Компютърна графика

Информатика IV курс, II поток 2012/2013 г.

Лекция № 4

лектор: гл. ас. д-р В. Гушев

по курса на $\boxed{\textit{доц. д-р Спас Петров Ташев}}$

Растеризиране на дъга от окръжност

Да предположим, че:

✓окръжността е с даден радиус R и е центрирана в началото на координатната система, т.е. има уравнение

$$f(x, y) \equiv x^2 + y^2 - R^2 = 0;$$

✓дъгата се описва по посока обратна на часовниковата стрелка, започва от ъгъл α и завършва в ъгъл β, зададени в градуси (точката с координати $(R, 0)$ съответства на ъгъл 0°, точката $(0, R)$ – на ъгъл 90° и т.н.).

Трябва да припомним, че в нашите разглеждания пикселите са квадрати със страна h.

Първо ще намерим крайните пиксели от растера на дъгата, т.е. този, от който трябва да тръгнем и този, в който трябва да спрем.

Нека точка $P = (x, y)$ е от множеството на пикселите (x и y са кратни на h) в първи квадрант. Ако използваме тази точка за апроксимираща точка от растера, то грешката се задава с

$$E_P = f(P).$$

Ние ще се стремим на всяка стъпка да намаляваме тази грешка (по абсолютна стойност).

Считаме, че точката $P = (x, y)$ е близо до нашата дъга, т.е. на всяка стъпка при избора на следващи приближения за началния (крайния) пиксел ще се движим само по хоризонтал или вертикал, но не и по диагонал.

Ако от точка P се преместим в съседната точка $P' = (x + \varepsilon h, y)$, където $\varepsilon = \pm 1$, то грешката в P' ще бъде

$$E_{P'} = f(P') = f(P) + f(P') - f(P) =$$

$$= E_P + [(x + \varepsilon h)^2 + y^2 - R^2] - [x^2 + y^2 - R^2] = E_P + 2\varepsilon hx + h^2$$

Аналогично при преместване по оста Oy, т.е. от точка P в точка $P'' = (x, y + \delta h)$ за грешката ще имаме

$$E_{P''} = E_P + 2\delta h y + h^2, \ \delta = \pm 1.$$

Ние ще изберем посоката на движение (по оста Ox или по оста Oy) в зависимост от това по коя от координатните оси се получава по-голямо намаляване на грешката E_P, т.е. в случай, че точките P' и P'' са от едната страна на окръжността и двете грешки $E_{P'}$ и $E_{P''}$ са по-малки от E_P (по абсолютна стойност), то гледаме коя е по-малката (по абсолютна стойност) грешка $E_{P'}$ или $E_{P''}$ и избираме съответната посока.

Например ако точката $P = (x, y)$ лежи в I квадрант ($x > 0$ и $y > 0$) и вътре в кръга, определен от окръжността ($f(P) < 0$), то тогава трябва да се движим надясно или нагоре, т.е. $\varepsilon = 1$ и $\delta = 1$ или $P' = (x + h, y)$ и $P'' = (x, y + h)$.

Тогава ако точките P' и P'' също лежат в кръга, то за да изберем накъде да продължим, ще разгледаме неравенството

$$|f(P')| < |f(P'')|,$$

което е изпълнено точно когато

$$-[(x + h)^2 + y^2 - R^2] < -[x^2 + (y + h)^2 - R^2]$$

или

$$x > y.$$

Така достигаме до следния извод, който може да бъде получен и от геометрични съображения:

Ако точката $P = (x, y)$ лежи в I октант ($x > y$), то трябва да се движим надясно (по Ox), т.е. трябва да изберем за следващо приближение на началния (крайния) пиксел точката $P' = (x + h, y)$.

Ако $P = (x, y)$ лежи във II октант ($x < y$), то трябва да се движим нагоре (по Oy) и да изберем точката $P'' = (x, y + h)$.

