** Изпъкнала за $x > 0$, вдлъбната за $x < 0$, инфлексия в $x = 0$. **г)** Изпъкнала за всяко x. **д)** Изпъкнала в $((2\nu-1)\pi,\ 2\nu\pi)$, вдлъбната в $(2\nu\pi,\ (2\nu+1)\pi)$, инфлексия в $x = \nu\pi$ $(\nu \in \mathrm{I})$. **е)** Изпъкнала в $\left(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ и $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \infty\right)$, вдлъбната в $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, инфлексия в $|x| = \frac{1}{\sqrt{2}}$. **ж)** Изпъкнала в $(-1, 1)$, вдлъбната в $(-\infty, -1)$ и $(1, \infty)$, инфлексия в $|x| = 1$. **з)** Изпъкнала в $\left(e^{(8\nu-3)\frac{\pi}{4}}, e^{(8\nu+1)\frac{\pi}{4}}\right)$, вдлъбната в $\left(e^{(8\nu+1)\frac{\pi}{4}}, e^{(8\nu+5)\frac{\pi}{4}}\right)$, инфлексия в $x = e^{\frac{\pi}{4}+\nu\pi}$ $(\nu \in \mathrm{I})$. **и)** Изпъкнала навсякъде.

127. Втората производна на функцията е

$y'' = \frac{2(x-1)(x^2+4x+1)}{(x^2+1)^3}$. Ето защо тя се анулира при $x = 1$, $x = \xi_1$ и $x = \xi_2$, където ξ_1 и ξ_2 са нулите на тричлена x^2+4x+1. Тъй като y'' очевидно мени знака си във всяка от тези три точки, във всяка от тях е налице инфлексия. Остава да се установи, че точките $A = (1, 1)$, $B_1 = \left(\xi_1, \frac{\xi_1+1}{\xi_1^2+1}\right)$ и $B_2 = \left(\xi_2, \frac{\xi_2+1}{\xi_2^2+1}\right)$ лежат на една права. За целта е достатъчно да се докаже, че ъгловите коефициенти k_1 и k_2 на правите AB_1 и AB_2 са равни. Очевидно

$$k_1 = \frac{1}{\xi_1-1}\left(\frac{\xi_1+1}{\xi_1^2+1}-1\right)$$
$$= \frac{1}{\xi_1-1}\left(\frac{\xi_1+1}{-4\xi_1}-1\right) = \frac{5\xi_1+1}{4\xi_1-4\xi_1^2} = \frac{5\xi_1+1}{20\xi_1+4} = \frac{1}{4}$$

поради $\xi_1^2+4\xi_1+1 = 0$. Аналогично се намира $k_2 = \frac{1}{4}$.

128. Преди всичко ще се убедим, че функцията $x = a(t-\sin t)$ е стриктно растяща. Наистина

$$\frac{dx}{dt} = a(1-\cos t) \quad (a > 0), \tag{1}$$

поради което $\frac{dx}{dt} \geqq 0$. Ето защо x е растяща функция на t. От друга страна, от (1) следва, че $\frac{dx}{dt}$ е строго положителна във всеки от интервалите $(2\nu\pi, 2(\nu+1)\pi)$ $(\nu \in \mathrm{I})$, поради което x е стриктно растяща функция във всеки от тези интервали. Сега не е трудно да се съобрази, че x е стриктно растяща функция за всяка реална стойност на t. От друга страна, $\lim_{t\to-\infty} x(t) = -\infty$ и $\lim_{t\to\infty} x(t) = \infty$. Ето защо функцията $x = a(t - \sin t)$ е обратима и обратната ѝ функция $t(x)$ е дефинирана за всяко x. Съгласно зад. 25 а) тя е непрекъсната. Лесно се вижда, че тя е също така и диференцируема само при $x \neq 2\nu\pi a$ $(\nu \in \mathrm{I})$. Ясно е, че за всеки две реални числа x и t равенствата $x = a(t - \sin t)$ и $t = t(x)$ са еквивалентни. Ето защо циклоидата може да се представи и като графика на функция, т. е. като крива с уравнение

(2) $$y = a(1 - \cos t(x)) \quad (x \in \mathbf{R}).$$

За да намерим втората производна на (2) спрямо x, ще отбележим най-напред, че от дефиницията на $t(x)$ следва тъждеството

(3) $$x = a(t(x) - \sin t(x)).$$

От (2) и (3) следват съответно

(4) $$\frac{dy}{dx} = a \sin t(x) \frac{dt}{dx}$$

и

(5) $$1 = a(1 - \cos t(x))\frac{dt}{dx}.$$

От (4) и (5) имаме

(6) $$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin t(x)}{1 - \cos t(x)},$$

а от (5) и (6) —

(7) $$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-1}{a(1-\cos t(x))^2} < 0.$$

Ето защо циклоидата е вдлъбната във всеки от интервалите $(2\nu\pi a, 2(\nu+1)\pi a)$ $(\nu \in \mathrm{I})$.

129. а) Непосредствено прилагане на дефиницията. б) Сведете към а) и зад. 85, гл. VI. в) Сведете към а).

130. а) Нека функцията f е изпъкнала в Δ и ξ е вътрешна точка за Δ. Съгласно зад. 129 а) границите $l = \lim_{x\to\xi-0} \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}$ и $L = \lim_{x\to\xi+0} \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}$ съществуват. Нека $\varepsilon > 0$ и числото $\delta > 0$ е толкова малко, че от $\xi - \delta < x < \xi$ да следва $\left|\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} - l\right| < \varepsilon$, а от $\xi < x < \xi + \delta$ да следва $\left|\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} - L\right| < \varepsilon$. Тогава при $|x - \xi| < \delta$ ще бъде в сила поне едното от неравенствата $|f(x) - f(\xi)| < (|l| + \varepsilon)|x - \xi|$ или $|f(x) - f(\xi)| < (|L| + \varepsilon)|x - \xi|$, откъдето следва веднага непрекъснатостта на функцията f в точката ξ. б) След увеличаване на стойността на една изпъкнала функция в някой от краищата на дефиниционния ѝ интервал тя пак остава изпъкнала.

131. а) Сведете към зад. 129 в). б) Трябва да се докаже неравенството

(1) $$f(px_1 + qx_2) \leqq pf(x_1) + qf(x_2)$$

при

(2) $$x_1 < x_2,\ p + q = 1\ (p,\ q > 0).$$

Неравенството (1) е очевидно еквивалентно с

(3) $$p(f(px_1 + qx_2) - f(x_1)) \leqq q(f(x_2) - f(px_1 + qx_2)).$$

Теоремата за крайните нараствания, приложена към двете страни на (3), поради (2) дава

(4) $$pq(x_2 - x_1)f'(\xi) \leqq pq(x_2 - x_1)f'(\eta),$$

където $x_1 < \xi < px_1 + qx_2$ и $px_1 + qx_2 < \eta < x_2$. Неравенството (4) е изпълнено, тъй като f' по предположение е растяща. Тъй като от (4) следва (3), а (3) е еквивалентно с (1), твърдението е доказано. в) Свежда се към б).

132. а) Сведете към зад. 130 а). б) Сведете към зад. 131 в) и 125 а).

133. Ще използваме индукция спрямо n. При $n = 2$ неравенството е изпълнено по дефиниция. Да предположим верността му за някое $n = 2, 3, \dots$ и нека $p_1, p_2, \dots, p_n, p_{n+1}$ са положителни числа, за които $\sum_{\nu=1}^{n+1} p_\nu = 1$, а $x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}$ са произволни точки от Δ. Тъй като числата $\frac{p_\nu}{1 - p_{n+1}}$ $(\nu = 1, 2, \dots, n)$ са положителни и $\sum_{\nu=1}^{n} \frac{p_\nu}{1-p_{n+1}} = 1$, точката $\xi = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{p_\nu x_\nu}{1-p_{n+1}}$ принадлежи на Δ. Ето защо

$$f\left(\sum_{\nu=1}^{n+1} p_\nu x_\nu\right) = f((1-p_{n+1})\xi + p_{n+1}x_{n+1})$$

$$\leqq (1-p_{n+1}) f\left(\sum_{\nu=1}^{n} \frac{p_\nu x_\nu}{1-p_{n+1}}\right) + p_{n+1} f(x_{n+1}) \leqq \sum_{\nu=1}^{n+1} p_\nu f(x_\nu)$$

съгласно дефиницията на изпъкнала функция и индукционното предположение. От принципа за индукцията сега следва, че твърдението е вярно за всяко $n = 2, 3, \ldots$

134. Прилага се зад. 133 към:

а) $f(x) = x^a$ и $p_\nu = \frac{1}{n}$; б) $f(x) = x^{-a}$ и $p_\nu = \frac{1}{n}$;

в) $f(x) = -x^a$; г) $f(x) = x \ln x$ и $p_\nu = \frac{1}{n}$.

135. Използувайте зад. 133 при $f(x) = e^x$.

136. а) От изпъкналостта на $\ln f$ и от зад. 131 а) следва $f''f - f'^2 \geqq 0$. Ето защо $f'' > 0$ и f е изпъкнала. С това твърдението е доказано при $a = 1$, към който случай се свежда и общият.

б) По условие е дадено, че

(1) $$\ln f(p_1x_1 + p_2x_2) \leqq p_1 \ln f(x_1) + p_2 \ln f(x_2)$$

$$(p_1 > 0,\ p_2 > 0,\ p_1 + p_2 = 1).$$

От (1) следва

(2) $$f(p_1x_1 + p_2x_2) \leqq (f(x_1))^{p_1}(f(x_2))^{p_2}.$$

От друга страна, неравенството на Коши (зад. 139) дава

(3) $$(f(x_1))^{p_1}(f(x_2))^{p_2} \leqq p_1 f(x_1) + p_2 f(x_2).$$

Сега твърдението следва от (2).

137. Сведете към зад. 136 а).

138. а) Прилага се зад. 136 към: а) $f(x) = x^x$, $p_\nu = \frac{1}{n}$, $x_\nu = 2\nu$; б) $f(x) = x^{ex}$, $p_\nu = \frac{1}{n}$, $x_\nu = 2\nu$; в) $f(x) = -x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$ с $x_\nu = \frac{1}{p_\nu}$; г) $f(x) = -x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$ с $x_\nu = \frac{1}{xp_\nu}$; д) $f(x) = (x+1)\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$ с $x_\nu = \frac{1}{p_\nu}$ и $1 + p_\nu = a_\nu$; е) $f(x) = (x+1)\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$ с $x_\nu = \frac{1}{xp_\nu}$ и $1 + xp_\nu = a_\nu$.

139. В случая на изпъкнали функции f^{a_n} може да се работи така: По условие е дадено, че

(1) $$f(p_1x_1 + p_2x_2) \leqq (p_1 f(x_1)^{a_n} + p_2 f(x_2)^{a_n})^{\frac{1}{a_n}}.$$

От зад. 58, гл. V следва

(2) $$\lim_{a_n \to 0} \frac{f(x_1)^{a_n} - 1}{a_n} = \ln f(x_1), \quad \lim_{a_n \to 0} \frac{f(x_2)^{a_n} - 1}{a_n} = \ln f(x_2).$$

От друга страна, на дясната страна на (1) може да се даде видът

(3) $$\left\{1 + a_n\left(p_1 \frac{f(x_1)^{a_n} - 1}{a_n} + p_2 \frac{f(x_2)^{a_n} - 1}{a_n}\right)\right\}^{\frac{1}{a_n}}.$$

От (2) и от зад. 54 а), гл. V следва, че изразът (3) клони към $e^{p_1 \ln f(x_1) + p_2 \ln f(x_2)}$, т. е. $f(x_1)^{p_1} f(x_2)^{p_2}$. Ето защо след граничен преход в (1) се получава

(4) $$f(p_1x_1 + p_2x_2) \leqq f(x_1)^{p_1} f(x_2)^{p_2},$$

откъдето след логаритмуване се вижда изпъкналостта на $\ln f$.

140. Разгледайте например функцията $f(x) = x^2$ при $x > 0$.

141. Нека $\psi(x) = x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$. Тогава

$$\psi'(x) = \ln\frac{x+1}{x} - \frac{1}{x+1}, \quad \psi''(x) = \frac{-1}{x(x+1)^2}.$$

Нека $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$. Тогава $f = e^\psi$ и следователно $f'' = e^\psi(\psi'^2 + \psi'')$. Ето защо твърдението ще бъде доказано, ако се установи, че $\psi'^2 \leqq -\psi''$, т. е. че

(1) $$\psi'^2 \leqq \frac{1}{x(x+1)^2}.$$

От друга страна, с изследване на знака на първата производна веднага се вижда, че $\psi' > 0$. Ето защо неравенството (1) е еквивалентно със

(2) $$\psi' \leqq \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}.$$

Нека сега

(3) $$g(x) = \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{1+x} - \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}.$$

Тогава

(4) $$g'(x) = \frac{1+3x-2\sqrt{x}}{2x^{\frac{3}{2}}(1+x)^2}.$$

От (4) следва $g'(x) > 0$ при $x > 0$, поради което функцията (3) е растяща. От друга страна, $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = 0$, поради което $g(x) < 0$ за всяко $x > 0$. С това неравенството (2), а заедно с него и (1) е доказано.

143. Нека по дефиниция $\varphi(x) = f(\xi + x) - 2f(\xi) + f(\xi - x)$, $\psi(x) = x^2$. Тогава

(1) $$\frac{f(\xi+h) - 2f(\xi) + f(\xi-h)}{h^2} = \frac{\varphi(h) - \varphi(0)}{\psi(h) - \psi(0)}.$$

От (1) и от обобщената теорема за крайните нараствания се получава

(2) $$\frac{f(\xi+h) - 2f(\xi) + f(\xi-h)}{h^2} = \frac{f'(\xi+\theta h) - f'(\xi-\theta h)}{2\theta h},$$

където $0 < \theta < 1$. Сега твърдението следва почти непосредствено.

144. Разгледайте например функцията $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, дефинирана с $f(x) = x|x|$, и положете $\xi = 0$.

145. а) Проверете, че числителят от дефиницията на втора производна на Шварц е неотрицателен (неположителен). б) Допуснете противното и използувайте а) и теоремата на Вайерщрас, за да получите противоречие. в) Сведете към б), като разгледате функцията $f(x)+\varepsilon(x-a)(x-b)$, респективно $f(x)-\varepsilon(x-a)(x-b)$ $(\varepsilon > 0)$, и оставете ε да клони към 0. г) Изберете константите k и l по такъв начин, че функцията $\varphi(x) = f(x) - kx - l$ да се анулира в краищата на интервала. След това приложете в) към φ.

146. б) Разгледайте например функцията f, дефинирана с $f(x) = x^2 + 2x^2 \sin\frac{1}{x}$ при $x \neq 0$ и с $f(0) = 0$. в) Нека x_1 и x_2 принадлежат на Δ и $x_1 < x_2$. Приложете зад. 145 в) към функцията $\varphi(x) = f(x) - (kx + l)$, където константите k и l са избрани така, че да са в сила равенствата $\varphi(x_1) = \varphi(x_2) = 0$.

147. а) От формулата на Тейлър следва

(1) $$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \frac{e^{\theta}}{(n+1)!} \quad (0 < \theta < 1).$$

Да допуснем, че числото e е рационално, например $e = \frac{p}{q}$, където p и $q > 0$ са взаимно прости цели числа. Тогава от (1) след умножение с $n!$ бихме получили

(2) $$\left(\frac{p}{q} - \sum_{\nu=0}^{n} \frac{1}{\nu!}\right) n! = \frac{e^{\theta}}{n+1}.$$

При $n \geqq q$ числото в лявата страна на (2) е цяло, докато при $n \geqq 2$ числото в дясната страна не е цяло поради

(3) $$0 < \frac{e^{\theta}}{n+1} < \frac{3}{n+1} \leqq 1.$$

148. а) От формулата на Тейлър следва

$$e^x - \sum_{\nu=0}^{n} \frac{x^{\nu}}{\nu!} = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + \frac{x^{n+2}}{(n+2)!} e^{\theta(x)} \quad (0 < \theta < 1),$$

откъдето твърдението се получава веднага.

149. а) Да положим $a_n = 2\pi(n+1)!\left(e - \sum\limits_{\nu=0}^{n} \frac{1}{\nu!}\right)$. От зад. 148 а) следва

(1) $$\lim_{n\to\infty} a_n = 2\pi.$$

От друга страна, от периодичността на $\sin x$ следва $\sin(2\pi n! e)$ $= \sin\frac{a_n}{n+1}$. Ето защо $n \sin(2\pi n! e) = \frac{n a_n}{n+1} \cdot \dfrac{\sin\frac{a_n}{n+1}}{\frac{a_n}{n+1}}$. Сега от (1) следва, че търсената граница е 2π. б) π. в) $-\pi$.

150. а) $\frac{\pi}{8}$. б) $-\frac{\pi}{8}$. в) $\frac{\pi}{8}$. г) $-\frac{\pi}{8}$.

151. а) $k\pi$. б) $k\pi$. в) $-k\pi$.

152. Да допуснем противното. Тогава съществуват цели числа p, q и r, не всичките нули, за които

(1) $$pe^2 + qe + r = 0.$$

Тогава $\pi n!pe = -\pi n!(q + re^{-1})$, откъдето

$$\operatorname{tg}(\pi n!pe) = -\frac{\operatorname{tg}(\pi n!q) + \operatorname{tg}(\pi n!re^{-1})}{1 - \operatorname{tg}(\pi n!q)\operatorname{tg}(\pi n!re^{-1})}$$

за всяко естествено n, т. е.

(2) $$\operatorname{tg}(\pi n!pe) = \operatorname{tg}(\pi n!re^{-1})$$

поради $\operatorname{tg}(\pi n!q) = 0$. Ако в (2) оставим n да расте неограничено чрез нечетни стойности, от зад. 151 а) и б) следва

(3) $$p\pi = r\pi.$$

Ако пък оставим n да расте неограничено чрез четни стойности от зад. 151 а) и в) следва

(4) $$p\pi = -r\pi.$$

От (3) и (4) следва $p = r = 0$, което заедно с (1) дава противоречието $q = 0$. Горното решение ни бе съобщено устно от К. Дочев.

154. а) 1. б) 0. в) Нека $f(x) = 12x^4 - 14x^3 - 3x^2 - 5$. Тогава $f'(x) = 48x^3 - 42x^2 - 6x$. Нулите на f' са $-\frac{1}{8}$, 0 и 1. От друга страна, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$. Непосредствено се проверява, че $f\left(-\frac{1}{8}\right) < 0$. Ето защо от теоремата на Болцано следва, че даденото уравнение има корен в интервала $\left(-\infty, -\frac{1}{8}\right)$. Аналогично се проверява наличието на корен и в интервала $(1, \infty)$. Тъй като производната не се анулира в тези интервали, от теоремата на Рол следва, че уравнението има точно по един корен във всеки от тях. Ще покажем, че уравнението няма корени в интервала $\left[-\frac{1}{8}, 1\right]$. Наистина нека $f(\xi)$ е най-голямата стойност на f в този интервал. Ако f се анулираше в $\left[-\frac{1}{8}, 1\right]$, би трябвало да имаме $f(\xi) \geqq 0$, което заедно с $f\left(-\frac{1}{8}\right) < 0$ и $f(1) < 0$ показва, че ξ е вътрешна точка за $\left[-\frac{1}{8}, 1\right]$. Ето защо f има локален максимум в ξ. От теоремата на Ферма сега следва $f'(\xi) = 0$. Тъй като нулите на f' са $-\frac{1}{8}$, 0 и 1, то $\xi = 0$ в противоречие с $f(0) = -5 < 0$. Следователно даденото уравнение има точно два корена.

155. а) 2. б) 1 при $a < 1$; 3 при $1 \leqq a$. в) 0 при $a < -\frac{1}{e}$; 2 при $-\frac{1}{e} \leqq a < 0$ и 1 при $0 \leqq a$. г) 1 при $a \leqq 0$; 2 при $0 < a < e^{-1}$ и 0 при $a > e^{-1}$.

156. Нека най-напред

(1) $$4p^3 + 27q^2 > 0.$$

Ако положим

(2) $$f(x) = x^3 + px + q,$$

то $f'(x) = 3x^2 + p$. Ако $p > 0$, очевидно f' не се анулира, поради което разглежданото уравнение може да има най-много един реален корен съгласно теоремата на Рол. Тъй като f е полином от нечетна степен, при големи по абсолютна стойност отрицателни x той приема отрицателни стойности, а при големи положителни стойности на x приема положителни стойности. Ето защо от теоремата на Болцано следва, че въпросното уравнение има поне един реален корен (вж. зад. 23 ж), гл. VI). С това в случая (1) при $p > 0$ твърдението е доказано. При $p = 0$ това твърдение се проверява непосредствено. Поради това остана да се занимаем само със случая $p < 0$. Тогава f' се анулира в точките $x_1 = -\sqrt{-\frac{p}{3}}$ и $x_2 = \sqrt{-\frac{p}{3}}$, положителна е в интервалите $(-\infty, x_1)$ и (x_2, ∞), а е отрицателна в интервала (x_1, x_2). Ето защо f расте в интервалите $(-\infty, x_1)$ и (x_2, ∞), а намалява в (x_1, x_2). Поради това са в сила неравенствата

(3) $$f(x) \leqq f(x_1) \quad (x \leqq x_2)$$

и

(4) $$f(x) \geqq f(x_2) \quad (x_1 \leqq x).$$

От друга страна,

(5) $$f(x_1) = -\frac{2p}{3}\sqrt{-\frac{p}{3}} + q$$

и

(6) $$f(x_2) = \frac{2p}{3}\sqrt{-\frac{p}{3}} + q.$$

Неравенствата $f(x_1) \geqq 0 \geqq f(x_2)$ не могат да бъдат изпълнени едновременно, защото в противен случай бихме имали

$0 \geqq f(x_1)\,f(x_2) = \frac{1}{27}(4p^3 + 27q^2)$ съгласно (5) и (6) в противоречие с (1). Ето защо налице е поне едно от неравенствата $f(x_1) < 0$ и $f(x_2) > 0$. Нека най-напред $f(x_1) < 0$. Тогава от (3) следва, че f не се анулира в интервала $(-\infty, x_2)$. От друга страна, f може да се анулира най-много веднъж в (x_2, ∞), защото f' не се анулира в този интервал. Случаят $f(x_2) > 0$ се разглежда аналогично. С това твърдението е доказано в случая (1). Нека сега

$$4p^3 + 27q^2 < 0. \tag{7}$$

От (7) най-напред следва, че $p < 0$, поради което f' отново се анулира в точките x_1 и x_2 и са налице неравенствата (3) и (4). Ще се убедим, че

$$f(x_1) > 0 > f(x_2). \tag{8}$$

Ако допуснем, че например $f(x_1) \leqq 0$, от (5) и $p < 0$ би следвало $0 < -\frac{2p}{3}\sqrt{-\frac{p}{3}} \leqq -q$, което чрез вдигане в квадрат дава $-4p^3 \leqq 27q^2$ в противоречие със (7). Ето защо $f(x_1) > 0$. Аналогично се доказва, че $f(x_2) < 0$. От (8) най-напред следва, че f се анулира поне веднъж в интервала (x_1, x_2). От друга страна, пак от (8) и от $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ и $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$ следва, че f се анулира и във всеки от интервалите $(-\infty, x_1)$ и (x_2, ∞). Ето защо разглежданото уравнение има поне три реални корена. Тъй като f е полином от трета степен, това уравнение в случая (7) има точно три корена.

158. а) $a < 11$. б) $a < -\frac{188}{27}$ или $a > 175$. в) $0 < a < \frac{621}{16}$. г) $a = -\frac{800}{27}$ или $a = \frac{1900}{27}$. д) $a > 0$.

159. а) $a = 1$. б) $a = 1$. в) $a = -1$. г) $a = \frac{3\pi}{2} - 1$ или $a = 1 - \frac{3\pi}{2}$.

162. а) Подражание на доказателството на теоремата на Рол с използуване на зад. 57 б) и в), гл. VI. б) Както а).

163. а) Теоремата на Рол и зад. 162 а), приложени към функцията $e^{-\lambda x}P(x)$. б) n-кратно прилагане на а). в) Разложете полинома φ на произведение от линейни множители и приложете а).

164. По същество се свежда към зад. 163 б) с $\lambda = 1$.

165. Прилага се зад. 162.

166. а) Теоремата на Рол и зад. 162, приложени към функцията $e^{-\frac{\lambda x^2}{2}}P(x)$. б) Теоремата на Рол и зад. 162, приложени към функцията $P(x)(1 + x^2)^{-\frac{\lambda}{2}}$. в) Разгледайте функцията Pe^{φ}. г) Разгледайте функцията $\frac{P}{Q^{\alpha}}$.

168. а) Изберете такова x от Δ, че $G(x) \neq 0$, фиксирайте го и приложете зад. 160 към функцията $F(t) - \frac{F(x)}{G(x)}G(t)$ на t.

б) Твърдението е тривиално при $x = a$. Нека $x \in \Delta$ и $x \neq a$. Приложете обобщената теорема за крайните нараствания към функциите

$$f(t) = F(x) - \sum_{\mu=0}^{m} \frac{(x-t)^{\mu}}{\mu!}F^{(\mu)}(t)$$

и

$$g(t) = G(x) - \sum_{\nu=0}^{n} \frac{(x-t)^{\nu}}{\nu!}G^{(\nu)}(t)$$

на t за интервала $[a, x]$, като вземете пред вид, че $f(a) = F(x)$, $f(x) = 0$, $g(a) = G(x)$, $g(x) = 0$.

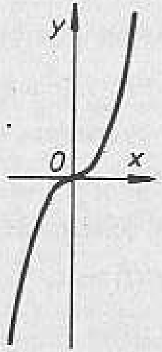
169. Приложете зад. 168 а) към функциите $f(x) - P(x)$ и $(x - x_1)^{k_1}(x - x_2)^{k_2}\dots(x - x_n)^{k_n}$.

170. а) Следва от зад. 168 б) при $F(x) = R_n(x)$ и $G(x) = g(x) - g(a)$. б) От а) при $g(x) = (\lambda - x)^p$ $(p > 0)$ следва

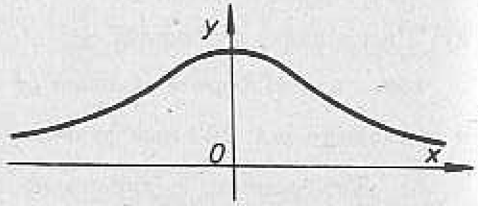
$$R_n(x) = \frac{(\lambda - a)^p - (\lambda - x)^p}{p(\lambda - \xi)^{p-1}} \cdot \frac{(x-\xi)^n}{n!} f^{(n+1)}(\xi),$$

откъдето при $\lambda = x$ се получава и формулата на Рош. в) Получава се от б) при $p = n + 1$. г) Получава се от б) при $p = 1$. д) Получава се от зад. 168 а), приложена към функциите $R_n(x)$ и $\frac{(x-a)^{n+1}}{b-x}$.

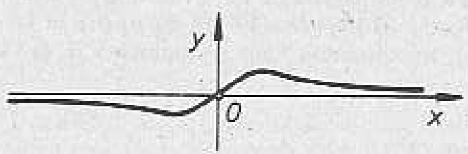
171. а) Фиг. 16. б) Фиг. 17. в) Фиг. 18. г) Фиг. 19.



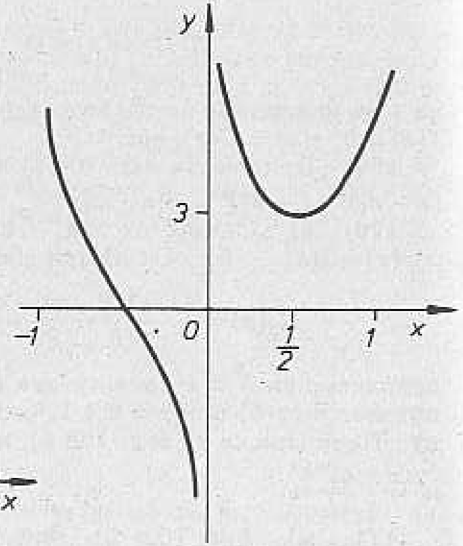
Фиг. 16. Кубична парабола



Фиг. 17. Къдрица на Мария Анези

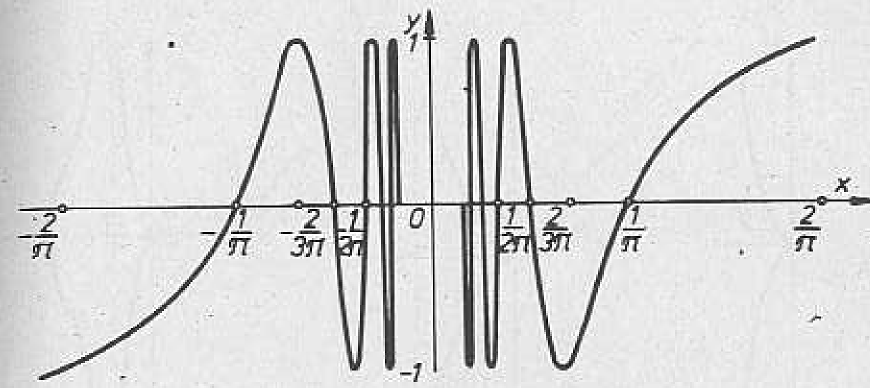


Фиг. 18. Серпентина на Нютон

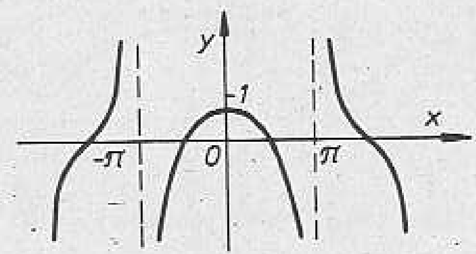


Фиг. 19. Тризъбец на Нютон

173. е) Фиг. 20. и) Фиг. 21.

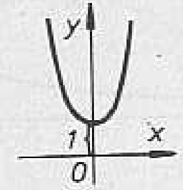


Фиг. 20. Топологична синусоида



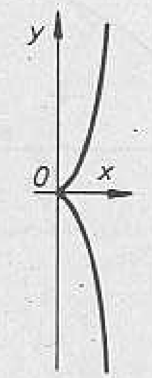
Фиг. 21. Квадратриса на Динострат

175. б) Фиг. 22.

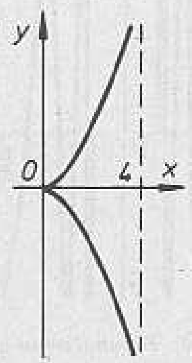


Фиг. 22. Верижка

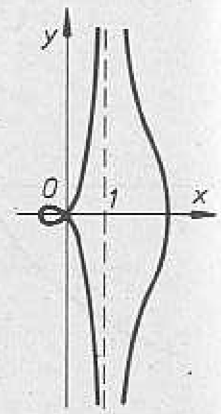
179. а) Фиг. 23. б) Фиг. 24. в) Фиг. 25. г) Фиг. 26. д) Фиг. 27.



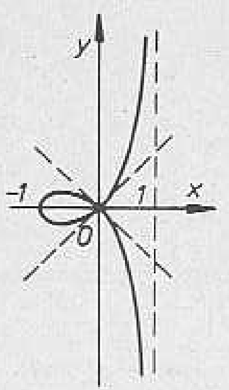
Фиг. 23. Семикубична парабола



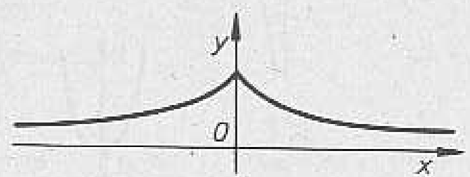
Фиг. 24. Цисоида на Диоклес



Фиг. 25. Конхоида на Никомед $[(x-1)^2(x^2+y^2)=3x^2]$

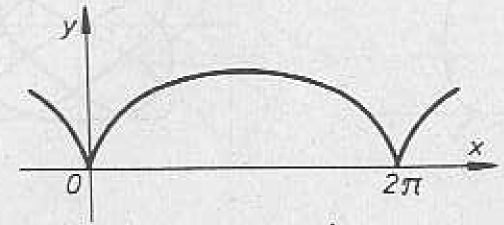


Фиг. 26. Строфоида

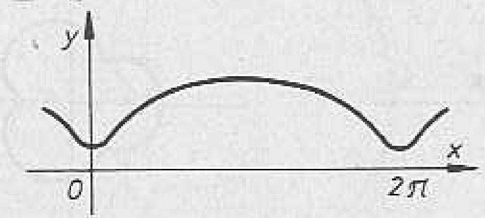


Фиг. 27. Трактриса $\left[x^2=\left(\operatorname{Arch}\frac{1}{y}-\sqrt{1-y^2}\right)^2\right]$

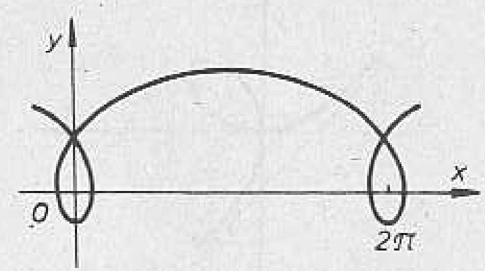
182. а) Фиг. 28. б) Фиг. 29. в) Фиг. 30. г) Фиг. 31. д) Фиг. 32. е) Фиг. 33. ж) Фиг. 34.



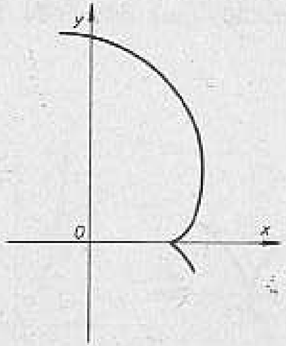
Фиг. 28. Циклоида



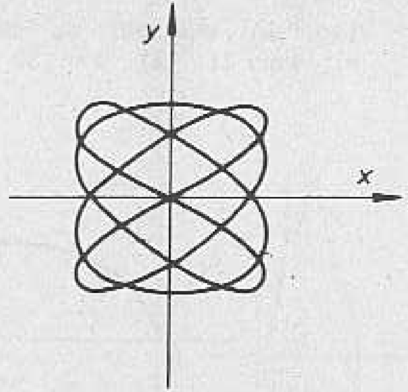
Фиг. 29. Скъсена циклоида $\left(x=t-\frac{1}{2}\sin t,\ y=1-\frac{1}{2}\cos t\right)$



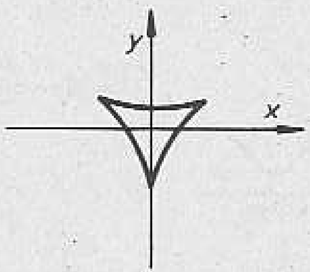
Фиг. 30. Удължена циклоида



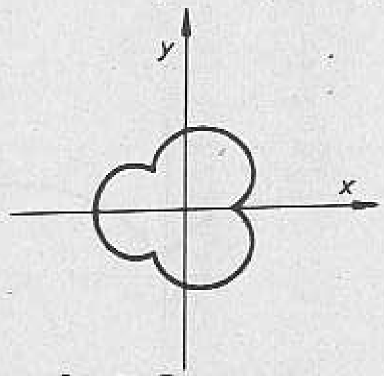
Фиг. 31. Еволвента на окръжност



Фиг. 32. Крива на Лисажу
($x = \sin 4t,\ y = \cos 3t$)

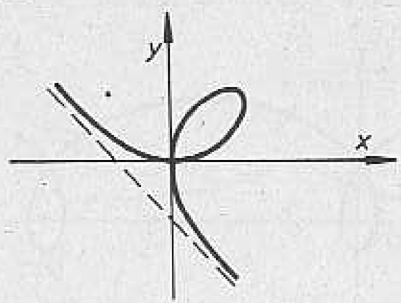


Фиг. 33. Хипоциклоида



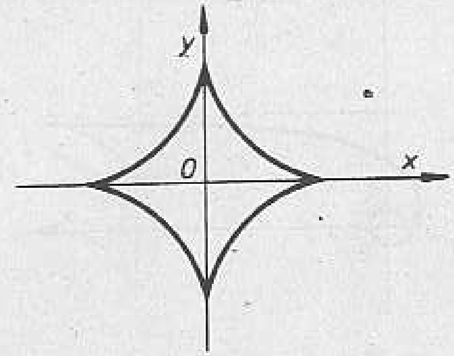
Фиг. 34. Епициклоида
($x = 4\cos t - \cos 4t,\ y = 4\sin t - \sin 4t$)

184. а) Фиг. 35.

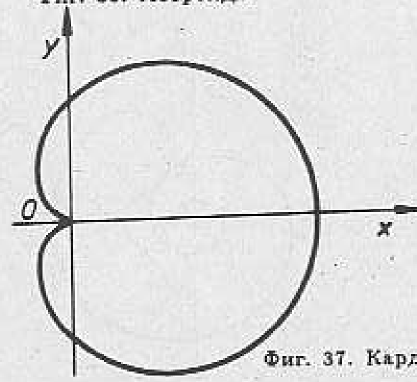


Фиг. 35. Декартов лист

185. а) Фиг. 36. б) Фиг. 37.

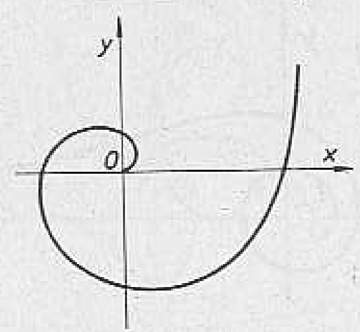


Фиг. 36. Астроида

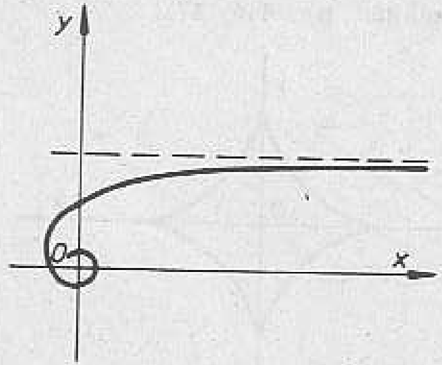


Фиг. 37. Кардиоида

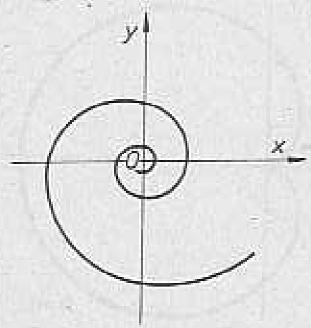
186. а) Фиг. 38. б) Фиг. 39. в) Фиг. 40. г) Фиг. 41.



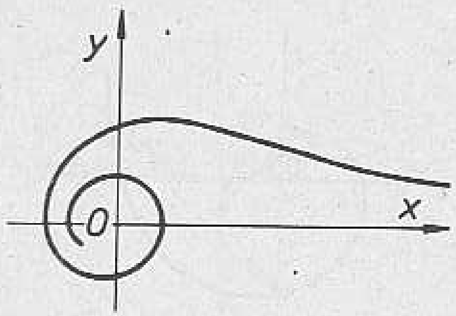
Фиг. 38. Архимедова спирала



Фиг. 39. Хиперболична спирала

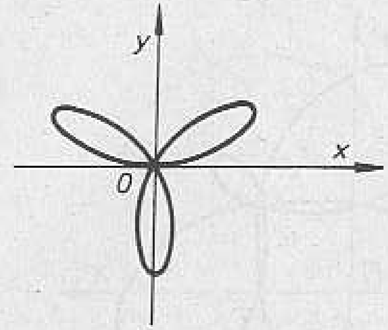


Фиг. 40. Логаритмична спирала

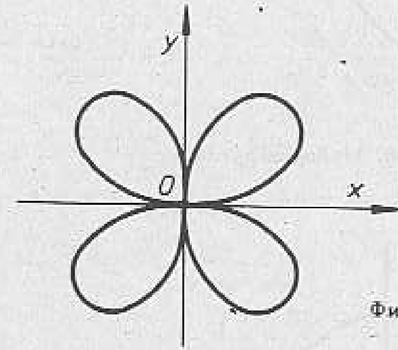


Фиг. 41. Жезъл

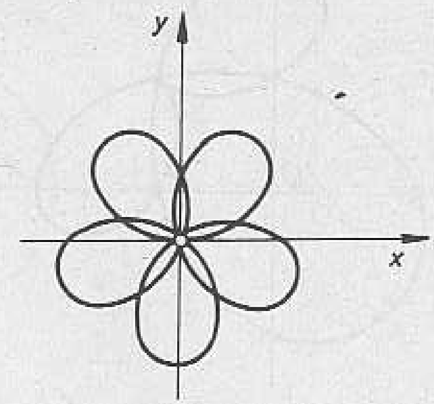
187. а) Фиг. 42. б) Фиг. 43. в) Фиг. 44.



Фиг. 42. Роза

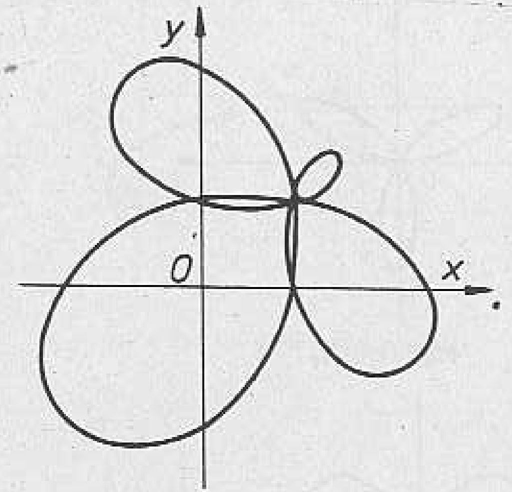


Фиг. 43. Роза ($\rho = |\sin 2\theta|$)

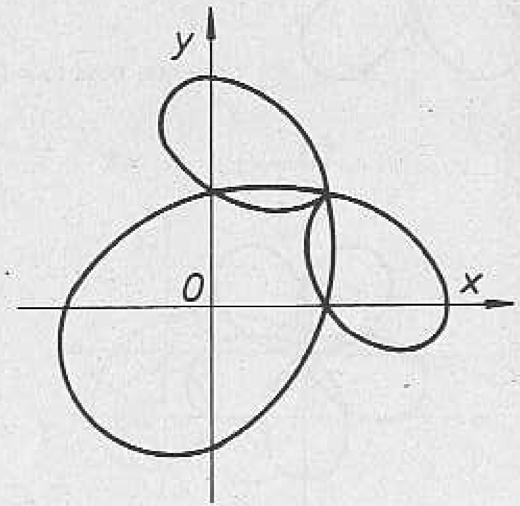


Фиг. 44. Роза

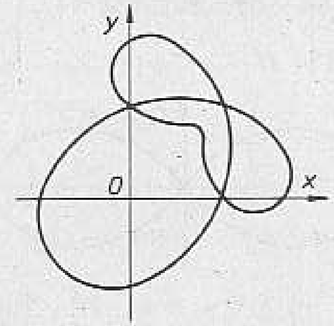
188. а) Фиг. 45. б) Фиг. 46. в) Фиг. 47.



Фиг. 45. Майски бръмбар



Фиг. 46. Майски бръмбар



Фиг. 47. Майски бръмбар

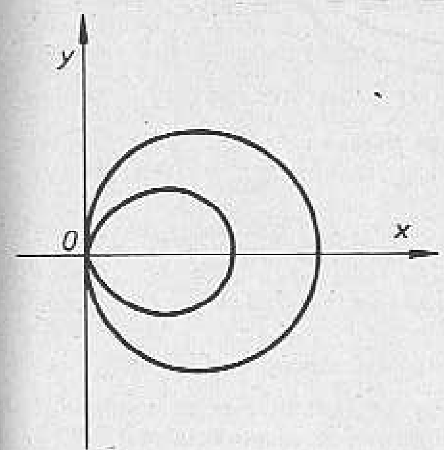
189. а) $\rho^2 - 4\rho\cos\theta - 4\sin^2\theta = 0$. б) $\rho = \dfrac{-\cos 2\theta}{\cos\theta}$.

в) $\rho = \dfrac{4\sin^2\theta}{\cos\theta}$. г) $\rho = \dfrac{3\sin\theta\cos\theta}{\sin^3\theta + \cos^3\theta}$.

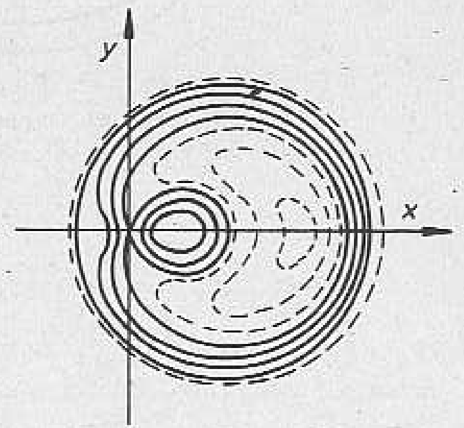
д) $(\rho\cos\theta - 1)^2 - d^2\cos^2\theta = 0$.

190. $\rho = \dfrac{p}{1 - e\cos\theta}$, където p е параметърът, а e — ексцентритетът (за елипса, парабола, хипербола съответно $e < 1$, $e = 1$, $e > 1$).

191. а) Фиг. 48. б) Фиг. 49.

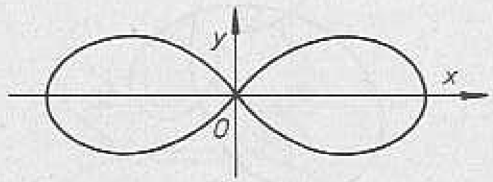


Фиг. 48. Охлюв на Паскал

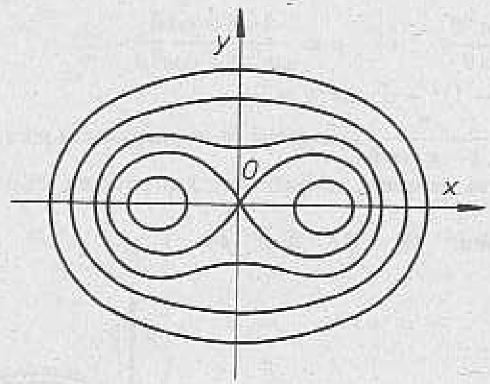


Фиг. 49. Овали на Декарт

192. а) Фиг. 50. б) Фиг. 51.



Фиг. 50. Лемниската на Я. Бернули



Фиг. 51. Овали на Касини

Осма глава

1. а) Съгласно зад. 10, гл. II е в сила равенството $\frac{1}{\nu(\nu+1)} = \frac{1}{\nu} - \frac{1}{\nu+1}$. Ето защо $s_n = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} = \left(1-\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}$. Следователно $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = 1$. Това означава, че разглежданият ред е сходящ и $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu(\nu+1)} = 1$. **б)** $s_n = \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)$, $s = \frac{1}{2}$. **в)** $s_n = \frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{3n+1}\right)$, $s = \frac{1}{3}$. **г)** $s_n = \frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+3}-\frac{1}{2n+5}\right)$, $s = \frac{23}{90}$. **д)** $s_n = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right)$, $s = \frac{1}{4}$.
е) $s_n = 1 - \frac{1}{(n+1)^2}$, $s = 1$. **ж)** $s_n = \frac{1}{8}\left(1-\frac{1}{(2n+1)^2}\right)$, $s = \frac{1}{8}$.
По същество в решенията на а) — ж) се използува техниката на разлагане на рационални функции в суми от елементарни дроби, която се разглежда подробно в §10, гл. IX. При решенията на з) — к) може да се използува зад. 31, гл. II. **з)** $x^2 - \sin^2 x$.
и) $\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2}$. **й)** $\frac{1}{x} - 2\operatorname{cotg} 2x$. **к)** $\frac{8}{3} + 4\operatorname{cotg}^2 2x - \frac{1}{x^2}$.
л) — **о)** Разходящи.

2. а) $s = \frac{1}{1+x}$ $(|x| < 1)$. б) $s = \frac{1}{1+x^2}$ $(|x| < 1)$.

в) $s = \frac{x}{1-5x^2}$ $\left(|x| < \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$. **г)** $s = \frac{1}{(1-x)^2}$ $(|x| < 1)$.

д) $s = \frac{1}{(1-x)^3}$ $(|x| < 1)$.

3. а) $\frac{7}{2}$. б) 3. **в)** ∞. **г)** ∞.

4. а) От неравенството $\frac{1}{n^2} \leqq \frac{2}{n(n+1)}$, от зад. 1 а) и от принципа за сравняване на редове следва, че редът е сходящ. б) Сходящ, понеже се мажорира от реда а). **в)** Сходящ при $k > 1$. **г) — е)** Разходящи, както показва сравняването на тези редове с хармоничния ред.

5. Приложение на зад. 4. а) и б) Сходящи. в) и г) Разходящи.

6. Приложение на зад. 11, гл. IV и на зад. 4 в).

7. Докажете, че съществува естествено число n, за което

$$u_{n+k} \leqq \frac{u_n}{v_n} v_{n+k} \qquad (k \in \mathbb{N}).$$

8. а) Нека $u_n = \frac{n!e^n}{n^n}$. Тогава $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{e}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} > 1$, тъй като $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ клони към e, като расте. Ето защо редът е разходящ съгласно критерия на Даламбер. б) Нека u_n означава общия член на дадения ред. Тогава отношението $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ има стойност $\frac{1}{2}$ или $\frac{1}{3}$ в зависимост от четността на n. Ето защо за всяко естествено n е в сила неравенството $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqq \frac{1}{2}$, което показва съгласно критерия на Даламбер, че редът е сходящ.

9. а) Сходящ. б) Разходящ. в) — ж) Сходящи. з) Разходящ. и) Сходящ.

10. а) Нека u_n е общият член на реда. Тогава $\sqrt[n]{u_n} = \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}}{e} > 1$, тъй като съгласно зад. 80, гл. IV $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ намалява с нарастването на n и очевидно клони към e. Ето защо редът е разходящ съгласно критерия на Коши. б) Сходящ.

11. а) — в) Сходящи. г) Разходящ. д) Сходящ. е) Критерият на Коши не дава възможност да се заключи дали редът е сходящ или разходящ. Разходимостта му обаче може да се установи и непосредствено с помощта на принципа за сравняване на редовете. Наистина от теоремата за крайните нараствания следва $\sqrt[n]{n} - 1 = e^{\frac{1}{n}\ln n} - 1 = \frac{1}{n}\ln n e^{\frac{\theta}{n}\ln n} \geqq \frac{1}{n}$ $(n \geqq 2)$, където $0 < \theta < 1$, и разходимостта на разглеждания ред следва от разходимостта на хармоничния. Впрочем, след като вече е намерено, неравенството $\sqrt[n]{n} - 1 > \frac{1}{n}$ може да се докаже и по-просто, като се използват свойствата на редицата с общ член $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

12. Нека u_n е общият член на дадения ред. Отношението $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ е равно на p или на q в зависимост от четността на n. Ето защо от критерия на Даламбер следва, че редът е сходящ при $p < 1$ и $q < 1$, а разходящ при $p \geqq 1$ и $q \geqq 1$, но не следва нищо определено в останалите случаи. От друга страна, $\sqrt[n]{u_n} = \sqrt{pq}$ при четно n и $\sqrt[n]{u_n} = \sqrt{pq}\sqrt[2n]{\frac{p}{q}}$ при нечетно n. Ето защо от зад. 47, гл. IV следва $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \sqrt{pq}$, поради което съгласно следствието от критерия на Коши даденият ред е сходящ при $pq < 1$ и е разходящ при $pq > 1$. Следствието от критерия на Коши не дава резултат само когато $pq = 1$. Но тогава редът е разходящ, тъй като общият член не клони към нула.

13. а) Очевидно $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(2n+1)^2}{(2n+2)(2n+3)}$. Ето защо $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$, като при това $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$, поради което критерият на Даламбер е неприложим. За α_n от критерия на Раабе–Дюамел намираме $\alpha_n = \frac{6n+5}{(2n+1)^2}$, откъдето $n\alpha_n = \frac{6n^2+5n}{(2n+1)^2} > \frac{3}{2}$. Следователно редът е сходящ. б) В този случай $n\alpha_n = \frac{n}{2n+2} < 1$, поради което редът е разходящ.

14. а) Разходящ, понеже $n\alpha_n = \frac{n}{2n+1}$. б) Разходящ, понеже $n\alpha_n = \frac{n}{4n+2}$. в) Разходящ. г) Разходящ. Имаме

$$n\alpha_n = n\left(\frac{e}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} - 1\right).$$

Сега например по правилото на Лопитал намираме $\lim\limits_{n\to\infty} n\alpha_n = \lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x}\left(e(1+x)^{-\frac{1}{x}} - 1\right) = \frac{1}{2}$. д) и е) Сходящи.

16. а) От условието следва

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0. \tag{1}$$

От друга страна,

$$\frac{\ln u_{n+1} - \ln u_n}{\ln(n+1) - \ln n} \tag{2}$$

$$= \frac{\ln \dfrac{u_{n+1}}{u_n}}{\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)} = -\frac{\ln(1+\alpha_n)}{\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)} = -n\alpha_n \frac{1+\dfrac{\theta_n}{n}}{1+\theta_n\alpha_n} \qquad (0<\theta_n<1)$$

съгласно дефиницията на α_n и обобщената теорема за крайните нараствания. От (1) следва, че дробта в лявата страна на (2) клони към $-\alpha$, когато n расте неограничено. Сега твърдението следва от теоремата на Щолц (зад. 142, гл. IV). б) Очевидно следствие от а). По същество твърдението б) показва, че сходимостта или разходимостта на един ред с положителни членове може да се установи с помощта на критерия на Раабе-Дюамел, когато същото може да се извърши с помощта на принципа за сравняване на редове, като за еталон служи някой от редовете на зад. 15.

17. Очевидно е достатъчно да се разгледат само случаите: 1) $\xi=\eta=1$ и 2) ξ — произволно, $\eta=0$, тъй като общият случай се свежда до последователното им прилагане. Разбира се, и в двата случая α_n клони към 0, поради което

$$(1) \qquad \lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=1.$$

Ще се занимаем най-напред със случая 1). Тогава

$$(2) \qquad n\gamma_n = n\left(\frac{u_n v_n}{u_{n+1}v_{n+1}}-1\right) = n\alpha_n + n\beta_n\frac{u_n}{u_{n+1}}$$

и твърдението следва от (1). В случая 2) пък имаме

$$(3) \qquad n\gamma_n = n\left(\frac{u_n^{\xi}}{u_{n+1}^{\xi}}-1\right) = n\alpha_n\frac{\Delta_n^{\xi}-1}{\Delta_n-1} = n\alpha_n\xi\Gamma_n^{\xi-1},$$

където $\Delta_n = \dfrac{u_n}{u_{n+1}}$, Γ_n е число между 1 и Δ_n, чието съществуване е осигурено от теоремата за крайните нараствания. Сега твърдението следва от (1). Като пример да се върнем на зад. 14 е). При нея редът се получава от редовете г) и д) на същата задача с $\xi=-1$ и $\eta=1$. Тъй като за първия от тях е в сила $\lim\limits_{n\to\infty} n\alpha_n = \dfrac{1}{2}$, а за втория $\lim\limits_{n\to\infty} n\beta_n = \pi$, то $\lim\limits_{n\to\infty} n\gamma_n = \pi - \dfrac{1}{2} > 1$, поради което въпросният ред е сходящ.

Зад. 17 позволява да се развие „логаритмична идеология" във връзка с критерия на Раабе–Дюамел: границата $\lim\limits_{n\to\infty} n\alpha_n$ може в известен смисъл да се схваща като логаритъм на съответния ред.

18. Сравнете дадените редове с подходящи редове от зад. 15. а) Разходящ. б) и в) Сходящи. г) Сходящ. Сравнете тези резултати с резултатите в зад. 5.

19. Сравнете със зад. 6.

20. а) По правилото на Лопитал намираме $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\dfrac{\sin x}{x}}{x^2} = \dfrac{1}{6}$. Сега сравнете със зад. 15. Разглежданият ред е сходящ при $\alpha > \dfrac{1}{2}$. б) $\alpha > \dfrac{1}{2}$. в) $\alpha > 1$. г) $\alpha > 1$. д) $\alpha > 1$. Използувайте решението на зад. 14 г).

21. а) Редът има смисъл при $\alpha \geqq 0$, като при $\alpha = 0$ е тривиално сходящ. Ето защо ще се занимаем само със случая $\alpha > 0$. Нека най-напред $0<\alpha<1$. Ще покажем, че за всички достатъчно големи n е в сила неравенството

$$(1) \qquad \frac{\alpha^{\sqrt{n}}}{n^{\beta}} < \frac{1}{n^2}.$$

След логаритмуване (1) преминава в еквивалентното му неравенство $\sqrt{n}\ln\alpha < (\beta-2)\ln n$. Тъй като $\ln\alpha < 0$, последното неравенство е изпълнено за всяко β при всички достатъчно големи n съгласно зад. 45 б), гл. V. С това (1) е доказано. От принципа за сравняване на редове и зад. 15 сега следва, че при $0<\alpha<1$ даденият ред е сходящ за всяко β. Когато $\alpha=1$, разглежданият ред преминава в реда от зад. 15 и следователно е сходящ при $\beta>1$. При $\alpha>1$ чрез сравняване с хармоничния ред се установява разходимостта на дадения ред за всяко β. б) Сходящ за всяко β при $\alpha>0$, сходящ за всяко $\beta>1$ при $\alpha \leqq 0$. в) Тривиално сходящ за всяко β при $\alpha=0$. За $\alpha>0$ редът е сходящ при $\beta-\ln\alpha>1$. г) При $\alpha>0$ сходящ за $\alpha\beta>1$; при $\alpha=0$ сходящ за $\beta<-1$; при $\alpha<0$ сходящ за всяко $\beta<0$.

22. а) Сходящ при $\alpha>1$. б) Сходящ при $\alpha>1$ и при $\alpha=1$, $\beta>1$. в) Сходящ при $\alpha>1$, при $\alpha=1, \beta>1$ и при $\alpha=\beta=1, \gamma>1$. Това са първите три реда от т. нар. *логаритмична скала на редовете.*

23. Имитация на доказателството на теоремата на Коши.

24. а) Нека $\varepsilon>0$. От общото условие на Коши за сходимост на редове следва, че съществува такова естествено число N, че от $n>N$ да следва $u_{N+1}+u_{N+2}+\ldots+u_n < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Оттук поради монотонността на редицата $u_1, u_2, \ldots$ следва $(n-N)u_n < \frac{\varepsilon}{2}$, или

$$(1) \qquad nu_n < \frac{\varepsilon n}{2(n-N)}.$$

Нека сега $n > 2N$. Тогава от (1) следва $nu_n < \varepsilon \frac{n}{2\frac{n}{2}} = \varepsilon$, с което твърдението е доказано.

25. а) Установете, че редът $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}(c_\nu u_\nu - c_{\nu+1}u_{\nu+1})$ е с положителни членове и че n-тата му парциална сума е $c_1u_1 - c_{n+1}u_{n+1}$. Оттук заключете, че редицата от парциалните суми на реда е ограничена, поради което той е сходящ. След това сравнете реда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_{n+1}$ с реда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\delta}(c_n u_n - c_{n+1}u_{n+1})$, като си послужите с даденото неравенство. б) От даденото неравенство извлечете неравенството $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geqq \frac{\frac{1}{c_{n+1}}}{\frac{1}{c_n}}$, след което приложете зад. 7. в) За критерия на Даламбер положете $c_n = 1$, а за критерия на Раабе-Дюамел $c_n = n$.

26. Най-напред ще установим, че редът $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}\frac{a_\nu}{A_\nu}$ е разходящ. За произволни естествени числа m и n са в сила неравенствата

$$(1) \qquad \sum_{\nu=1}^{n}\frac{a_{m+\nu}}{A_{m+\nu}} > \frac{1}{A_{m+n}}\sum_{\nu=1}^{n} a_{m+\nu} = 1 - \frac{A_m}{A_{m+n}}.$$

Тъй като по условие $\lim\limits_{n\to\infty} A_{m+n} = \infty$, от (1) следва, че при всяко m за всички достатъчно големи n ще бъде в сила неравенството

$$(2) \qquad \sum_{\nu=1}^{n}\frac{a_{m+\nu}}{A_{m+\nu}} > \frac{1}{2},$$

откъдето веднага следва разходимостта на горния ред. Като се тръгне от реда $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} 1$, като частен случай от това твърдение се получава, че хармоничният ред е разходящ. Впрочем самото доказателство на твърдението може да се схваща като обобщение

на стандартното доказателство за разходимостта на хармоничния ред. Сходимостта на реда $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}\frac{a_\nu}{A_\nu^\alpha}$ при $\alpha > 1$ може да се докаже, като се приложи критерият на Кумер с $c_n = \frac{A_n}{a_n}$ и $\delta = \alpha - 1$.

27. а) Нека най-напред за някое $\beta > 1$ е изпълнено неравенството $(n\alpha_n - 1)\ln n \geqq \beta$ за всички n от някое място нататък. От дефиницията на α_n следва, че тогава

$$(1) \qquad n\ln n\frac{u_n}{u_{n+1}} - (n+1)\ln n \geqq \beta.$$

Ето защо от теоремата за крайните нараствания имаме

$$(2) \qquad n\ln n\frac{u_n}{u_{n+1}} - (n+1)\ln(n+1) \geqq \beta - (n+1)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$$
$$= \beta - \frac{n+1}{n}\frac{1}{1+\frac{\theta_n}{n}} > \frac{\beta-1}{2} \quad (0 < \theta_n < 1).$$

Следователно редът $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} u_\nu$ е сходящ съгласно критерия на Кумер с $c_n = n\ln n$ и $\delta = \frac{\beta-1}{2}$. Нека сега неравенството $(n\alpha_n - 1)\ln n \leqq 1$ е изпълнено за всички n от някое място нататък. Аналогично на (2) се заключава, че

$$(3) \qquad n\ln n\frac{u_n}{u_{n+1}} - (n+1)\ln(n+1) \leqq 1 - (n+1)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$$
$$= 1 - \frac{n+1}{n}\frac{1}{1+\frac{\theta_n}{n}} < 0 \quad (0 < \theta_n < 1),$$

и редът $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} u_\nu$ е разходящ съгласно критерия на Кумер и зад. 22 б) с $\alpha = \beta = 1$.

28. а) Очевидно $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{f\left(\frac{1}{n+1}\right)}$. Ето защо от непрекъснатостта на f при $x = 0$ и критерия на Даламбер следва, че редът е сходящ при $f(0) > 1$ и разходящ при $f(0) < 1$. При $f(0) = 1$ ще си послужим с критерия на Раабе-Дюамел. Тогава

$\alpha_n = f\left(\frac{-1}{n+1}\right) - 1 = f\left(\frac{1}{n+1}\right) - f(0)$, откъдето

$$(1) \qquad n\alpha_n = \frac{n}{n+1} f'\left(\frac{\theta_n}{n+1}\right) \quad (0 < \theta_n < 1)$$

съгласно теоремата за крайните нараствания. От (1), от непрекъснатостта на f' при $x = 0$ и от критерия на Раабе-Дюамел следва, че при $f(0) = 1$ редът е сходящ, когато $f'(0) > 1$, и разходящ, когато $f'(0) < 1$. Ето защо остана да разгледаме само случая $f(0) = f'(0) = 1$. Сега от формулата на Тейлър следва $n\alpha_n = \frac{n}{n+1} + \frac{n}{2(n+1)^2} f''\left(\frac{\theta_n}{n+1}\right)$ $(0 < \theta_n < 1)$. Ето защо $(n\alpha_n - 1)\ln n = \frac{n \ln n}{2(n+1)^2} f''\left(\frac{\theta_n}{n+1}\right) - \frac{\ln n}{n+1}$. Следователно $\lim\limits_{n\to\infty} (n\alpha_n - 1)\ln n = 0$ и редът е разходящ съгласно критерия на Бертран. **б)** Приложение на а) или пък на критериите на Даламбер, Раабе-Дюамел и Бертран.

29. Разходящ.

30. г) Да допуснем, че редът $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} u_\nu$ е разходящ. Тогава редът $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \frac{u_\nu}{\frac{1}{v_\nu^{\beta}}}$, където $v_n = \sum\limits_{\nu=1}^{n} u_\nu$, би бил сходящ съгласно зад. 26.

Ето защо редът $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} u_\nu^{\alpha} \left(\frac{u_\nu}{\frac{1}{v_\nu^{\beta}}}\right)^{\beta} = \sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \frac{u_\nu}{v_\nu}$ би бил сходящ съгласно условието на задачата, което противоречи на зад. 26.

31. За да установите единствеността, използвайте неравенствата

$$\sum_{\nu=n+1}^{\infty} \frac{c_\nu}{\nu!} < \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \frac{\nu - 1}{\nu!} = \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \frac{1}{(\nu-1)!} - \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \frac{1}{\nu!} = \frac{1}{n!}$$

при $0 \leqq c_\nu \leqq \nu - 1$, като само краен брой от тях не са строги. За да установите съществуването, дефинирайте индуктивно величините a_n $(n \in \mathrm{N})$, като положите $a_1 = [x]$ и $a_{n+1} = \left[(n+1)!\left(x - \sum\limits_{\nu=1}^{n} \frac{a_\nu}{\nu!}\right)\right]$, където $[c]$ означава най-голямото измежду целите числа, които не надминават c.

33. Сходящи.

34. а) От формулата на Тейлър следва $\frac{P(n+1)}{P(n)} = 1 + \frac{1}{n} \sum\limits_{\nu=1}^{p} \frac{nP^{(\nu)}(n)}{\nu! P(n)}$. Тъй като $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{\nu=1}^{p} \frac{nP^{(\nu)}(n)}{\nu! P(n)} = p$, твърдението следва от зад. 52, гл. V. **б)** Приложете критерия на Лайбниц, като използувате а) и зад. 47, гл. IV.

35. Приложете критерия на Лайбниц; сравнете със зад. 19 и зад. 109 б), гл. VII.

37. а) Без ограничение на общността може да се предположи, че редицата $u_1, u_2, \ldots$ е намаляваща. Нека $u_0 = \alpha_0 = 0$ и $A_n = \sum\limits_{\nu=0}^{n} \alpha_\nu$. Тъй като по условие редицата $A_1, A_2, \ldots$ е ограничена, то

$$(1) \qquad \lim_{p\to\infty} A_p u_{p+1} = 0.$$

От друга страна, редът $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} A_\nu(u_\nu - u_{\nu+1})$ е сходящ. Наистина нека ε е произволно положително число, а числото N е избрано така, че да е в сила неравенството $u_n < \varepsilon$ винаги когато $n > N$. Тогава при $n > N$ ще бъде в сила

$$\left| \sum_{\nu=n+1}^{n+p} A_\nu(u_\nu - u_{\nu+1}) \right| \leqq \sum_{\nu=n+1}^{n+p} |A_\nu|(u_\nu - u_{\nu+1})$$

$$\leqq A \sum_{\nu=n+1}^{n+p} (u_\nu - u_{\nu+1}) = A(u_{n+1} - u_{n+p}) < \varepsilon A \quad (p \in \mathrm{N}),$$

където A е горна граница на ограничената по условие редица $|A_1|, |A_2|, \ldots$ Сега сходимостта на реда $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} A_\nu(u_\nu - u_{\nu+1})$ следва от общото условие на Коши и твърдението на задачата се получава от (1) и от зад. 36 б).

38. а) и в) Сходящи за всяко x. б) и г) Сходящи за всяко x, различно от $2k\pi$ $(k \in \mathrm{I})$. Ще докажем твърдението само за г). За тази цел полагаме $\alpha_\nu = \cos \nu x$ и $u_\nu = \frac{1}{\nu!}\left(\frac{\nu}{e}\right)^{\nu}$. Нека $x \neq 2k\pi$ $(k \in \mathrm{I})$. От периодичността на косинуса следва, че без ограничение на общността може да се предполага $0 < x < 2\pi$.

Тогава $\sin\frac{x}{2} \neq 0$ и от зад. 25 б), гл. II следва ограничеността на сумите $\sum_{\nu=0}^{n} \cos \nu x$. От друга страна, в зад. 14 г) с помощта на критерия на Раабе–Дюамел бе доказано, че редът $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu!}\left(\frac{\nu}{e}\right)^{\nu}$ е разходящ, като съответната граница $\lim_{n\to\infty} n\alpha_n$ беше $\frac{1}{2}$. Сега от зад. 16 в) следва, че редицата $u_1, u_2, \ldots$ намалява от известно място нататък и клони към нула. Ето защо условията на критерия на Дирихле са изпълнени. При $x = 2k\pi$ $(k \in \mathrm{I})$ редът се редуцира до реда от зад. 14 г) и следователно е разходящ.

40. Нека $u = \lim_{n\to\infty} u_n$. Тогава редът $\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu(u_\nu - u)$ е сходящ съгласно критерия на Дирихле. От друга страна, редът $\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu u$ очевидно е сходящ; тогава интересуващият ни ред е сходящ като сума на два сходящи реда.

41. **б)** Групирайте членовете на реда по два и за получения алтернативен ред докажете сходимост с помощта на критерия на Лайбниц. След това докажете, че и даденият ред е сходящ, като използувате равенството $\lim_{n\to\infty} \operatorname{tg}\frac{1}{n} = 0$. **в)** Докажете например, че функцията $\frac{(x+1)^x}{x^{x+\alpha}}$ при $\alpha > 0$ намалява за всички достатъчно големи x и клони към нула, когато x расте неограничено.

г) Най-напред да отбележим, че редът $\sum_{\nu=1}^{\infty} u_\nu$ е сигурно сходящ, ако съществуват редица $\nu_1, \nu_2, \ldots$ от естествени числа с $1 = \nu_1 < \nu_2 < \ldots < \nu_k < \ldots$ и редица от положителни реални числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ с $\lim_{k\to\infty} \alpha_k = 0$, за които редът

$$(1) \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \left| \sum_{\lambda=\nu_k}^{\nu_{k+1}-1} u_\lambda \right|$$

е сходящ и са в сила неравенствата

$$(2) \qquad \left| \sum_{\lambda=\nu_k}^{l} u_\lambda \right| < \alpha_k \quad (\nu_k \leqq l \leqq \nu_{k+1}).$$

Да положим в нашия специален случай $\nu_k = (2k-1)^2$. Тогава

$$(3) \qquad \sum_{\lambda=\nu_k}^{\nu_{k+1}-1} u_\lambda = -\sum_{\lambda=(2k-1)^2}^{4k^2-1} \frac{1}{\lambda} + \sum_{\lambda=4k^2}^{(2k+1)^2-1} \frac{1}{\lambda}.$$

От друга страна,

$$(4) \qquad \frac{4k-1}{4k^2} \leqq \sum_{\lambda=(2k-1)^2}^{4k^2-1} \frac{1}{\lambda} \leqq \frac{4k}{(2k-1)^2},$$

$$(5) \qquad \frac{4k}{(2k+1)^2} \leqq \sum_{\lambda=4k^2}^{(2k+1)^2-1} \frac{1}{\lambda} \leqq \frac{4k+1}{4k^2}.$$

От (3) — (5) следва $\frac{-2}{k^2}\frac{1}{\left(1-\frac{1}{4k^2}\right)^2} \leqq \sum_{\lambda=\nu_k}^{\nu_{k+1}-1} u_\lambda \leqq \frac{1}{2k^2}$. Ето защо $\left|\sum_{\lambda=\nu_k}^{\nu_{k+1}-1} u_\lambda\right| \leqq \frac{2}{k^2\left(1-\frac{1}{4k^2}\right)^2}$, поради което редът (1) е сходящ. Пак от (3) — (5) следва валидността на неравенствата (2) за $\alpha_k = \frac{4k}{(2k-1)^2}$.

43. **а)** и **б)** Сходящи, но не абсолютно. **в)** Разходящ. **г)** Сходящ за $\alpha > 0$, абсолютно сходящ за $\alpha > 1$.

44. **а)** Сходящ, но не абсолютно за $\alpha = 1$. **б)** Абсолютно сходящ за $\alpha > 1$, сходящ за $\alpha = 1$, но не абсолютно. Сходимостта за $\alpha > 1$ следва от зад. 15. Разходимостта при $0 < \alpha < 1$ може да се установи, като членовете на реда се групират последователно по тройки и се докаже, че полученият ред е разходящ. За целта се използува оценката

$$(1) \qquad \frac{1}{(4n-1)^\alpha} + \frac{1}{(4n-3)^\alpha} - \frac{1}{(2n)^\alpha} = \left(\frac{1}{(4n-1)^\alpha} - \frac{1}{(4n)^\alpha}\right) + \left(\frac{1}{(4n-3)^\alpha} - \frac{1}{(4n)^\alpha}\right) + \frac{2-2^\alpha}{4^\alpha}\frac{1}{n^\alpha} > \frac{2-2^\alpha}{4^\alpha}\frac{1}{n^\alpha}$$

и отново зад. 15. При $\alpha = 1$ равенството в (1) добива вида

$$\frac{1}{4n-1} + \frac{1}{4n-3} - \frac{1}{2n} = \frac{1}{4n(4n-1)} + \frac{3}{4n(4n-3)},$$

откъдето следва сходимостта.

45. а) Модификация на доказателството на критерия на Дирихле — зад. 37 а), като сходимостта на реда $\sum_{\nu=1}^{\infty} A_\nu(u_\nu - u_{\nu+1})$ в този случай се установява по следния начин: За произволно $\varepsilon > 0$ се избира толкова голямо N, че да е в сила неравенството $\sum_{\nu=n+1}^{n+p} |u_\nu - u_{\nu+1}| < \varepsilon$ винаги когато $n > N$ и $p \in \mathbf{N}$. Сега вместо оценката в решението на зад. 37 а) се използва неравенството

$$\left|\sum_{\nu=n+1}^{n+p} A_\nu(u_\nu - u_{\nu+1})\right| \leqq \sum_{\nu=n+1}^{n+p} |A_\nu||u_\nu - u_{\nu+1}|.$$

46. а) Следствие от критерия на Дедекинд, което може да се получи от този критерий по същия начин, както критерият на Абел се получава от критерия на Дирихле (зад. 40).

47. а) Когато α е неотрицателно цяло число, редът е тривиално сходящ, понеже се редуцира на крайна сума: от някое място нататък всичките му членове са нули. Нека сега α не е неотрицателно цяло число и нека $u_n = \binom{\alpha}{n}$. Тогава $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\alpha - n}{n+1}$. Ето защо за всички достатъчно големи n ще бъде в сила $\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \frac{n-\alpha}{n+1}$. Следователно $\lim_{n\to\infty} \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = 1$, като $\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} < 1$ при $\alpha > -1$ и $\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} \geqq 1$ при $\alpha \leqq -1$. Ето защо при $\alpha \leqq -1$ редът е разходящ съгласно критерия на Даламбер. При $\alpha > -1$ този критерий не действува. За да си послужим с критерия на Раабе-Дюамел, да положим $\frac{n-\alpha}{n+1} = \frac{1}{1+\alpha_n}$. Тогава $n\alpha_n = \frac{n(1+\alpha)}{n-\alpha}$. Ето защо $\lim_{n\to\infty} n\alpha_n = 1+\alpha$. Следователно разглежданият ред е сходящ, и то абсолютно при $\alpha > 0$, но не и при $\alpha < 0$. Остана да се изследва случаят $-1 < \alpha < 0$. Тъй като тогава $\lim_{n\to\infty} n\alpha_n > 0$, редицата $u_1, u_2, \ldots$ клони към нула монотонно съгласно зад. 16 в). От друга страна, разглежданият ред мени алтернативно знаците на членовете си и следователно е сходящ съгласно критерия на Лайбниц. В резюме: редът е разходящ при $\alpha \leqq -1$; сходящ е, но не абсолютно при $-1 < \alpha < 0$; абсолютно сходящ е при $\alpha \geqq 0$.

б) От $\nu = 1$ нататък редът не мени знаците на членовете си. Като се използват резултатите от а), се заключава, че редът е абсолютно сходящ при $\alpha \geqq 0$, а при $\alpha < 0$ е разходящ. в) Разходящ при $\alpha \leqq 0$; сходящ, но не абсолютно при $0 < \alpha \leqq 2$; абсолютно сходящ при $\alpha > 2$. г) Абсолютно сходящ при $\alpha \neq 0$ съгласно критерия на Коши, разходящ при $\alpha = 0$. д) При $\alpha = k\pi$ $(k \in \mathbf{I})$ всички членове на реда са нули, а при $\alpha \neq k\pi$ $(k \in \mathbf{I})$ общият член на реда не клони към нула съгласно зад. 152, гл. IV. е) Разходящ при $|\alpha| = 1$, абсолютно сходящ при $|\alpha| \neq 1$. ж) Абсолютно сходящ при $-2 < \alpha < 2$, разходящ при $|\alpha| \geqq 2$.

50. б) Нека $\sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^\nu a_\nu$ и $\sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^\nu b_\nu$ са редове от лайбницов тип. Тогава редовете $\sum_{\nu=0}^{\infty}(a_{2\nu} - a_{2\nu+1})$ и $\sum_{\nu=0}^{\infty}(b_{2\nu} - b_{2\nu+1})$ имат неотрицателни членове и са сходящи. Приложете към тези редове теоремата на Коши за умножение на редове. в) От б) следва, че е достатъчно да се изследва поведението на n-тия член на произведението, т. е. на

$$(1) \qquad c_n = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{(n+1-\nu)^\alpha \nu^\beta},$$

когато n расте неограничено. При $\alpha + \beta \leqq 1$ трябва да се докаже, че c_n не клони към 0. Нека $d_n = \frac{1}{(n+1-k)^\alpha k^\beta}$ $(1 \leqq k \leqq n)$ е най-малкото от събираемите в дясната страна на (1). Тогава

$$(2) \quad c_n \geqq nd_n = \frac{n}{(n+1)^{\alpha+\beta}} \frac{1}{\left(1 - \frac{k}{n+1}\right)^\alpha \left(\frac{k}{n+1}\right)^\beta} \geqq \frac{n}{(n+1)^{\alpha+\beta}}$$

и c_n не клони към 0 поради $\alpha + \beta \leqq 1$. При $\alpha + \beta > 1$ трябва да се докаже, че c_n клони към 0. Аналогично на (2) за c_n се получава

$$c_n = \frac{1}{(n+1)^{\alpha+\beta-1}} \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\left(1 - \frac{\nu}{n+1}\right)^\alpha \left(\frac{\nu}{n+1}\right)^\beta (n+1)}.$$

Поради $\alpha + \beta > 1$ е достатъчно да се покаже, че сумите

$$(3) \qquad \sigma_n = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} \left(1 - \frac{\nu}{n+1}\right)^{-\alpha} \left(\frac{\nu}{n+1}\right)^{-\beta}$$

са ограничени отгоре. За да докажем, че това е действително така, при $\alpha < 1$ и $\beta < 1$ ще разгледаме функциите $\varphi : [0, 1] \to \mathbf{R}$ и $\psi : [0, 1] \to \mathbf{R}$, дефинирани с

$$(4) \qquad \varphi(x) = \frac{(1-x)^{1-\alpha}}{\alpha - 1}, \quad \psi(x) = \frac{x^{1-\beta}}{1-\beta}.$$

Очевидно $\varphi\left(x + \frac{1}{n+1}\right) - \varphi(x) = \frac{1}{n+1}\varphi'\left(x + \frac{\theta}{n+1}\right)$ $= \frac{1}{n+1}\left(1 - x - \frac{\theta}{n+1}\right)^{-\alpha} \geqq \frac{(1-x)^{-\alpha}}{n+1}$ $(0 < \theta < 1)$, което при $x = \frac{\nu}{n+1}$ дава

$$(5) \qquad \varphi\left(\frac{\nu+1}{n+1}\right) - \varphi\left(\frac{\nu}{n+1}\right) \geqq \frac{1}{n+1}\left(1 - \frac{\nu}{n+1}\right)^{-\alpha}$$

$(\nu = 1, 2, \ldots, n)$. Аналогично

$$(6) \qquad \psi\left(\frac{\nu}{n+1}\right) - \psi\left(\frac{\nu-1}{n+1}\right) \geqq \frac{1}{n+1}\left(\frac{\nu}{n+1}\right)^{-\beta}$$

$(\nu = 1, 2, \ldots, n)$. От (3) — (6) следва $\sigma_n = \sum_{\frac{\nu}{n+1} \leqq \frac{1}{2}} + \sum_{\frac{\nu}{n+1} > \frac{1}{2}}$

$$\leqq 2^\alpha \sum_{\nu=1}^{\left[\frac{n+1}{2}\right]} \frac{1}{n+1}\left(\frac{\nu}{n+1}\right)^{-\beta} + 2^\beta \sum_{\nu=\left[\frac{n+3}{2}\right]}^{n} \frac{1}{n+1}\left(1 - \frac{\nu}{n+1}\right)^{-\alpha}$$

$$\leqq 2^\alpha \left(\psi\left(\frac{\left[\frac{n+1}{2}\right]}{n+1}\right) - \psi(0)\right) + 2^\beta \left(\varphi(1) - \varphi\left(\frac{\left[\frac{n+3}{2}\right]}{n+1}\right)\right)$$

$\leqq \frac{2^\alpha}{1-\beta} + \frac{2^\beta}{1-\alpha}$, откъдето следва твърдението. Нека сега $\alpha \geqq 1$ или $\beta \geqq 1$. Ясно е, че съществуват числа a и b, за които $0 < a < 1$, $a \leqq \alpha$, $0 < b < 1$, $b \leqq \beta$ и $a + b > 1$. От доказаното вече следва, че произведението на редовете $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu-1}}{\nu^a}$ и $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu-1}}{\nu^b}$ е сходящ ред. Ето защо общият му член клони към 0. Тъй като абсолютната стойност на този общ член очевидно мажорира (1) поради $a \leqq \alpha$ и $b \leqq \beta$, то c_n също клони към нула.