Спираме това движение когато грешката започне да нараства (по абсолютна стойност) и последната точка считаме за начален (краен) пиксел.

По аналогичен начин се вижда накъде трябва да се придвижваме, за да се доближим до окръжността, когато се намираме в другите октанти и съответно вътре или вън от кръга.

В случай, че точката $P = (x, y)$ е далеч от окръжността може да се наложи и движение по диагонал, а ако точките P' и P'' не са от едната страна на окръжността, то по тази процедура може и да не се получи началния (крайния) пиксел, но винаги се получава пиксел от растера на окръжността, което ни е достъчно.

Ако началния ъгъл е α, то разумно е да положим $x = R\cos\alpha, y = R\sin\alpha$, след което да закръглим тези стойности до кратно на h и да използваме горните разсъждения за да уточним началния пиксел от растера на дъгата.

Ако вече знаем началния и крайния пиксели, то можем да се движим по посока обратна на часовниковата стрелка като прилагаме правилото на Брезенхам или правилото на средната точка.

Например алгоритъма на Брезенхам може да се прилага като имаме предвид в кой квадрант се намираме (не използваме симетрията, понеже дъгата в общия случаий не е симетрична). Нарастванията по x и y могат да се видят от таблицата:

квадрант	incx	incy
I	-1	1
II	-1	-1
III	1	-1
IV	1	1

Грешката (стойността на функцията в диагоналната точка) сега ще бъде

$$\Delta = f(D) = (x + \text{ incx } h)^2 + (y + \text{ incy } h)^2 - R^2.$$

Ако означим

$$ddx = 2 \text{ incx } h\, x + h^2,\ ddy = 2 \text{ incy } h\, y + h^2,$$

то грешката се променя по правилото:

$$P \longmapsto H, \quad \Delta = \Delta + ddx$$

$$P \longmapsto V, \quad \Delta = \Delta + ddy$$

$$P \longmapsto D, \quad \Delta = \Delta + ddx + ddy$$

Проверките за I квадрант сега са :

Ако $\Delta < 0$, то избираме измежду D и V в зависимост от знака на $\varepsilon = f(D) + f(V)$.
Ако $\varepsilon < 0$ избираме V, иначе избираме D.

Ако $\Delta > 0$, то избираме измежду D и H в зависимост от знака на $\delta = f(D) + f(H)$.
Ако $\delta > 0$ избираме H, иначе избираме D.

Проверките за II квадрант са (в известен смисъл противоположни):

Ако $\Delta > 0$, то избираме измежду D и V в зависимост от знака на $\varepsilon = f(D) + f(V)$.
Ако $\varepsilon > 0$ избираме V, иначе избираме D.

Ако $\Delta < 0$, то избираме измежду D и H в зависимост от знака на $\delta = f(D) + f(H)$.
Ако $\delta < 0$ избираме H, иначе избираме D.

Поправките за δ и ε са:

$$\delta = 2f(D) + F(H) - f(D) = 2\Delta + [(x + \text{incx } h)^2 + y^2 - R^2] - [(x + \text{incx } h)^2 + (y + \text{incy } h)^2 - R^2] = 2\Delta - ddy$$

$$\varepsilon = 2f(D) + F(V) - f(D) = 2\Delta + [(x)^2 + (y + \text{incy } h)^2 - R^2] - [(x + \text{incx } h)^2 + (y + \text{incy } h)^2 - R^2] = 2\Delta - ddx$$

По същество разглежданията в I и III, както и във II и IV квадрант са аналогични. Проблем възниква при преминаване от квадрант в квадрант, т.е. при пресичане на някоя от координатните оси.

Тогава трябва да се следи за съответните знаци на incx, incy и Δ, както и да се преинициализират по подходящ начин променливите ddx и ddy.