52. а) Установете с индукция спрямо n, че $2n$-тата парциална сума на разглеждания ред е равна на $\sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{n+\nu}$, и след това приложете зад. 84 а), гл. IV.

54. Най-напред да отбележим, че редът $\sum_{\nu=1}^{\infty} u_\nu$ е сигурно сходящ, ако е сходящ редът $\sum_{k=0}^{\infty} v_k$, където $v_k = \sum_{\lambda=k(p+q)+1}^{(k+1)(p+q)} u_\lambda$ $(k+1 \in \mathbf{N})$, и ако $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$, като сумите на двата реда са равни. Ако h_n е n-тата парциална сума на хармоничния ред, не е трудно да се съобрази, че ако $\sum_{\nu=1}^{\infty} u_\nu$ е редът, получен по описаната в условието на задачата процедура, то

$$(1) \qquad \sum_{\sigma=0}^{k-1} v_\sigma = h_{2kp} - \frac{1}{2}h_{kp} - \frac{1}{2}h_{kq} \quad (k \in \mathbf{N}).$$

От зад. 83, гл. IV следва

$$(2) \qquad \lim_{n\to\infty}(h_n - \ln n) = C,$$

където C е константата на Ойлер. От (1) и (2) следва
$\lim_{k\to\infty} \sum_{\sigma=0}^{k-1} v_\sigma = \lim_{k\to\infty}\left(\ln 2kp - \frac{1}{2}\ln kp - \frac{1}{2}\ln kq\right) = \ln 2 + \frac{1}{2}\ln\frac{p}{q}$.

56. а) Нека например редът $\sum_{\nu=1}^{\infty} u_\nu$ е сходящ и $l = \lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}$. Ясно е, че $l > 0$. Ето защо за всички достатъчно големи n ще имаме $\frac{l}{2} < \frac{u_n}{v_n}$ или, което е същото, $0 < v_n < \frac{2}{l}u_n$. Сега от принципа за сравняване на редове следва, че редът $\sum_{\nu=1}^{\infty} v_\nu$ е също сходящ. Аналогично се доказва, че от сходимостта на втория ред следва сходимостта на първия. б) Положете например $u_\nu = (-1)^{\nu-1}\frac{1}{\sqrt{\nu}}$ и $v_\nu = u_\nu$ при четно ν, $v_\nu = u_\nu - \frac{1}{\sqrt{\nu}}$ при нечетно ν, за да получите сходящ ред $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{u_\nu}{1 + \nu u_\nu}$.

57. б) Положете например $u_n = \frac{1}{n^2}$, когато n не е точен квадрат, и $u_n = 1$, когато n е точен квадрат.

58. а) Директно следствие от критерия на Абел.

59. б) Един такъв ред се получава например, като се изпуснат скобите в реда $\sum_{\nu=1}^{\infty}\Bigg(\underbrace{\frac{1}{\nu\sqrt[3]{\nu}}+\frac{1}{\nu\sqrt[3]{\nu}}+\cdots+\frac{1}{\nu\sqrt[3]{\nu}}}_{\nu\ \text{пъти}}-\frac{1}{\sqrt[3]{\nu}}\Bigg)$.

61. а) и б) Разходящи със стойности съответно ∞ и 0. в) $\frac{1}{2}$. г) $\frac{1}{3}$. д) 1. е) $\frac{2}{3}$. ж) 2. з) $\frac{4}{3}$. и) $\frac{2}{\pi}$, вж. зад. 21 б), гл. V. й) e^C, където C е константата на Ойлер, вж. зад. 83, гл. IV.

62. а) $\frac{1}{1-\alpha}$ при $|\alpha| < 1$, вж. зад. 3 б), гл. II. б) $\frac{\sin\alpha}{\alpha}$ при $\alpha \neq 0$ и 1 при $\alpha = 0$, вж. зад. 24 а), гл. V.

66. Съгласно зад. 65 трябва да се докаже, че безкрайните редове $\sum_{\nu=1}^{\infty}\ln(1+\alpha_\nu)$ и $\sum_{\nu=1}^{\infty}\alpha_\nu$ са едновременно сходящи или разходящи. Но $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1$ и твърдението следва от зад. 56 а), тъй като разглежданите два реда от някой номер нататък не менят знаците на членовете си.

68. Зад. 65 и равенството $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{(1+\theta x)^2}$ $(0<\theta<1)$.

69. От неравенството $\ln(1+x) \leqq x$ $(x > -1)$, което следва например от съображения за монотонност и от дивергентността на реда $\sum_{\nu=1}^{\infty}a_\nu$, следва $\sum_{\nu=1}^{\infty}\ln(1+a_\nu) = -\infty$. Поради това интересуващото ни безкрайно произведение дивергира към нула.

70. От неравенството $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{(1+\theta x)^2} \leqq x - \frac{x^2}{8}$ $(0<\theta<1)$ $(|x|<1)$ се получава $\sum_{\nu=1}^{n}\ln(1+a_\nu) \leqq \sum_{\nu=1}^{n}a_\nu - \frac{1}{8}\sum_{\nu=1}^{n}a_\nu^2$, откъдето следва твърдението, както в зад. 69.

71. Приложете зад. 66. а) Разходящо. б) и в) Сходящи.

72. Зад. 6 и 66. **73.** Зад. 19 и 66.

75. а) и б) $\alpha>1$. в) Всички α. г) Всички $\alpha \neq \pm n$ $(n\in\mathbb{N})$.

76. а) $|\alpha|<1$. б) $\alpha \neq -\sqrt[2n-1]{(2n-1)!}$ $(n\in\mathbb{N})$.

77. $\alpha > \frac{1}{2}$ съгласно зад. 15, 43, 68 и 70; при $0 < \alpha \leqq \frac{1}{2}$ произведението дивергира към 0.

78. От зад. 98 а) и в), гл. VII следват неравенствата

$$-\frac{1}{2} \leqq \frac{\cos x - 1}{x^2} \leqq -\frac{1}{2}+\frac{x^2}{24} \leqq -\frac{1}{2}+\frac{\pi^2}{96} < 0 \quad \left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right).$$

Ето защо редовете $\sum_{\nu=1}^{\infty}(\cos x_\nu - 1)$ и $\sum_{\nu=1}^{\infty}x_\nu^2$ са едновременно сходящи или разходящи. Сега твърдението за $\prod_{\nu=1}^{\infty}\cos x_\nu$ следва от зад. 66. За второто произведение доказателството е аналогично.

79. Очевидно даденото безкрайно произведение има смисъл, когато α, β и γ не са отрицателни цели числа. От

$$\frac{(\alpha+\nu)(\beta+\nu)}{(1+\nu)(\gamma+\nu)} = 1 + \frac{(\alpha+\beta-\gamma-1)\nu+(\alpha\beta-\gamma)}{\nu^2+(1+\gamma)\nu+\gamma}$$

следва, че въпросното безкрайно произведение е сходящо точно когато е сходящ безкрайният ред $\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{(\alpha+\beta-\gamma-1)\nu+(\alpha\beta-\gamma)}{\nu^2+(1+\gamma)\nu+\gamma}$. От зад. 6 сега следва, че търсените стойности на α, β и γ са онези, за които $\alpha+\beta-\gamma-1=0$.

80. а) Когато някое от числата α, β и γ е неположително цяло, редът се редуцира на крайна сума или не е дефиниран, затова нека никое от тези числа не е такова. Ако u_n означава n-тия член на реда, то $\frac{u_{n+1}}{u_n} = -\frac{(\alpha+n)(\beta+n)}{(1+n)(\gamma+n)}$. Ето защо за всички достатъчно големи n ще имаме $\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \frac{n^2+(\alpha+\beta)n+\alpha\beta}{n^2+(1+\gamma)n+\gamma}$. Следователно $\lim_{n\to\infty}\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = 1$, като за всички достатъчно големи n са в сила неравенствата: $\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} < 1$ при $\alpha+\beta < 1+\gamma$ и $\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} > 1$ при $\alpha+\beta > 1+\gamma$. Ето защо от критерия на Даламбер следва, че разглежданият ред е разходящ при $\alpha+\beta > 1+\gamma$. Ще се убедим, че той е разходящ и при $\alpha+\beta = 1+\gamma$. Наистина абсолютната стойност на общия член на този ред съвпада с $(n-1)$-вото парциално произведение на безкрайното произведение от зад. 79, което е сходящо точно когато $\alpha+\beta-\gamma-1=0$. Поради това общият член на разглеждания ред не клони към нула. Остана да разгледаме случая $\alpha+\beta<1+\gamma$. Ще си послужим с критерия на Раабе-Дюамел. За реда от абсолютните стойности имаме

$$n\alpha_n = n\frac{(1+\gamma-\alpha-\beta)n+(\gamma-\alpha\beta)}{n^2+(\alpha+\beta)n+\alpha\beta}.$$

Следователно

$$\lim_{n\to\infty} n\alpha_n = 1+\gamma-\alpha-\beta. \tag{1}$$

Ето защо разглежданият ред е абсолютно сходящ при $\gamma>\alpha+\beta$. Остана неразгледан случаят $\alpha+\beta-1<\gamma\leqq\alpha+\beta$. От критерия на Гаус (зад. 28) следва, че редът от абсолютните стойности е сходящ в този случай; следователно интересуващият ни ред не е абсолютно сходящ. От (1) поради $\alpha+\beta-1<\gamma$ и от зад. 16 в) следва, че редът е от лайбницов тип. Ето защо той е сходящ. В резюме: редът е разходящ при $\gamma\leqq\alpha+\beta-1$; сходящ е, но не абсолютно при $\alpha+\beta-1<\gamma\leqq\alpha+\beta$; абсолютно сходящ е при $\alpha+\beta<\gamma$. **б)** Тъй като от някой номер нататък знаците на членовете на реда не се менят, той е сходящ точно когато е абсолютно сходящ редът от а), т. е. при $\gamma>\alpha+\beta$.

81. Нека редът е сходящ за нецялото число α_0. Тъй като членовете му се получават от членовете на сходящия ред

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu(\alpha_0^2-1^2)(\alpha_0^2-2^2)\dots(\alpha_0^2-\nu^2) \tag{1}$$

след умножаване с множителите

$$\frac{(\alpha^2-1^2)(\alpha^2-2^2)\dots(\alpha^2-\nu^2)}{(\alpha_0^2-1^2)(\alpha_0^2-2^2)\dots(\alpha_0^2-\nu^2)}, \tag{2}$$

които се изменят монотонно при достатъчно голямо ν, от критерия на Абел (зад. 40) следва, че твърдението ще бъде доказано, ако се установи, че множителите (2) са ограничени. За тази цел е най-удобно при нецяло α да се докаже, че безкрайното произведение $\prod_{\nu=1}^{\infty}\frac{\alpha^2-\nu^2}{\alpha_0^2-\nu^2}$ е сходящо, което следва от зад. 72.

83. **а)** Това е пример за редица от непрекъснати функции с прекъсната граница: $\mathbf{R}$, $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } |x|<1,\\ \frac{1}{2} & \text{при } |x|=1,\\ 1 & \text{при } |x|>1.\end{cases}$

б) $\mathbf{R}$, $\lim_{n\to\infty} f_n(x)=0$.

в) $D:\ \left[\frac{\pi}{6}+2\nu\pi,\ \frac{5\pi}{6}+2\nu\pi\right]\bigcup\left(\frac{7\pi}{6}+2\nu\pi,\frac{11\pi}{6}+2\nu\pi\right)$ $(\nu\in\mathbf{I})$,

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x\in D,\ x\neq\frac{\pi}{6}+2\nu\pi,\ x\neq\frac{5\pi}{6}+2\nu\pi,\\ 1 & \text{при } x=\frac{\pi}{6}+2\nu\pi,\ x=\frac{5\pi}{6}+2\nu\pi\quad(\nu\in\mathbf{I}).\end{cases}$$

84. **а)** $\mathbf{R}$. **б)** $(-1,1)$. **в)** $x=0$.

85. **а)** $x=0$. **б)** Сходящо за всяко x, различно от $(-1)^{\nu-1}\nu(4\mu+1)\frac{\pi}{2}$ $(\nu\in\mathbf{N},\ \mu\in\mathbf{I})$.

86. **а)** $r=1$, разходящ при $|x|=1$. **б)** $r=1$, разходящ при $x=-1$, сходящ при $x=1$. **в)** $r=1$, сходящ при $|x|=1$. **г)** — **з)** $r=\infty$. **и)** $r=\infty$ при неотрицателно цяло α, а в останалите случаи $r=1$, като редът е сходящ при $x=-1$ за $\alpha\geqq 0$ и разходящ за $\alpha<0$; сходящ е при $x=1$ за $\alpha>-1$ и е разходящ за $\alpha\leqq -1$, вж. зад. 47 а) и б).

87. **а)** $r=1$; при $|x|=1$ редът е разходящ за $\alpha\leqq 0$; за $0<\alpha\leqq 1$ редът е сходящ при $x=-1$ и разходящ при $x=1$; за $\alpha>1$ редът е сходящ при $|x|=1$, вж. зад. 15 и 43 г). **б)** $r=4$ и редът е разходящ в краищата на интервала на сходимост. **в)** $r=\frac{1}{e}$; разходящ. **г)** $r=2^\alpha$; при $x=-2^\alpha$ редът е сходящ за $\alpha>0$ и разходящ при $\alpha\leqq 0$; при $x=2^\alpha$ редът е сходящ за $\alpha>2$ и разходящ за $\alpha\leqq 2$. **д)** $r=1$; при $x=1$ редът е разходящ, а при $x=-1$ е сходящ, вж. зад. 14 г). **е)** $r=1$; сходящ. **ж)** Също, вж. зад. 41 г). **з)** Тъй като числото π е ирационално, то $\sin\nu\neq 0$ $(\nu\in\mathbf{N})$, поради което редът има смисъл; $r=0$. Приложете зад. 151 и 152, гл. IV. **и)** Редът не е дефиниран, когато γ е неположително цяло число. Когато α или β е неположително цяло число, редът се редуцира на полином и следователно $r=\infty$. Нека никой от тези случаи не е налице. Тогава $r=1$, вж. зад. 80, която съдържа сведения за поведението на реда в границите на интервала на сходимост.

88. Ще дадем решение само в най-типичния случай, когато $0<\rho<\infty$, където $\rho=\limsup\sqrt[n]{|a_n|}$. Нека $0<|x|<\frac{1}{\rho}$. Тогава $\rho<\frac{1}{|x|}$. Ето защо съществува число q, за което $0<q<1$ и $\rho<\frac{q}{|x|}$. От последното неравенство и дефиницията на ρ следва, че за всички n от някое място нататък ще бъде в сила неравенството $\sqrt[n]{|a_n|} < \frac{q}{|x|}$. Ето защо $|a_n x^n| < q^n$ и сходимостта на разглеждания ред следва от принципа за сравняване на редове. Нека сега $|x| > \frac{1}{\rho}$. Тогава $\frac{1}{|x|} < \rho$ и от дефиницията на ρ следва, че за безбройно много n ще бъде в сила неравенството $\frac{1}{|x|} < \sqrt[n]{|a_n|}$. Ето защо $1 < \sqrt[n]{|a_n x^n|}$ и общият член на реда не клони към 0. За дефиницията и някои свойства на limsup вж. зад. 130 — 134 и 139, 140, гл. IV.

89. Приложете формулата на Коши–Адамар и зад. 47 и 132, гл. IV.

90. Приложете правилото на Коши за умножение на редове.

91. Използувайте индукция спрямо n.

94. Изброените редици са сходящи в посочените области. б) и д) Равномерно сходящи. За б) това следва от очевидното неравенство $|f_n(x)| \leqq \theta^n$, от $\lim\limits_{n\to\infty} \theta^n = 0$ и от независимостта на θ от x. За д) докажете и използувайте неравенството

$$0 \leqq f_n(x) \leqq \frac{1}{n+1} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}.$$

Останалите редици не са равномерно сходящи. За а) и е) това следва от $f_n\left(\frac{n}{n+1}\right) = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \geqq \frac{1}{e}$, а за в) и г) — от $f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2}$.

96. Приложете зад. 95 и общото условие на Коши за сходимост на числови редове.

97. а) Равномерно сходящ поради $\left|\frac{\sin \nu x}{\nu^2}\right| \leqq \frac{1}{\nu^2}$ и зад. 15 и 96. б) Да предположим, ще редът е равномерно сходящ. Тогава за всички достатъчно големи n и за всички естествени числа p ще бъде в сила неравенството

$$(1) \qquad \sum_{\nu=n+1}^{n+p} \frac{1}{\nu^x} < 1$$

съгласно общото условие на Коши за равномерна сходимост (зад. 95). Ако в (1) извършим граничен преход при x, клонящо към 1, ще получим $\sum\limits_{\nu=n+1}^{n+p} \frac{1}{\nu} \leqq 1$ за всички естествени p, което противоречи на разходимостта на хармоничния ред. в) Равномерно сходящ поради $\frac{(\ln \nu)^\alpha}{\nu^x} \leqq \frac{(\ln \nu)^\alpha}{\nu^\xi}$ и поради сходимостта на реда $\sum\limits_{\nu=2}^{\infty} \frac{(\ln \nu)^\alpha}{\nu^\xi}$ $(\xi > 1)$. г) Равномерно сходящ поради аналогични причини.

98. Да допуснем противното. Тогава ще съществува такова положително число ε_0, че за всяко естествено число N ще има число $n > N$ и x_n от $[a, b]$, за които $|f_n(x_n) - f(x_n)| \geqq \varepsilon_0$. Тъй като редицата $f_1(x), f_2(x), \ldots$ е растяща за всяко x от $[a, b]$, последното неравенство може да се запише и така: $f_n(x_n) \leqq f(x_n) - \varepsilon_0$. Следователно ще съществуват редица $n_1, n_2, \ldots$ от растящи естествени числа и редица от точки $\xi_1, \xi_2, \ldots$ от интервала $[a, b]$, за които

$$(1) \qquad f_{n_k}(\xi_k) \leqq f(\xi_k) - \varepsilon_0.$$

Тъй като интервалът $[a, b]$ е ограничен и затворен, чрез преминаване към подредици без ограничение на общността може да се предположи, че редицата $\xi_1, \xi_2, \ldots$ е сходяща. Нека

$$(2) \qquad \lim_{k\to\infty} \xi_k = \xi.$$

Тогава $\xi \in [a, b]$. Нека сега n е произволно естествено число. Тъй като за всички k от някое място нататък е в сила $n < n_k$, от монотонността на дадената редица от функции следва $f_n(\xi_k) \leqq f_{n_k}(\xi_k)$, което заедно с (1) дава

$$(3) \qquad f_n(\xi_k) \leqq f(\xi_k) - \varepsilon.$$

От (2), (3) и непрекъснатостта на f_n и f следва $f_n(\xi) \leqq f(\xi) - \varepsilon_0$, откъдето с граничен преход при n, клонящо към ∞, се получава противоречието $f(\xi) \leqq f(\xi) - \varepsilon_0$.

99 и **100.** Използувайте преобразуването на Абел (зад. 36 а)).

101. а) Редът не е равномерно сходящ, въпреки че е сходящ за всяко x от $[0, 2\pi]$. Да допуснем, че е равномерно сходящ.

Тогава за всички достатъчно големи n и за всички x от $[0, 2\pi]$ би трябвало да е в сила

$$(1) \qquad \left| \sum_{\nu=n+1}^{2n} \frac{\sin \nu x}{\nu} \right| < \frac{1}{2}$$

съгласно общото условие на Коши за равномерна сходимост. Но съгласно зад. 93 б), гл. VIII е в сила $\sin x \geqq \frac{2x}{\pi} \quad \left(0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}\right)$.

Ето защо $\sum_{\nu=n+1}^{2n} \frac{\sin \frac{\nu\pi}{4n}}{\nu} \geqq \sum_{\nu=n+1}^{2n} \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$ в противоречие с (1) при $x = \frac{\pi}{4n}$. б) — г) Равномерно сходящи съгласно критерия на Дирихле за равномерна сходимост — зад. 97 (за образец при б) вж. зад. 39).

102 и **103.** Директни следствия от критерия на Абел (зад. 100).

105. а) Приложете зад. 102. б) Нека функцията $\varphi : [0, 1] \to \mathbf{R}$ е дефинирана с $\varphi(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu x^\nu$. Тъй като последният ред е равномерно сходящ в интервала $[0, 1]$ (зад. 102) и членовете му са непрекъснати функции, сумата му φ е също непрекъсната. По-специално тя е непрекъсната при $x = 1$. Ето защо $\lim_{x\to 1} \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu x^\nu = \lim_{x\to 1} \varphi(x) = \varphi(1) = \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu$. в) Нека $f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} u_\nu x^\nu$, $g(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} v_\nu x^\nu$, $h(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} (u_0 v_\nu + u_1 v_{\nu-1} + \cdots + u_\nu v_0) x^\nu$ $(0 \leqq x \leqq 1)$. Тъй като тези три степенни реда са абсолютно сходящи при $0 \leqq x < 1$, от теоремата на Коши за умножение на редове следва

$$(1) \qquad h(x) = f(x)g(x) \quad (0 \leqq x < 1).$$

От друга страна, от зад. 100 следва, че функциите f, g и h са непрекъснати в $[0, 1]$. Ето защо от (1) с граничен преход се получава $h(1) = f(1)g(1)$, което е и търсеното равенство.

106. а) и б) Приложете зад. 103. в) Аналогично на зад. 105 б).

107. Сходимостта следва от зад. 39. Поради периодичността на синуса сумата $s(x)$ на този ред е периодична с период 2π.

Ето защо е достатъчно да се установи, че функцията $s(x)$ е прекъсната при $x = 0$ и е непрекъсната в интервала $(0, 2\pi)$. Също както в решението на зад. 101 б), се установява равномерната сходимост на реда $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\sin \nu x}{\nu}$ във всеки от интервалите $(\varepsilon, 2\pi - \varepsilon)$ при $0 < \varepsilon < \pi$. Ето защо сумата $s(x)$ е непрекъсната в интервала $(0, 2\pi)$. Прекъснатостта при $x = 0$ може да се установи по следния начин: От зад. 93 б), гл. VII следва

$$(1) \qquad \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\sin \nu x}{\nu} \geqq \sum_{\nu=1}^{n} \frac{2}{\pi} \frac{\nu x}{\nu} = \frac{2nx}{\pi}$$

за всяко естествено n и за всяко x, за което $0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2n}$. От друга страна, от зад. 25 а), гл. II за сумата $S_k(x) = \sum_{\nu=1}^{k} \sin \nu x$ се получава

$$(2) \qquad S_k(x) = \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \frac{x}{2} - \frac{\cos\left(k + \frac{1}{2}\right)x}{2 \sin \frac{x}{2}} \quad (0 < x < 2\pi).$$

Ето защо преобразуването на Абел (вж. зад. 36 а)) дава

$$\sum_{\nu=n+1}^{\infty} \frac{\sin \nu x}{\nu} = \sum_{\nu=n+1}^{\infty} S_\nu(x) \left(\frac{1}{\nu} - \frac{1}{\nu+1}\right) - \frac{S_n(x)}{n+1} = \frac{1}{2(n+1)} \operatorname{ctg} \frac{x}{2}$$

$$(3) \qquad -\frac{1}{2 \sin \frac{x}{2}} \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \left(\frac{1}{\nu} - \frac{1}{\nu+1}\right) \cos\left(\nu + \frac{1}{2}\right)x$$

$$-\frac{1}{2(n+1)} \operatorname{ctg} \frac{x}{2} + \frac{1}{2(n+1)} \frac{\cos\left(n + \frac{1}{2}\right)x}{\sin \frac{x}{2}} \geqq \frac{\cos\left(n + \frac{1}{2}\right)x - 1}{2(n+1) \sin \frac{x}{2}}.$$

От (3) следва

$$(4) \qquad \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \frac{\sin \nu x}{\nu} \geqq -\frac{\sin^2\left(\frac{n}{2} + \frac{1}{4}\right)x}{2(n+1) \sin \frac{x}{2}} \quad (0 < x < 2\pi).$$

От (4), от неравенството $\sin^2\alpha \leqq \alpha^2$ и от зад. 93 б), гл. VII се получава

$$(5)\qquad \sum_{\nu=n+1}^{\infty}\frac{\sin\nu x}{\nu} \leqq -\frac{\pi}{8}\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2}{n+1}x > -\frac{\pi}{8}(n+1)x.$$

От (1) и (5) следва

$$(6)\qquad s(x) > \frac{2nx}{\pi} - \frac{\pi(n+1)x}{8} \qquad \left(0 < x \leqq \frac{\pi}{2n}\right).$$

От (6) при $x = \dfrac{\pi}{2n}$ имаме

$$(7)\qquad s\left(\frac{\pi}{2n}\right) > 1 - \frac{\pi^2}{16}\left(1+\frac{1}{n}\right).$$

Ето защо $\liminf s\left(\dfrac{\pi}{2n}\right) \geqq 1 - \dfrac{\pi^2}{16} > 0$, което заедно с очевидното равенство $s(0) = 0$ доказва прекъснатостта на функцията $s(x)$ в точката 0.

108. Функциите $f_n(x) = \dfrac{\{4^n x\}}{4^n}$ $(n+1 \in \mathbf{N})$ са очевидно непрекъснати. Освен това за всяко x е в сила $0 \leqq f_n(x) \leqq \dfrac{1}{4^n}$ $(n+1 \in \mathbf{N})$. Следователно разглежданият ред е равномерно сходящ съгласно критерия на Вайерщрас (зад. 96). Ето защо функцията $f(x) = \sum\limits_{\nu=0}^{\infty}\dfrac{1}{4^\nu}\{4^\nu x\}$ е непрекъсната.

За да докажем, че f не е диференцируема за никое ξ, да допуснем противното. Тогава биха съществували реално число ξ и число $\delta > 0$, за които $\left|\dfrac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} - f'(\xi)\right| < \dfrac{1}{2}$ при $0 < |x-\xi| < \delta$. Следователно за всяка редица $\xi_1, \xi_2, \ldots$ с $\xi_n \neq \xi$ и $\lim\limits_{n\to\infty}\xi_n = \xi$ би съществувало такова число N, че за $n > N$ да имаме $\left|\dfrac{f(\xi_n)-f(\xi)}{\xi_n-\xi} - f'(\xi)\right| < \dfrac{1}{2}$ и $\left|\dfrac{f(\xi_{n+1})-f(\xi)}{\xi_{n+1}-\xi} - f'(\xi)\right| < \dfrac{1}{2}$. Тогава $\left|\dfrac{f(\xi_n)-f(\xi)}{\xi_n-\xi} - \dfrac{f(\xi_{n+1})-f(\xi)}{\xi_{n+1}-\xi}\right| < 1$. Ето защо, за да получим противоречие, би било достатъчно да посочим редица $\xi_1, \xi_2, \ldots$ с

$\xi_n \neq \xi$ и $\lim\limits_{n\to\infty}\xi_n = \xi$, за която числото $\dfrac{f(\xi_n)-f(\xi)}{\xi_n-\xi}$ да е четно за четно n и нечетно за нечетно n; тогава за всички n бихме имали

$$\left|\frac{f(\xi_n)-f(\xi)}{\xi_n-\xi} - \frac{f(\xi_{n+1})-f(\xi)}{\xi_{n+1}-\xi}\right| \geqq 1.$$

За произволно естествено число n нека по дефиниция

$$\xi_n = \begin{cases} \xi + 4^{-n} & \text{при четно } [4^n\xi], \\ \xi - 4^{-n} & \text{при нечетно } [4^n\xi]. \end{cases}$$

Очевидно $\xi_n \neq \xi$, $\lim\limits_{n\to\infty}|\xi_n - \xi| = \lim\limits_{n\to\infty}4^{-n} = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty}\xi_n = \xi$. Ще докажем, че за всяко естествено n е в сила

$$(1)\qquad f(\xi_n) - f(\xi) = \sum_{\nu=0}^{n-1}(f_\nu(\xi_n) - f_\nu(\xi)).$$

Наистина нека

$$(2)\qquad F_n(x) = \sum_{\nu=0}^{n} f_\nu(x)$$

и нека ν е такова естествено число, че $\nu \geqq n$. Тогава $4^\nu\xi_n = 4^\nu\xi \pm 4^{\nu-n} = 4^\nu\xi +$ цяло число; следователно $\{4^\nu\xi_n\} = \{4^\nu\xi\}$, $f_\nu(\xi_n) = f_\nu(\xi)$. Ето защо от (2) следва $F_m(\xi_n) - F_m(\xi) = \sum\limits_{\nu=0}^{m}(f_\nu(\xi_n) - f_\nu(\xi)) = \sum\limits_{\nu=0}^{n-1}(f_\nu(\xi_n) - f_\nu(\xi))$ при $m \geqq n$, откъдето при неограничено нарастване на m следва (1).

Нека $a = [2^{2\nu+1}\xi]$, т. е.

$$(3)\qquad 2^{-2\nu-1}a \leqq \xi < 2^{-2\nu-1}(a+1).$$

Ще докажем, че при цяло ν с $0 \leqq \nu \leqq n+1$, т. е. при $n \geqq \nu+1$, е в сила

$$(4)\qquad 2^{-2\nu-1}a \leqq \xi_n < 2^{-2\nu-1}(a+1).$$

За целта ще разгледаме трите случая:

$$(5)\qquad 2^{-2\nu-1}a + 4^{-n} \leqq \xi < 2^{-2\nu-1}(a+1) - 4^{-n},$$

$$(6)\qquad 2^{-2\nu-1}a \leqq \xi < 2^{-2\nu-1}a + 4^{-n},$$

$$(7)\qquad 2^{-2\nu-1}(a+1) - 4^{-n} \leqq \xi < 2^{-2\nu-1}(a+1).$$

В случая (5) неравенствата (4) следват от $|\xi_n - \xi| = 4^{-n}$. В случая (6) от $2^{2n-2\nu-1}a \leqq 4^n\xi < 2^{2n-2\nu-1}a + 1$ следва $[4^n\xi] = 2^{2n-2\nu-1}a$

$=$ четно и (4) се получава от $\xi_n = \xi + 4^{-n}$. В случая (7) е в сила $2^{2n-2\nu-1}(a+1) - 1 \leqq 4^n\xi < 2^{2n-2\nu-1}(a+1)$; следователно $[4^n\xi] = 2^{2n-2\nu-1}(a+1) - 1 =$ нечетно и (4) следва от $\xi_n = \xi - 4^{-n}$.

При четно a нека $b = \frac{a}{2}$. Тогава от (3) и (4) имаме $b \leqq 4^\nu\xi < b + \frac{1}{2}$, $b \leqq 4^\nu\xi_n < b + \frac{1}{2}$, $\{4^\nu\xi\} = 4^\nu\xi - b$, $\{4^\nu\xi_n\} = 4^\nu\xi_n - b$, $f_\nu(\xi) = \xi - \frac{b}{4^\nu}$, $f_\nu(\xi_n) = \xi_n - \frac{b}{4^\nu}$; следователно

$$f_\nu(\xi_n) - f_\nu(\xi) = \xi_n - \xi. \tag{8}$$

При четно a нека $b = \frac{a+1}{2}$. Тогава от (3) и (4) следва

$b - \frac{1}{2} \leqq 4^\nu\xi < b$, $b - \frac{1}{2} \leqq 4^\nu\xi_n < b$, $\{4^\nu\xi\} = b - 4^\nu\xi$, $\{4^\nu\xi_n\} = b - 4^\nu\xi_n$, $f_\nu(\xi) = \frac{b}{4^\nu} - \xi$, $f_\nu(\xi_n) = \frac{b}{4^\nu} - \xi_n$; следователно

$$f_\nu(\xi_n) - f_\nu(\xi) = -(\xi_n - \xi). \tag{9}$$

От (8) и (9) се вижда, че при $0 \leqq \nu \leqq n-1$ е в сила $\frac{f_\nu(\xi_n) - f_\nu(\xi)}{\xi_n - \xi} = \pm 1$. Ето защо от (1) следва $\frac{f(\xi_n) - f(\xi)}{\xi_n - \xi} = \sum_{\nu=0}^{n-1}(\pm 1) = \sum_{\nu=0}^{n-1}(1 + \text{четно}) = n +$ четно; следователно диференчното частно е четно при четно n и нечетно при нечетно n.

Разгледаният тук пример принадлежи на Ван дер Варден. Исторически първият пример на непрекъсната функция без производна е даден от Вайерщрас.

109. Редът, получен от дадения чрез k-кратно формално диференциране, е $(-1)^k \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(\ln \nu)^k}{\nu^x}$. Той не е равномерно сходящ в интервала $(1, \infty)$. Ето защо диференцируемостта му се установява, като за всяко $\xi > 1$ се избира подходяща част на $(1, \infty)$, към която се прилага теоремата за почленно диференциране на редове. И така нека $\xi > 1$, а η е число, за което $1 < \eta < \xi$. Очевидно за всяко $x \geqq \eta$ е в сила

$$0 \leqq \frac{(\ln \nu)^k}{\nu^x} \leqq \frac{(\ln \nu)^k}{\nu^\eta} \quad (\nu \in \mathrm{N}). \tag{1}$$

Нека ζ е такова число, че $1 < \zeta < \eta$. Тогава редът $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu^\zeta}$ е сходящ съгласно зад. 15. От друга страна, $\frac{(\ln \nu)^k}{\nu^\eta} = \frac{(\ln \nu)^k}{\nu^{\eta-\zeta}} \frac{1}{\nu^\zeta}$ и $\lim_{\nu\to\infty} \frac{(\ln \nu)^k}{\nu^{\eta-\zeta}}$ поради $\zeta < \eta$ (зад. 45 б), гл. V); следователно редът $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(\ln \nu)^k}{\nu^\eta}$ е сходящ. Сега от (1) и критерия на Вайерщрас (зад. 96) следва равномерната сходимост на реда $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(\ln \nu)^k}{\nu^x}$ в интервала $[\eta, \infty)$.

111. При някои x е възможно анулирането на някои от първите членове на произведенията в б) — г). Тогава за съответното произведение се приема, че има стойност нула. Изучаването на този по-общ случай се свежда до разгледаните досега безкрайни произведения с ненулеви членове с помощта на остатъчните произведения, които се получават от дадените, като се изпуснат няколко от първите членове: ако за едно такова остатъчно произведение се установи, че притежава производна от произволен ред в околност на някоя точка x, същото ще бъде вярно и за изходното произведение, тъй като то се получава от остатъчното чрез умножаване с краен брой безбройно много пъти диференцируеми функции. Ето защо, за да не внасяме усложнения, при решаването на б) — г) можем да се ограничим с достатъчно близки до нулата стойности на x, за които никой от множителите не се анулира.

Ще дадем решение само на в). Както в зад. 77, се доказва, че произведението е сходящо. Нека $f(x) = \prod_{\nu=1}^{\infty}\left(1 + (-1)^{\nu+1}\frac{x}{\nu}\right)$. От зад. 65 следва, че редът

$$\varphi(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \ln\left(1 + (-1)^{\nu+1}\frac{x}{\nu}\right) \tag{1}$$

е сходящ. Тъй като $f(x) = e^{\varphi(x)}$, твърдението ще бъде установено, ако се покаже, че функцията (1) притежава производна от произволно висок ред. Редът, получен чрез k-кратното формално почленно диференциране на (1), е $(k-1)!\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^{(\nu+2)k-1}}{(\nu + (-1)^{\nu+1}x)^k}$ и е равномерно сходящ. Най-трудно това се установява при $k = 1$.

Ето защо ще докажем само, че редът $\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu+(-1)^{\nu+1}x}$ е равномерно сходящ около нулата. Поради равенството $\frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu+(-1)^{\nu+1}x} = \frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu} - \frac{x}{\nu(\nu+(-1)^{\nu+1}x)}$ всичко се свежда до установяване на равномерната сходимост на реда $\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu(\nu+(-1)^{\nu+1}x)}$, която следва от критерия на Вайерщрас (зад.96).

112. Разгледайте например редицата от функции $f_n(x)=\frac{1}{n}\sin n\left(\frac{\pi}{2}+\operatorname{arctg} x\right)$ $(n\in\mathbf{N})$.

113. Лодефинирайте f_ν в точката ξ като $\lim_{x\to\xi} f_\nu(x)$. По този начин ще получите равномерно сходящ в $X\cup\{\xi\}$ ред от непрекъснати в ξ функции (зад. 95). Сега остава да се приложи теоремата за непрекъснатост на сумата на равномерно сходящ ред от непрекъснати функции.

114. а) Приложете зад. 113 и 46 а), гл. VII. б) Приложете зад. 114 и зад. 61, гл. I.

115. Приложете теоремата за почленно диференциране на редове и зад. 102.

117. а) От зад. 23 а), гл. VII се знае, че $\frac{d^n\cos^2 x}{dx^n} = 2^{n-1}\cos\left(2x+\frac{n\pi}{2}\right)$ $(n\in\mathbf{N})$. Ето защо търсеният ред е $\cos^2 a + \sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{2^{\nu-1}}{\nu!}\cos\left(2a+\frac{\nu\pi}{2}\right)(x-a)^\nu$. Остатъкът във формата на Лагранж (зад.170, гл.VII) е $R_n=\frac{2^n}{(n+1)!}\cos\left(2\xi+(n+1)\frac{\pi}{2}\right)(x-a)^{n+1}$, откъдето се получава оценката $|R_n|\leqq\frac{2^n}{(n+1)!}|x-a|^{n+1}$. Понеже редът $\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{2^n|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}$ е сходящ за всяко x (вж. зад. 86 г)), общият му член клони към нула. Ето защо остатъкът R_n клони към нула за всяко x. Следователно

$$\cos^2 x=\cos^2 a+\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{2^{\nu-1}}{\nu!}\cos\left(2a+\frac{\nu\pi}{2}\right)(x-a)^\nu \quad (x\in\mathbf{R}).$$

б) $\sin^3 x = \frac{1}{4}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{1}{\nu!}\left(3\sin\left(a+\frac{n\pi}{2}\right)-3^n\sin\left(3a+\frac{n\pi}{2}\right)\right)(x-a)^\nu$ $(x\in\mathbf{R})$, вж. зад. 23 в), гл. VII. в) $\operatorname{sh} x=\operatorname{sh} a\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(x-a)^{2\nu}}{(2\nu)!}+\operatorname{ch} a\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(x-a)^{2\nu+1}}{(2\nu+1)!}$ $(x\in\mathbf{R})$. г) $e^x\cos x$ $=e^a\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\sqrt{2^\nu}}{\nu!}\cos\left(a+\frac{\nu\pi}{4}\right)(x-a)^\nu$ $(x\in\mathbf{R})$, вж. зад. 24 б), гл. VII.

д) $e^{x\cos\alpha}\sin(x\sin\alpha)=e^{a\cos\alpha}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{1}{\nu!}\sin(a\sin\alpha+\nu\alpha)(x-a)^\nu$ $(x\in\mathbf{R})$, вж. зад. 24 б), гл. VII.

118. Вж. зад. 53 а), гл. VII.

119. Намерете последователните производни на степенния ред в точката ξ, като си послужите с правилото за диференциране на степенни редове.

120. Нека x и c са числа, за които $a<c<x\leqq b$. От формулата на Тейлър с остатъчен член във формата на Лагранж (зад. 170 в), гл. VII) следва

$$f(c) = \sum_{\nu=0}^{n}\frac{(-1)^\nu f^{(\nu)}(x)}{\nu!}(x-c)^\nu+\frac{(-1)^{n+1}f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-c)^{n+1}$$

$(\xi\in(c,x),\ n\in\mathbf{N})$. Тъй като в дясната страна на това равенство събираемите са неотрицателни, то

$$f(c)\geqq\frac{(-1)^n f^{(n)}(x)}{n!}(x-c)^n,$$

откъдето

(1) $$|f^{(n)}(x)|\leqq\frac{n!f(c)}{(x-c)^n}.$$

От друга страна, от формулата на Тейлър с остатъчен член във формата на Тагамлицки (зад. 170 д), гл. VII) следва

(2) $$f(x)=\sum_{\nu=0}^{n}\frac{f^{(\nu)}(b)}{\nu!}(x-b)^\nu+\left(\frac{b-x}{b-c}\right)^{n+1}\frac{(\xi-c)^{n+2}f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!(x-c)}$$

$(\xi\in(c,x),n\in\mathbf{N})$. От (1) и (2) се получава

(3) $$\left|f(x)-\sum_{\nu=0}^{n}\frac{f^{(\nu)}(b)}{\nu!}(x-b)^\nu\right|\leqq\left(\frac{b-x}{b-c}\right)^{n+1}f(c)$$

поради $\xi - c < x - c$. От (3) веднага следва твърдението на задачата, понеже c може да се избере произволно близко до a.

121. От зад. 120 следва

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{f^{(\nu)}(b)}{\nu!}(x-b)^{\nu} \tag{1}$$

при $0 < x < b$. От (1) след последователно диференциране и умножаване с $x - b$ се получават

$$(x-b)f'(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\nu f^{(\nu)}(b)}{\nu!}(x-b)^{\nu} \tag{2}$$

и

$$(x-b)f'(x) + (x-b)^2 f''(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\nu^2 f^{(\nu)}(b)}{\nu!}(x-b)^{\nu}. \tag{3}$$

Нека λ и μ са произволни числа. Чрез умножаване на (1) с λ^2, на (2) с $2\lambda\mu$ и на (3) с μ^2 и събиране се получава

$$\lambda^2 f(x) + 2\lambda\mu(x-b)f'(x) + \mu^2(x-b)^2 f''(x) + \mu^2(x-b)f'(x) \tag{4}$$

$$= \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu} f^{(\nu)}(b)(b-x)^{\nu}}{\nu!}(\lambda - \mu\nu)^2.$$

Тъй като дясната страна на (4) е неотрицателна, от (4) при $\mu = \dfrac{1}{x-b}$ следва

$$\lambda^2 f(x) + 2\lambda f'(x) + f''(x) + \frac{f'(x)}{x-b} \geqq 0. \tag{5}$$

Ако в (5) λ и x се фиксират по произволен начин и се остави b да расте неограничено, се получава желаното неравенство.

122. От зад. 121 при $\lambda = 1$ следва

$$f(x) + 2f'(x) + f''(x) \geqq 0 \quad (x > 0). \tag{1}$$

Да положим

$$g(x) = e^{-x} - f(x). \tag{2}$$

Очевидно $(-1)^n g^{(n)}(x) = e^{-x} - (-1)^n f^{(n)}(x) \geqq 0$. Ето защо към функцията g е приложима зад. 121. Така се получава $g(x) + 2g'(x) + g''(x) \geqq 0$ $(x > 0)$, което заедно с (2) дава

$$f(x) + 2f'(x) + f''(x) \leqq 0. \tag{3}$$

От (1) и (3) следва $f''(x) + 2f'(x) + f(x) = 0$ $(x > 0)$. Сега от зад. 87 в), гл. VII следва, че съществуват константи B и C, за които

$$f(x) = (Bx + C)e^{-x} \quad (x > 0). \tag{4}$$

От (4) поради $0 \leqq f(x) \leqq e^{-x}$ следва $B = 0$, с което задачата е решена.

123. Използувайте степенните развития за основните елементарни функции. а) $\operatorname{sh} x = \sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \dfrac{x^{2\nu-1}}{(2\nu-1)!}$; сравнете със степенното развитие на $\sin x$. б) $\operatorname{ch} x = \sum\limits_{\nu=0}^{\infty} \dfrac{x^{2\nu}}{(2\nu)!}$; сравнете със степенното развитие на $\cos x$. в) $e^{-x^2} = \sum\limits_{\nu=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^{\nu}}{\nu!} x^{2\nu}$.

г) $\dfrac{e^x - 1}{x} = \sum\limits_{\nu=0}^{\infty} \dfrac{x^{\nu}}{(\nu+1)!}$. д) $\dfrac{x - \sin x}{x^3} = \sum\limits_{\nu=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^{\nu} x^{2\nu}}{(2\nu+3)!}$.

е) $\sin^2 2x = \dfrac{1}{2}(1 - \cos 4x) = \sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{\nu-1} 2^{4\nu-1}}{(2\nu)!} x^{2\nu}$. ж) $\dfrac{1 - \cos x}{x^2} = \sum\limits_{\nu=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^{\nu} x^{2\nu}}{(2\nu+2)!}$. Развитията а), в) и е) важат в $\mathbf{R}$, а развитията от д) и ж) — в $\mathbf{R} \setminus \{0\}$. Тъй като десните страни на последните развития имат смисъл и при $x = 0$, те могат да се използуват за продължаване на съответните функции по непрекъснатост при $x = 0$. По-специално те дават още една възможност за пресмятане на границите $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x - \sin x}{x^3}$ и $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x}{x^2}$. Използуването на степенните развития вероятно е един от най-естествените начини за пресмятане на граници от този вид.

з) $\ln\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}} = \sum\limits_{\nu=0}^{\infty} \dfrac{x^{2\nu+1}}{2\nu+1}$ $(|x| < 1)$. В следващите задачи се използува биномният ред или геометричната прогресия, която е негов частен случай. и) $\dfrac{1}{(1-x^2)^2} = \sum\limits_{\nu=0}^{\infty} (\nu+1)x^{2\nu}$ $(|x| < 1)$.

й) $\dfrac{1}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-\frac{3}{2}} = \sum\limits_{\nu=0}^{\infty} \dfrac{(2\nu+1)!!}{(2\nu)!!} x^{2\nu}$ $(|x| < 1)$.

к) $\sqrt{1+x^2} = 1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu-1}(2\nu-3)!!}{(2\nu)!!} x^{2\nu}$ $(|x| \leqq 1)$; под $(-1)!!$ се разбира числото 1. л) $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = (1+x^2)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu}(2\nu-1)!!}{(2\nu)!!} x^{2\nu}$ $(|x| \leqq 1)$. м) $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(2\nu-1)!!}{(2\nu)!!} x^{2\nu}$ $(|x| < 1)$.

н) $\frac{x^{10}}{1-x} = \sum_{\nu=10}^{\infty} x^{\nu}$ $(|x| < 1)$. о) $\frac{1}{x^2-5x+6} = \frac{(x-2)-(x-3)}{(x-2)(x-3)}$ $= \frac{1}{x-3} - \frac{1}{x-2} = \frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{x}{2}} - \frac{1}{3}\frac{1}{1-\frac{x}{3}} = \sum_{\nu=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{\nu+1}} - \frac{1}{3^{\nu+1}}\right)x^{\nu}$ $(|x| < 2)$. п) $\frac{x}{x^2-4x+3} = \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{3^{\nu}}\right)x^{\nu}$ $(|x|<1)$.

124. След диференциране на функциите от тази задача се получават функции, чиито маклоренови развития са вече известни. Във всеки конкретен случай трябва да се намери степенен ред, чиято производна съвпада с развитието на производната на дадената функция. Тогава сумата на въпросния ред ще се различава от функцията с константа, чиято стойност се определя при конкретна стойност на аргумента. а) Нека $f(x) = (1+x)\ln(1+x)$. Тогава $f'(x) = 1 + \ln(1+x) = 1 + \sum_{\nu=1}^{\infty}(-1)^{\nu-1}\frac{x^{\nu}}{\nu}$. Разглеждаме реда $g(x) = x + \sum_{\nu=1}^{\infty}(-1)^{\nu-1}\frac{x^{\nu+1}}{\nu(\nu+1)}$. Очевидно $f'(x) = g'(x)$, поради което $f(x) = g(x) + C$. При $x = 0$ получаваме $C = 0$, поради което $(1+x)\ln(1+x) = x + \sum_{\nu=1}^{\infty}(-1)^{\nu-1}\frac{x^{\nu+1}}{\nu(\nu+1)}$. С това последното равенство е доказано в интервала $(-1, 1]$. б) $\operatorname{arctg} x$ $= \sum_{\nu=1}^{\infty}(-1)^{\nu-1}\frac{x^{2\nu-1}}{2\nu-1}$ $(|x| \leqq 1)$. Това равенство се доказва чрез диференциране в интервала $(-1,1)$. Валидността му в точките -1 и 1 следва от съображения за непрекъснатост, вж. критерия на Лайбниц и зад. 105 а). в) $x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) = \sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\nu-1}x^{2\nu}}{2\nu(2\nu-1)}$ $(|x| \leqq 1)$. г) $\arcsin x = \sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(2\nu-1)!!}{(2\nu)!!}\frac{x^{2\nu+1}}{2\nu+1}$ $(|x| \leqq 1)$, вж. зад. 123 м). д) $x\arcsin x + \sqrt{1-x^2} = 1 + \sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(2\nu-1)!!}{(2\nu+2)!!}\frac{x^{2\nu+2}}{2\nu+1}$ $(|x| \leqq 1)$. е) $\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) = \sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^{\nu}\frac{(2\nu-1)!!}{(2\nu)!!}\frac{x^{2\nu+1}}{2\nu+1}$ $(|x| \leqq 1)$, вж. зад. 123 л). ж) $x\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) - \sqrt{1+x^2}$ $= -1 + \sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^{\nu}\frac{(2\nu-1)!!}{(2\nu+2)!!}\frac{x^{2\nu+2}}{2\nu+1}$ $(|x| \leqq 1)$.

125. В примерите на тази задача се използува умножение на редове или умножение на ред и полином. а) $(1+x)e^{-x}$ $= \sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(-1)^{\nu-1}(\nu-1)x^{\nu}}{\nu!}$ $(x \in \mathbf{R})$. б) $(1-x)^2 \operatorname{ch}\sqrt{x} = 1 + \left(\frac{1}{2!}-2\right)x$ $+ \sum_{\nu=2}^{\infty}\left(\frac{1}{(2\nu)!} - \frac{2}{(2\nu-2)!} + \frac{1}{(2\nu-4)!}\right)x^{\nu}$ $(x \geqq 0)$. в) $\frac{\ln(1+x)}{1+x}$ $= \sum_{\nu=1}^{\infty}(-1)^{\nu-1}h_{\nu}x^{\nu}$ $(|x| < 1)$, където h_{ν} е ν-тата парциална сума на хармоничния ред. г) $(\ln(1-x))^2 = 2\sum_{\nu=1}^{\infty}h_{\nu}\frac{x^{\nu+1}}{\nu+1}$ $(-1 \leqq x < 1)$, за h_{ν} вж. в). д) $\ln(1+x)\ln(1-x) = -\sum_{\nu=1}^{\infty}\lambda_{\nu}\frac{x^{2\nu}}{\nu}$ $(|x| < 1)$, където $\lambda_{\nu} = \sum_{\mu=1}^{2\nu-1}\frac{(-1)^{\mu-1}}{\mu}$. е) $(1+x^2)\operatorname{arctg} x = x + 2\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\nu-1}}{4\nu^2-1}x^{2\nu+1}$ $(|x| \leqq 1)$. ж) $(\operatorname{arctg} x)^2 = \sum_{\nu=1}^{\infty}(-1)^{\nu-1}\left(h_{2\nu} - \frac{1}{2}h_{\nu}\right)\frac{x^{2\nu}}{\nu}$ $(|x| \leqq 1)$, за h_{ν} вж. в). з) $(\arcsin x)^2 = \sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{4^{\nu}(\nu!)^2 x^{2\nu+2}}{(2\nu+1)!(\nu+1)}$ $(|x| \leqq 1)$.

126. Освободете се от знаменателите. За а) и б) могат да се използуват и зад. 25 д) и в), гл. II.

127. При всяко фиксирано x с $|x| < 1$ редовете, получени чрез почленно диференциране спрямо α на редовете в десните страни на равенствата, са равномерно сходящи редове от функции на α съгласно критерия на Вайерщрас (зад. 96). Ето защо почленното диференциране на а) и б) спрямо α е законно. След диференциране а) и б) преминават съответно в равенствата б) и а) от зад. 126, които са вече доказани. Ето защо левите и десните страни на равенствата в настоящата задача се различават с константи. При $\alpha = 0$ за стойностите на тези константи се получава нула.

128. а) В зад. 127 а) x се замества с $-x$ и полученото тъждество се изважда от тъждеството в зад. 127 а).

129. Зад. 128 с $\alpha + \frac{\pi}{2}$ вместо α.

130. а) Нека α с $0 < \alpha < 2\pi$ е фиксирано. Тогава редът $\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\sin \nu\alpha}{\nu}$ е сходящ (зад. 39). Сега от зад. 105 б) следва

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\sin \nu\alpha}{\nu} = \lim_{x\to 1}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{x^\nu \sin \nu\alpha}{\nu}$$

$$= \lim_{x\to 1} \operatorname{arctg}\frac{x\sin\alpha}{1 - x\cos\alpha} = \operatorname{arctg}\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha} = \frac{\pi - \alpha}{2}.$$

б) — г) Аналогично, като се използува зад. 127 б), а) при $x = -1$ и б) при $x = -1$.

131. а) Нека $f(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\cos \nu x}{\nu^2}$. Тогава $f'(x) = -\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\sin \nu x}{\nu}$ при $0 < x < 2\pi$, тъй като последният ред е равномерно сходящ във всеки от интервалите $[\varepsilon, 2\pi - \varepsilon]$ $(0 < \varepsilon < \pi)$, което се проверява аналогично на твърдението от зад. 101 б). От зад. 130 а) сега следва $f'(x) = \frac{x - \pi}{2}$. Но производната на функцията $-\frac{\pi x}{2} + \frac{x^2}{4}$ очевидно съвпада с $f'(x)$. Ето защо съществува такава константа C, че е в сила тъждеството

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\cos \nu x}{\nu^2} = C - \frac{\pi x}{2} + \frac{x^2}{4} \tag{1}$$

при $0 < x < 2\pi$. От съображения за непрекъснатост следва, че (1) е валидно и при $x = 0$ и $x = 2\pi$. С това желаното тъждество е почти доказано. Стойността на C ще определим едновременно с доказването на б). За тази цел да положим $g(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\sin \nu x}{\nu^3}$. Тогава $g'(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\cos \nu x}{\nu^2}$ при $0 \leqq x \leqq 2\pi$. От (1) сега следва $g'(x) = C - \frac{\pi x}{2} + \frac{x^2}{4}$. Но производната на функцията $Cx - \frac{\pi x^2}{4} + \frac{x^3}{12}$ очевидно съвпада с $g'(x)$. Ето защо съществува такава константа D, че да е в сила тъждеството

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\sin \nu x}{\nu^3} = D + Cx - \frac{\pi x^2}{4} + \frac{x^3}{12} \tag{2}$$

при $0 \leqq x \leqq 2\pi$. Ако в (2) положим $x = 0$ и $x = \pi$, ще получим $D = 0$ и $0 = C\pi - \frac{\pi^3}{4} + \frac{\pi^3}{12}$, откъдето $C = \frac{\pi^2}{6}$. в) Работи се аналогично, като паралелно се получава

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\sin \nu x}{\nu^5} = \frac{\pi^4 x}{90} - \frac{\pi^2 x^3}{36} + \frac{\pi x^4}{48} - \frac{x^5}{240} \quad (0 \leqq x \leqq 2\pi).$$

132. Зад. 131 с $x + \pi$ вместо x.

133. Ако познаваме тъждеството $f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu x^\nu$, за всяко естествено n можем да намерим сумата на реда $\sum_{\nu=0}^{\infty}\nu^n e_\nu x^\nu$. Това очевидно може да стане, след като над реда n пъти се извършат последователно операциите диференциране и умножение с x. С помощта на тази техника очевидно може да се пресметне (да се изрази чрез f) и сумата на реда $\sum_{\nu=0}^{\infty} P(\nu) a_\nu x^\nu$, където P е произволен полином. а) $e^x(x^2 + x + 1)$. б) $(x^2+1)e^{-x} + \frac{e^{-x} - 1}{x}$. в) $\left(1 - \frac{x^2}{2}\right)\cos x - \left(1 + \frac{x}{2}\right)\sin x$. г) $\frac{x+1}{4\sqrt{x}}\operatorname{sh} x - \frac{\operatorname{ch}\sqrt{x}}{4} (x > 0)$.

134. За намиране на сумата на реда $\sum_{\nu=1}^{\infty} R(\nu)$, където R е рационална функция, нулите на чийто знаменател са неположителни, понякога се препоръчва R предварително да се разложи в сума от елементарни дроби (§10, гл. IX). Този метод дава резултат винаги когато нулите на знаменателя на R са най-много двукратни. Същата техника е приложима и към редовете

$\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}(-1)^{\nu-1}R(\nu)$ при същите предположения за R. а) $\frac{3}{4}$.
б) $2-2\ln 2$. Използвайте степенното развитие на $\ln(1+x)$.
в) $\frac{5}{18}$. г) $\frac{\pi^2}{6}$. Използвайте зад.131 а). д) $\frac{\pi^2}{12}$. Използвайте зад. 132 а). е) $\frac{\pi}{4}$. ж) $\frac{\pi^2}{8}$. з) 1. Определете константите a, b, c и d по такъв начин, че да е в сила тъждеството $\frac{2x-1}{x^2(x+1)^2}=\frac{a}{x}+\frac{b}{x^2}+\frac{c}{x+1}+\frac{d}{(x+1)^2}$. и) $7-\frac{2\pi^2}{3}$. й) $3-4\ln 2$.
к) $2e$. л) $\frac{1}{2}(\cos 1-\sin 1)$. м) $\frac{1}{4}(3\cos 1-\sin 1)$. Последните три случая решете по метода от зад. 133.

135. Нека $f(x)=\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}\frac{x^\nu}{\nu^2}$. От зад. 87 а) следва, че радиусът на сходимост на разглеждания степенен ред е 1. От зад. 4 а) следва, че редът е сходящ и в крайните точки на своя интервал на сходимост. Ето защо функцията f е дефинирана в интервала $[-1,1]$. От зад. 105 а) сега следва, че функцията f е непрекъсната в интервала $[-1,1]$. От друга страна, от теоремата за диференциране на степенни редове следва, че тази функция е диференцируема в интервала $(-1,1)$. Да положим

$$\varphi(x)=f(x)+f(1-x)+\ln x\ln(1-x) \tag{1}$$

при $0<x<1$. От (1) следва

$$\varphi'(x)=\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{x^{\nu-1}}{\nu}-\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\nu-1}}{\nu}(x-1)^{\nu-1}+\frac{1}{x}\ln(1-x)+\frac{1}{x-1}\ln(1+(x-1)). \tag{2}$$

От (2) след развиване в степенни редове на логаритмите в дясната страна следва $\varphi'(x)=0$ при $0<x<1$. Ето защо съществува константа C, за която

$$f(x)+f(1-x)+\ln x\ln(1-x)=C \tag{3}$$

$(0<x<1)$ съгласно (1). Стойността на тази константа ще пресметнем с граничен преход при x, клонящо към нула. Тъй като $\lim\limits_{x\to0}\ln x\ln(1-x)=\lim\limits_{x\to0}x\ln x\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{x}=0$ съгласно зад. 47 в) и 68, гл. V, от (3) поради непрекъснатостта на f следва $f(0)+f(1)=C$.

Последното равенство дава $C=\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu^2}=\frac{\pi^2}{6}$ съгласно дефиницията на f и зад. 131 а) с $x=0$. Сега от (3) при $x=\frac{1}{2}$ следва $2f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi^2}{6}-(\ln 2)^2$. Следователно $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{2^\nu\nu^2}=\frac{\pi^2}{12}-\frac{1}{2}(\ln 2)^2$.

Девета глава

1. Достатъчно е да се установи, че производните на функциите в десните страни съвпадат със съответните подинтегрални функции.

2. а) x^2+x. б) x^3+x^2-x. в) $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{2}\ln|x|$. г) $-\frac{2}{\sqrt{x}}+\frac{1}{x}$. д) $\frac{4}{7}x^{\frac{7}{4}}-4\sqrt{x}-\frac{1}{2x^2}$. е) $\frac{x^5}{5}+\frac{x^3}{3}$. ж) $\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}-2x^{\frac{3}{2}}+8\sqrt{x}$.
з) $\frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}}-\frac{6}{5}x^{\frac{5}{2}}+2x^{\frac{3}{2}}-2\sqrt{x}$. и) $\frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}+12x^{\frac{1}{3}}+4\ln|x|$.
й) $3e^x-\frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}}$. к) $\cos x+\frac{3}{2}\arcsin x$. л) $4\sin x-\frac{5}{3}\arcsin x$.
м) $\frac{2^x}{\ln 2}+2\sqrt{x}$. н) $-\frac{10^{-x}}{\ln 10}+x+\operatorname{arctg}x$. о) $\int\frac{dx}{x^2(1-x^2)}$ $=\int\frac{1-x^2+x^2}{x^2(1-x^2)}dx=\int\frac{dx}{x^2}+\int\frac{dx}{1-x^2}=-\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|$, вж. зад. 1, ж) и з). п) $-x+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|$. р) $\int\frac{x^4}{x^2-1}dx$ $=\int\frac{x^4-1+1}{x^2-1}dx=\int(x^2+1)dx+\int\frac{dx}{x^2-1}=\frac{x^3}{3}+x-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|$.
с) $x-\frac{3}{2}\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|$. т) $x^3+\operatorname{arctg}x$. у) $\int\frac{x^5-x+3}{x^2-1}dx$ $=\int\frac{x^5-x^3}{x^2-1}dx+\int\frac{x^3-x}{x^2-1}dx+\int\frac{3}{x^2-1}dx=\frac{x^4}{4}+\frac{x^2}{2}-\frac{3}{2}\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|$.
ф) $\frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{2}+\operatorname{arctg}x$. х) $-x^3+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|$. ц) $\int\operatorname{tg}^2x\,dx$ $=\int\frac{1-\cos^2x}{\cos^2x}dx=\operatorname{tg}x-x$. ч) $-\operatorname{ctg}x-x$. ш) $-\operatorname{tg}x-\operatorname{ctg}x$.

щ) $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x} = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x.$

ъ) $\int \sin^2 \frac{x}{2} dx = \frac{1}{2} \int (1 - \cos x) dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{2} \sin x.$ ь) $\frac{x}{2} + \frac{1}{2} \sin x.$

ю) $\int \sqrt{1 - \sin 2x}\, dx = \int \sqrt{(\cos x - \sin x)^2}\, dx = \varepsilon \int (\cos x - \sin x) dx$ $= \varepsilon(\sin x + \cos x)$, където $\varepsilon = -1$ при $\frac{\pi}{4} + 2\nu\pi \leqq x \leqq \frac{\pi}{4} + (2\nu + 1)\pi$ и $\varepsilon = 1$ при $\frac{\pi}{4} + (2\nu + 1)\pi \leqq x \leqq \frac{\pi}{4} + 2(\nu + 1)\pi$ $(\nu \in \mathrm{I})$. По този начин се получават примитивни само в посочените интервали, но не и върху цялата права, понеже отделните примитивни имат несъвпадащи стойности в точките $\frac{\pi}{4} + \nu\pi$ $(\nu \in \mathrm{I})$. За да се получи примитивна върху цялата права, е нужно отделните „късове“ да се „залепят“ чрез прибавяне на подходящи константи с оглед да се осигури непрекъснатостта на примитивната в тези точки. Не е трудно да се съобрази, че една дефинирана върху цялата права примитивна е например функцията $f : \mathrm{R} \to \mathrm{R}$, дефинирана с $f(x)$ $= (-1)^{\nu-1}(\sin x + \cos x) + 2\nu\sqrt{2}$ при $\frac{\pi}{4} + \nu\pi \leqq x \leqq \frac{\pi}{4} + (\nu+1)\pi$ $(\nu \in \mathrm{I})$.

я) $\arcsin x + \ln(x + \sqrt{1 + x^2})$, вж. зад. 1 б).

3. а) $\int \frac{dx}{x+a} = \int \frac{d(x+a)}{x+a} = \int \frac{du}{u} = \ln|u| = \ln|x+a|$. (Междинното пресмятане с u обикновено се изпуска.) б) $\int (2x-3)^{10} dx$ $= \frac{1}{2} \int (2x-3)^{10} d(2x-3) = \frac{(2x-3)^{11}}{22}$. в) $-\frac{1}{2} \cos 2x$. г) $\frac{x}{2}$ $-\frac{1}{4} \sin 2x$. д) $\frac{1}{2} \operatorname{arctg} 2x$. е) $-e^{-x}$. ж) $-\frac{1}{7} \cos(7x+3)$.

з) $-\frac{2}{5}\sqrt{2 - 5x}$. и) $\int \frac{dx}{2 - 3x^2} = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{1 - \left(\sqrt{\frac{3}{2}}x\right)^2}$

$$= \frac{1}{\sqrt{6}} \int \frac{d\sqrt{\frac{3}{2}}x}{1 - \left(\sqrt{\frac{3}{2}}x\right)^2} = \frac{1}{2\sqrt{6}} \ln\left|\frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}x}{\sqrt{2} - \sqrt{3}x}\right|.$$ й) $\int \frac{dx}{\sqrt{3x^2 - 2}}$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \int \frac{d(\sqrt{3}x)}{\sqrt{(\sqrt{3}x)^2 - 2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \ln|\sqrt{3}x + \sqrt{3x^2 - 2}|.$$ к) $\int \frac{dx}{\sqrt{2 - 3x^2}}$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{dx}{\sqrt{1 - \left(\sqrt{\frac{3}{2}}x\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \int \frac{d\sqrt{\frac{3}{2}}x}{\sqrt{1 - \left(\sqrt{\frac{3}{2}}x\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \arcsin \sqrt{\frac{3}{2}}x.$$

л) $\frac{1}{\sqrt{2}} \ln\left(\sqrt{2}x + \sqrt{2x^2 + 5}\right)$. м) $\frac{1}{2\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x}{\sqrt{3}}$. н) $\frac{1}{a} \operatorname{ctg} ax$.

о) $-\frac{1}{2} e^{-2x+3}$. п) $\int \frac{2x+3}{(x-2)^3} dx = \int \frac{2(x-2)+7}{(x-2)^3} dx$ $= 2 \int \frac{d(x-2)}{(x-2)^2} + 7 \int \frac{d(x-2)}{(x-2)^3} = -\frac{2}{x-2} - \frac{7}{2} \cdot \frac{1}{(x-2)^2}.$

р) $\int \frac{x^4 + 3x^3 - 1}{(x+1)^2} dx = \int \frac{(u-1)^4 + 3(u-1)^3 - 1}{u^2} du = \frac{u^3}{3} - \frac{u^2}{2}$ $-3u + 5\ln|u| + \frac{3}{u}$, където $u = x + 1$. с) $\int \frac{x^4 + 3x^2 + 4}{x^2 + 2} dx$ $= \int (x^2 + 1) dx + 2 \int \frac{dx}{x^2 + 2} = \frac{x^3}{3} + x + \sqrt{2} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{2}}.$

т) $-\frac{5}{2}(1 - x)^{\frac{2}{5}}$. у) $\int \frac{dx}{1 + \sin x} = \int \frac{dx}{1 + \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}$ $= \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)} = -\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)$. ф) $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)$.

х) $x + \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)$. ц) $-x + \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)$. ч) $-2\operatorname{ctg}\left(\frac{x}{2} + 1\right)$.

ш) $2 \operatorname{tg} \frac{x-3}{2}$. щ) $-\frac{1}{2} \operatorname{ctg}\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$. ъ) $\int \sin 3x \sin 5x\, dx$ $= \frac{1}{2} \int (\cos 2x - \cos 8x) dx = \frac{1}{4} \sin 2x - \frac{1}{16} \sin 8x.$

ь) $\frac{3}{5} \sin \frac{5x}{6} + 3 \sin \frac{x}{6}$. ю) $\frac{1}{2(a-b)} \sin(a-b)x - \frac{1}{2(a+b)} \sin(a+b)x.$

я) $\frac{1}{8} \sin 2x + \frac{1}{16} \sin 4x - \frac{1}{24} \sin 6x - \frac{x}{4}.$

4. а) $\int \frac{\cos x\, dx}{1 + \sin x} = \int \frac{d(1 + \sin x)}{1 + \sin x} = \ln(1 + \sin x).$

б) $-\frac{1}{2} \ln(1 + \cos 2x)$. в) $\int \frac{x\, dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2 - a^2)}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \sqrt{x^2 - a^2}.$

г) $\frac{\sin^4 x}{4}$. д) $\frac{1}{2}e^{x^2}$. е) $\int \frac{\ln x}{x}dx = \int \ln x d\ln x = \frac{1}{2}\ln^2 x$.

ж) $\ln|\ln x|$. з) $\frac{1}{2}\operatorname{arctg} x^2$. и) $-\frac{1}{3}(a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}$.

й) $\int \cos^3 x dx = \int (1-\sin^2 x) d\sin x = \sin x - \frac{\sin^3 x}{3}$. к) $e^{\sin x}$.

л) $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. м) $\frac{1}{4}(1+x^3)^{\frac{4}{3}}$. н) $-\frac{1}{2}\frac{1}{1+x^2}$. о) $\int \frac{x dx}{a^4 + x^4}$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{dx^2}{a^4 + (x^2)^2} = \frac{1}{2a^2}\int \frac{d\frac{x^2}{a^2}}{1+\left(\frac{x^2}{a^2}\right)^2} = \frac{1}{2a^2}\operatorname{arctg}\frac{x^2}{a^2}.$$

п) $\frac{1}{2}\arcsin\frac{x^2}{a^2}$. р) $-\frac{1}{4}\ln|3-2x^2|$. с) $\ln|\operatorname{arctg} x|$.

т) $\int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}} = 2\int \frac{d\sqrt{x}}{1+(\sqrt{x})^2} = 2\operatorname{arctg}\sqrt{x}$. у) $-\frac{3}{2}(\sin x + \cos x)^{\frac{2}{3}}$.

ф) и х) Означаваме първия интеграл с f, а втория — с g. Тогава $f + g = \int dx = x$, $f - g = \int \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}dx = -\int \frac{d(\cos x + \sin x)}{\sin x + \cos x}$ $= -\ln|\sin x + \cos x|$. Ето защо $f = \frac{1}{2}(x - \ln|\sin x + \cos x|)$, $g = \frac{1}{2}(x + \ln|\sin x + \cos x|)$. ц) $\frac{1}{4}\sin^4 x - \frac{1}{6}\sin^6 x$.

ч) $-\operatorname{arctg}\cos x$. ш) $\int \frac{dx}{\cos^4 x} = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^4 x}dx$

$= \int \operatorname{tg}^2 x d\operatorname{tg} x + \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x + \operatorname{tg} x$. щ) $\int \frac{dx}{\sin x}$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} = \int \frac{d\frac{x}{2}}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}} = \int \frac{d\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}} = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|.$$

ъ) $\int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{dx}{\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)} = \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right|$.

ь) $\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{8}\right)\right|$. ю) $\frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{8}\right)\right|$. я) Нека φ е ъгъл, за който $\cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ и $\sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$. Тогава

$$\int \frac{dx}{a\sin x + b\cos x} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\int \frac{dx}{\cos\varphi\sin x + \sin\varphi\cos x}$$

$= \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\int \frac{d(x+\varphi)}{\sin(x+\varphi)} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x+\varphi}{2}\right|$ съгласно щ).

5. а) $\int \frac{dx}{e^x + 1} = \int \frac{e^{-x}dx}{1+e^{-x}} = -\int \frac{d(e^{-x}+1)}{1+e^{-x}} = -\ln(1+e^{-x})$.

б) $-2\arcsin e^{-\frac{x}{2}}$. в) $-\frac{2}{\sqrt{3}}\arcsin\sqrt{\frac{3}{2}}e^{-\frac{x}{2}}$. г) $\int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}dx$

$= \int \frac{(x^2-1)dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \int \frac{x dx}{\sqrt{x^2-1}} - \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$

$= \sqrt{x^2-1} - \int \frac{dx}{x^2\sqrt{1-(x^{-1})^2}} = \sqrt{x^2-1} + \int \frac{d\frac{1}{x}}{\sqrt{1-(x^{-1})^2}}$

$= \sqrt{x^2-1} + \arcsin\frac{1}{x}$ при $x > 0$.

При $x < 0$ се работи аналогично и се получава $\sqrt{x^2-1}$ $-\arcsin\frac{1}{x}$. д) $\sqrt{1-x^2} - \ln\left(\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x^2} - 1}\right)$ при $x > 0$ и $\sqrt{1-x^2}$ $+\ln\left|\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x^2} - 1}\right|$ при $x < 0$. е) $-\frac{\sqrt{2-x^2}}{x} - \arcsin\frac{x}{\sqrt{2}}$.

ж) $\sqrt{2-x^2} - \sqrt{2}\ln\left(\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x^2} - \frac{1}{2}}\right)$ при $x > 0$ и $\sqrt{2-x^2}$ $+\sqrt{2}\ln\left|\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x^2} - \frac{1}{2}}\right|$ при $x < 0$. з) Рационализирайте знаменателя, за да сведете към д) и ж). и) Най-напред ще направим пресмятанията в интервала $(0, \infty)$:

$$\int \frac{dx}{(1+x^n)^{\frac{n+1}{n}}} = \int \frac{dx}{x^{n+1}(1+x^{-n})^{\frac{n+1}{n}}}$$

$$= -\frac{1}{n}\int \frac{d(1+x^{-n})}{(1+x^{-n})^{\frac{n+1}{n}}} = (1+x^{-n})^{-\frac{1}{n}} = \frac{x}{\sqrt[n]{1+x^n}}.$$

Очевидно тези пресмятания са легитимни и за всяка реална стойност на n. Същите пресмятания са в сила и в интервалите

$(-\infty, -1)$ и $(-1, 0)$ за нечетни n. При четно n пресмятането на интеграла в $(-\infty, 0)$ става по следния начин:

$$\int \frac{dx}{(1+x^n)^{\frac{n+1}{n}}} = -\int \frac{dx}{x^{n+1}(1+x^{-n})^{\frac{n+1}{n}}} = \frac{1}{n}\int \frac{d(1+x^{-n})}{(1+x^{-n})^{\frac{n+1}{n}}}$$

$$= -(1+x^{-n})^{-\frac{1}{n}} = \frac{x}{\sqrt[n]{1+x^n}}.$$

Сега не е трудно да се съобрази, че функцията $\dfrac{x}{\sqrt[n]{1+x^n}}$ е търсеният интеграл във всеки от интервалите $(-\infty, -1)$, $(-1, \infty)$ при нечетно n и върху цялата права при четно n. й) $\displaystyle\int \frac{x^2+1}{x^4+1}dx$

$$= \int \frac{1+\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}}dx = \int \frac{d\left(x-\frac{1}{x}\right)}{2+\left(x-\frac{1}{x}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{\sqrt{2}}\left(x-\frac{1}{x}\right).$$

Това решение важи във всеки от интервалите $(-\infty, 0)$ и $(0, \infty)$. Сега не е трудно да се съобрази, че една примитивна върху цялата права е функцията $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, дефинирана с

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arc\,tg}\dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(x-\dfrac{1}{x}\right) & \text{при } x > 0, \\ -\dfrac{\pi}{2\sqrt{2}} & \text{при } x = 0, \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arc\,tg}\dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(x-\dfrac{1}{x}\right) - \dfrac{\pi}{\sqrt{2}} & \text{при } x < 0. \end{cases}$$

к) $\ln\dfrac{x^2-1+\sqrt{x^4+1}}{|x|}$. л) $\dfrac{-1}{2(1+e^{2x})}$. м) $\dfrac{1}{2(1-e^{2x})}$.

6. а) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+6x+13} = \int \frac{dx}{(x+3)^2+4} = \frac{1}{2}\int \frac{d\frac{x+3}{2}}{1+\left(\frac{x+3}{2}\right)^2}$

$= \dfrac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}\dfrac{x+3}{2}$. б) $\ln(x^2+6x+13) + \dfrac{5}{2}\operatorname{arc\,tg}\dfrac{x+3}{2}$.

в) $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{x^2+x+1} = \int \frac{x\,dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} = \int \frac{\left(x+\frac{1}{2}\right)dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}$

$-\dfrac{1}{2}\displaystyle\int \frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} = \frac{1}{2}\ln(x^2+x+1) - \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}.$

г) $\dfrac{2}{3}\ln(3x^2+2x+5) + \dfrac{20}{3\sqrt{14}}\operatorname{arc\,tg}\dfrac{3x+1}{\sqrt{14}}$.

д) $\dfrac{2}{\sqrt{4ac-b^2}}\operatorname{arc\,tg}\dfrac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}}$ при $b^2-4ac<0$ и

$\dfrac{1}{\sqrt{b^2-4ac}}\ln\left|\dfrac{2ax+b-\sqrt{b^2-4ac}}{2ax+b+\sqrt{b^2-4ac}}\right|$ при $b^2-4ac>0$.

е) $\dfrac{A}{2a}\ln|ax^2+bx+c| + \dfrac{2aB-Ab}{a\sqrt{4ac-b^2}}\operatorname{arc\,tg}\dfrac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}}$ при $b^2-4ac<0$ и

$\dfrac{A}{2a}\ln|ax^2+bx+c| + \dfrac{2aB-Ab}{2a\sqrt{b^2-4ac}}\ln\left|\dfrac{2ax+b-\sqrt{b^2-4ac}}{2ax+b+\sqrt{b^2-4ac}}\right|$ при $b^2-4ac>0$.

7. а) $\displaystyle\int \frac{x^4dx}{x^2+3} = \int \frac{x^4-9}{x^2+3}dx + 9\int \frac{dx}{x^2+3} = \frac{x^3}{3} - 3x$

$+3\sqrt{3}\operatorname{arc\,tg}\dfrac{x}{\sqrt{3}}$. б) $\dfrac{x^2}{2} - x + \dfrac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\dfrac{2x+1}{\sqrt{3}}$. в) $x+\ln(x^2-x+1)$

$+\dfrac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\dfrac{2x-1}{\sqrt{3}}$. г) Внесете единия множител под диференциала, за да получите $\dfrac{1}{12}\ln(3x^4-2x^2+1) + \dfrac{1}{6\sqrt{2}}\operatorname{arc\,tg}\dfrac{3x^2-1}{\sqrt{2}}$.

8. а) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-3x+5}} = \int \frac{d\left(x-\frac{3}{2}\right)}{\sqrt{\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{11}{4}}}$

$= \ln\left(x-\dfrac{3}{2}+\sqrt{x^2-3x+5}\right)$. б) $\arcsin\dfrac{x-2}{\sqrt{6}}$.

в) $\ln\left(x+\dfrac{5}{2}+\sqrt{x^2+5x+7}\right)$. г) $\arcsin\dfrac{2x-1}{\sqrt{13}}$.

д) $\dfrac{1}{\sqrt{a}}\ln\left|x+\dfrac{b}{2a}+\sqrt{x^2+\dfrac{b}{a}x+\dfrac{c}{a}}\right|$. е) $-\dfrac{1}{\sqrt{-a}}\arcsin\dfrac{2ax+b}{\sqrt{b^2-4ac}}$.

9. а) $\displaystyle\int \frac{5x+7}{\sqrt{5-4x-x^2}}dx = \int \frac{5(x+2)-3}{\sqrt{9-(x+2)^2}}dx$

$$= -\frac{5}{2}\int \frac{d(9-(x+2)^2)}{\sqrt{9-(x+2)^2}} - 3\int \frac{d\frac{x+2}{3}}{\sqrt{1-\left(\frac{x+2}{3}\right)^2}} = -5\sqrt{9-(x+2)^2}$$

$-3\arcsin\frac{x+2}{3}$. б) $3\sqrt{3+x+x^2}+\frac{1}{2}\ln\left(x+\frac{1}{2}+\sqrt{3+x+x^2}\right)$.

в) $\sqrt{x^2-ax}+\frac{a}{2}\ln\left|x-\frac{a}{2}+\sqrt{x^2-ax}\right|$. г) $\sqrt{x^2+x-1}$
$-\frac{1}{2}\ln\left|x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x-1}\right|$. д) $-\sqrt{1+x-x^2}+\frac{1}{2}\arcsin\frac{2x-1}{\sqrt{5}}$.

е) $-\sqrt{ax-x^2}+\frac{3a}{2}\arcsin\frac{2x-a}{a}$ при $a>0$ и
$-\sqrt{ax-x^2}-\frac{3a}{2}\arcsin\frac{2x-a}{a}$ при $a<0$.

10. След диференциране на двете страни се вижда, че трябва да се докаже съществуването на полином Q от степен най-много $n-1$ и на константа A, за които да е в сила

(1) $$P(x) = Q'(x)(ax^2+2bx+c)+Q(x)(ax+b)+A$$

за всяко $x\in\Delta$. Нека

(2) $$P(x) = p_0x^n+p_1x^{n-1}+\dots+p_n \quad (p_0\neq 0).$$

По условие полиномът Q трябва да има вида

(3) $$Q(x) = q_0x^{n-1}+q_1x^{n-2}+\dots+q_{n-1}.$$

След заместване на (2) и (3) в (1) и сравняване на коефициентите пред еднаквите степени на x за числата $q_0, q_1, \dots, q_{n-1}$ и A се получава системата:

$$\left|\begin{array}{l} p_0 = naq_0,\\ p_1 = (n-1)aq_1+(2n-1)bq_0,\\ p_2 = (n-2)aq_2+(2n-3)bq_1+(n-1)cq_0,\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ p_n = bq_{n-1}+cq_{n-2}+A, \end{array}\right.$$

която поради $a\neq 0$ притежава единствено решение.