Алгоритъм на Брезенхам за растеризиране на елипса

Ще предполагаме, че елипсата е зададена с нормално уравнение

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Както и при окръжността ще използваме уравнението на елипсата във вида

$$f(x, y) \equiv b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0.$$

Ще растеризираме само в I квадрант. В останалите квадранти пикселите се получават като се използва симетрията.

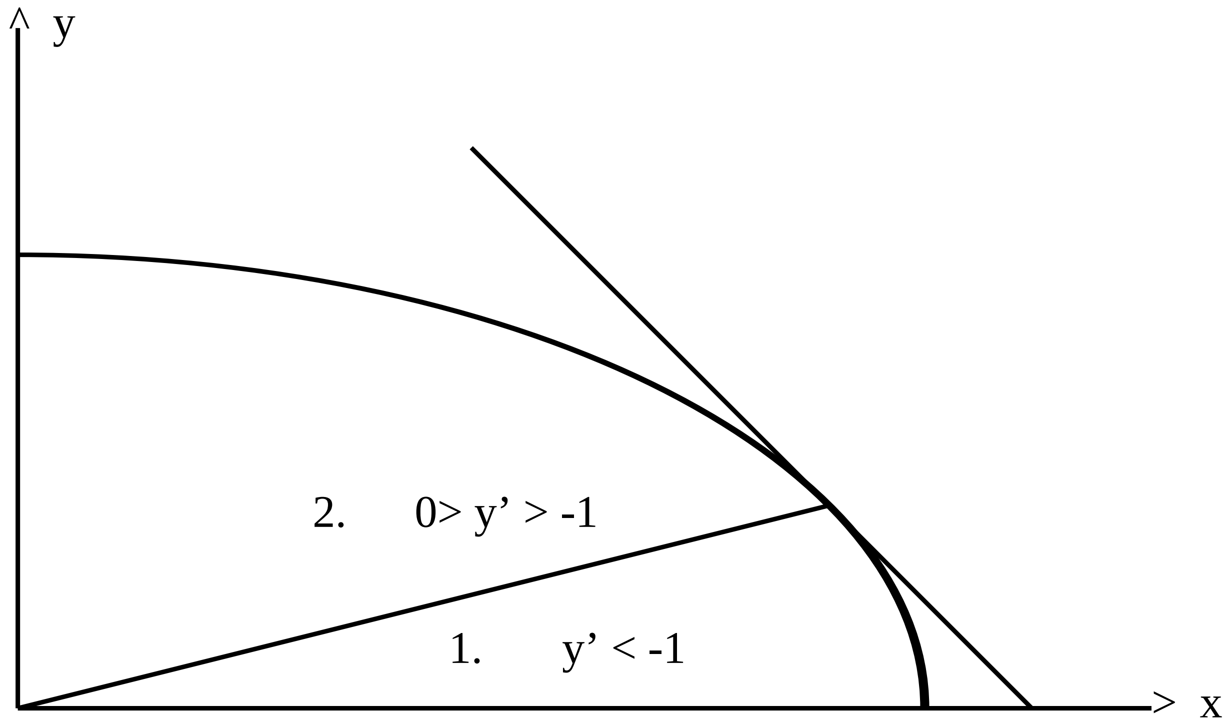

Fig. 2.7

Точката от графиката на елипсата, за която ъгловият коефициент на допирателната е -1 ($y' = \frac{dy}{dx} = -1$), разделя I квадрант на две области (на фигурата – 1. и 2.).

Диференцираме $f(x, y)$ и получаваме

$$df(x, y) = 2ya^2dy + 2xb^2dx = 0 \text{ или } \frac{dy}{dx} = -\frac{b^2x}{a^2y},$$

т.е. за допирната точка имаме $\frac{dy}{dx} = -1$ или $b^2x = a^2y$.

В зависимост от това в коя от тези области се намираме, ще се налага да избираме измежду два пиксела, т.е ще можем да приложим алгоритъма на средната точка.