11. а) $\int\frac{x^2+1}{\sqrt{-x^2+3x-2}}dx = (px+q)\sqrt{-x^2+3x-2}$
$+A\int\frac{dx}{\sqrt{-x^2+3x-2}}$, където p, q и A са константи (вж. зад. 10).

Диференцираме двете страни: $\frac{x^2+1}{\sqrt{-x^2+3x-2}}$

$$= p\sqrt{-x^2+3x-2}+(px+q)\frac{-2x+3}{2\sqrt{-x^2+3x-2}}+\frac{A}{\sqrt{-x^2+3x-2}}.$$

След освобождаване от знаменателя константите p, q и A се определят по метода на неопределените коефициенти (зад. 55, гл. II).

Интегралът $\int\frac{dx}{\sqrt{-x^2+3x-2}}$ може да се пресметне чрез допълване до точен квадрат, както в зад. 8. Окончателно се получава $\frac{27}{8}\arcsin(2x-3)-\frac{2x+9}{4}\sqrt{-x^2+3x-2}$.

б) $\frac{1}{6}(2x^2+x+7)\sqrt{x^2+2x-1}-2\ln|x+1+\sqrt{x^2+2x-1}|$.

в) $-\frac{1}{8}(2x^3-3x)\sqrt{1-x^2}-\frac{3}{8}\arcsin x$.

г) $\frac{x}{4}(x^2+1)\sqrt{x^2+2}-\frac{1}{2}\ln(x+\sqrt{x^2+2})$.

13. а) $-\arcsin\frac{1}{x}$ в $(1,\infty)$ и $\arcsin\frac{1}{x}$ в $(-\infty,-1)$.

б) $$\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2+x+1}} = \int\frac{dx}{x^2\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}} = -\int\frac{d\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}}$$

$= -\ln\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{2}+\sqrt{\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\right)$ при $x>0$; при $x<0$ се работи аналогично.

в) $\frac{3x-1}{2x^2}\sqrt{2x^2+2x+1}-\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{x}+1+\frac{1}{x}\sqrt{2x^2+2x+1}\right)$ при $x>0$.

14. а) Нека $I=\int\sqrt{x^2+a}\,dx$. След интегриране по части се получава

(1) $$I = x\sqrt{x^2+a}-\int x\,d\sqrt{x^2+a} = x\sqrt{x^2+a}-\int\frac{x^2}{\sqrt{x^2+a}}dx.$$

Нека

(2) $$J = \int\frac{x^2}{\sqrt{x^2+a}}dx.$$

Тогава

(3) $$J = \int\frac{x^2+a}{\sqrt{x^2+a}}dx - a\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} = I - a\ln|x+\sqrt{x^2+a}|.$$

От (1) — (3) следва

$$(4)\qquad \left|\begin{array}{l} I = x\sqrt{x^2+a} - J, \\ J = I - a\ln|x+\sqrt{x^2+a}|. \end{array}\right.$$

След решаване на системата (4) се получава

$$(5)\qquad \begin{array}{l} I = \dfrac{1}{2}x\sqrt{x^2+a} + \dfrac{a}{2}\ln|x+\sqrt{x^2+a}|, \\ J = \dfrac{1}{2}x\sqrt{x^2+a} - \dfrac{a}{2}\ln|x+\sqrt{x^2+a}|. \end{array}$$

Като страничен продукт от това решение наред с интеграла I се получи и интегралът (2). Ще отбележим изрично, че изложеното решение не дава доказателство за *съществуването* на примитивните I и J. Полученият резултат може да се изкаже кратко така: ако примитивните I и J съществуват, в сила са формулите (5). Обаче по силата на една известна теорема (зад. 19, гл. X) всяка непрекъсната функция притежава примитивна, поради което съществуването на I и J се гарантира от общи съображения.

б) Работи се, както в а), и се получава

$$\int\sqrt{a^2-x^2}dx = \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}.$$

Наред с търсения интеграл при тези методи се получава и

$$\int\frac{x^2dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} - \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}.$$

15. а) $\dfrac{x}{2(1+x^2)} + \dfrac{1}{2}\operatorname{arc\,tg} x$. б) $\dfrac{x}{6(3+x^2)} + \dfrac{1}{6\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\dfrac{x}{\sqrt{3}}$.

в) Нека $I = \displaystyle\int\frac{dx}{(3+2x^2)^2}$. Тогава

$$(1)\qquad I = \frac{1}{3}\int\frac{3+2x^2}{(3+2x^2)^2}dx - \frac{2}{3}\int\frac{x^2}{(3+2x^2)^2}dx.$$

Нека

$$(2)\qquad J = \int\frac{x^2}{(3+2x^2)^2}dx.$$

Очевидно

$$(3)\qquad \begin{aligned} J &= \frac{1}{4}\int\frac{xd(3+2x^2)}{(3+2x^2)^2} = -\frac{1}{4}\int xd\frac{1}{3+2x^2} \\ &= -\frac{1}{4}\frac{x}{3+2x^2} + \frac{1}{4}\int\frac{dx}{3+2x^2}. \end{aligned}$$

От (1) — (3) следва

$$I = \frac{x}{6(3+2x^2)} + \frac{1}{6}\int\frac{dx}{3+2x^2} = \frac{x}{6(3+2x^2)} + \frac{1}{6\sqrt{6}}\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{2}{3}}x.$$

Да отбележим, че като част от решението се получава и интегралът (2). Наистина от (3) следва

$$J = -\frac{x}{4(3+2x^2)} + \frac{1}{4\sqrt{6}}\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{2}{3}}x.$$

Всички останали примери се решават аналогично.

г) $\dfrac{x}{2(1-x^2)} + \dfrac{1}{4}\ln\left|\dfrac{1+x}{1-x}\right|$. д) $\dfrac{x}{6(3-x^2)} + \dfrac{1}{12\sqrt{3}}\ln\left|\dfrac{\sqrt{3}+x}{\sqrt{3}-x}\right|$.

е) $\dfrac{x}{6(3-2x^2)} + \dfrac{1}{12\sqrt{6}}\ln\left|\dfrac{\sqrt{3}+x\sqrt{2}}{\sqrt{3}-x\sqrt{2}}\right|$. В решението на г) — е) се използват зад. 1 ж) и з).

16. а) Нека $I_n = \displaystyle\int\frac{dx}{(a^2+x^2)^n}$. Тогава

$$\begin{aligned} I_{n+1} &= \frac{1}{a^2}\int\frac{a^2+x^2}{(a^2+x^2)^{n+1}}dx - \frac{1}{a^2}\int\frac{x^2dx}{(a^2+x^2)^{n+1}} \\ &= \frac{1}{a^2}I_n - \frac{1}{2a^2}\int\frac{xd(a^2+x^2)}{(a^2+x^2)^{n+1}} = \frac{1}{a^2}I_n + \frac{1}{2a^2n}\int xd\frac{1}{(a^2+x^2)^n} \\ &= \frac{1}{a^2}I_n + \frac{1}{2a^2n}\frac{x}{(a^2+x^2)^n} - \frac{1}{2a^2n}I_n = \frac{x}{2a^2n(a^2+x^2)^n} + \frac{2n-1}{2a^2n}I_n, \end{aligned}$$

като сме използвали интегриране по части. б) Работи се аналогично.

Формули от вида а) и б) от зад. 16 се наричат понякога *рекурентни*, а използването им — *рекурсия*. По-нататък читателят ще срещне множество подобни примери.

18. а) $-\dfrac{5x^3+6x}{8(2+x^2)^2} + \dfrac{3}{8\sqrt{2}}\operatorname{arc\,tg}\dfrac{x}{\sqrt{2}}$.

б) $\dfrac{5x^3-6x}{8(2-x^2)^2} + \dfrac{3}{16\sqrt{2}}\ln\left|\dfrac{\sqrt{2}+x}{\sqrt{2}-x}\right|$.

Използвайте предишната задача.

19. а) и б) Нека

(1) $$I = \int \sin(\ln x)dx, \quad J = \int \cos(\ln x)dx.$$

След интегриране по части получаваме

(2) $$I = x\sin(\ln x) - \int x d\sin(\ln x) = x\sin(\ln x) - J$$

и

(3) $$J = x\cos(\ln x) + I.$$

От (1) — (3) следва

$$I = \frac{x}{2}(\sin(\ln x) + \cos(\ln x)),$$

$$J = \frac{x}{2}(\sin(\ln x) + \cos(\ln x)).$$

20. а) $\int xe^x dx = \int x de^x = xe^x - \int e^x dx = (x-1)e^x$.
б) $-(x^4 + 4x^3 + 12x^2 + 24x + 24)e^{-x}$.
в) $\frac{1}{27}(9x^3 - 27x^2 + 18x + 39)e^{3x}$. г) $-\frac{1}{2}(x^4 + 2x^2 + 2)e^{-x^2}$.

21. а) $\int x\sin x dx = -\int x d\cos x = -x\cos x + \int \cos x dx$
$= -x\cos x + \sin x$. б) $-x^2\cos x + 2x\sin x + 2\cos x$.
в) $-\frac{x^3}{2}\cos(2x+3) + \frac{3x^2}{4}\sin(2x+3) + \frac{3x}{4}\cos(2x+3) - \frac{3}{8}\sin(2x+3)$.
г) $\int x^3\sin x^2 dx = \frac{1}{2}\int x^2\sin x^2 dx^2 = -\frac{1}{2}\int x^2 d\cos x^2$
$= -\frac{1}{2}x^2\cos x^2 + \frac{1}{2}\int \cos x^2 dx^2 = -\frac{1}{2}x^2\cos x^2 + \frac{1}{2}\sin x^2$.

22. а) $x\sin x + \cos x$. б) $\int x\sin^2 x dx = \int x\frac{1-\cos 2x}{2}dx$
$= \frac{x^2}{4} - \frac{1}{4}\int x d\sin 2x = \frac{x^2}{4} - \frac{x}{4}\sin 2x + \frac{1}{4}\int \sin 2x dx = \frac{x^2}{4} - \frac{x}{4}\sin 2x$
$-\frac{1}{8}\cos 2x$. в) $\frac{3}{4}\sin x - \frac{\sin 3x}{36} - \frac{3}{4}x\cos x + \frac{x}{12}\cos 3x$.
г) $\left(\frac{3}{4}x^2 - \frac{3}{2}\right)\sin x + \left(\frac{x^2}{12} - \frac{1}{54}\right)\sin 3x + \frac{3}{2}x\cos x + \frac{x}{18}\cos 3x$.

23. Многократно интегриране по части. Как се опростява формулата, ако f е полином от n-та степен?

24. Приложете зад. 23.

25. а) Нека $I_m = \int \sin^m x dx$. Тогава

$$I_m = -\int \sin^{m-1} x d\cos x = -\sin^{m-1} x\cos x + (m-1)\int \cos^2 x\sin^{m-2} x dx$$

$$= -\sin^{m-1} x\cos x + (m-1)I_{m-2} - (m-1)I_m,$$

откъдето търсеното равенство следва веднага.

б) Нека $I_m = \int \frac{dx}{\sin^m x}$. Тогава

$$I_m = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^m x}dx = I_{m-2} + \int \frac{\cos x d\sin x}{\sin^m x}$$

$$= I_{m-2} + \frac{1}{1-m}\int \cos x d\frac{1}{\sin^{m-1} x} = I_{m-2} - \frac{1}{m-1}\frac{\cos x}{\sin^{m-1} x} - \frac{1}{m-1}I_{m-2},$$

откъдето търсеното равенство следва веднага.

26. За а) — г) използвайте зад. 30, гл. II. а) $\frac{3x}{8} - \frac{\sin 2x}{4}$
$+\frac{\sin 4x}{32}$. б) $-\frac{5\cos x}{8} + \frac{5\cos 3x}{48} - \frac{\cos 5x}{80}$. в) $\frac{5x}{16} - \frac{15\sin 2x}{64}$
$+\frac{3\sin 4x}{64} - \frac{\sin 6x}{192}$. г) $-\frac{35\cos x}{64} + \frac{7\cos 3x}{64} - \frac{7\cos 5x}{320} + \frac{\cos 7x}{448}$.
д) $-\frac{\cos x}{2\sin^2 x} + \frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|$(вж. зад. 4 щ)). е) $-\frac{\cos x}{3\sin^3 x} - \frac{2}{3}\operatorname{ctg} x$.
ж) $-\frac{\cos x}{4\sin^4 x} - \frac{3\cos x}{8\sin^2 x} + \frac{3}{8}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|$.
з) $-\frac{\cos x}{5\sin^5 x} - \frac{4\cos x}{15\sin^3 x} - \frac{8}{15}\operatorname{ctg} x$.

27. Аналогично на зад. 25.

28. За а) — г) използвайте зад. 30, гл. II. а) $\frac{3x}{8} + \frac{\sin 2x}{4}$
$+\frac{\sin 4x}{32}$. б) $\frac{5\sin x}{8} + \frac{5\sin 3x}{48} + \frac{\sin 5x}{80}$. в) $\frac{5x}{16} + \frac{15\sin 2x}{64} + \frac{3\sin 4x}{64}$
$+\frac{\sin 6x}{192}$. г) $\frac{35\sin x}{64} + \frac{7\sin 3x}{64} + \frac{7\sin 5x}{320} + \frac{\sin 7x}{448}$. д) $\frac{\sin x}{2\cos^2 x}$
$+\frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)\right|$(вж. зад. 4 ъ)). е) $\frac{\sin x}{4\cos^4 x} + \frac{3\sin x}{8\cos^2 x}$
$+\frac{3}{8}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)\right|$. ж) $\frac{\sin x}{5\cos^5 x} + \frac{4\sin x}{15\cos^3 x} + \frac{8}{15}\operatorname{tg} x$.

29. Аналогично на зад. 25.

30. а) $\frac{x}{16} - \frac{\sin 4x}{64} + \frac{\sin^3 2x}{48}$. б) $\frac{\sin^5 x}{5} - \frac{2\sin^7 x}{7} + \frac{\sin^9 x}{9}$.

31. Аналогично на зад. 25.

32. а) $\int \operatorname{tg} x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = -\int \frac{d\cos x}{\cos x} = -\ln|\cos x|$.

б) $\int \operatorname{ctg} x dx = \int \frac{\cos x}{\sin x} dx = \int \frac{d \sin x}{\sin x} = \ln|\sin x|$.

в) $\frac{1}{3\cos^3 x} - \frac{1}{\cos x}$. г) $\frac{1}{4}\operatorname{tg}^4 x - \frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x - \ln|\cos x|$.

д) $\frac{1}{5}\operatorname{tg}^5 x$. е) $-\frac{1}{4}\operatorname{ctg}^4 x + \frac{1}{2}\operatorname{ctg}^2 x + \ln|\sin x|$.

33. Аналогично на зад. 25.

34. а) $\int \frac{dx}{\sin^4 x \cos^4 x} = 16\int \frac{dx}{\sin^4 2x} = -8\int \frac{d\operatorname{ctg} 2x}{\sin^2 2x}$ $= -8\int (1+\operatorname{ctg}^2 2x) d\operatorname{ctg} 2x = -8\operatorname{ctg} 2x - \frac{8}{3}\operatorname{ctg}^3 2x$. б) $\frac{1}{4\sin^2 x \cos^4 x} \frac{1}{}$ $-3\frac{\cos 2x}{\sin^2 2x} + 3\ln|\operatorname{tg} x|$. в) $\int \frac{dx}{\sqrt{\sin^3 x \cos^5 x}} = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sqrt{\sin^3 x \cos^5 x}} dx$ $= \int \sqrt{\operatorname{tg} x}\frac{dx}{\cos^2 x} + \int \frac{dx}{\sqrt{\operatorname{ctg} x}\sin^2 x} = \frac{2}{3}\sqrt{\operatorname{tg}^3 x} - 2\sqrt{\operatorname{ctg} x}$.

35. а) и б) Да положим $c(x) = \int e^{ax}\cos bx dx$, $s(x)$ $= \int e^{ax}\sin bx dx$. Тогава $c(x) = \frac{1}{a}\int \cos bx de^{ax} = \frac{1}{a}e^{ax}\cos bx + \frac{b}{a}s(x)$, $s(x) = \frac{1}{a}\int \sin bx de^{ax} = \frac{1}{a}e^{ax}\sin bx - \frac{b}{a}c(x)$. От тези две уравнения се намира

$$c(x) = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\cos bx + b\sin bx),$$

$$s(x) = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\sin bx - b\cos bx).$$

Макар и изведен при предположението $a \neq 0$, този резултат е верен и при $a = 0$.

36. а) $\frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} - e^x(\cos x + \sin x) + \frac{e^{2x}}{2}$.

б) $\frac{e^{ax}}{2a} - \frac{e^{ax}}{a^2+4b^2}\left(\frac{a}{2}\cos 2bx + b\sin 2bx\right)$.

37. а) $\frac{e^{ax}}{a^2+b^2}\left(\left(ax - \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\right)\sin bx - \left(bx - \frac{2ab}{a^2+b^2}\right)\cos bx\right)$.

б) $\frac{e^{ax}}{a^2+b^2}\left(\left(ax - \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\right)\cos bx + \left(bx - \frac{2ab}{a^2+b^2}\right)\sin bx\right)$.

в) $\frac{e^{ax}}{a^2+b^2}\left\{\left(ax^2 - 2\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}x + \frac{2a(a^2-3b^2)}{(a^2+b^2)^2}\right)\cos bx\right.$ $\left. + \left(bx^2 - \frac{4ab}{a^2+b^2}x + \frac{2b(3a^2-b^2)}{(a^2+b^2)^2}\right)\sin bx\right\}$.

38. а) $\frac{e^{ax}}{2}\left(\frac{a\sin(b+c)x - (b+c)\cos(b+c)x}{a^2+(b+c)^2}\right.$ $\left.+\frac{a\sin(b-c)x - (b-c)\cos(b-c)x}{a^2+(b-c)^2}\right)$. б) $\frac{e^{ax}}{4}\left(2\frac{a\cos cx + c\sin cx}{a^2+c^2}\right.$ $\left.\frac{a\cos(2b+c)x + (2b+c)\sin(2b+c)x}{a^2+(2b+c)^2} - \frac{a\cos(2b-c)x + (2b-c)\sin(2b-c)x}{a^2+(2b-c)^2}\right)$.

40. а) $\int x\ln x dx = \frac{1}{2}\int \ln x dx^2 = \frac{1}{2}x^2\ln x - \frac{1}{2}\int x^2 d\ln x$ $= \frac{1}{2}x^2\ln x - \frac{1}{4}x^2$. б) $\frac{x^{a+1}}{a+1}\left(\ln x - \frac{1}{a+1}\right)$ при $a \neq -1$ и $\frac{1}{2}(\ln x)^2$ при $a = -1$.

41. а) $\frac{x^2}{2}\left((\ln x)^2 - \ln x + \frac{1}{2}\right)$. б) $x^{a+1}\left(\frac{(\ln x)^3}{a+1} - 3\frac{(\ln x)^2}{(a+1)^2}\right.$ $\left.+\frac{6\ln x}{(a+1)^3} - \frac{6}{(a+1)^4}\right)$ при $a \neq -1$ и $\frac{1}{4}(\ln x)^4$ при $a = -1$.

42. Интегрирайте по части.

43. а) $\frac{2x^3+3x^2}{6}\ln(x+1) - \frac{1}{6}\left(\frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - x + \ln(x+1)\right)$.

б) $\frac{1}{2}(x^2-1)\ln(x^2-1) - \frac{x^2}{2}$. в) $\frac{1}{2}((x^2+a^2)\ln(x^2+a^2) - x^2)$.

г) $\frac{1}{5}\left(x^5\ln(x^2+a^2) - \frac{2}{25}x^5 + \frac{2}{15}a^2x^3 - \frac{2}{5}a^4x + \frac{2}{5}a^5\operatorname{arctg}\frac{x}{a}\right)$.

44. а) $x\arcsin\frac{x}{a} + \sqrt{a^2-x^2}$. б) $x\left(\arccos\frac{x}{a}\right)^3$ $-3\sqrt{a^2-x^2}\left(\arccos\frac{x}{a}\right)^2 - 6x\arccos\frac{x}{a} + 6\sqrt{a^2-x^2}$.

в) $\left(\frac{x^2}{2} - \frac{1}{4}\right)\arcsin x + \frac{x}{4}\sqrt{1-x^2}$. г) $\frac{\arccos x}{x} + \ln\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{|x|}$.

д) $x - \sqrt{1-x^2}\arcsin x$. е) $\frac{x^2}{4} - \frac{x\sqrt{1-x^2}}{2}\arcsin x + \frac{1}{4}(\arcsin x)^2$.

ж) $\frac{x^3}{9} + \frac{2x}{3} - \frac{1}{3}(x^2+2)\sqrt{1-x^2}\arcsin x$.

з) $\frac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{2}\ln(1-x^2)$. и) $\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{2}\ln\frac{1-x}{1+x}$.

45. а) $\frac{x^2+1}{2}\operatorname{arctg} x - \frac{x}{2}$. б) $\frac{1}{4}(x^4-1)\operatorname{arctg} x - \frac{x^3}{12} + \frac{x}{4}$.

в) $\frac{1}{\alpha^2+\beta^2}\left(\ln\frac{|\alpha+\beta x|}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{\beta-\alpha x}{\alpha+\beta x}\operatorname{arctg} x\right)$. г) $-\frac{x^2}{6} + \frac{2}{3}\ln(1+x^2)$ $+\left(\frac{x^3}{3}-x\right)\operatorname{arctg} x + \frac{1}{2}(\operatorname{arctg} x)^2$.

д) $-\sqrt{1-x^2}\operatorname{arctg} x + \sqrt{2}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}x}{\sqrt{1-x^2}} - \arcsin x$.

46. а) Да оставим в субституцията

(1) $$x = a\sin t$$

променливата t да описва интервала $\Delta_1 = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Тогава x описва интервала $\Delta = (-a, a)$, функцията (1) е обратима и обратната ѝ функция

(2) $$t = \arcsin\frac{x}{a}$$

е диференцируема навсякъде в Δ. Ето защо прилагането на субституцията (1) може да бъде използувано за пресмятане на интеграли от вида $\int f(x)dx$ в интервала $(-a, a)$.

От (1) след диференциране се получава $dx = a\cos t dt$, откъдето след заместване в търсения интеграл следва

(3) $$\int\sqrt{a^2-x^2}dx = a^2\int\sqrt{1-\sin^2 t}.\cos t dt = a^2\int\cos^2 t dt$$
$$= \frac{a^2}{2}\int(1+\cos 2t)dt = \frac{a^2}{2}t + \frac{a^2}{4}\sin 2t = \frac{a^2}{2}t + \frac{a^2}{2}\sin t\cos t.$$

От (1) следва $\sin t = \frac{x}{a}$ и $\cos t = \sqrt{1-\sin^2 t} = \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$. Като заместим (2) и тези изрази в дясната страна на (3), получаваме

$$\int\sqrt{a^2-x^2}dx = \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + \frac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2}$$

за $x \in (-a, a)$ (срв. със зад. 14 б)). б) Като се работи аналогично на а), се получава

$$\int\frac{dx}{(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{a^2}\int\frac{dt}{\cos^2 t} = \frac{1}{a^2}\operatorname{tg} t = \frac{1}{a^2}\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}.$$

47. а) Да оставим в субституцията

(1) $$x = a\operatorname{sh} t$$

променливата t да опише цялата права. Тогава x също пробягва цялата права, а функцията (1) е обратима и обратната ѝ функция

(2) $$t = Ar\operatorname{sh}\frac{x}{a} = \ln\left(\frac{x}{a} + \sqrt{1+\frac{x^2}{a^2}}\right)$$

е диференцируема в $\mathbb{R}$. Ето защо субституцията (1) може да се използува за пресмятане на интеграли върху цялата права.

От (1) след диференциране се получава $dx = a\operatorname{ch} t dt$, откъдето, като заместим в търсения интеграл, получаваме

(3) $$\int\sqrt{a^2+x^2}dx = a^2\int\sqrt{1+\operatorname{sh}^2 t}\operatorname{ch} t dt = a^2\int\operatorname{ch}^2 t dt$$
$$= \frac{a^2}{2}\int(1+\operatorname{ch} 2t)dt = \frac{a^2}{2}t + \frac{a^2}{4}\operatorname{sh} 2t = \frac{a^2}{2}t + \frac{a^2}{2}\operatorname{sh} t\operatorname{ch} t.$$

От (1) следва $\operatorname{sh} t = \frac{x}{a}$ и $\operatorname{ch} t = \sqrt{1+\operatorname{sh}^2 t} = \sqrt{1+\frac{x^2}{a^2}}$. Като заместим (2) и тези изрази в (3), получаваме

$$\int\sqrt{a^2+x^2}dx = \frac{a^2}{2}\ln(x+\sqrt{a^2+x^2}) + \frac{1}{2}x\sqrt{a^2+x^2} - \frac{a^2}{2}\ln a,$$ където

константата $-\frac{a^2}{2}\ln a$ може и да се изпусне (срв. със зад. 14 а)).

б) Като се работи аналогично на а), се получава

$$\int\frac{dx}{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{a^2}\int\frac{dt}{\operatorname{ch}^2 t} = \frac{1}{a^2}\operatorname{th} t = \frac{1}{a^2}\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}.$$

48. а) Да оставим в субституцията

(1) $$x = a\operatorname{tg} t$$

променливата t да описва интервала $\Delta_1 = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Тогава x описва цялата права, а функцията (1) е обратима и обратната ѝ функция

(2) $$t = \operatorname{arctg}\frac{x}{a}$$

е диференцируема в $\mathbb{R}$. Ето защо субституцията (1) може да се използува за пресмятане на интеграли върху цялата права.

От (1) след диференциране се получава $dx = \dfrac{a\,dt}{\cos^2 t}$, откъдето, като заместим в търсения интеграл, получаваме

$$(3)\qquad \int \frac{dx}{(a^2+x^2)^2} = \frac{1}{a^3}\int \cos^2 t\,dt = \frac{1}{2a^3}(t + \sin t\cos t).$$

От (1) следва $\sin t\cos t = \dfrac{ax}{a^2+x^2}$. Като заместим (2) и този израз в (3), получаваме

$$\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^2} = \frac{x}{2a^2(a^2+x^2)} + \frac{1}{2a^3}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{a}$$

(срв. със зад. 15 а), б), в)). **б)** Като се работи аналогично на а), се получава

$$\int \frac{x^3dx}{(a^2+x^2)^3} = \frac{1}{a^2}\int \sin^3 t\cos t\,dt = \frac{1}{4a^2}\sin^4 t = \frac{x^4}{4a^2(a^2+x^2)^2}.$$

49. За интеграла на зад. 6 а) субституцията на Хорнер е $x = t-3$, а от зад. 9 а) е $x = t-2$.

50. След субституцията интегралите добиват съответно вида $\int e^t \sin t\,dt$ и $\int e^t\cos t\,dt$. Ето защо те са частен случай от интегралите в зад. 35. Поради тази причина решенията на зад. 19 и 35 са сходни. Читателят трябва да свикне да схваща като несъществено различни интеграли, които се получават един от друг чрез стандартни субституции. За разгледаните дотук интеграли ще отбележим, че например интегралът от зад. 16 а) не е съществено различен от интеграла от зад. 27 а) при четно n: вторият се получава от първия чрез субституцията $x = a\,\mathrm{tg}\,t$.

51. а) Тъй като степента на числителя е по-ниска от степента на знаменателя, а нулите на знаменателя са реални и различни, подинтегралната функция се разлага в сума от елементарни дроби по следния начин:

$$(1)\qquad \frac{1}{(1+x)(2+x)} = \frac{A}{1+x} + \frac{B}{2+x}.$$

След освобождаване от знаменателя от (1) се получава

$$(2)\qquad 1 = A(2+x) + B(1+x).$$

От (2) чрез приравняване на коефициентите пред еднаквите степени на x от двете страни на равенството за A и B се получава системата

$$\left|\begin{aligned} 0 &= A+B,\\ 1 &= 2A+B.\end{aligned}\right.$$

Ето защо

$$(3)\qquad A = 1,\quad B = -1.$$

След заместване на (3) в (1) и интегриране за търсения интеграл намираме $\ln\left|\dfrac{1+x}{2+x}\right|$.

Използуваният тук метод на неопределените коефициенти позволява във всички случаи да се определят константите в разлагането на рационалните функции в суми от елементарни дроби. При по-сложен знаменател обаче той води до дълги пресмятания, които се избягват с някои не така универсални, но по-удобни методи за намиране на коефициентите, част от които ще бъдат илюстрирани в следващите задачи.

б) $\dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{2x+1}{4x+3}\right|$. **в)** $\dfrac{2}{3}\ln|x+2| + \dfrac{1}{3}\ln|x-1|$.

г) $\dfrac{1}{ad-bc}\ln\left|\dfrac{c+dx}{a+bx}\right|$. **д)** $\dfrac{b}{b-a}\ln|b+x| - \dfrac{a}{b-a}\ln|a+x|$.

е) $\dfrac{1}{24}\ln\left|\dfrac{x^3-9}{x^3-1}\right|$. Внесете x^2 под диференциала.

52. а) Понеже степента на числителя на подинтегралната функция е по-ниска от степента на знаменателя, а нулите на знаменателя са реални и прости, ще бъде в сила разлагането в сума от елементарни дроби:

$$(1)\qquad \frac{4x^2+4x-11}{(2x-1)(2x+3)(2x-5)} = \frac{A}{2x-1} + \frac{B}{2x+3} + \frac{C}{2x-5}$$

при $x \neq \dfrac{1}{2}, -\dfrac{3}{2}, \dfrac{5}{2}$. След освобождаване от знаменателя от (1) се получава

$$(2)\qquad 4x^2+4x-11 = A(2x+3)(2x-5) + B(2x-1)(2x-5) + C(2x-1)(2x+3).$$

Равенството (2) е в сила за всички реални стойности на x, различни от $\dfrac{1}{2}, -\dfrac{3}{2}$ и $\dfrac{5}{2}$, които са безбройно много. Тъй като лявата и дясната страна на (2) са полиноми, от принципа за сравняване на коефициентите (вж. §3, гл. II) следва, че равенството (2) е изпълнено за всички реални стойности на x. Ако в (2) на x дадем последователно стойностите $\dfrac{1}{2}, -\dfrac{3}{2}$ и $\dfrac{5}{2}$, ще получим съответно

$A=\frac{1}{2},\ B=-\frac{1}{4},\ C=\frac{3}{4}$, поради което (1) добива вида

$$(3)\qquad \frac{4x^2+4x-11}{(2x-1)(2x+3)(2x-5)}=\frac{1}{2(2x-1)}-\frac{1}{4(2x+3)}+\frac{3}{4(2x-5)}.$$

От (3) за търсения интеграл се получава

$$\int\frac{4x^2+4x-11}{(2x-1)(2x+3)(2x-5)}dx=\frac{1}{4}\ln|2x-1|-\frac{1}{8}\ln|2x+3|+\frac{3}{8}\ln|2x-5|.$$

Да отбележим изрично, че коефициентите A, B и C бяха пресметнати, като в тъждеството (2) на x бяха дадени конкретни стойности. Най-удобни за тази цел са нулите на знаменателя в лявата страна на (1). Този метод често е полезен: при прости нули на знаменателя той дава възможност да се пресметнат всички коефициенти в разлагането; в по-сложния случай на многократни нули всяка нула на знаменателя дава възможност за пресмятане на един коефициент.

б) Не е трудно да се съобрази, че

$$x^4-5x^2+4=(x-1)(x-2)(x+1)(x+2).$$

Тъй като степента на числителя на подинтегралната функция е по-ниска от степента на знаменателя, а нулите на знаменателя са реални и прости, ще бъде в сила разлагането в сума от елементарни дроби

$$\frac{x^2-x+2}{x^4-5x^2+4}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x+1}+\frac{D}{x+2}.$$

Като се процедира, както в а), за коефициентите се получава

$$A=-\frac{1}{3},\ B=\frac{1}{3},\ C=\frac{2}{3},\ D=-\frac{2}{3},$$

откъдето $\displaystyle\int\frac{x^2-x+2}{x^4-5x^2+4}dx$

$$=-\frac{1}{3}\ln|x-1|+\frac{1}{3}\ln|x-2|+\frac{2}{3}\ln|x+1|-\frac{2}{3}\ln|x+2|.$$

в) Тук степента на числителя на подинтегралната функция е по-висока от степента на знаменателя. Ето защо най-напред ще извършим деление:

$$\begin{array}{l}
\ \ x^5+x^4-8 \quad \underline{|x^3-4x} \\
-\underline{x^5-4x^3} \qquad\quad x^2+x+4 \\
\qquad x^4+4x^3-8 \\
\quad -\underline{x^4-4x^2} \\
\qquad\quad 4x^3+4x^2-8 \\
\qquad -\underline{4x^3-16x} \\
\qquad\qquad 4x^2+16x-8
\end{array}$$

Оттук следва

$$(1)\qquad \frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}=x^2+x+4+\frac{4x^2+16x-8}{x^3-4x}.$$

Дробта в дясната страна на (1) ще се представи като сума от елементарни дроби по следния начин:

$$(2)\qquad \frac{4x^2+16x-8}{x^3-4x}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x+2}.$$

Коефициентите в разлагането (2) се определят, както в а), и се получава $A=2$, $B=5$, $C=-3$. Ето защо от (1) и (2) следва

$$\int\frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}dx=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+4x+2\ln|x|+5\ln|x-2|-3\ln|x+2|.$$

53. а) $\frac{1}{4}x+\ln|x|-\frac{7}{16}\ln|2x-1|-\frac{9}{16}\ln|2x+1|.$

б) $\ln|2x-1|-6\ln|2x-3|+5\ln|2x-5|.$

в) $\frac{1}{2}\ln|x-\sqrt{2}|+\frac{1}{2}\ln|x|+\sqrt{2}\left(-\frac{1}{2}\ln|x+1|-\frac{1}{2}\ln|x-1|\right).$

г) $\frac{x^2}{2}+\ln\left|\frac{x(x-2)\sqrt{(x-1)(x+1)^3}}{x+2}\right|.$

55. а) $\frac{1}{2+x}+\ln\left|\frac{1+x}{2+x}\right|.$ б) $\frac{-2}{2+x}-\ln\left|\frac{1+x}{2+x}\right|.$ в) $\frac{4}{2+x}$ $+\ln|1+x|.$ г) $-\frac{1}{1+x}-\frac{1}{2+x}-2\ln\left|\frac{1+x}{2+x}\right|.$ д) $-\frac{1}{x+1}-\frac{2}{x+2}$ $+3\ln\left|\frac{x+1}{x+2}\right|.$ е) Тъй като степента на числителя е по-ниска от степента на знаменателя, а нулите на знаменателя са реални и двукратни, подинтегралната функция се разлага в сума от елементарни дроби по следния начин:

$$(1)\qquad \frac{x^2}{(1+x)^2(2+x)^2}=\frac{A}{(1+x)^2}+\frac{B}{1+x}+\frac{C}{(2+x)^2}+\frac{D}{2+x}.$$

От (1) след освобождаване от знаменателя се получава равенството

(2) $x^2 = A(2+x)^2 + B(1+x)(2+x)^2 + C(1+x)^2 + D(2+x)(1+x)^2,$

валидно за всички реални x. Ако в (2) дадем на x стойностите -1 и -2, ще получим

(3) $$A = 1, \ \ C = 4.$$

В този случай, като заместим в (2) нулите на знаменателя на (1), се получават само част от коефициентите. За да получим и останалите два коефициента, ще приравним коефициентите пред най-високите степени на x в двете страни на (2), а също така и коефициентите пред най-ниските степени:

(4) $$\begin{aligned} 0 &= B + D,\\ 0 &= 4A + 4B + C + 2D. \end{aligned}$$

От (3) и (4) следва

(5) $$B = -4, \ \ D = 4.$$

Сега от (1), (3) и (5) се получава

$$\int \frac{x^2dx}{(1+x)^2(2+x)^2} = -\frac{1}{1+x} - \frac{4}{2+x} - 4\ln\left|\frac{1+x}{2+x}\right|.$$

56. а) $\dfrac{24x-1}{50(1-4x)^2} + \dfrac{9}{125}\ln\left|\dfrac{2-3x}{1-4x}\right|.$

б) $\dfrac{3x^7 + 14x^5 + 140x^3 - 420x}{15(x^2-2)} + 7\sqrt{2}\ln\left|\dfrac{x-\sqrt{2}}{x+\sqrt{2}}\right|.$

в) $\dfrac{3x^3 - 9x^2 - 11x + 17}{128(x^2-2x-3)^2} + \dfrac{3}{512}\ln\left|\dfrac{x-3}{x+1}\right|.$ Чрез субституцията на Хорнер бихте могли да сведете до зад. 16 б).

57. След развиване на полинома P по формулата на Тейлър около точката a и интегриране за търсения интеграл се получава

$$\frac{P^{(n)}(a)}{n!}\ln|x-a| - \frac{P^{(n-1)}(a)}{(n-1)!(x-a)} - \frac{P^{(n-2)}(a)}{2(n-2)!(x-a)^2} - \cdots - \frac{P(a)}{n.1!(x-a)^n}.$$

58. Многократно приложение на зад. 16 б), с помощта на което интегралът се свежда към зад. 1 ж) и з).

59. Да положим $I_n = \int \dfrac{dx}{x^n(x-1)^n}$. Като се работи аналогично на решението на зад. 16 а), се получава

$$\begin{aligned} I_n &= \int \frac{1-(2x-1)^2}{x^n(x-1)^n}dx + \int \frac{(2x-1)^2dx}{x^n(x-1)^n} = -4I_{n-1}\\ &+ \int \frac{(2x-1)dx(x-1)}{x^n(x-1)^n} = -4I_{n-1} - \frac{1}{n-1}\int (2x-1)d\frac{1}{x^{n-1}(x-1)^{n-1}}\\ &= -4I_{n-1} - \frac{2x-1}{(n-1)x^{n-1}(x-1)^{n-1}} + \frac{2}{n-1}I_{n-1}\\ &= -\frac{2x-1}{(n-1)x^{n-1}(x-1)^{n-1}} - \frac{2(2n-3)}{n-1}I_{n-1}. \end{aligned}$$

По-нататък интегралът се решава чрез рекурсия.

60. а) $a = b$. б) $a = b$ или $a = -b$.

61. а) Подинтегралната функция се разлага в сума от елементарни дроби по следния начин:

(1) $$\frac{1}{a^3+x^3} = \frac{A}{a+x} + \frac{Mx+N}{a^2-ax+x^2}.$$

От (1) след освобождаване от знаменателя се получава равенството

(2) $$1 = A(a^2 - ax + x^2) + (Mx+N)(a+x),$$

валидно за всички реални и комплексни стойности на x. Ако в (2) дадем на x стойност $-a$, ще получим

(3) $$A = \frac{1}{3a^2}.$$

Коефициентите M и N ще пресметнем, като използваме една от комплексните нули на знаменателя. Нека ξ е комплексно число, за което

(4) $$a^2 - a\xi + \xi^2 = 0.$$

Ако в (2) положим $x = \xi$, поради (4) ще получим

(5) $$\begin{aligned} 1 &= (M\xi + N)(a+\xi) = M\xi^2 + (aM+N)\xi + Na\\ &= (2Ma + N)\xi + Na - Ma^2. \end{aligned}$$

Тъй като ξ е комплексно, а a, M и N са реални, от (5) следва

$$\begin{aligned} 2Ma + N &= 0,\\ Na - Ma^2 &= 1, \end{aligned}$$

откъдето

$$(6)\qquad M=-\frac{1}{3a^2},\quad N=\frac{2}{3a}.$$

От (1), (2) и (6) се получава

$$(7)\qquad \int\frac{dx}{a^3+x^3}=\frac{1}{3a^2}\ln|x+a|-\frac{1}{3a^2}\int\frac{x-2a}{a^2-ax+x^2}dx.$$

От (7) и зад. 6 е) следва

$$\int\frac{dx}{a^3+x^3}=\frac{1}{3a^2}\ln|x+a|-\frac{1}{6a^2}\ln(a^2-ax+x^2)+\frac{1}{a^2\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{2x-a}{a\sqrt{3}}.$$

Разбира се, A, M и N биха могли да бъдат пресметнати от (2) и с помощта на метода на неопределените коефициенти. В този случай използването на комплексната нула ξ не опростява пресмятанията, но при по-сложни знаменатели този метод има технически предимства пред метода на неопределените коефициенти.

б) Подинтегралната функция се разлага в сума от елементарни дроби по следния начин:

$$\frac{x}{a^3+x^3}=\frac{A}{a+x}+\frac{Mx+N}{a^2-ax+x^2}.$$

По-нататък се работи, както в а), и за интеграла се получава

$$\frac{1}{6a}\ln(a^2-ax+x^2)-\frac{1}{3a}\ln|a+x|+\frac{1}{a\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{2x-a}{a\sqrt{3}}.$$

в) $-\dfrac{1}{a^3x}-\dfrac{1}{6a^4}\ln(a^2-ax+x^2)+\dfrac{1}{3a^4}\ln|a+x|-\dfrac{1}{a^4\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\dfrac{2x-a}{a\sqrt{3}}.$

г) Тъй като

$$x^4+1=(x^4+2x^2+1)-2x^2=(x^2+1)^2-(x\sqrt{2})^2$$
$$=(x^2+x\sqrt{2}+1)(x^2-x\sqrt{2}+1),$$

подинтегралната функция се разлага в сума от елементарни дроби по следния начин:

$$\frac{1}{x^4+1}=\frac{Mx+N}{x^2+x\sqrt{2}+1}+\frac{Px+Q}{x^2-x\sqrt{2}+1},$$

откъдето за коефициентите се получава

$$M=\frac{1}{2\sqrt{2}},\quad P=-\frac{1}{2\sqrt{2}},\quad N=Q=\frac{1}{2}.$$

Ето защо

$$\int\frac{dx}{x^4+1}=\frac{1}{2\sqrt{2}}\int\frac{x+\sqrt{2}}{x^2+x\sqrt{2}+1}dx-\frac{1}{2\sqrt{2}}\int\frac{x-\sqrt{2}}{x^2-x\sqrt{2}+1}dx$$
$$=\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\frac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1}+\frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arc\,tg}(x\sqrt{2}+1)+\frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arc\,tg}(x\sqrt{2}-1)$$

съгласно зад. 6 е). д) Подинтегралната функция се разлага в сума от елементарни дроби по следния начин:

$$(1)\qquad \frac{1}{(x^2+1)(x^2+2)(x^2+3)(x^2+4)}=\frac{Ax+B}{x^2+1}+\frac{Cx+D}{x^2+2}+\frac{Ex+F}{x^2+3}+\frac{Gx+H}{x^2+4},$$

откъдето

$$(2)\qquad 1=(Ax+B)(x^2+2)(x^2+3)(x^2+4)$$
$$+(Cx+D)(x^2+1)(x^2+3)(x^2+4)+(Ex+F)(x^2+1)(x^2+2)(x^2+4)$$
$$+(Gx+H)(x^2+1)(x^2+2)(x^2+3).$$

За да пресметнем например коефициентите A и B, полагаме в (2) $x=i$ и получаваме

$$(3)\qquad 1=(Ai+B)6.$$

Тъй като A и B са реални числа, от (3) следва

$$(4)\qquad A=0,\quad B=\frac{1}{6}.$$

Аналогично, като се положи в (2) $x=i\sqrt{2}$, $x=i\sqrt{3}$ и $x=2i$, за останалите коефициенти се получава

$$(5)\qquad C=0,\ D=-\frac{1}{2},\ E=0,\ F=\frac{1}{2},\ G=0,\ H=-\frac{1}{6}.$$

След заместване на (4) и (5) в (1) и интегриране за търсения интеграл намираме

$$\frac{1}{6}\operatorname{arc\,tg}x-\frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{\sqrt{3}}-\frac{1}{12}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{2}.$$

е) $\dfrac{(x+1)^2}{2}+\ln|x-1|-\dfrac{1}{2}\ln(x^2+1)-\operatorname{arc\,tg}x.$

ж) $\dfrac{3}{2}\ln(x^2-2x+5)-\ln|x-1|+\dfrac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}\dfrac{x-1}{2}.$

62. а) В този случай субституцията на Хорнер има вида $x = t - \frac{1}{2}$, откъдето $dx = dt$. Ето защо търсеният интеграл добива вида

(1) $$\int \frac{dx}{(x^2+x+1)^2} = \int \frac{dt}{\left(t^2+\frac{3}{4}\right)^2}.$$

Като се работи, както в зад. 15, или се използува зад. 16, се получава

(2) $$\int \frac{dt}{\left(t^2+\frac{3}{4}\right)^2} = \frac{2t}{3\left(t^2+\frac{3}{4}\right)} + \frac{4}{3\sqrt{3}} \operatorname{arc\,tg} \frac{2t}{\sqrt{3}}.$$

Тъй като $t = x + \frac{1}{2}$, от (1) и (2) следва

$$\int \frac{dx}{(x^2+x+1)^2} = \frac{2x+1}{3(x^2+x+1)} + \frac{4}{3\sqrt{3}} \operatorname{arc\,tg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}}.$$

б) $\frac{2x+1}{7(x^2+x+2)} + \frac{4}{7\sqrt{7}} \operatorname{arc\,tg} \frac{2x+1}{\sqrt{7}}.$

в) Като се използува субституцията на Хорнер $x = t - \frac{1}{2}$, се получава

(1) $$\int \frac{x\,dx}{(x^2+x+1)^2} = \int \frac{t\,dt}{\left(t^2+\frac{3}{4}\right)^2} - \frac{1}{2}\int \frac{dt}{\left(t^2+\frac{3}{4}\right)^2}.$$

Но

(2) $$\int \frac{t\,dt}{\left(t^2+\frac{3}{4}\right)^2} = -\frac{1}{2\left(t^2+\frac{3}{4}\right)}.$$

От (1), (2) и формула (2) от решението на а) следва

(3) $$\int \frac{x\,dx}{(x^2+x+1)^2} = -\frac{3+2t}{6\left(t^2+\frac{3}{4}\right)} - \frac{2}{3\sqrt{3}} \operatorname{arc\,tg} \frac{2t}{\sqrt{3}}.$$

Като заместим в дясната страна на (3) $t = x + \frac{1}{2}$, получаваме окончателно $\int \frac{x\,dx}{(x^2+x+1)^2} = -\frac{x+2}{3(x^2+x+1)} - \frac{2}{3\sqrt{3}} \operatorname{arc\,tg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}}.$

г) $-\frac{x+4}{7(x^2+x+2)} - \frac{2}{7\sqrt{7}} \operatorname{arc\,tg} \frac{2x+1}{\sqrt{7}}.$

д) $-\frac{57x^2+136x+39}{28(3x+1)(3x^2+2x+5)} - \frac{19}{28\sqrt{14}} \operatorname{arc\,tg} \frac{3x+1}{\sqrt{14}}.$

63. Използувайте субституцията на Хорнер, за да сведете към зад. 16. Тези формули могат успешно да се използуват за пресмятане на интеграли от елементарни дроби от вида $\frac{Mx+N}{(ax^2+bx+c)^n}$.

64. а) $\frac{(x-2)(x^2-4x+19)}{216(x^2-4x+13)^2} + \frac{1}{648} \operatorname{arc\,tg} \frac{x-2}{3}.$

б) $\frac{(2x+3)(6x^2+18x+41)}{242(x^2+3x+5)^2} + \frac{12}{121\sqrt{11}} \operatorname{arc\,tg} \frac{2x+3}{\sqrt{11}}.$

65. а) Подинтегралната функция се разлага в сума от елементарни дроби по следния начин:

(1) $$\frac{1}{(1+x^3)^2} = \frac{A}{(1+x)^2} + \frac{B}{1+x} + \frac{Mx+N}{(1-x+x^2)^2} + \frac{Px+Q}{1-x+x^2},$$

откъдето

(2) $$1 = A(1-x+x^2)^2 + B(1+x)(1-x+x^2)^2 + (Mx+N)(1+x)^2 + (Px+Q)(1+x)^2(1-x+x^2).$$

Ако в (2) положим $x = -1$, ще получим

(3) $$A = \frac{1}{9}.$$

Коефициентите M и N ще пресметнем, като използуваме една от комплексните нули на знаменателя. Нека ξ е комплексно число, за което

(4) $$1 - \xi + \xi^2 = 0.$$

Ако в (2) положим $x = \xi$, след неколкократно използуване на (4) ще получим

(5) $$1 = (M\xi + N)(1+\xi)^2 = 3\xi(M+N) - 3M.$$

Тъй като числото ξ е комплексно, а M и N са реални, от (5) следва $0 = M + N, 1 = -3M$, откъдето

(6) $$M = -\frac{1}{3}, \quad N = \frac{1}{3}.$$

Останалите три константи B, P и Q могат да се пресметнат, като в (2) се приравнят коефициентите пред еднаквите степени на x.

Тук ще илюстрираме един друг метод, който в някои случаи е по-кратък. След диференциране от (2) се получава

$$0 = 2A(1-x+x^2)(2x-1) + B(1-x+x^2)^2 \tag{7}$$
$$+2B(1+x)(1-x+x^2)(2x-1) + M(1+x)^2$$
$$+2(Mx+N)(1+x) + P(1+x)^2(1-x+x^2)$$
$$+2(Px+Q)(1+x)(1-x+x^2) + (Px+Q)(1+x)^2(2x-1).$$

В (7) полагаме $x = -1$ и получаваме $0 = -18A + 9B$, което заедно с (3) дава

$$B = \frac{2}{9}. \tag{8}$$

Сега в (7) полагаме $x = \xi$ и след неколкократно използуване на (4) получаваме

$$0 = \xi(7M + 2N - 3P + 3Q) - 2M + 2N - 3P - 6Q, \tag{9}$$

откъдето поради (6) следва

$$3P - 3Q = -\frac{5}{3},$$
$$3P + 6Q = \frac{4}{3},$$

т. е.

$$P = -\frac{2}{9}, \quad Q = \frac{1}{3}. \tag{10}$$

От (1), (3), (6), (8) и (10) след интегриране и използуване на техниката от зад. 61 или на зад. 62 за търсения интеграл се получава

$$\frac{x}{3(1+x^3)} + \frac{2}{9}\ln|1+x| - \frac{1}{9}\ln(1-x+x^2) + \frac{2}{3\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}.$$

б) $\dfrac{x^2}{3(1+x^3)} + \dfrac{1}{18}\ln(1-x+x^2) - \dfrac{1}{9}\ln|1+x| + \dfrac{1}{3\sqrt{6}}\operatorname{arc\,tg}\dfrac{2x-1}{\sqrt{3}}.$

в) Подинтегралната функция се разлага в сума от елементарни дроби по следния начин:

$$\frac{1}{x^2(1+x^2)^2} = \frac{A}{x^2} + \frac{B}{x} + \frac{Mx+N}{(1+x^2)^2} + \frac{Px+Q}{1+x^2}.$$

След пресмятане на коефициентите и интегриране за търсения интеграл се получава $-\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{2}\dfrac{x}{1+x^2} - \dfrac{3}{2}\operatorname{arc\,tg} x.$

г) $\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3-4x}{x^2+1} + \ln|x-2| - \dfrac{1}{2}\ln(x^2+1) - 4\operatorname{arc\,tg} x.$

д) $-\dfrac{11x^2+18x+13}{3(x+1)(x^2+x+1)} + \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{x^2+x+1}{(x+1)^2} - \dfrac{25}{3\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\dfrac{2x+1}{\sqrt{3}}.$

е) $\dfrac{2x^3-6x^2+8x-9}{(x^2-2x+2)^2} + \ln\dfrac{(x-1)^2}{x^2-2x+2} + 2\operatorname{arc\,tg}(x-1).$

ж) $-\dfrac{x^4+2x^2+1}{(x+1)(x^2+x+1)^2}.$

з) $-\dfrac{x}{8(x^2+4)} - \dfrac{2x+5}{2(x^2+4x+5)} - \dfrac{1}{16}\operatorname{arc\,tg}\dfrac{x}{2} - \operatorname{arc\,tg}(x+2).$

66. Нека

$$G(x) = A_1^{s_1}(x)\dots A_k^{s_k}(x)B_1^{t_1}(x)\dots B_l^{t_l}(x) \tag{1}$$

и

$$f(x) = \frac{S(x)}{G(x)}. \tag{2}$$

От правилото за диференциране на произведение от няколко множителя следва

$$f'(x) = \frac{S'(x)}{G(x)} - \frac{S(x)}{G(x)}\left(\frac{s_1}{A_1(x)} + \dots + \frac{s_k}{A_k(x)} + \frac{t_1(2x+p_1)}{B_1(x)}\right. \tag{3}$$
$$\left.+\dots+\frac{t_l(2x+p_l)}{B_l(x)}\right) = \frac{T(x)}{A_1^{s_1+1}(x)\dots A_k^{s_k+1}(x)B_1^{t_1+1}(x)\dots B_l^{t_l+1}(x)},$$

където

$$T(x) = A_1(x)\dots A_k(x)B_1(x)\dots B_l(x)\Big(S'(x) \tag{4}$$
$$-S(x)\left(\frac{s_1}{A_1(x)} + \dots + \frac{s_k}{A_k(x)} + \frac{t_1(2x+p_1)}{B_1(x)} + \dots + \frac{t_l(2x+p_l)}{B_l(x)}\right)\Big).$$

Тъй като $T(x)$ очевидно е полином на x, твърдението ще бъде доказано, ако се убедим, че той е взаимно прост със знаменателя на дясната страна на (3). В противен случай полиномът $T(x)$ би се анулирал за някоя нула ξ на този знаменател. Нека например $T(\xi) = 0$, където ξ е нула на $A_1(x)$, т. е. $A_1(\xi) = 0$. От (4) не е трудно да се заключи, че тогава

$$0 = T(\xi) = -A_2(\xi)\dots A_k(\xi)B_1(\xi)\dots B_l(\xi)S(\xi)s_1, \tag{5}$$

което е противоречие, понеже полиномите $A_1, \dots, A_k$, $B_1, \dots, B_l$ и S нямат общи нули и $s_1 \neq 0$. Ако пък $T(\xi) = 0$, където $B_1(\xi) = 0$, от (4) вместо (5) се получава

$$(6)\qquad 0 = T(\xi) = -A_1(\xi)\dots A_k(\xi)B_2(\xi)\dots B_l(\xi)S(\xi)t_1(2\xi + p_1).$$

В този случай числото ξ е комплексно, поради което $2\xi + p_1 \neq 0$. Сега (6) води до противоречие по същия начин, както и (5).

67. Разглежданият интеграл очевидно не е полином, понеже производната на полином е пак полином и следователно не може да съвпадне с подинтегралната функция, тъй като R и $A_1 \dots A_k B_1 \dots B_l$ са взаимно прости и $k + l > 0$. Ето защо, ако допуснем противното, ще се окаже, че съществуват такава система

$$(1)\qquad a_1^*, a_2^*, \dots, a_{k'}^*,$$

от различни реални числа и такава система

$$(2)\qquad (p_1^*, q_1^*), (p_2^*, q_2^*), \dots, (p_{l'}^*, q_{l'}^*) \quad (k' + l' > 0)$$

от различни двойки реални числа, за които $(p_\lambda^*)^2 - 4q_\lambda^* < 0$ $(\lambda = 1, \dots, l')$, че ако положим

$$(3)\qquad A_\kappa^*(x) = x - a_\kappa^* \quad (\kappa = 1, 2, \dots, k')$$

и

$$(4)\qquad B_\lambda^*(x) = x^2 + p_\lambda^* x + q_\lambda^* \quad (\lambda = 1, 2, \dots, l'),$$

ще съществува полином S, взаимно прост с полиномите (3) и (4), за който

$$(5)\qquad \int \frac{R(x)dx}{A_1(x)\dots A_k(x)B_1(x)\dots B_l(x)} = \frac{S(x)}{A_1^{*s_1}(x)\dots A_k^{*s_k}(x)B_1^{*t_1}(x)\dots B_l^{*t_l}(x)}.$$

Като се използува зад. 66, от (5) чрез диференциране се получава

$$(6)\qquad \frac{R(x)}{A_1(x)\dots A_k(x)B_1(x)\dots B_l(x)} = \frac{T(x)}{A_1^{*s_1+1}\dots A_k^{*s_{k'}+1}(x)B_1^{*t_1+1}(x)\dots B_{l'}^{*t_l+1}(x)},$$

където числителят и знаменателят на дясната страна са взаимно прости. Тъй като по условие числителят и знаменателят на лявата страна на (6) са взаимно прости, като се освободим от знаменателя и използуваме теоремата за единственост на разлагането на полином в произведение от неразложими множители, виждаме, че $\quad A_1(x)\dots A_k(x)B_1(x)\dots B_l(x)$

$$= A_1^{*s_1+1}(x)\dots A_k^{*s_{k'}+1}(x)B_1^{*t_1+1}(x)\dots B_{l'}^{*t_{l'}+1}(x),$$

откъдето с помощта на същата теорема за единственост заключаваме, че

$$k' = k,\ l' = l,\ s_\kappa = 0\ (\kappa = 1, 2, \dots, k) \text{ и } t_\lambda = 0\ (\lambda = 1, 2, \dots, l).$$

По този начин от (5) следва, че разглежданият интеграл е полином, което, както видяхме, е невъзможно.

68. Единственост. Нека полиномите $Q(x)$ и $Q_1(x)$ са от степен, по-малка от $\sum_{\kappa=1}^{k} s_\kappa + 2\sum_{\lambda=1}^{l} t_\lambda - k - 2l$; полиномите $R(x)$ и $R_1(x)$ са от степен, по-малка от $k + 2l$, и

$$(1)\qquad \int \frac{P(x)dx}{A_1^{s_1}(x)\dots A_k^{s_k}(x)B_1^{t_1}(x)\dots B_l^{t_l}(x)}$$
$$= \frac{Q(x)}{A_1^{s_1-1}(x)\dots A_k^{s_k-1}(x)B_1^{t_1-1}(x)\dots B_l^{t_l-1}(x)} + \int \frac{R(x)dx}{A_1(x)\dots A_k(x)B_1(x)\dots B_l(x)},$$

$$(2)\qquad \int \frac{P(x)dx}{A_1^{s_1}(x)\dots A_k^{s_k}(x)B_1^{t_1}(x)\dots B_l^{t_l}(x)}$$
$$= \frac{Q_1(x)}{A_1^{s_1-1}(x)\dots A_k^{s_k-1}(x)B_1^{t_1-1}(x)\dots B_l^{t_l-1}(x)} + \int \frac{R_1(x)dx}{A_1(x)\dots A_k(x)B_1(x)\dots B_l(x)}.$$

От (1) и (2) след изваждане се получава

$$(3)\qquad \int \frac{R(x) - R_1(x)}{A_1(x)\dots A_k(x)B_1(x)\dots B_l(x)}dx = \frac{Q_1(x) - Q(x)}{A_1^{s_1-1}(x)\dots A_k^{s_k-1}(x)B_1^{t_1-1}(x)\dots B_l^{t_l-1}(x)}.$$

Тъй като числителят на подинтегралната функция в (3) има по-ниска степен от знаменателя, а в дясната страна на (3) фигурира рационална функция на x, не е трудно да се съобрази, че ако допуснем $R \neq R_1$, се получава противоречие със зад. 67. Ето защо $R = R_1$. Сега от (3) следва

$$(4)\qquad \frac{Q_1(x) - Q(x)}{A_1^{s_1-1}(x)\dots A_k^{s_k-1}(x)B_1^{t_1-1}(x)\dots B_l^{t_l-1}(x)} = C,$$

където C е константа. Тъй като в (4) степента на числителя също е по-ниска от степента на знаменателя, в сила е $C = 0$, поради което $Q = Q_1$.

Съществуване. Съществуването ще установим чрез индукция относно сумата $s_1 + \dots + s_k + t_1 + \dots + t_l$.

Нека най-напред $s_1 + \dots + s_k + t_1 + \dots + t_l = 1$. Не е трудно да се установи, че тогава интегралът

$$I = \int \frac{P(x)dx}{A_1^{s_1}(x)\dots A_k^{s_k}(x)B_1^{t_1}(x)\dots B_l^{t_l}(x)} \tag{5}$$

е от вида

$$\int \frac{R(x)dx}{A_1(x)\dots A_k(x)B_1(x)\dots B_l(x)}, \tag{6}$$

поради което може да се положи $Q = 0$, $R = P$.

Нека твърдението е вярно винаги когато $s_1+\dots+s_k+t_1+\dots+t_l = n$ $(n = 1, 2, \dots)$, и нека показателите в знаменателя на (5) са такива, че $s_1+\dots+s_k+t_1+\dots+t_l = n+1$. Ако всичките показатели в знаменателя на (5) са равни на 1, интегралът (5) е от вида (6), поради което отново може да се положи $Q = 0$, $R = P$. Ето защо остава да се разгледа само случаят, когато някой от тези показатели е по-голям от 1. Нека например $s_1 \geqq 2$. От равенството (29) от §10 следва съществуването на константа A и полином $P_1(x)$, за който $\deg P_1(x)$* $< n + \sum_{\lambda=1}^{l} t_\lambda$ и

$$\frac{P(x)}{A_1^{s_1}(x)\dots A_k^{s_k}(x)B_1^{t_1}(x)\dots B_l^{t_l}(x)} \tag{7}$$

$$= \frac{A}{A_1^{s_1}(x)} + \frac{P_1(x)}{A_1^{s_1-1}(x)A_2^{s_2}(x)\dots A_k^{s_k}(x)B_1^{t_1}(x)\dots B_l^{t_l}(x)}.$$

От (7) след интегриране се получава

$$I = -\frac{A}{(s_1-1)A_1^{s_1-1}(x)} \tag{8}$$

$$+ \int \frac{P_1(x)dx}{A_1^{s_1-1}(x)A_2^{s_2}(x)\dots A_k^{s_k}(x)B_1^{t_1}(x)\dots B_l^{t_l}(x)}$$

поради $s_1 > 1$. Но интегралът от дясната страна на (8) е от вида (5) със сума от показателите в знаменателя, равна на n. Ето защо към него може да се приложи индукционното предположение и да се заключи съществуването на полиноми $Q_1(x)$ и $R_1(x)$, за които

* С $\deg P(x)$ обикновено означаваме степента на полинома $P(x)$.

$$\deg Q_1 < \sum_{\kappa=1}^{k} s_\kappa + 2\sum_{\lambda=1}^{l} t_\lambda - k - 2l, \quad \deg R_1 < k + 2l,$$

$$\int \frac{P_1(x)dx}{A_1^{s_1-1}(x)A_2^{s_2}(x)\dots A_k^{s_k}B_1^{t_1}(x)\dots B_l^{t_l}(x)} \tag{9}$$

$$= \frac{Q_1(x)}{A_1^{s_1-2}(x)A_2^{s_2-1}(x)\dots A_k^{s_k-1}B_1^{t_1-1}(x)\dots B_l^{t_l-1}(x)}$$

$$+ \int \frac{R_1(x)dx}{A_1(x)\dots A_k(x)B_1(x)\dots B_l(x)}.$$

Верността на твърдението в този случай следва от (8) и (9). Ако пък например $t_1 \geqq 2$, от равенство (30) от §10 следва съществуването на константи M и N и на полином $P_2(x)$, за който $\deg P_2 < n - 1 + \sum_{\lambda=1}^{l} t_\lambda$ и

$$\frac{P(x)}{A_1^{s_1}(x)\dots A_k^{s_k}(x)B_1^{t_1}(x)\dots B_l^{t_l}(x)} \tag{10}$$

$$= \frac{Mx+N}{B_1^{t_1}(x)} + \frac{P_2(x)}{A_1^{s_1}(x)\dots A_k^{s_k}(x)B_1^{t_1-1}(x)B_2^{t_2}(x)\dots B_l^{t_l}(x)}.$$

От (10) след интегриране с използуване на зад. 63 се получава

$$I = \frac{Cx+D}{B_1^{t_1-1}(x)} \tag{11}$$

$$+ \int \left[\frac{E}{B_1^{t_1-1}(x)} + \frac{P_2(x)}{A_1^{s_1}(x)\dots A_k^{s_k}(x)B_1^{t_1-1}(x)B_2^{t_2}(x)\dots B_l^{t_l}(x)}\right]dx,$$

където C, D и E са константи. Към интеграла в дясната страна на (11) отново е приложимо индукционното предположение. Ето защо в този случай верността на твърдението следва от (11). С това задачата е решена.

В светлината на метода на Остроградски–Ермит пресмятането на интеграли от рационални функции може да се извършва така: Най-напред се разделя числителят на знаменателя, за да се сведе задачата до интегриране на рационална функция, в която степента на числителя е по-ниска от степента на знаменателя. Ако по този начин сме стигнали до интеграла (5), търсим полиноми Q и R, за които да е в сила (1), т. е.

$$\frac{P(x)}{A_1^{s_1}(x)\dots A_k^{s_k}(x)B_1^{t_1}(x)\dots B_l^{t_l}(x)} \tag{12}$$

$$= \left[\frac{Q(x)}{A_1^{s_1-1}(x)\dots A_k^{s_k-1}(x)B_1^{t_1-1}(x)\dots B_l^{t_l-1}(x)}\right]' + \frac{R(x)}{A_1(x)\dots A_k(x)B_1(x)\dots B_l(x)},$$

или, което е същото,

(13) $$\frac{P(x)}{G(x)} = \frac{Q'(x)}{G_1(x)} - \frac{Q(x)}{G_1^2(x)}G_1'(x) + \frac{R(x)}{G_2(x)},$$

където $G(x)$ е дефинирано в (1) от решението на зад. 66, а $G_1(x)$ и $G_2(x)$ са дефинирани със

$$G_2(x) = A_1(x)\dots A_k(x)B_1(x)\dots B_l(x)$$

и

$$G_1(x) = \frac{G(x)}{G_2(x)}.$$

За намиране на неизвестните полиноми Q и R в (13) след освобождаване от знаменателя се приравняват коефициентите пред еднаквите степени на x. Получената система уравнения съгласно доказаното винаги ще има решение и всяко нейно решение ще даде двойка полиноми Q и R с желаните свойства (откъдето между прочем следва единствеността на решението на тази система). По такъв начин методът на Остроградски–Ермит дава възможност без интегриране да се намира „рационалната част" на интеграла (5), а интегриране да се извършва само за пресмятане на интеграла (6). За пресмятането на (6) може да се прибегне до разлагане на подинтегралната функция в сума от елементарни дроби. Тъй като нулите на знаменателя са прости, за да се намерят коефициентите на това разлагане, е достатъчно да се използуват само нулите на знаменателя (зад. 52 и 61).

Този метод може успешно да се приложи към решените вече зад. 55, 56, 60, 64 и 65.

69. а) $-\dfrac{x+5}{9(x^2+x-2)} - \dfrac{1}{27}\ln\left|\dfrac{x-1}{x+2}\right|$.

б) $\dfrac{1}{3}(x-1)^3 + \dfrac{4x+2}{3(x^2+x+1)} + \ln(x^2+x+1) - \dfrac{10}{3\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\dfrac{2x+1}{\sqrt{3}}$.

в) $\dfrac{3}{8}\operatorname{arc\,tg} x - \dfrac{x}{4(x^4-1)} - \dfrac{3}{16}\ln\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right|$.

г) $\dfrac{x}{(x^2-2x+2)^2} - \ln(x^2-2x+2) + \operatorname{arc\,tg}(x-1)$.

д) $\dfrac{x+1}{(x-1)(x^2+x+1)^2}$.

е) Нека I е търсеният интеграл. Съгласно зад. 68 съществуват полином Q от степен, по-ниска от 6, и полином R от степен, по-ниска от 3, за които

(1) $$I = \frac{Q(x)}{(1+x^3)^2} + \int\frac{R(x)dx}{1+x^3}.$$

От (1) след диференциране и освобождаване от знаменателя се получава

(2) $$x^7 + x^6 - 2x^4 + 2x^3 - 6x^2 + 3x + 1$$
$$= Q'(x)(1+x^3) - 6Q(x)x^2 + R(x)(1+x^3)^2.$$

Нека

(3) $$Q(x) = q_0x^5 + q_1x^4 + q_2x^3 + q_3x^2 + q_4x + q_5$$

и

(4) $$R(x) = r_0x^2 + r_1x + r_2.$$

От (3) след диференциране се получава

(5) $$Q'(x) = 5q_0x^4 + 4q_1x^3 + 3q_2x^2 + 2q_3x + q_4.$$

Като се заместят (3) — (5) в (2) и след това се приравнят коефициентите пред еднаквите степени на x, получава се следната система уравнения за неизвестните коефициенти на полиномите Q и R:

(6) $$\left|\begin{aligned} 0 &= r_0\\ 1 &= -q_0 + r_1\\ 1 &= -2q_1 + r_2\\ 0 &= -3q_2 + 2r_0\\ -2 &= 5q_0 - 4q_3 + 2r_1\\ 2 &= 4q_1 - 5q_4 + 2r_2\\ -6 &= 3q_2 - 6q_5 + r_0\\ 3 &= 2q_3 + r_1\\ 1 &= q_4 + r_2. \end{aligned}\right.$$

Решаването на тази система дава

(7) $$r_0 = 0,\ r_1 = 1,\ r_2 = 1$$

и

(8) $$q_0 = 0,\ q_1 = 0,\ q_2 = 0,\ q_3 = 1,\ q_4 = 0,\ q_5 = 1.$$

След заместване на (8) и (7) съответно в (3) и (4), намираме полиномите Q и R, които, заместени в (1), дават

(9) $$I = \frac{1+x^2}{(1+x^3)^2} + \int\frac{1+x}{1+x^3}dx = \frac{1+x^2}{(1+x^3)^2} + \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}$$

съгласно зад. 6 д).

70 — 72. Разложете в сума от елементарни дроби и след това използувайте зад. 6 е).

73. а) $-6\sqrt[6]{x}-2\sqrt{x}-\frac{6}{5}\sqrt[6]{x^5}-\frac{6}{7}\sqrt[6]{x^7}-3\ln\left|\frac{\sqrt[6]{x}-1}{\sqrt[6]{x}+1}\right|$.

б) $\ln|3\sqrt[3]{x}+1|$. в) $x+4\sqrt{x+1}+4\ln|\sqrt{x+1}-1|$. г) $2\sqrt{\frac{x-2}{x-1}}$.

д) $6\left[\frac{1}{9}(x+1)^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{8}(x+1)^{\frac{4}{3}}+\frac{1}{7}(x+1)^{\frac{7}{6}}-\frac{1}{6}(x+1)+\frac{1}{5}(x+1)^{\frac{5}{6}}\right.$ $\left.-\frac{1}{4}(x+1)^{\frac{2}{3}}\right]$. е) $-\frac{n}{a-b}\sqrt[n]{\frac{x-b}{x-a}}$.

ж) $\ln\left|\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}\right|+2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$.

з) $\ln\frac{|t^2-1|}{\sqrt{t^4+t^2+1}}+\sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{2t^2+1}{\sqrt{3}}$ при $t=\sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x}}$.

74. а) $\frac{1}{3}\sqrt{(x+x^2)^3}-\frac{1+2x}{8}\sqrt{x+x^2}+\frac{1}{8}\ln(\sqrt{x}+\sqrt{1+x})$ при $x>0$ и $-\frac{1}{3}\sqrt{(x+x^2)^3}+\frac{1+2x}{8}\sqrt{x+x^2}+\frac{1}{8}\ln(\sqrt{-x}+\sqrt{-1-x})$ при $x<-1$. б) $\frac{6}{5}x^{\frac{5}{6}}-4x^{\frac{1}{2}}+18x^{\frac{1}{6}}+\frac{3x^{\frac{1}{6}}}{1+x^{\frac{1}{3}}}-21\operatorname{arctg}x^{\frac{1}{6}}$.

в) $\frac{3}{5}t^5-2t^3+3t$ при $t=\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}$. г) $-t+\frac{2}{3}t^3-\frac{1}{5}t^5$ при $t=\sqrt{1-x^2}$. д) $\frac{1}{6}\ln(t^2+t+1)-\frac{1}{3}\ln|t-1|-\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2t+1}{\sqrt{3}}$ при $t=\frac{\sqrt[3]{1+x^3}}{x}$. е) $\frac{5}{4}t^4-\frac{5}{9}t^9$ при $t=\sqrt[5]{1+\frac{1}{x}}$. ж) $\frac{3t}{2(t^3+1)}$ $-\frac{1}{2}\ln|t+1|+\frac{1}{4}\ln(t^2-t+1)-\frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{arctg}\frac{2t-1}{\sqrt{3}}$ при $t=\frac{\sqrt[3]{3x-x^3}}{x}$.

75. а) $\frac{t^3}{3\sqrt{2}}+2\sqrt{2}t-2\ln\left|\frac{\sqrt{2}-t}{\sqrt{2}+t}\right|$, където $t=\sqrt{2+x^{\sqrt{2}}}$.

б) $\frac{2t^3}{3\sqrt{3}}+\frac{4t}{\sqrt{3}}+\frac{2\sqrt{6}}{3}\ln\left|\frac{\sqrt{2}-t}{\sqrt{2}+t}\right|$, където $t=\sqrt{2-x^{\sqrt{3}}}$. в) В този случай $m=-1$, $n=\pi$, $p=\frac{3}{2}$. Очевидно $\frac{m+1}{n}$ е цяло, поради което е налице (39) от §14. Ето защо трябва да се използува

субституцията (42) от същия параграф, която в този случай има вида

$$a+bx^{\pi}=t^2. \tag{1}$$

От (1) следва

$$x=\left(\frac{t^2-a}{b}\right)^{\frac{1}{\pi}} \tag{2}$$

и

$$dx=\frac{2t}{\pi b}\left(\frac{t^2-a}{b}\right)^{\frac{1-\pi}{\pi}}dt. \tag{3}$$

Като заместим (1) — (3) в търсения интеграл, стигаме до интеграла

$$\frac{2}{\pi}\int\frac{t^4dt}{t^2-a}=\frac{2}{\pi}\frac{t^3}{3}+\frac{2}{\pi}at+\frac{2a^2}{\pi}\int\frac{dt}{t^2-a}.$$

След пресмятане на интеграла в дясната страна на това равенство за търсения интеграл се получава

$$\int\frac{(a+bx^{\pi})^{\frac{3}{2}}}{x}dx=\begin{cases}\frac{2}{\pi}\frac{t^3}{3}+\frac{2}{\pi}at+\frac{a\sqrt{a}}{\pi}\ln\left|\frac{\sqrt{a}-t}{\sqrt{a}+t}\right| & \text{при } a\geqq 0,\\ \frac{2}{\pi}\frac{t^3}{3}+\frac{2}{\pi}at+\frac{2a\sqrt{-a}}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{-a}} & \text{при } a<0,\end{cases}$$

където $t=\sqrt{a+bx^n}$.

76. а) Нека

$$I_m=\int\frac{x^m}{\sqrt{1-x^2}}dx. \tag{1}$$

Най-напред ще посочим формула за намаляване на m в (1). За тази цел правим следните преобразувания:

$$I_m=\int\frac{x^{m-2}(x^2-1+1)}{\sqrt{1-x^2}}dx \tag{2}$$

$$=I_{m-2}-\int x^{m-2}\sqrt{1-x^2}dx=I_{m-2}-\frac{1}{m-1}\int\sqrt{1-x^2}dx^{m-1}$$

$$=I_{m-2}-\frac{x^{m-1}\sqrt{1-x^2}}{m-1}=\frac{1}{m-1}I_m \quad (m\neq 1).$$

От (2) следва

(3) $$I_m = -\frac{x^{m-1}\sqrt{1-x^2}}{m} + \frac{m-1}{m}I_{m-2} \quad (m \neq 0,\ 1).$$

С помощта на (3) интегралите (1) при $m = 1, 2, \ldots$ се свеждат с рекурсия до интегралите I_0 или I_1. Интегралът I_0 е табличен, а I_1 може да се пресметне така:

$$I_1 = \int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{1}{2}\int \frac{d(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}} = -\sqrt{1-x^2}.$$

За пресмятане на (1) при отрицателни m е необходима формула за повишаване на m. Да въведем означението

(4) $$J_m = \int \frac{dx}{x^m\sqrt{1-x^2}}.$$

Правим следните преобразувания:

(5) $$J_m = \int \frac{1-x^2+x^2}{x^m\sqrt{1-x^2}}dx = \int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^m}dx + J_{m-2}$$

$$= -\frac{1}{m-1}\int \sqrt{1-x^2}\,d\frac{1}{x^{m-1}} + J_{m-2}$$

$$= -\frac{1}{m-1}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x^{m-1}} - \frac{1}{m-1}\int \frac{dx}{x^{m-2}\sqrt{1-x^2}} + J_{m-2}$$

$$= -\frac{1}{m-1}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x^{m-1}} + \frac{m-2}{m-1}J_{m-2} \quad (m \neq 1).$$

Равенството (5) позволява чрез рекурсия да се сведе пресмятането на J_m до интегралите J_0 и J_1. Интегралът J_0 е табличен, а J_1 най-удобно се пресмята така:

$$J_1 = \int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}} = \int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^{-2}-1}} = -\int \frac{dx^{-1}}{\sqrt{(x^{-1})^2-1}}$$

$$= -\ln(x^{-1} + \sqrt{x^{-2}-1}) = \ln\frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}$$

при $0 < x < 1$. Аналогично при $-1 < x < 0$ за J_1 се получава

$$J_1 = \ln\frac{\sqrt{1-x^2}-1}{x} = \ln\frac{-x}{1+\sqrt{1-x^2}},$$

с което задачата е решена. б) Аналогично на а).

77. а) $\ln|x| - \ln(2+x+2\sqrt{x^2+x+1})$. б) $\frac{1}{2}\arccos\frac{2-x}{x\sqrt{2}}$.

в) $\arcsin\frac{x-1}{x\sqrt{2}}$. г) $-\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2+x-x^2}+\sqrt{2}}{x} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\right|$.

д) $-\frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left|\frac{3+3x+2\sqrt{3(x^2+x+1)}}{x-1}\right|$. е) $-\frac{3}{2(2x-1-2\sqrt{x^2-x+1})}$ $-\frac{3}{2}\ln|2x-1-2\sqrt{x^2-x+1}| + 2\ln|x-\sqrt{x^2-x+1}|$.

ж) $\ln\left|\frac{t-1}{t}\right| - 2\operatorname{arctg} t$ при $t = \frac{1+\sqrt{1-2x-x^2}}{x}$.

з) $-\frac{5}{18(t+1)} - \frac{1}{6(t+1)^2} + \frac{3}{4}\ln|t-1| - \frac{16}{27}\ln|t-2| - \frac{17}{108}\ln|t+1|$ при $t = \frac{\sqrt{x^2+3x+2}}{x+2}$. и) $\frac{2(3-4t)}{5(1-t-t^2)} + \frac{2}{5\sqrt{5}}\ln\left|\frac{\sqrt{5}+1+2t}{\sqrt{5}-1-2t}\right|$ при $t = -x + \sqrt{x(1+x)}$. й) $\frac{1}{2\sqrt{3}}\ln\left|\frac{t+1-\sqrt{3}}{t+1+\sqrt{3}}\right| + \frac{1}{2\sqrt{7}}\ln\left|\frac{t-1-\sqrt{7}}{t-1+\sqrt{7}}\right|$ при $t = x + \sqrt{x^2+2x+4}$.

78. При $a \neq 0$ си послужете например със субституцията $ax + b = t^2$.

79. При $a = 0$, а също така при $a \neq 0$ и $4a(c\alpha+b\beta) = 8a^2\gamma+3b^2\alpha$.

80. а) След субституцията $x = 2\operatorname{arctg} t$ или, което е същото, $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$ за търсения интеграл се получава $2\operatorname{arctg}\left(\frac{1+r}{1-r}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)$.

б) $\frac{1}{2}x + \operatorname{arctg}\left(\frac{1+r}{1-r}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)$. в) $\frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)$ при $|b| < a$ и $\frac{1}{\sqrt{b^2-a^2}}\ln\left|\frac{b+a\cos x+\sqrt{b^2-a^2}\sin x}{a+b\cos x}\right|$ при $|a| < b$. С това по същество е изчерпан случаят $|a| \neq |b|$. При $|a| = |b| \neq 0$ търсеният интеграл се свежда до интегралите

$$\int \frac{dx}{1+\cos x} = \int \frac{d\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}} = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$$

или

$$\int \frac{dx}{1-\cos x} = \int \frac{d\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}} = -\operatorname{ctg}\frac{x}{2}.$$

г) Свежда се към в) с помощта на субституцията $x = \frac{\pi}{2} - t$.

д) $\frac{1}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \frac{3 \operatorname{tg} \frac{x}{2} + 1}{\sqrt{5}}$. е) $-\frac{1}{5}(2\sin x + \cos x)$ $+\frac{4}{5\sqrt{5}} \ln \left| \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\operatorname{arctg} 2}{2}\right) \right|$. ж) Интересен е само случаят $b^2+c^2 \neq 0$. Нека α е ъгъл, за който $\cos\alpha = \frac{b}{\sqrt{b^2+c^2}}$, $\sin\alpha = \frac{c}{\sqrt{b^2+c^2}}$. Ако означим търсения интеграл с I, получаваме

$$I = \int \frac{dx}{a + \sqrt{b^2+c^2}(\cos\alpha\cos x + \sin\alpha \sin x)} = \int \frac{dx}{a + \sqrt{b^2+c^2}\cos(x-\alpha)},$$

поради което пресмятането на I се свежда към в).