Ако се намираме в област 1. и се движим по посока обратна на часовниковата стрелка, то ако текущия пиксел е $P = (x, y)$ (вж. фигура 2.8), ще избираме измежду вертикалния пиксел $V = (x, y + h)$ и диагоналния $D = (x - h, y + h)$ ($dy > 0$, $dx < 0$ и $\frac{dy}{dx} < -1$, т.е. $|dy| > |dx|$ или ще се движим по вертикала).

Докато в област 2. ще избираме измежду хоризонталния $H = (x - h, y)$ и диагоналния $D = (x - h, y + h)$ пиксел ($dy > 0$, $dx < 0$ и $\frac{dy}{dx} > -1$, т.е. $|dy| < |dx|$ или ще се движим по хоризонтала).

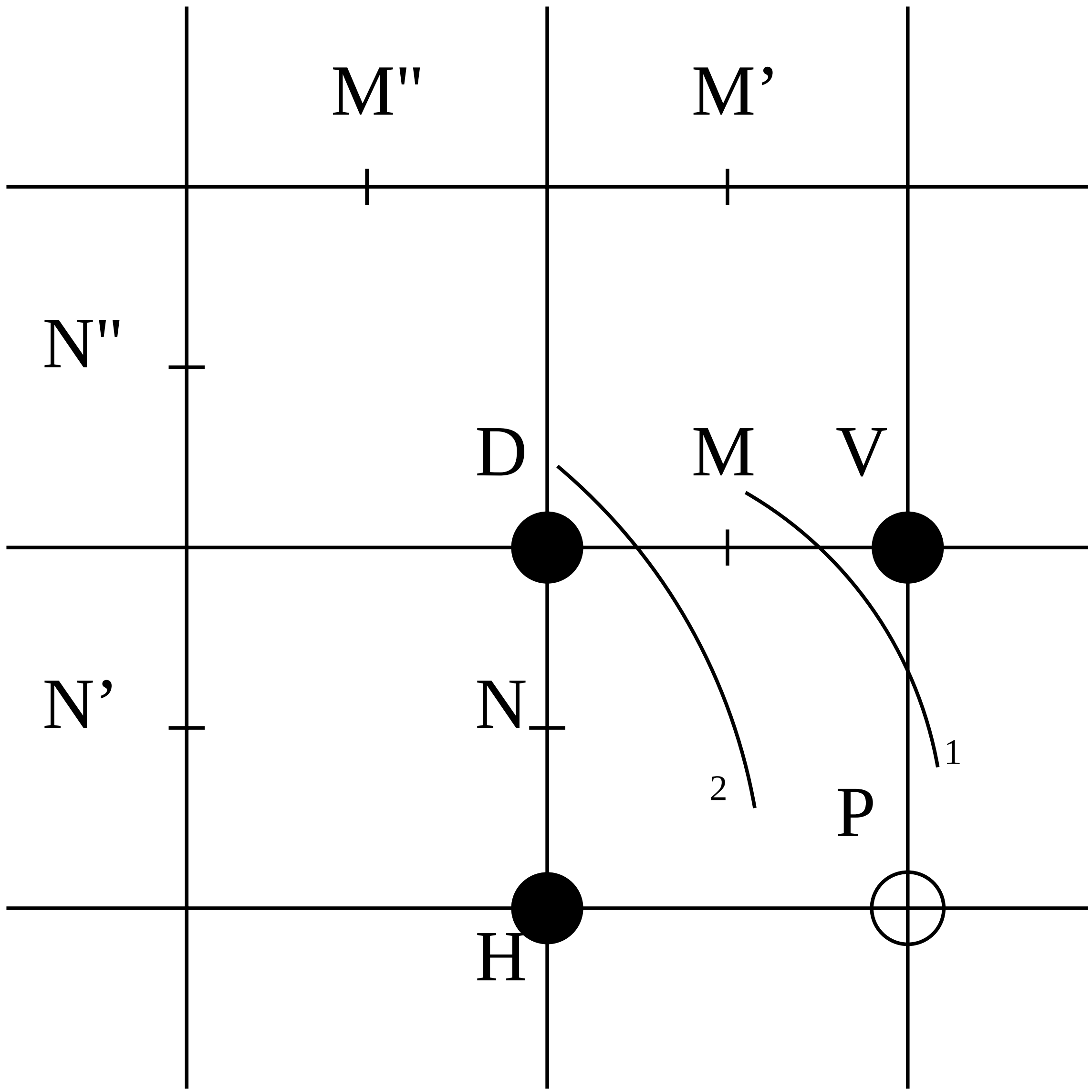

Fig. 2.8

1. Нека стартираме от точка $(a, 0)$, движим се в посока обратна на часовниковата стрелка и не напускаме област 1.

Грешката за текущия пиксел (x, y) сега е

$$E = E_P = f(M) = b^2(x - \frac{h}{2})^2 + a^2(y + h)^2 - a^2b^2.$$

Критерият за избор на точка ще бъде знакът на грешката.

Ако $E < 0$, т.е. точка M е вътрешна за елипсата (елипсата е минала както линия 1), то избираме точка V в противен случай избираме точка D (елипсата е минала както линия 2).

1.1. $E < 0$ и е избрана е точка V.

Новата грешка ще бъде

$$E = E_V = f(M') = f(M) + f(M') - f(M) =$$

$$= E_P + [b^2(x - \frac{h}{2})^2 + a^2(y + 2h)^2 - a^2b^2] - [b^2(x - \frac{h}{2})^2 + a^2(y + h)^2 - a^2b^2] =$$

$$= E + a^2h(2y + 3h).$$