86. Въпросната субституция не може да се използува за пресмятане на интегралите $\int R(\sin x, \cos x)dx$ в интервала $(0, 2\pi)$, защото множеството от стойностите на функцията $2 \operatorname{arctg} t$ е интервалът $(-\pi, \pi)$, който не покрива интервала $(0, 2\pi)$. Ето защо търсенето на примитивна от разглеждания вид в интервала $(0, 2\pi)$ или в кой да е интервал, който не се съдържа в $(-\pi, \pi)$, трябва да стане с други методи.

Ще покажем как може да се намери примитивна на функцията

$$f(x) = \frac{1}{2 + \sin x} \tag{1}$$

върху цялата права. За тази цел най-напред ще намерим примитивна на (1) в интервала $(-\pi, \pi)$. Както вече видяхме, субституцията

$$x = 2 \operatorname{arctg} t \tag{2}$$

е подходяща за тази цел. Като направим субституцията (2), получаваме

$$\int \frac{dx}{2+\sin x} = \int \frac{dt}{t^2+t+1} = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2t+1}{\sqrt{3}} \tag{3}$$

съгласно зад. 6 д). Ето защо функцията

$$g(x) = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2} + 1}{\sqrt{3}} \tag{4}$$

е примитивна на (1) в интервала $(-\pi, \pi)$.

Чрез диференциране непосредствено се съобразява, че ако $g(x)$ е примитивна на $f(x)$ в някой интервал (a, b), а c е произволно реално число, функцията $g(x-c)$ е примитивна на $f(x-c)$ в интервала $(a+c, b+c)$. Функциите (1) и (4) обаче са периодични с период 2π. Ето защо функцията (4) е примитивна на (1) във всеки от интервалите $((2k-1)\pi, (2k+1)\pi)$ $(k \in \mathrm{I})$. Но по този начин се получават примитивни само в посочените интервали, понеже отделните примитивни не са дефинирани в точките $(2k+1)\pi$ $(k \in \mathrm{I})$.

Тъй като

$$\lim_{x \to (2k+1)\pi - 0} g(x) = \frac{\pi}{\sqrt{3}} \tag{5}$$

и

$$\lim_{x \to (2k+1)\pi + 0} g(x) = -\frac{\pi}{\sqrt{3}}, \tag{6}$$

функцията, дефинирана чрез (4), не притежава даже непрекъснато продължение върху цялата права, защото при преминаване през точките $(2k+2)\pi$ $(k \in \mathrm{I})$ тя прави скок, равен на $-\frac{2\pi}{\sqrt{3}}$ (направете чертеж). Тъй като след прибавяне на константа към една примитивна на (1) отново се получава примитивна на (1), от (5) и (6) следва, че съществува непрекъсната функция $h : \mathrm{R} \to \mathrm{R}$, която е примитивна на (1) във всеки от интервалите $((2k-1)\pi, (2k+1)\pi)$ $(k \in \mathrm{I})$. За да се получи такава функция, е необходимо отделните „късове“ от (4) да се „залепят“ чрез прибавяне на подходящи константи с оглед да се осигури непрекъснатостта.

Ето защо ще дефинираме h с равенството

$$h(x) = \begin{cases} g(x) + \frac{2k\pi}{\sqrt{3}} & \text{при } (2k-1)\pi < x < (2k+1)\pi, \\ (2k+1)\frac{\pi}{\sqrt{3}} & \text{при } x = (2k+1)\pi. \end{cases}$$

Непосредствено се съобразява, че функцията h е непрекъсната върху цялата права и е примитивна на f във всеки от интервалите $((2k-1)\pi, (2k+1)\pi)$. С непосредствена проверка се установява, че функцията h е диференцируема и в точките $(2k+1)\pi$ $(k \in \mathrm{I})$ и че $h'((2k+1)\pi) = f((2k+1)\pi)$ $(k \in \mathrm{I})$. С това задачата е решена.

87. а) Съгласно общите инструкции в случая може да се използува субституцията $t = \operatorname{tg} x$. Пресмятанията изглеждат така:

$$\int \frac{\sin^2 x \cos x}{\sin x + \cos x} dx = \int \frac{t^2 dt}{(1+t)(1+t^2)^2}$$

$$= \int \left[\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{t+1} - \frac{1}{4}\cdot\frac{t-1}{t^2+1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{t-1}{(t^2+1)^2}\right] dt$$

$$= \frac{1}{4}\ln\frac{|1+t|}{\sqrt{1+t^2}} - \frac{1}{4}\frac{1+t}{1+t^2} = \frac{1}{4}\ln|\sin x + \cos x| - \frac{1}{4}\cos x(\sin x + \cos x).$$

б) $\displaystyle\int \frac{\sin 2x\,dx}{\cos^4 x + \sin^4 x} = 2\int \frac{\sin x\cos x\,dx}{\cos^4 x + \sin^4 x} = 2\int \frac{\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg}^4 x}\frac{dx}{\cos^2 x}$ $\displaystyle = \int \frac{d\operatorname{tg}^2 x}{1+(\operatorname{tg}^2 x)^2} = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg}^2 x)$. Вместо тези пресмятания можехме да си послужим със субституцията $t = \operatorname{tg} x$.

в) $\displaystyle\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left(\frac{\sqrt{2}+\sin 2x}{\sqrt{2}-\sin 2x}\right)$; използувайте равенството $\displaystyle\cos^4 x + \sin^4 x = (\cos^2 x + \sin^2 x)^2 - 2\cos^2 x\sin^2 x = 1 - \frac{\sin^2 2x}{2}$.

г) $\displaystyle\frac{ax}{a^2+b^2} + \frac{b}{a^2+b^2}\ln|a\cos x + b\sin x|$.

д) $\displaystyle\int \frac{\sin^3 x\,dx}{\cos^2 x+1} = \int \frac{\cos^2 x - 1}{\cos^2 x + 1}d\cos x = \int d\cos x - 2\int \frac{d\cos x}{1+\cos^2 x}$ $= \cos x - 2\operatorname{arctg}\cos x$. Вместо тези пресмятания можехме да използуваме субституцията $t = \cos x$.

е) $\displaystyle\frac{1}{3}\cos^3 x - 3\cos x - \frac{3}{\cos x} + \frac{1}{3\cos^3 x}$. ж) $2\operatorname{arctg}\sin x - \sin x$.

з) $\displaystyle\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\sin^2 x$. и) $\displaystyle\frac{1}{\sqrt{AC-B^2}}\operatorname{arctg}\frac{C\operatorname{tg} x + B}{\sqrt{AC-B^2}}$ при $AC-B^2 > 0$ и $\displaystyle\frac{1}{2\sqrt{B^2-AC}}\ln\left|\frac{C\operatorname{tg} x + B - \sqrt{B^2-AC}}{C\operatorname{tg} x + B + \sqrt{B^2-AC}}\right|$ при $AC - B^2 < 0$.

88. Използувайте теоремата за диференциране на степенни редове.

89. Използувайте зад. 88.

90. а) $\displaystyle -\frac{\sin x}{2x^2} - \frac{\cos x}{2x} - \frac{1}{2}\operatorname{si}(x)$. б) и в). Нека

(1) $$I_n = \int \frac{\sin x}{x^n}dx, \quad J_n = \int \frac{\cos x}{x^n}dx \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Не е трудно с интегриране по части да се види, че

(2) $$I_n = -\frac{\sin x}{(n-1)x^{n-1}} + \frac{1}{n-1}J_{n-1} \quad (n = 2, 3, \ldots)$$

и

(3) $$J_n = -\frac{\cos x}{(n-1)x^{n-1}} - \frac{1}{n-1}I_{n-1} \quad (n = 2, 3, \ldots).$$

От (2) и (3) следва

(4) $$I_n = -\frac{\sin x}{(n-1)x^{n-1}} - \frac{\cos x}{(n-1)(n-2)x^{n-2}} - \frac{1}{(n-1)(n-2)}I_{n-2}$$

$(n = 3, 4, \ldots)$ и

(5) $$J_n = -\frac{\cos x}{(n-1)x^{n-1}} + \frac{\sin x}{(n-1)(n-2)x^{n-2}} - \frac{1}{(n-1)(n-2)}J_{n-2}$$

$(n = 3, 4, \ldots)$. Чрез рекурсия формулите (4) и (5) дават възможност пресмятането на интегралите (1) да се сведе до интегралите

(6) $$\int \frac{\sin x}{x}dx = \operatorname{si}(x), \quad \int \frac{\cos x}{x}dx = \operatorname{ci}(x)$$

и

(7) $$I_2 = \int \frac{\sin x}{x^2}dx, \quad J_2 = \int \frac{\cos x}{x^2}dx,$$

които се свеждат до (6) с помощта на (2) и (3).

г) $\displaystyle\frac{1}{b}\cos\frac{a}{b}\operatorname{si}\left(x+\frac{a}{b}\right) - \frac{1}{b}\sin\frac{a}{b}\operatorname{ci}\left(x+\frac{a}{b}\right)$.

д) $\displaystyle -\frac{\cos x}{1+x} - \cos 1\operatorname{si}(1+x) + \sin 1\operatorname{ci}(1+x)$.

91. Сведете към зад. 90 б) — г) и към интегралите $\displaystyle\int\frac{\cos x\,dx}{a+bx}$ $(b \neq 0)$, които се пресмятат аналогично на 90 г).

93. а) При $a \neq -1$ приложете субституцията $x^{a+1} = t$, за да получите $\operatorname{li}(x^{a+1})$. б) Приложете субституцията $e^x = t$, за да получите $\operatorname{li}(e^x)$. в) $\displaystyle\frac{1}{a}e^{-\frac{b}{a}}\operatorname{li}\left(e^{x+\frac{b}{a}}\right)$.

г) $\displaystyle\int \frac{e^x}{x^n}dx = -\frac{e^x}{(n-1)x^{n-1}} + \frac{1}{n-1}\int\frac{e^x}{x^{n-1}}dx \ (n = 2, 3, \ldots)$.

94. Сведете към зад. 93 б) — г).

95. а) $\displaystyle\frac{e^x}{1+x}$. б) $\displaystyle\frac{x+2}{x^2+x}e^x$.

Десета глава

1. а) С индукция относно броя на точките $x \in [a, b]$, за които $f(x) \neq g(x)$, твърдението очевидно може да се сведе към случая, когато $f(x)$ и $g(x)$ се различават само в една точка $\xi \in [a, b]$. Тъй като по условие функциите $f(x)$ и $g(x)$ са ограничени, съществува число M, за което са изпълнени неравенствата

(1) $$|f(x)| \leqq M, \ |g(x)| \leqq M$$

за всяко x от интервала $[a, b]$. Нека ε е произволно положително число, π е произволно подразделяне на интервала $[a, b]$ на краен брой интервали, а подразделянето

(2) $$\pi_1 : \ a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$$

съдържа всичките точки на π и освен това удовлетворява неравенствата

(3) $$x_\nu - x_{\nu-1} < \varepsilon \quad (\nu = 1, 2, \ldots, n).$$

Тъй като при добавяне на нови делящи точки малките суми растат, ще бъде в сила неравенството

(4) $$s_\pi(f) \leqq s_{\pi_1}(f).$$

За точката ξ има две възможности: да попадне в два съседни подинтервала (2) или пък да лежи само в един от тях. Тъй като тези два случая не са съществено различни, ще се занимаем само с втория от тях. Нека например $x_{i-1} < \xi < x_i$. Не е трудно да се съобрази, че тогава

(5) $$s_{\pi_1}(f) - s_{\pi_1}(g) = (m_i(f) - m_i(g))(x_i - x_{i-1}),$$

където

(6) $m_i(f) = \inf\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$, $m_i(g) = \inf\{g(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$.

От (1), (2), (3), (5) и (6) следва

(7) $$s_{\pi_1}(f) - s_{\pi_1}(g) \leqq 2M\varepsilon.$$

От (4) и (7) се получава

(8) $$s_\pi(f) \leqq s_{\pi_1}(g) + 2M\varepsilon.$$

Тъй като $\underline{\int_a^b} g(x)\,dx$ е по дефиниция една горна граница на малките

суми на g, в сила е $s_{\pi_1}(g) \leqq \underline{\int_a^b} g(x)\,dx$, което заедно с (8) дава

(9). $$s_\pi(f) \leqq \underline{\int_a^b} g(x)dx + 2M\varepsilon.$$

Неравенството (9) показва, че $\underline{\int_a^b} g(x)dx + 2M\varepsilon$ е горна граница на множеството на малките суми на f. Тъй като по дефиниция долният интеграл на f е най-голямата от долните граници на множеството от малките суми на f, от (9) следва

(10) $$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx \leqq \underline{\int_a^b} g(x)\,dx + 2M\varepsilon.$$

От (10) след граничен преход $\varepsilon \to 0$ се получава

(11) $$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx \leqq \underline{\int_a^b} g(x)\,dx.$$

Поради симетрията между f и g от (11) следва

(12) $$\underline{\int_a^b} g(x)\,dx \leqq \underline{\int_a^b} f(x)\,dx.$$

От (11) и (12) имаме $\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \underline{\int_a^b} g(x)\,dx$. Аналогично се доказва и равенството $\overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \overline{\int_a^b} g(x)\,dx$.

б) Нека

(1) $$\pi : \ a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$$

е произволно подразделяне на интервала $[a, b]$ на подинтервали. От неравенството $f(x) \leqq g(x)$ за $x \in [x_{\nu-1}, x_\nu]$ следва

$$(2) \qquad m_\nu(f) \leqq m_\nu(g) \quad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

(дайте педантично доказателство!). След умножаване на (2) с $x_\nu - x_{\nu-1}$ поради (1) се получава

$$(3) \quad m_\nu(f)(x_\nu - x_{\nu-1}) \leqq m_\nu(g)(x_\nu - x_{\nu-1}) \quad (\nu = 1, 2, \ldots, n).$$

От (3) след сумиране следва

$$(4) \qquad s_\pi(f) \leqq s_\pi(g),$$

което заедно с дефиницията на долен интеграл дава

$$(5) \qquad s_\pi(f) \leqq \underline{\int_a^b} g(x)\,dx.$$

От (5) и от дефиницията на долен интеграл следва $\underline{\int_a^b} f(x)\,dx$

$\leqq \underline{\int_a^b} g(x)\,dx$. Аналогично се доказва и неравенството $\overline{\int_a^b} f(x)\,dx$

$\leqq \overline{\int_a^b} g(x)\,dx$.

в) Нека π_1 и π_2 са произволни подразделяния на интервала $[a, b]$ на краен брой подинтервали, а подразделянето

$$(1) \qquad \pi: \ a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$$

съдържа всичките точки както на π_1, така и на π_2. Тъй като при добавянето на нови точки малките суми растат (нестрого, разбира се), а големите намаляват, ще бъдат в сила неравенствата

$$(2) \qquad s_{\pi_1}(f) \leqq s_\pi(f)$$

и

$$(3) \qquad S_\pi(g) \leqq S_{\pi_2}(g).$$

Нека ν е някое от числата $1, 2, \ldots, n$. По условие съществува точка x от интервала $(x_{\nu-1}, x_\nu)$, за която

$$(4) \qquad f(x) \leqq g(x).$$

От очевидните неравенства $m_\nu(f) \leqq f(x)$ и $g(x) \leqq M_\nu(g)$ и от (4) следва

$$(5) \qquad m_\nu(f) \leqq M_\nu(g) \quad (\nu = 1, 2, \ldots, n).$$

От (5) след умножение с $x_\nu - x_{\nu-1}$ и сумиране се получава

$$(6) \qquad s_\pi(f) \leqq S_\pi(g).$$

От (2), (3) и (6) следва

$$(7) \qquad s_{\pi_1}(f) \leqq S_{\pi_2}(g).$$

Тъй като π_1 и π_2 са произволни подразделяния на интервала $[a, b]$, от (7), от дефиницията на долен интеграл на f и от дефиницията на горен интеграл на g следва желаното неравенство.

2. а) $\underline{\int_a^b} c\,dx = c(b-a) = \overline{\int_a^b} c\,dx$. б) За произволно естествено число n да разгледаме подразделянето π_n на интервала $[a, b]$, определено от точките $x_\nu = a + \frac{\nu}{n}(b-a)$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$. Не е трудно да се съобрази, че

$$(1) \qquad \begin{aligned} s_{\pi_n} &= \sum_{\nu=1}^{n} x_{\nu-1}(x_\nu - x_{\nu-1}) = \sum_{\nu=1}^{n}\left(a + \frac{\nu-1}{n}(b-a)\right)\frac{b-a}{n} \\ &= \left(a + \frac{n-1}{2n}(b-a)\right)(b-a) \end{aligned}$$

и

$$(2) \qquad \begin{aligned} S_{\pi_n} &= \sum_{\nu=1}^{n} x_\nu(x_\nu - x_{\nu-1}) = \sum_{\nu=1}^{n}\left(a + \frac{\nu}{n}(b-a)\right)\frac{b-a}{n} \\ &= \left(a + \frac{n+1}{2n}(b-a)\right)(b-a). \end{aligned}$$

От (1) и (2) следва

$$(3) \qquad \lim_{n\to\infty} s_{\pi_n} = \frac{b^2 - a^2}{2}$$

и

$$(4) \qquad \lim_{n\to\infty} S_{\pi_n} = \frac{b^2 - a^2}{2}.$$

От (3), (4) и от очевидното неравенство

$$s_{\pi_n} \leqq \underline{\int_a^b} x\,dx \leqq \overline{\int_a^b} x\,dx \leqq S_{\pi_n}$$

следва

$$\frac{b^2-a^2}{2} \leqq \underline{\int_a^b} x\,dx \leqq \overline{\int_a^b} x\,dx \leqq \frac{b^2-a^2}{2},$$

откъдето $\underline{\int_a^b} x\,dx = \overline{\int_a^b} x\,dx = \frac{1}{2}(b^2-a^2)$.

Да отбележим изрично, че приложеният тук метод може да се използува за произволна ограничена функция $f:[a,b]\to\mathbf{R}$ $(a<b)$, за която можем да посочим сходяща редица от малки суми на Дарбу и сходяща редица от големи суми на Дарбу, които имат една и съща граница I. И в този по-общ случай е в сила

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx = I.$$

в) $\frac{1}{3}(b^3-a^3)$ (вж. зад. 1 б), гл. II). г) $\frac{1}{4}(b^4-a^4)$ (вж. зад. 1 в), гл. II). д) Всички малки суми на Дарбу за функцията D са 0, а всички големи са 1. Ето защо

$$\underline{\int_0^1} D(x)\,dx = 0, \quad \overline{\int_0^1} D(x)\,dx = 1.$$

е) Непосредствено се съобразява, че малките суми на Дарбу за функцията σ са 0, поради което

(1) $$\underline{\int_a^b} \sigma(x)dx = 0\,.$$

Нека сега ε е произволно положително число. Да разгледаме функцията $g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, дефинирана с

$$g(x) = \begin{cases} \varepsilon & \text{при } \sigma(x) > \varepsilon, \\ \sigma(x) & \text{при } \sigma(x) \leqq \varepsilon. \end{cases}$$

Не е трудно да се съобрази, че $\sigma(x)$ и $g(x)$ се различават само в краен брой точки от интервала $[a,b]$. Ето защо от зад. 1 а) следва

(2) $$\overline{\int_a^b} \sigma(x)\,dx = \overline{\int_a^b} g(x)\,dx.$$

От друга страна, $g(x) \leqq \varepsilon$ $(x\in\mathbf{R})$. Ето защо от а) и от зад. 1 б) се получава

(3) $$\overline{\int_a^b} g(x)\,dx \leqq \int_a^b \varepsilon\,dx = \varepsilon(b-a).$$

От (1) — (3) следва

(4) $$0 \leqq \overline{\int_a^b} \sigma(x)\,dx \leqq \varepsilon(b-a).$$

От (4) след граничен преход $\varepsilon\to 0$ се получава $\overline{\int_a^b} \sigma(x)\,dx = 0$.

5. Н е о б х о д и м о с т. Нека $\varepsilon>0$ и $\eta>0$ са произволни числа. От дефиницията на римановия интеграл f следва съществуването на такива подразделяния π_1 и π_2 на интервала $[a,b]$ на краен брой подинтервали, че да са в сила неравенствата

(1) $$s_{\pi_1} > \int_a^b f(x)dx - \frac{\varepsilon\eta}{2},$$

(2) $$S_{\pi_2} < \int_a^b f(x)dx + \frac{\varepsilon\eta}{2}.$$

Нека

(3) $$\pi:\ a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$$

е подразделяне на интервала $[a, b]$ на подинтервали, което съдържа както точките на π_1, така и точките на π_2. От (1) и (2) следва

$$(4)\qquad \int_a^b f(x)dx - \frac{\varepsilon\eta}{2} < s_\pi \leqq S_\pi < \int_a^b f(x)dx + \frac{\varepsilon\eta}{2},$$

откъдето $S_\pi - s_\pi < \varepsilon\eta$, т. е.

$$(5)\qquad \sum_{\nu=1}^{n}(M_\nu - m_\nu)(x_\nu - x_{\nu-1}) < \varepsilon\eta.$$

Нека Γ е множеството на онези от числата $1, 2, \ldots, n$, за които

$$(6)\qquad M_\nu - m_\nu > \varepsilon.$$

Тъй като събираемите в лявата страна на (5) са неотрицателни, от (5) следва

$$(7)\qquad \sum_{\nu\in\Gamma}(M_\nu - m_\nu)(x_\nu - x_{\nu-1}) < \varepsilon\eta.$$

От (6) следва

$$(8)\qquad \sum_{\nu\in\Gamma}(M_\nu - m_\nu)(x_\nu - x_{\nu-1}) \geqq \varepsilon\sum_{\nu\in\Gamma}(x_\nu - x_{\nu-1}).$$

От (7) и (8) следва

$$(9)\qquad \sum_{\nu\in\Gamma}(x_\nu - x_{\nu-1}) < \eta,$$

с което необходимостта е доказана.

Достатъчност. Нека M е една горна граница на $|f(x)|$ в интервала $[a, b]$, а ε и η са произволни положителни числа. По условие съществува подразделяне (3) на интервала $[a, b]$, за което е в сила (9) при същата дефиниция на Γ. Нека $\Delta = \{1, 2, \ldots, n\} \setminus \Gamma$. Очевидно

$$(10)\quad S_\pi - s_\pi = \sum_{\nu\in\Gamma}(M_\nu - m_\nu)(x_\nu - x_{\nu-1}) + \sum_{\nu\in\Delta}(M_\nu - m_\nu)(x_\nu - x_{\nu-1}).$$

Но $M_\nu - m_\nu \leqq 2M$ $(\nu = 1, 2 \ldots, n)$, откъдето

$$(11)\qquad \sum_{\nu\in\Gamma}(M_\nu - m_\nu)(x_\nu - x_{\nu-1}) \leqq 2M\sum_{\nu\in\Gamma}(x_\nu - x_{\nu-1}) \leqq 2M\eta$$

съгласно (9). От друга страна, от дефинициите на Γ и Δ следва $M_\nu - m_\nu \leqq \varepsilon$ $(\nu \in \Delta)$, откъдето

$$(12)\qquad \sum_{\nu\in\Delta}(M_\nu - m_\nu)(x_\nu - x_{\nu-1}) \leqq \varepsilon\sum_{\nu\in\Delta}(x_\nu - x_{\nu-1}) \leqq \varepsilon\sum_{\nu=1}^{n}(x_\nu - x_{\nu-1}) = \varepsilon(b-a).$$

От (10) — (12) следва

$$(13)\qquad S_\pi - s_\pi \leqq 2M\eta + \varepsilon(b-a).$$

Но $s_\pi \leqq \underline{\int_a^b} f(x)\,dx \leqq \overline{\int_a^b} f(x)\,dx \leqq S_\pi$, което заедно с (13) дава

$$(14)\qquad 0 \leqq \overline{\int_a^b} f(x)\,dx - \underline{\int_a^b} f(x)\,dx \leqq 2M\eta + \varepsilon(b-a).$$

От (14) след граничния преход $\varepsilon \to 0$, $\eta \to 0$ следва

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx,$$

с което е доказана и достатъчността.

6. Сведете към зад. 5. **7.** Сведете към зад. 1 а).

8. а) Сведете към зад. 1 в). б) Сведете към а).

9. Използувайте зад. 2 д).

10. Ще разгледаме подробно случая $r > 0$. Тъй като функцията cos е намаляваща в интервала $[0, \pi]$, подинтегралната функция е очевидно растяща.

За произволно естествено число n да разгледаме подразделянето π_n на интервала $[0, \pi]$, определено от точките $x_\nu = \frac{\nu}{n}\pi$ $(\nu = 0, 1, \ldots, n)$. Тъй като подинтегралната функция е растяща, не е трудно да се съобрази, че

$$(1)\qquad s_{\pi_n} = \sum_{\nu=1}^{n}\ln(1 - 2r\cos x_{\nu-1} + r^2)(x_\nu - x_{\nu-1})$$

$$= \frac{\pi}{n}\sum_{\nu=1}^{n}\ln\left(1 - 2r\cos\frac{\nu-1}{n}\pi + r^2\right)$$

и

(2) $$S_{\pi_n} = \frac{\pi}{n}\sum_{\nu=1}^{n}\ln\left(1 - 2r\cos\frac{\nu}{n}\pi + r^2\right).$$

Ето защо

(3) $$S_{\pi_n} - s_{\pi_n} = \frac{\pi}{n}(\ln(1 - 2r\cos\pi + r^2) - \ln(1 - 2r\cos 0 + r^2)).$$

От (3) следва

(4) $$\lim_{n\to\infty}(S_{\pi_n} - s_{\pi_n}) = 0.$$

От (2) получаваме

(5) $$S_{\pi_n} = \frac{\pi}{n}\ln\left((1+r)^2\prod_{\nu=1}^{n-1}\left(1 - 2r\cos\frac{\nu}{n}\pi + r^2\right)\right).$$

От друга страна, с помощта на формулата на Моавър (зад. 22, гл. II) могат да се намерят реалните и комплексните нули на полинома $z^{2n} - 1$, а оттам и представянето му като произведение на линейни множители. Като се групират двойките комплексни спрегнати множители, се получава

(6) $$z^{2n} - 1 = (z^2 - 1)\prod_{\nu=1}^{2n-1}\left(1 - 2z\cos\frac{\nu}{n}\pi + z^2\right)$$

за всяко комплексно число z. От (5) и (6) следва

(7) $$S_{\pi_n} = \frac{\pi}{n}\ln\left(\frac{r+1}{r-1}(r^{2n} - 1)\right).$$

Сега не е трудно да се съобрази, че

(8) $$\lim_{n\to\infty} S_{\pi_n} = \begin{cases} 0 & \text{при } 0 \leqq r < 1, \\ 2\pi\ln r & \text{при } r > 1. \end{cases}$$

Наистина при $0 \leqq r < 1$ е в сила $r^{2n} \to 0$, поради което вторият множител в (7) е ограничен, а при $r > 1$ от (7) следва

$$S_{\pi_n} = \frac{\pi}{n}\ln\left(\frac{r+1}{r-1}\frac{r^{2n}-1}{r^{2n}}\right) + 2\pi\ln r,$$

което поради $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{r^{2n}-1}{r^{2n}} = 1$ доказва верността на (8) във втория случай.

От (4), (8) и бележката след решението на зад. 2 б) следва, че разглежданата функция е интегруема и че

$$\int_0^\pi \ln(1 - 2r\cos x + r^2)\,dx = \begin{cases} 0 & \text{при } 0 \leqq r < 1 \\ 2\pi\ln r & \text{при } r > 1. \end{cases}$$

С аналогични разсъждения се установява и равенството

$$\int_0^\pi \ln(1 - 2r\cos x + r^2)\,dx = \begin{cases} 0 & \text{при } |r| < 1 \\ 2\ln|r| & \text{при } |r| > 1. \end{cases}$$

При $|r| = 1$ подинтегралната функция не е ограничена, поради което интегралът (засега) е лишен от смисъл.

11. Използувайте индукция относно n.

12. От зад. 11 а) следва

$$\mu(\Delta_\kappa) \leqq \sum_{\lambda=1}^{l}\mu(\delta_\lambda \cap \Delta_\kappa) \quad (\kappa = 1, 2, \ldots, k),$$

откъдето

(1) $$\sum_{\kappa=1}^{k}\mu(\Delta_\kappa) \leqq \sum_{\kappa=1}^{k}\sum_{\lambda=1}^{l}\mu(\delta_\lambda \cap \Delta_\kappa) = \sum_{\lambda=1}^{l}\sum_{\kappa=1}^{k}\mu(\delta_\lambda \cap \Delta_k).$$

От зад. 11 б) следва $\sum\limits_{\kappa=1}^{k}\mu(\delta_\lambda \cap \Delta_\kappa) \leqq \mu(\delta_\lambda) \quad (\lambda = 1, 2, \ldots, l)$,

откъдето

(2) $$\sum_{\lambda=1}^{l}\sum_{\kappa=1}^{k}\mu(\delta_\lambda \cap \Delta_\kappa) \leqq \sum_{\lambda=1}^{l}\mu(\delta_\lambda).$$

Желаното неравенство следва от (1) и (2).

13. Твърдението е интересно само когато $\sum\limits_{\lambda=1}^{\infty}\mu(\delta_\lambda) < \infty$. Най-напред ще разгледаме случая, когато интервалите Δ_κ $(\kappa = 1, 2, \ldots, k)$ са затворени, а интервалите δ_λ $(\lambda = 1, 2, \ldots)$ са отворени. От принципа на Борел–Льобег за компактност (зад. 13, гл. III) следва, че всеки от интервалите Δ_κ $(\kappa = 1, 2, \ldots, k)$ се покрива от краен брой от интервалите δ_λ $(\lambda = 1, 2, \ldots)$. Тъй като интервалите Δ_κ $(\kappa = 1, 2, \ldots, k)$ са краен брой, оттук следва, че съществува число l, за което $\bigcup_{\kappa=1}^{k} \Delta_\kappa \subset \bigcup_{\lambda=1}^{l} \delta_\lambda$. Сега твърдението следва от зад. 12.

В общия случай нека най-напред ε е произволно положително число. Да означим с Δ'_κ затворен интервал, за който $\Delta'_\kappa \subset \Delta_\kappa$ и

$$(1) \qquad \mu(\Delta_\kappa) \leqq \mu(\Delta'_\kappa) + \frac{\varepsilon}{k} \quad (\kappa = 1, 2, \ldots, k),$$

а с δ'_λ отворен интервал, за който $\delta_\lambda \subset \delta'_\lambda$ и

$$(2) \qquad \mu(\delta'_\lambda) \leqq \mu(\delta_\lambda) + \frac{\varepsilon}{2^\lambda} \quad (\lambda = 1, 2, \ldots).$$

Очевидно $\bigcup_{\kappa=1}^{k} \Delta'_\kappa \subset \bigcup_{\lambda=1}^{\infty} \delta'_\lambda$ и по силата на вече доказаното е изпълнено

$$(3) \qquad \sum_{\kappa=1}^{k} \mu(\Delta'_\kappa) \leqq \sum_{\lambda=1}^{\infty} \mu(\delta'_\lambda).$$

От (1) — (3) следва

$$\sum_{\kappa=1}^{k} \mu(\Delta_\kappa) \leqq \varepsilon + \sum_{\kappa=1}^{k} \mu(\Delta'_\kappa) \leqq \varepsilon + \sum_{\lambda=1}^{\infty} \left(\mu(\delta_\lambda) + \frac{\varepsilon}{2^\lambda}\right) = 2\varepsilon + \sum_{\lambda=1}^{\infty} \mu(\delta_\lambda),$$

т. е.

$$(4) \qquad \sum_{\kappa=1}^{k} \mu(\Delta_\kappa) \leqq 2\varepsilon + \sum_{\lambda=1}^{\infty} \mu(\delta_\lambda).$$

Търсеното неравенство се получава от (4) след граничния преход $\varepsilon \to 0$.

Да отбележим изрично, че посредством принципа на Борел-Льобег за компактност в горното доказателство бе използуван принципът за непрекъснатост.

Полето на рационалните числа не притежава свойство като формулираното в зад. 13. Наистина нека $\{r_\lambda\}_{\lambda=1}^{\infty}$ е редица, съдържаща всичките рационални числа (вж. зад. 61, гл. I), и ε е произволно положително число. Да положим

$$\delta_\lambda = \left(r_\lambda - \frac{\varepsilon}{2^{\lambda+1}},\ r_\lambda + \frac{\varepsilon}{2^{\lambda+1}}\right) \quad (\lambda = 1, 2, \ldots).$$

Ясно е, че тогава $\quad Q \subset \bigcup_{\lambda=1}^{\infty} \delta_\lambda \quad$ и $\quad \sum_{\lambda=1}^{\infty} \mu(\delta_\lambda) = \varepsilon.$

Не е трудно да се съобрази обаче, че по-слабите твърдения от зад. 11 и 12 запазват валидността си и в полето на рационалните числа.

14. а) и б) Приложете дефиницията. г) Сведете към зад. 13.

16. Убедете се, че за всяко естествено число l е в сила $A \subset \bigcup_{\lambda=l}^{\infty} \delta_\lambda$, и приложете зад. 15.

17. Н е о б х о д и м о с т. Нека D е множеството от всички точки на прекъсване на функцията f и нека $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k$ е сходящ ред с положителни членове. От зад. 5 следва, че за всяко естествено k съществува такова подразделяне

$$(1) \qquad \pi_k: \ a = x_{k,0} < x_{k,1} < \cdots < x_{k,n_k} = b$$

на интервала $[a, b]$ на подинтервали, че ако означим с Γ_k множеството на онези от числата $\nu = 1, 2, \ldots, n_k$, за които

$$(2) \qquad \omega([x_{k,\nu-1}, x_{k,\nu}], f) \geqq \frac{1}{k},$$

да е в сила

$$(3) \qquad \sum_{\nu \in \Gamma_k} \mu([x_{k,\nu-1}, x_{k,\nu}]) \leqq \alpha_k.$$

Да означим с A множеството на точките от интервала $[a, b]$, които влизат в някое от подразделянията π_k $(k = 1, 2, \ldots)$. Ясно е, че множеството A е изброимо и следователно пренебрежимо (вж. зад. 14 б) и в)). Тъй като $D \subset (D \setminus A) \cup A$, необходимостта ще бъде установена, ако докажем, че множеството $D \setminus A$ е пренебрежимо. За тази цел да разгледаме интервалите $[x_{k,\nu-1}, x_{k,\nu}]$ $(k = 1, 2, \ldots;\ \nu \in \Gamma_k)$. Ясно е, че те са изброимо много, а от (3) следва, че сумата от дължините им се мажорира от реда $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k$, поради което е крайна. Ето защо съгласно зад. 16 необходимостта ще бъде доказана, ако се убедим, че всяка точка от множеството $D \setminus A$ се съдържа в безбройно много от тези интервали. Нека $\xi \in D \setminus A$, т. е. функцията f е прекъсната в точката ξ и ξ не принадлежи на никое от подразделенията (1). От зад. 79, гл. VI следва, че $\omega_\xi(f) > 0$. Ще покажем, че за всяко естествено k, за което

$$(4) \qquad \frac{1}{k} \leqq \omega_\xi(f),$$

точката ξ принадлежи на поне един от интервалите $[x_{k,\nu-1},\ x_{k,\nu}]$ $(\nu \in \Gamma_k)$, с което всичко ще бъде доказано. Ако допуснем противното, ще излезе, че за някое k с (4) ще бъде в сила $\xi \in [x_{k,\nu-1},\ x_{k,\nu}]$, където ν е някое от числата $1, 2, \ldots, n_k$ с $\nu \notin \Gamma_k$. Тъй като $\xi \notin A$, оттук се получава

(5) $$\xi \in (x_{k,\nu-1},\ x_{k,\nu}).$$

От $\nu \notin \Gamma_k$ и от дефиницията на Γ_k следва

(6) $$\omega([x_{k,\nu-1},\ x_{k,\nu}]) < \frac{1}{k}.$$

Тъй като интервалът в (5) е отворен, от (5) и (6) следва $\omega_\xi(f) < \dfrac{1}{k}$ в противоречие с (4). С това необходимостта е установена.

Д о с т а т ъ ч н о с т. Нека D е множеството от точките на прекъсване на f, а ε и δ са произволни положителни числа. Разглеждаме реда от ограничени отворени интервали $\{\delta_\lambda\}_{\lambda=1}^{\infty}$, за които

(7) $$D \subset \bigcup_{\lambda=1}^{\infty} \delta_\lambda\,,$$

(8) $$\sum_{\lambda=1}^{\infty} \mu(\delta_\lambda) < \delta,$$

и полагаме

(9) $$U = \bigcup_{\lambda=1}^{\infty} \delta_\lambda.$$

От дефиницията на отворено множество следва, че U е отворено множество. Ето защо множеството $F = [a,\ b] \setminus U$ е затворено. Тъй като това множество е ограничено, от зад. 162, гл. IV следва, че F е и компактно. От друга страна, от (7) и (9) следва, че функцията f е непрекъсната в F. Ето защо е приложима зад. 66, гл. VI. Следователно съществува такова положително число δ_1, че да е в сила неравенството

(10) $$|f(x'') - f(x')| < \varepsilon$$

за всеки две точки x' и x'' от $[a,\ b]$ с $x' \in F$, $|x'' - x'| < \delta_1$. Да означим с

(11) $$\pi:\ a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$$

подразделяне на интервала $[a,\ b]$, за което

(12) $$x_\nu - x_{\nu-1} < \delta_1 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n).$$

Поради (12) от (10) следва, че ако някой от интервалите $[x_{\nu-1},\ x_\nu]$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$ пресича F, в сила е $\omega([x_{\nu-1},\ x_\nu]) \leqq \varepsilon$. Ето защо от $\omega([x_{\nu-1},\ x_\nu]) > \varepsilon$ следва $[x_{\nu-1},\ x_\nu] \cap F = \varnothing$, поради което $[x_{\nu-1},\ x_\nu] \subset U$. От (9) сега следва, че всеки от интервалите $[x_{\nu-1},\ x_\nu]$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$, в които осцилацията на f е по-голяма от ε, се съдържа в $\bigcup\limits_{\lambda=1}^{\infty} \delta_\lambda$. Тъй като, от друга страна, тези интервали нямат общи вътрешни точки, от (8) и от зад. 13 следва, че сумата от дължините им е по-малка от δ. По този начин е установено, че f удовлетворява условията за интегрируемост от зад. 5. Ето защо f е интегруема. С това е доказана и достатъчността.

18. Сведете към зад. 17.

19. Директно следствие от теоремата на Нютон и Лайбниц.

20. а) Нека функцията $F : \Delta \to \mathbf{R}$ е дефинирана с

(1) $$F(x) = \int_a^x f(t)dt \quad (x \in \Delta).$$

От теоремата на Нютон и Лайбниц следва, че функцията F е диференцируема в Δ и че

(2) $$F'(x) = f(x)$$

за всяко $x \in \Delta$. От друга страна, $\Phi(s) = F(\psi(s))$ $(s \in S)$. Сега от (2) и от правилото за диференциране на съставни функции следва

(3) $$\Phi'(s) = F'(\psi(s))\psi'(s) = f(\psi(s))\psi'(s) \quad (s \in S).$$

б) Като се използува а), се получава

$$\Phi'(s) = \left(-\int_a^{\varphi(s)} f(t)dt\right)' = -f(\varphi(s))\varphi'(s) \quad (s \in S).$$

в) Като се използуват а) и б), се получава

$$\Phi'(s) = \left(\int_{\varphi(s)}^{a} f(t)dt + \int_a^{\psi(s)} f(t)dt\right)' = f(\psi(s))\psi'(s) - f(\varphi(s))\varphi'(s)$$

$(a \in \Delta,\ s \in S)$.

21. Като се използува зад. 20, се получава: а) $2\frac{\sin x^2}{x}$.

б) $-\cos\cos x \operatorname{tg} x - \cos\sin x \operatorname{ctg} x$. в) $\frac{e^x}{x} - \frac{x}{\ln x}$. г) $-\frac{1}{\ln x}$.

22. а) $\int\limits_{-1}^{8}\sqrt[3]{x}dx = \int\limits_{-1}^{8} x^{\frac{1}{3}}dx = \frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}\Big|_{-1}^{8} = \frac{3}{4}8^{\frac{4}{3}} - \frac{3}{4}(-1)^{\frac{4}{3}} = \frac{45}{4}$.

б) 2. в) $\frac{\pi}{6}$. г) $\frac{\pi}{3}$. д) 1. е) $\int\limits_0^2 |1-x|dx = \int\limits_0^1 |1-x|dx$

$+\int\limits_1^2 |1-x|dx = \int\limits_0^1 (1-x)dx + \int\limits_1^2 (x-1)dx = \left(x - \frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^1 + \left(\frac{x^2}{2} - x\right)\Big|_1^2 = 1$.

ж) $2 - \frac{\pi}{2}$ (вж. зад. 2 ц), гл. IX). з) $\frac{\pi}{6} + \ln\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (вж. зад. 2 я), гл. IX). и) $-\ln 5$.

23. а) $\int\limits_0^a \frac{dx}{b-x} = -\int\limits_0^a \frac{d(b-x)}{b-x} = -\ln|b-x|\,\Big|_0^a = \ln\frac{b}{b-a}$.

б) $\int\limits_0^1 \frac{x\,dx}{(1+x^2)^2} = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 \frac{d(1+x^2)}{(1+x^2)^2} = -\frac{1}{2}\,\frac{1}{1+x^2}\Big|_0^1 = \frac{1}{4}$. в) $\frac{\pi}{2}$.

г) $\frac{3}{2}$. д) $e-\sqrt{e}$. е) $\frac{\pi}{6n}$. ж) 2. з) $\frac{1}{5}\ln\frac{4}{3}$. и) $\operatorname{arctg}\frac{1}{7}$.
й) $\frac{1}{2}\ln\frac{8}{5}$. к) $\frac{\pi}{6}$. л) 2. м) $\frac{2}{7}$. н) $\frac{4}{3}$. Решението

$$\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos x - \cos^3 x}\,dx = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos x \sin^2 x}\,dx = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos x}\sin x\,dx$$

$= -\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos x}\,d\cos x = -\frac{2}{3}(\cos x)^{\frac{3}{2}}\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 0$ е погрешно. Защо? За да получите правилно решение, постъпете, както в зад. 22 е).

о) $-\frac{9}{8} + \frac{21}{16}\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$. п) 1. р) Използувайте зад. 8 д), гл. IX, за да получите $\frac{1}{\sqrt{\alpha\beta}}\ln\frac{1+\sqrt{\alpha\beta}}{1-\sqrt{\alpha\beta}}$.

25. Сведете към зад. 24.

26. Ако се погледне педантично, интегралите нямат смисъл, тъй като подинтегралните функции не са дефинирани в нулата, но понеже тези функции имат граници при $x \to 0$ и са непрекъснати в $\left(0, \frac{\pi}{2}\right]$, не е трудно да се съобрази, че както и да ги додефинираме при $x = 0$, новополучените функции ще бъдат интегрируеми (вж. например зад. 17) и интегралите им няма да зависят от начина, по който са додефинирани при $x = 0$ (вж. зад. 8 б)). Разглежданите интеграли се разбират именно в този смисъл.

Така се постъпва и във всички подобни случаи.

а) Ако в зад. 25 б), гл. II заменим формално x с $2x$, след преобразуване получаваме

$$\frac{\sin(2n+1)x}{\sin x} = 1 + 2\sum_{\nu=1}^{n}\cos 2\nu x. \tag{1}$$

От (1) непосредствено следва, че търсеният интеграл е $\frac{\pi}{2}$.

б) От зад. 25 в), гл. II (с $y = 2x$) следва

$$\sum_{\nu=0}^{n-1}\sin(2\nu+1)x = \frac{\sin^2 nx}{\sin x}. \tag{1}$$

Ето защо $\left(\frac{\sin nx}{\sin x}\right)^2 = \sum\limits_{\nu=0}^{n-1}\frac{\sin(2\nu+1)x}{\sin x}$.

Сега от а) следва, че търсеният интеграл е $n\frac{\pi}{2}$.

27. а) $1 - \frac{2}{e}$. б) $\frac{\pi}{2} - 1$. в) $\frac{\pi(9-4\sqrt{3})}{36} + \frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$.
г) $\pi^3 - 6\pi$. д) 1. е) $\frac{\pi a^2}{4}$. ж) $\frac{e^\pi - 2}{5}$. з) $6 - 2e$.

28. а) Нека $I_n = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx$.

Като се разсъждава, както в зад. 25 а), гл. IX, се получава

$$I_n = -\frac{1}{n}\sin^{n-1}x\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{n-1}{n}I_{n-2} = \frac{n-1}{n}I_{n-2} \quad (n = 2, 3, \ldots). \tag{1}$$

От (1) с рекурсия се получава

$$I_{2m} = \frac{(2m-1)(2m-3)\dots 3.1}{2m.(2m-2)\dots 4.2}\frac{\pi}{2} = \frac{(2m-1)!!}{2m!!}\frac{\pi}{2},$$

$$I_{2m+1} = \frac{2m(2m-2)\dots 4.2}{(2m+1)(2m-1)\dots 3.1} = \frac{(2m)!!}{(2m+1)!!}.$$

б) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$ (защо?). в) $\frac{(m-1)!!(n-1)!!}{(m+n)!!}\frac{\pi}{2}$

при четни m и n и $\frac{(m-1)!!(n-1)!!}{(m+n)!!}$ във всички останали случаи.

29. а) След двукратно интегриране по части се получава

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{\alpha+2} x \cos(\alpha+2)x dx$$

$$= \frac{1}{\alpha+2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(\alpha+2)x(\cos^{\alpha+2} x - (\alpha+1)\cos^\alpha x \sin^2 x)dx$$

$$= \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(\alpha+2)x \cos^{\alpha+2} x dx - \frac{\alpha+1}{\alpha+2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^\alpha x \cos(2+\alpha)x dx,$$

откъдето следва а). б) — г) се доказват аналогично.

30. а) Нека

(1) $$I_n = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \sin nx dx.$$

След интегриране по части се получава

$$I_n = -\frac{1}{n}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x d \cos nx$$

$$= -\frac{1}{n}\cos^n x \cos nx\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos nx \cos^{n-1} x \sin x\, dx,$$

откъдето

(2) $$I_n = \frac{1}{n} + \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos nx \cos^{n-1} x \sin x dx.$$

От (1) и (2) след събиране се получава

(3) $$2I_n = \frac{1}{n} + \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-1} x(\sin nx \cos x - \cos nx \sin x)dx$$

$$= \frac{1}{n} + \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-1} x \sin(n-1)x dx.$$

От (3) следва

(4) $$I_n = \frac{1}{2n} + \frac{1}{2}I_{n-1} \quad (n = 1, 2, \dots).$$

От (4) с рекурсия се получава

$$I_n = \sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{1}{2^{\nu+1}(n-\nu)}.$$

б) Разсъждавайте както в а), за да получите $\frac{\pi}{2^{n+1}}$.

31. а) $2\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$. б) Подинтегралните функции не са дефинирани в точката нула, но въпреки това интегралите имат смисъл, тъй като $\lim\limits_{x\to 0} x^\alpha(\ln x)^n = 0$ (вж. зад. 47 в), гл. V) съгласно забележката от зад. 26. Сега използувайте зад. 42 б), гл. IX, за да получите $(-1)^n\frac{n!}{(\alpha+1)^{n+1}}$. в) $\frac{m!n!}{(m+n+1)!}$.

32. Използувайте зад. 23, гл. IX.

33. а) Сведете към зад. 32. б) Поради а) от доказателство се нуждае само равенството

$$\int\limits_{-1}^{1} (P_n(x))^2 dx = \frac{2.4^n(n!)^2}{2n+1}.$$

То може да се установи, като се използува дефиницията на $P_n(x)$, зад. 31 а) и зад. 32.

34. Сведете към зад. 33.

35. Преобразувайте $\int_{\xi}^{x} f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt$ с помощта на зад. 32 (като помните, че x и ξ са фиксирани, а интеграционната променлива е t).

36. а) Ще си послужим със субституцията

$$x = t^2. \tag{1}$$

След диференциране от (1) се получава

$$dx = 2t dt. \tag{2}$$

Новите интеграционни граници α и β ще определим от равенствата

$$4 = \alpha^2,\ 9 = \beta^2. \tag{3}$$

Едно решение на системата (3) е например

$$\alpha = 2,\ \beta = 3. \tag{4}$$

Сега можем да пристъпим към пресмятането на интеграла

$$\int_4^9 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}dx = \int_2^3 \frac{\sqrt{t^2}}{\sqrt{t^2}-1}2t dt = 2\int_2^3 \frac{t^2}{t-1}dt \tag{5}$$

$$= 2\int_2^3 \frac{t^2-1}{t-1}dt + 2\int_2^3 \frac{1}{t-1}dt = (t+1)^2\Big|_2^3 + 2\ln|t-1|\Big|_2^3 = 7 + 2\ln 2.$$

Наред с решенията (4) системата (3) притежава и други. Да обсъдим кои от тях са подходящи за нови интеграционни граници и кои не. Максималният интервал, който съдържа точките 4 и 9 и в който функцията $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$ е дефинирана, е $\Delta = (1, \infty)$. Ето защо, за да бъде приложима теоремата за смяна на променливите при определените интеграли, е необходимо α и β да бъдат такива, че за всяко $t \in [\alpha, \beta]$ да е в сила $t^2 > 1$. Оттук непосредствено се съобразява, че наред с решенията (4) единствено само решенията

$$\alpha = -2,\ \beta = -3 \tag{6}$$

на (3) удовлетворяват всички изисквания на теоремата за смяна на промснливите. Вместо (5) биха могли да бъдат използвани и

пресмятанията

$$\int_4^9 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}dx = \int_{-2}^{-3} \frac{\sqrt{t^2}}{\sqrt{t^2}-1}2t dt = 2\int_{-2}^{-3} \frac{t^2}{1+t}dt = \ldots = 7 + 2\ln 2. \tag{7}$$

Решенията

$$\alpha = -2,\ \beta = 3 \tag{8}$$

на (3) не могат да се използват за смяна на променливите, например защото полученият след такава „смяна" интеграл

$\int_{-2}^{3} \dfrac{\sqrt{t^2}}{\sqrt{t^2}-1}2t dt$ е лишен от смисъл. б) $2 - \dfrac{\pi}{2}$. в) $\dfrac{32}{3}$.

г) $\dfrac{5}{3} - 2\ln 2$. д) $\ln \dfrac{e + \sqrt{1+e^2}}{1+\sqrt{2}}$. е) $\dfrac{8}{15}$.

ж) $\dfrac{1}{2}\ln \dfrac{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{5}+1)(\sqrt{2}-1)}$. з) $\dfrac{\pi}{16}$. и) $\dfrac{\pi}{4}$.

й) $a^{2n}\dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$. к) $\dfrac{1}{a^2-b^2}\ln\left|\dfrac{a}{b}\right|$.

37. Вж. зад. 80, гл. IX. а) $2\operatorname{arc\,tg}\dfrac{1+r}{1-r}$. б) Субституцията

$$x = 2\operatorname{arc\,tg} t \tag{1}$$

не може да се използува за пресмятане на търсения интерграл, понеже $2\operatorname{arc\,tg} t$ не приема стойност, равна на горната граница π на интеграла. Но колкото и да е близко до π едно число b, за което $0 < b < \pi$, тази субституция може да се използува за пресмятането на интеграла $\int_0^b \dfrac{1 - r\cos x}{1 - 2r\cos x + r^2}dx$. Това е така, защото при това условие системата

$$\left|\begin{aligned} &2\operatorname{arc\,tg}\alpha = 0,\\ &2\operatorname{arc\,tg}\beta = b \end{aligned}\right. \tag{2}$$

е решима. Решението на системата (2) очевидно е

$$\alpha = 0,\ \beta = \operatorname{tg}\frac{b}{2}. \tag{3}$$

Тъй като от (1) следва

$$dx = \frac{2dt}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \tag{4}$$

ще имаме $\displaystyle\int_0^b \frac{1-r\cos x}{1-2r\cos x+r^2}dx = \int_0^{\operatorname{tg}\frac{b}{2}} \frac{(1-r)+(1+r)t^2}{(1+t^2)((1-r)^2+(1+r)^2t^2)}dt$

$$= \operatorname{arc\,tg} t\Big|_0^{\operatorname{tg}\frac{b}{2}} + \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{1+r}{1-r}t\right)\Big|_0^{\operatorname{tg}\frac{b}{2}} = \frac{b}{2} + \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{1+r}{1-r}\operatorname{tg}\frac{b}{2}\right),$$

т. е.

$$\int_0^b \frac{1-r\cos x}{1-2r\cos x+r^2}dx = \frac{b}{2} + \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{1+r}{1-r}\operatorname{tg}\frac{b}{2}\right). \tag{5}$$

Ако в (5) извършим граничен преход $b \to \pi$, за търсения интеграл получаваме $\displaystyle\int_0^\pi \frac{1-r\cos x}{1-2r\cos x+r^2}dx = \pi$. Аналогични усложнения, но не само в горната, а и в долната интеграционна граница са налице и в следващите примери в) — д).

в) $\dfrac{2\pi}{\sqrt{a^2-b^2}}$. г) $\dfrac{2\pi}{\sqrt{a^2-b^2}}$. д) $\dfrac{\pi}{\sqrt{5}}$.

38. Вж. зад. 87, гл. IX. а) $\dfrac{\pi}{4}$. б) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\ln(\sqrt{2}+1)$.

в) Послужете си със субституцията $x = \operatorname{arc\,tg} t$, за да пресметнете интеграла $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon} \frac{dx}{a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x}$ $\left(0 < \varepsilon < \dfrac{\pi}{2}\right)$. След това в получения резултат извършете граничен преход $\varepsilon \to 0$, за да получите $\dfrac{\pi}{2ab}$.

39. Към интеграла $\displaystyle\int_{-a}^0 f(x)\,dx$ приложете субституцията $x = -t$. Изяснете си геометричния смисъл на твърдението.

40. а) $\dfrac{\pi}{ab}$ съгласно зад. 38 в) и 39 б). б) 0 съгласно зад. 39 а).

41. Послужете си със субституцията $x = t + \dfrac{a}{2}$ и със зад. 39 б).

42. а) Послужете си със субституцията $x = t+T$. б) Използувайте а) и равенството $\displaystyle\int_a^{a+T} = \int_a^0 + \int_0^T + \int_T^{a+T} = \int_0^T$.

43. а) Подинтегралната функция има период 2π. Ето защо от зад. 37 б), 39 и 42 следва

$$\int_0^{2m\pi} = m\int_0^{2\pi} = m\int_{-\pi}^{\pi} = 2m\int_0^{\pi} = 2m\pi,$$

$$\int_0^{(2m+1)\pi} = \int_0^{2m\pi} + \int_{2m\pi}^{(2m+1)\pi} = 2m\pi + \int_0^\pi = (2m+1)\pi.$$

Поради това търсеният интеграл е равен на $k\pi$. б) $\dfrac{k\pi}{\sqrt{a^2-b^2}}$. Използувайте зад. 37 в).

44. а) Приложете субституцията $x = a - t$. б) Използувайте а). в) Използувайте първото от равенствата б), както и равенството $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(\sin x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx$, което се установява чрез субституцията $x = \pi - t$.

45. а) От зад. 44 в) следва

$$\int_0^\pi \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx = \int_0^\pi \frac{x\sin x}{2-\sin^2 x}dx = \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{2-\sin^2 x}dx$$

$$= -\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\cos x}{1+\cos^2 x} = -\pi\operatorname{arc\,tg}\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^2}{4}. \quad \text{б)} \ \frac{\pi^2}{2ab}.$$

46. Направете субституцията $\sin x = \dfrac{2a\sin t}{a+b+(a-b)\sin^2 t}$, или по-точно

$$x = \arcsin\frac{2a\sin t}{a+b+(a-b)\sin^2 t}, \tag{1}$$

33

като предварително установите, че дясната страна на (1) има смисъл.

47. а) Докажете, че функцията $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt \ (a \leqq x \leqq b)$ е тъждествено нула, и приложете теоремата на Нютон и Лайбниц.

б) Тривиално еквивалентно с а).

48. Тривиално следствие от зад. 47 б).

49. Приложение на зад. 48. в) Използувайте зад. 93, гл. VII.

г) Използувайте зад. 94 б) и в), гл. VII. д) Използувайте зад. 98 а) и б), гл. VII.

50. При $0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}$ са в сила неравенствата

(1) $$\sin^{2n+1} x \leqq \sin^{2n} x \leqq \sin^{2n-1} x \quad (n \in \mathbf{N}).$$

От (1) след интегриране се получава

(2) $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} x\,dx \leqq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x\,dx \leqq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n-1} x\,dx \quad (n \in \mathbf{N}).$$

От (2) и зад. 28 а) следва

(3) $$\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \leqq \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{\pi}{2} \leqq \frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!} \quad (n \in \mathbf{N}).$$

Ако във второто от тези неравенства заменим n с $n+1$, след прости преобразувания се получава

(4) $$\frac{2n+1}{2n+2}\frac{\pi}{2} \leqq \frac{1}{2n+1}\left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2.$$

От друга страна, от лявото от неравенствата (3) следва

(5) $$\frac{1}{2n+1}\left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2 \leqq \frac{\pi}{2}.$$

От (4) и (5) получаваме

$$\frac{2n+1}{2n+2}\frac{\pi}{2} \leqq \frac{1}{2n+1}\cdot\left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2 \leqq \frac{\pi}{2},$$

откъдето твърдението следва непосредствено.

51. От развитието на $\ln(1+x)$ в степенен ред следва

(1) $$\ln\frac{1+x}{1-x} = 2x\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{1}{2\nu+1}x^{2\nu} \quad (|x|<1).$$

В (1) полагаме $x = \frac{1}{2n+1}$ $(n \in \mathbf{N})$ и получаваме

$$\ln\frac{n+1}{n} = \frac{2}{2n+1}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{1}{(2\nu+1)(2n+1)^{2\nu}} \quad (n \in \mathbf{N})$$

или, което е същото,

(2) $$\left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\frac{n+1}{n} = \sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{1}{(2\nu+1)(2n+1)^{2\nu}} \quad (n \in \mathbf{N}).$$

Но

(3) $$1 < \sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{1}{(2\nu+1)(2n+1)^{2\nu}} < 1 + \frac{1}{3}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^{2\nu}} = 1 + \frac{1}{12n(n+1)}.$$

От (2) и (3) следва

(4) $$1 < \left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < 1 + \frac{1}{12n(n+1)}.$$

От (4) след антилогаритмуване се получава $e < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}} < e.e^{\frac{1}{12n(n+1)}}$, или

(5) $$e^{-\frac{1}{12n(n+1)}} < \frac{e}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}}} < 1.$$

Да разгледаме редицата с общ член

(6) $$a_n = \frac{n!e^n}{n^{n+\frac{1}{2}}} \quad (n \in \mathbf{N}).$$

Не е трудно да се съобрази, че

(7) $$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{e}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}}}.$$

От (5) и (7) следва

(8) $$e^{-\frac{1}{12n(n+1)}} < \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1 \quad (n \in \mathbb{N}).$$

От дясното от неравенствата (8) следва, че редицата (6) е намаляваща, и тъй като е ограничена отдолу (например от нулата), тя е сходяща. Да положим

(9) $$a = \lim_{n\to\infty} a_n.$$

Очевидно

(10) $$a < a_n \quad (n \in \mathbb{N}).$$

От друга страна, поради $-\frac{1}{12n(n+1)} = -\frac{1}{12n} + \frac{1}{12(n+1)}$ от (8) се получава

(11) $$e^{-\frac{1}{12n}} a_n < e^{-\frac{1}{12(n+1)}} a_{n+1} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

От (11) следва, че редицата с общ член $e^{-\frac{1}{12n}}$ е растяща. Тъй като поради (9) тя има граница a, в сила е неравенството

(12) $$e^{-\frac{1}{12n}} a_n < a.$$

От (10) и (12) следва

(13) $$1 < \frac{a_n}{a} < e^{\frac{1}{12n}} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

От (13) следва, че за всяко естествено n съществува число θ, за което $0 < \theta < 1$ и

(14) $$a_n = a e^{\frac{\theta}{12n}}.$$

От (6) и (14) получаваме

(15) $$n! = a\sqrt{n}\,\frac{n^n}{e^n}\,e^{\frac{\theta}{12n}}.$$

За да се получи формулата на Стирлинг, остава в (15) да се пресметне константата a. Това може да се направи с помощта на формулата на Уолис (вж. зад. 50):

(16) $$\frac{\pi}{2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n+1}\left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2.$$

Очевидно

(17) $$\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} = \frac{((2n)!!)^2}{(2n)!} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!}.$$

От (15) следва

(18) $$(2n)! = a\sqrt{2n}\,\frac{(2n)^{2n}}{e^{2n}}\,e^{\frac{\theta'}{24n}} \quad (0 < \theta' < 1).$$

От (15), (17) и (18) получаваме

(19) $$\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} = a\sqrt{\frac{n}{2}}\,e^{\frac{4\theta-\theta'}{24n}}.$$

От (16) и (19) следва $\frac{\pi}{2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n+1} a^2 \frac{n}{2} e^{\frac{4\theta-\theta'}{12n}} = \frac{a^2}{4}$, откъдето

(20) $$a = \sqrt{2\pi}.$$

Формулата на Стирлинг следва от (15) и (20).

52. Приложете теоремата на Нютон и Лайбниц.

54. Използувайте зад. 106 а), гл. VII.

55. Разсъждавайте, както при решаването на зад. 107, гл. VII.

56. а) Използувайте равенството $f(1) - f(0) = \int_0^1 f'(x)dx$ и неравенството на Хьолдер. б) От теоремата за средните стойности в интегралното смятане следва, че съществува точка ξ от $[0, 1]$, за която

(1) $$f(\xi) = \int_0^1 f(x)dx.$$

От друга страна, за произволно x от $[0, 1]$ е в сила

(2) $$f(x) - f(\xi) = \int_\xi^x f'(x)dx.$$

От (1) и (2) следва

(3) $$f(x) = \int_\xi^x f'(x)dx + \int_0^1 f(x)dx.$$

От (3) и неравенството (36) от §5 следва

$$|f(x)| \leqq \left|\int_{\xi}^{x} f'(x)dx\right| + \left|\int_{0}^{1} f(x)\,dx\right| \tag{4}$$

$$\leqq \int_{\xi}^{x} |f'(x)|\,dx + \int_{0}^{1} |f(x)|dx \leqq \int_{0}^{1} |f'(x)|dx + \int_{0}^{1} |f(x)|dx.$$

в) Използувайте б), неравенството на Хьолдер и неравенството $|A+B|^p \leqq 2^{p-1}(|A|^p + |B|^p)$ $(p > 1)$, което следва от изпъкналостта на функцията x^p.

57. От теоремата за крайните нараствания следва, че за всяко x от $[a, b]$ с $a \leqq x < x+h \leqq b$ съществува ξ с $x < \xi < x+h$, за което

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(\xi). \tag{1}$$

От друга страна, в сила е и равенството

$$-f'(x) + f'(\xi) = \int_{x}^{\xi} f''(x)dx. \tag{2}$$

От (1), (2) и неравенството (36) от 5 следва

$$|f'(x)| \leqq \int_{x}^{\xi} |f''(x)|\,dx + \frac{|f(x+h) - f(x)|}{h} \tag{3}$$

$$\leqq \int_{x}^{x+h} |f''(x)|\,dx + \frac{|f(x+h) - f(x)|}{h}.$$

От (3), неравенството $|A+B|^p \leqq 2^{p-1}(|A|^p + |B|^p)$ и неравенството на Хьолдер следва

$$|f'(x)|^p \leqq 2^{p-1}\left(h^{p-1}\int_{x}^{x+h} |f''(x)|^p dx + \frac{|f(x+h) - f(x)|^p}{h^p}\right) \tag{4}$$

$$\leqq 2^{p-1}h^{p-1}\int_{a}^{b} |f''(x)|^p dx + \frac{2^{p-1}}{h^p}|f(x+h) - f(x)|^p.$$

От (4) след интегриране в граници от a до $b-h$ се получава

$$\int_{a}^{b-h} |f'(x)|^p dx \leqq 2^{p-1}h^{p-1}(b-a)\int_{a}^{b} |f''(x)|^p dx \tag{5}$$

$$+ \frac{2^{p-1}}{h^p}\int_{a}^{b-h} |f(x+h) - f(x)|^p dx.$$

От друга страна, от неравенството на Минковски следва

$$\left\{\int_{a}^{b-h} |f(x+h) - f(x)|^p dx\right\}^{\frac{1}{p}} \leqq \left\{\int_{a}^{b-h} |f(x+h)|^p dx\right\}^{\frac{1}{p}}$$

$$+ \left\{\int_{a}^{b-h} |f(x)|^p dx\right\}^{\frac{1}{p}} \leqq 2\left\{\int_{a}^{b} |f(x)|^p dx\right\}^{\frac{1}{p}},$$

откъдето

$$\int_{a}^{b-h} |f(x+h) - f(x)|^p dx \leqq 2^p \int_{a}^{b} |f(x)|^p dx. \tag{6}$$

От (5) и (6) следва

$$\int_{a}^{b-h} |f'(x)|^p dx \leqq 2^{p-1}h^{p-1}(b-a)\int_{a}^{b} |f''(x)|^p dx + \frac{2^{2p-1}}{h^p}\int_{a}^{b} |f(x)|^p dx. \tag{7}$$

Аналогични разглеждания при $a \leqq x-h < x \leqq b$ дават

$$\int_{a+h}^{b} |f'(x)|^p dx \leqq 2^{p-1}h^{p-1}(b-a)\int_{a}^{b} |f''(x)|^p dx + \frac{2^{2p-1}}{h^p}\int_{a}^{b} |f(x)|^p dx. \tag{8}$$

От (7) и (8) следва

$$\int_{a}^{b} |f'(x)|^p dx \leqq \int_{a}^{b-h} |f'(x)|^p dx + \int_{a+h}^{b} |f'(x)|^p dx$$

$$\leqq 2^p h^{p-1}(b-a)\int_a^b |f''(x)|^p dx + \frac{2^{2p}}{h^p}\int_a^b |f(x)|^p dx,$$

с което твърдението е доказано.

58. **а)** Да положим

$$\text{(1)} \qquad \tau = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx.$$

Тъй като $\tau \in \mathring{\Delta}$, от зад. 129 а), гл. VII следва неравенството

$$\frac{\varphi(s)-\varphi(\tau)}{s-\tau} \leqq \frac{\varphi(u)-\varphi(\tau)}{u-\tau}$$

при $s < \tau < u$ $(s, u \in \Delta)$. Ето защо от принципа за отделимост (зад.3, гл. II) следва, че съществува число $\beta \in \mathbf{R}$, за което е в сила

$$\text{(2)} \qquad \frac{\varphi(s)-\varphi(\tau)}{s-\tau} \leqq \beta \leqq \frac{\varphi(u)-\varphi(\tau)}{u-\tau}$$

винаги когато $s,\ u \in \Delta$ и $s < u$. Непосредствено се съобразява, че от (2) следва неравенството

$$\text{(3)} \qquad \varphi(t) \geqq \varphi(\tau) + \beta(t-\tau)$$

за всяко $t \in \Delta$. Ако в (3) положим $t = f(x)$ и интегрираме, ще получим

$$\text{(4)} \qquad \int_a^b \varphi(f(x))dx \geqq \varphi(\tau)(b-a) + \beta\left(\int_a^b f(x)dx - \tau(b-a)\right).$$

Търсеното неравенство следва от (1) и (4). **б)** и **в)** — приложение на **а)**.

59. Нека a е произволна вътрешна точка за интервала Δ. Развиваме φ по формулата на Тейлър до втори ред и получаваме

$$\text{(1)} \qquad \varphi(a+t) = \varphi(a) + t\varphi'(a) + \frac{t^2}{2!}\varphi''(a+\theta t) \quad (0 < \theta < 1)$$

за всички достатъчно малки по абсолютна стойност $t \in \mathbf{R}$. По условие е в сила

$$\text{(2)} \qquad \varphi(a) \leqq \frac{1}{2h}\int_{a-h}^{a+h} \varphi(x)dx = \frac{1}{2h}\int_{-h}^{h} \varphi(a+t)dt$$

за всички достатъчно малки положителни h. От (1) и (2) следва

$$\text{(3)} \qquad 0 \leqq \frac{1}{4h}\int_{-h}^{h} \frac{t^2}{2!}\varphi''(a+\theta t)dt.$$

Макар функцията φ'' да е непрекъсната, от пръв поглед не е очевидно, че функцията $\varphi''(a+\theta t)$ на t е непрекъсната, тъй като θ може и да е прекъсната функция на t. Във всеки случай поради $0 < \theta < 1$ тази функция е очевидно непрекъсната при $t = 0$. Непрекъснатостта ѝ при $t \neq 0$ се установява, след като (1) се реши относно $\varphi''(a+\theta t)$.

И така $\varphi''(a+\theta t)$ е непрекъсната функция на t. Сега от (3) и теоремата за средните стойности в интегралното смятане следва съществуването на точка ξ от интервала $(a-h, a+h)$, за която

$$\text{(4)} \qquad \varphi''(\xi) \geqq 0.$$

Тъй като при $h \to 0$ е в сила $\xi \to a$, от непрекъснатостта на φ'' и от (4) следва

$$\text{(5)} \qquad \varphi''(a) \geqq 0$$

за произволна вътрешна точка a на Δ. От (5), като се използува отново непрекъснатостта на φ'', следва, че (5) е в сила в целия интервал Δ. Сега твърдението следва от зад 131, гл. VII.

Интересно е дали твърдението запазва валидността си и без предположението за диференцируемост на φ.

60. От теоремата на Нютон и Лайбниц следва, че функцията $G : [a,\ b] \to \mathbf{R}$, дефинирана с

$$\text{(1)} \qquad G(x) = \int_a^x g(t)dt \quad (x \in [a,\ b]),$$

е примитивна на g. Ето защо от правилото за интегриране по части при определените интеграли следва

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = \int_a^b f(x)dG(x) = f(x)G(x)\Big|_a^b - \int_a^b G(x)df(x),$$

което заедно с (1) дава

$$\text{(2)} \qquad \int_a^b f(x)g(x)dx = f(b)\int_a^b g(t)dt - \int_a^b G(x)f'(x)dx.$$

Тъй като $f'(x)$ не си мени знака, от теоремата за средните стойности в интегралното смятане следва, че съществува число ξ от $[a, b]$, за което

$$(3) \qquad \int_a^b G(x)f'(x)dx = G(\xi)\int_a^b f'(x)dx = (f(b) - f(a))\int_a^\xi g(t)dt.$$

Твърдението следва от (2) и (3). Ще отбележим изрично, че то запазва валидността си и при по-слабото предположение за монотонност на f и интегрируемост на g.

61. а) Ясно е, че функцията $\frac{1}{x}$ е монотонна във всеки интервал $[a, b]$ с $a > 0$, $b > 0$. Ето защо е приложима втората теорема за средните стойности, т. е. съществува точка ξ от $[a, b]$, такава, че е в сила равенството

$$(1) \qquad \int_a^b \frac{\sin x}{x}dx = \frac{1}{a}\int_a^\xi \sin x dx + \frac{1}{b}\int_\xi^b \sin x dx.$$

Но

$$(2) \qquad \int_a^\xi \sin x dx = -\cos x\Big|_a^\xi = \cos a - \cos\xi \leqq 2$$

и аналогично

$$(3) \qquad \int_\xi^b \sin x dx \leqq 2.$$

Търсеното неравенство следва от (1) — (3). б) Разсъждава се аналогично на а), като предварително се установява монотонността на функцията $\frac{1 - e^{-\alpha x}}{x}$.

62. Да допуснем противното, т. е. че e е алгебрично число. Тогава ще съществуват естествено число m и цели числа c_μ $(\mu = 0, 1, \dots, m)$, за които $c_m \neq 0$ и

$$(1) \qquad c_0 + c_1 e + c_2 e^2 + \dots + c_m e^m = 0.$$

Тъй като $e \neq 0$, без ограничение на общността може да се предполага, че $c_0 \neq 0$. Нека p е просто число, за което

$$(2) \qquad p > m, \; p > |c_0|.$$

Доказателството се основава на някои свойства на полинома

$$(3) \qquad P(x) = \frac{1}{(p-1)!}x^{p-1}(x-1)^p(x-2)^p \dots (x-m)^p.$$

От зад. 24 а), гл. IX следва равенството

$$(4) \qquad \int_0^b P(x)e^{-x}dx = -e^{-x}\sum_{\nu=0}^n P^{(\nu)}(x)\Big|_0^b \quad (b \in \mathbf{R}).$$

където n е степента на полинома P. Ако положим

$$(5) \qquad Q(x) = \sum_{\nu=0}^n P^{(\nu)}(x),$$

от (4) получаваме

$$(6) \qquad e^b \int_0^b P(x)e^{-x}dx = e^b Q(0) - Q(b).$$

В (6) даваме на b последователно стойности $b = 0, 1, 2, \dots, m$, умножаваме получените равенства съответно с $c_0, c_1, c_2, \dots, c_m$, събираме и като използуваме (1), получаваме

$$(7) \qquad \sum_{\mu=0}^m c_\mu e^\mu \int_0^\mu P(x)e^{-x}dx = -\sum_{\mu=0}^m c_\mu Q(\mu).$$

Ще се занимаем най-напред с дясната страна на (7).

Ще установим първо, че при $\mu = 1, 2, \dots, m$ числото $Q(\mu)$ е цяло и се дели на p. Съгласно (5) за тази цел е достатъчно да установим, че всяко от числата $P^{(\nu)}(\mu)$ $(\nu = 0, 1, \dots, n)$ е цяло и се дели на p.

От (3) се вижда, че числата $1, 2, \dots, m$ са p-кратни нули на полинома P. Ето защо

$$(8) \qquad P^{(\nu)}(\mu) = 0 \quad (\mu = 1, 2, \dots, m;\; \nu = 0, 1, \dots, p-1).$$

Остава да се разгледа случаят $\nu = p, p+1, \dots, n$. Очевидно

$$(9) \qquad \left(\frac{x^k}{(p-1)!}\right)^{(\nu)} = p\binom{k}{p}(k-p)\dots(k-\nu+1)x^{k-\nu}$$

$(k = 0, 1, 2, \dots, n;\; \nu = p, p+1, \dots, n)$. От друга страна, от (3) непосредствено се вижда, че

$$P(x) = \sum_{\kappa=0}^{n} d_\kappa \frac{x^\kappa}{(p-1)!}, \tag{10}$$

където числата d_κ са цели. Тъй като биномните коефициенти $\binom{k}{p}$ са цели числа, от (9) и (10) следва, че $P^{(\nu)}(\mu)$ се дели на p и при $\mu = 1, 2, \ldots, m; \nu \doteq p, p+1, \ldots, n$.

Тъй като числата c_μ са цели, с това е доказано, че всяко от събираемите $c_\mu Q(\mu)$ $(\mu = 1, 2, \ldots, m)$ в дясната страна на (7) се дели на p.

Сега ще установим, че събираемото $c_0 Q(0)$ е цяло и не се дели на p. Тъй като $p > |c_0|$ и p е просто, а $c_0 \neq 0$, целта ще бъде постигната, ако установим, че $Q(0)$ не се дели на p.

От (3) се вижда, че числото 0 е $(p-1)$-кратна нула на полинома P. Ето защо

$$P^{(\nu)}(0) = 0 \quad (\nu = 0, 1, \ldots, p-2). \tag{11}$$

От друга страна, като се използват (9) и (10), също както по-горе, се установява, че $P^{(\nu)}(0)$ се дели на p и при $\nu = p, p+1, \ldots, n$. От (5) и (11) следва

$$Q(0) = \sum_{\nu=p-1}^{n} P^{(\nu)}(0). \tag{12}$$

Току-що видяхме, че събираемите от дясната страна на (12) с $\nu \neq p-1$ се делят на p. Ето защо, за да докажем, че $Q(0)$ не се дели на p, е достатъчно да се убедим, че $P^{(p-1)}(0)$ не се дели на p.

От формулата на Лайбниц и (3) следва

$$P^{(p-1)}(0) = (-1)^{mp}(m!)^p. \tag{13}$$

Тъй като $p > m$, от (13) следва, че $P^{(p-1)}(0)$ наистина не се дели на p. По този начин е установено, че сумата в дясната страна на (7) е цяло число, което не се дели на p. Но тогава тя е различно от нула цяло число и от (7) следва

$$\left| \sum_{\mu=0}^{m} c_\mu e^\mu \int_0^\mu P(x)e^{-x}\,dx \right| \geqq 1. \tag{14}$$

От друга страна, от (3) следва

$$|P(x)| \leqq \frac{1}{(p-1)!} m^{p-1} \underbrace{m^p m^p \ldots m^p}_{m \text{ пъти}} = \frac{m^{mp+p-1}}{(p-1)!} \tag{15}$$

за $0 \leqq x \leqq m$. От (15) за $\mu = 0, 1, \ldots, m$ следва

$$\left| \int_0^\mu P(x)e^{-x}\,dx \right| \leqq \frac{m^{mp+p-1}}{(p-1)!} \int_0^\mu e^{-x}\,dx \leqq \frac{m^{mp+p}}{(p-1)!}. \tag{16}$$

От (16) следва

$$\left| \sum_{\mu=0}^{m} c_\mu e^\mu \int_0^\mu P(x)e^{-x}\,dx \right| \leqq Ce^m \frac{m^{mp+p}}{(p-1)!} = \frac{Ce^m (m^{m+1})^p}{(p-1)!}, \tag{17}$$

където $C = |c_0| + |c_1| + \cdots + |c_m|$. От друга страна, от зад. 43 б), гл. IV следва

$$\lim_{p\to\infty} \frac{(m^{m+1})^p}{(p-1)!} = 0. \tag{18}$$

Тъй като простите числа са безбройно много, (17) и (18) противоречат на (14). Полученото противоречие доказва твърдението.

63. а) $\frac{1}{2}$. б) $\ln 2$ (срв. със зад. 84 а), гл. IV). в) $\frac{\pi}{4}$. г) $\frac{2}{\pi}$. д) $\frac{1}{p+1}$ (срв. със зад. 77 б), гл. V). е) $\frac{2}{3}(2\sqrt{2}-1)$. ж) $\frac{1}{\sqrt{3}}$. з) $\frac{3}{2}$. и) $\frac{1}{\ln 2}$.

64. Положете например $f_n(x) = n(n+1)x^{n-1}(1-x)$.

65. а) Използвайте развитието на e^x в степенен ред.

б) Използвайте равенството $\frac{1}{x^x} = e^{-x\ln x}$, степенното развитие на експоненциалната функция и зад. 31 б). г) Използвайте зад. 124 е), гл. VIII. д) и е) Използвайте бинома на Нютон и зад. 28 а) и б).

66. Сведете към зад. 46.

67. а) Използвайте степенното развитие на $\ln(1+x)$, както и зад. 131 а), гл. VIII с $x = \pi$. б) Използвайте степенното развитие на $\ln(1-x)$, както и зад. 131 а), гл. VIII с $x = 0$.

в) Сведете към зад. 28 б).

68. а) $\frac{8}{27}(10\sqrt{10}-1)$. б) $\frac{p}{2}(\sqrt{2} + \ln(1+\sqrt{2}))$. в) $a \operatorname{sh} 1$.

69. а) $2\pi a$. б) $\frac{3a}{2}$. в) $8a$. г) $2\pi^2 a$. д) $\ln 2$.

е) $a\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\frac{a^2-b^2}{a^2}\sin^2 t}\,dt$ (вж. зад. 65 е)). Исторически това е първият пример на елиптичен интеграл.

70. а) $\frac{a}{2}(2\pi\sqrt{1+4\pi^2}+\ln(2\pi+\sqrt{1+4\pi^2})$.

б) $a\sqrt{1+\frac{1}{m^2}}(e^{2m\pi}-1)$. в) $4a$.

г) $2(a+b)\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\frac{4ab}{(a+b)^2}\sin^2 t}\,dt$ (вж. зад. 65 е)).

71. а) $\frac{1}{3}$. б) 2. в) $\sqrt{2}-1$.

72. а) $\frac{a^2}{3}$. б) $\frac{9}{2}$. в) $\frac{9}{2}$. г) πab. д) $\frac{2}{3}a^3$.

73. а) $6\pi a^2$. б) $\frac{3\pi(a^2-b^2)^2}{8ab}$. в) $\frac{3\pi a^2}{8}$. г) $3\pi a^2$.

74. а) a^2. б) $\frac{3\pi a^2}{2}$. в) $\frac{\pi a^2}{4}$. г) $\frac{\pi}{2}(a^2+2b^2)$.

75. а) a^2. б) $\frac{3}{2}a^2$. в) $\frac{\pi}{2}(a^2+b^2)$.

Иван Проданов, Николай Хаджииванов,
Иван Чобанов

СБОРНИК ОТ ЗАДАЧИ
ПО ДИФЕРЕНЦИАЛНО И ИНТЕГРАЛНО СМЯТАНЕ
Функции на една променлива

Българска
Второ стереотипно издание

Рецензенти на първото издание *Димитър Скордев, Ярослав Тагамлицки*
Редактор на първото издание *Грозданка Благоева*
Художник на корицата *Пенчо Мутафчиев*
Художествен редактор *Красимира Михайлова*
Технически редактор *Божидар Стоянов*

Изд.индекс 411
Формат 60x84/16 Печ.коли 33 Изд.коли 30.69

Университетско издателство "Св. Климент Охридски"
Печатница "Ат.Стратиев" - Хасково