1.2. Ако $E > 0$ и е избрана е точка D, то новата грешка ще бъде

$$E = E_D = f(M'') = f(M) + f(M'') - f(M) =$$

$$= E_P + [b^2(x - \frac{h}{2} - h)^2 + a^2(y + 2h)^2 - a^2b^2] - [b^2(x - \frac{h}{2})^2 + a^2(y + h)^2 - a^2b^2] =$$

$$= E - 2b^2h(x - h) + a^2h(2y + 3h)$$

2. Нека се намираме в област 2. Сега вече избираме измежду точките H и D. Ако текущия пиксел е пак P, то грешката е

$$E = E_P = f(N).$$

2.1. Нека $E > 0$ и избрана е точка H.

Новата грешка ще бъде

$$E = E_H = f(N') = f(N) + f(N') - f(N) =$$

$$= E_P + [b^2(x-2h)^2 + a^2(y+\frac{h}{2})^2 - a^2b^2] - [b^2(x-h)^2 + a^2(y+\frac{h}{2})^2 - a^2b^2] =$$

$$= E - b^2h(2x - 3h).$$

2.2. Нека $E < 0$ и избрана е точка D.

Новата грешка ще бъде

$$E = E_D = f(N'') = f(N) + f(N'') - f(N) =$$

$$= E_P + [b^2(x-2h)^2 + a^2(y+\frac{h}{2}+h)^2 - a^2b^2] - [b^2(x-h)^2 + a^2(y+\frac{h}{2})^2 - a^2b^2] =$$

$$= E - b^2h(2x-3h) + 2a^2h(y+h).$$

Както вече видяхме преминаването от област 1. в област 2. става в точката, за която

$$y' = \frac{dy}{dx} = -\frac{b^2x}{a^2y} = -1$$

или

$$b^2x = a^2y,$$

т.е. при $b^2x > a^2y$, точката (x, y) лежи в област 1., а иначе – в област 2.

Сега като вземем предвид, че грешката се пресмята в точката $M(x - \frac{h}{2}, y + h)$, то за проверка ще използваме

$$b^2(x - \frac{h}{2}) \leqq a^2(y + h).$$