21. Определен интеграл. Дефиниция и свойства. Интегруемост на непрекъснатите функции. Теорема на Нютон - Лайбниц.

1.Определени интеграли - дефиниция и свойства.

Геометричен смисъл. Определение на Риман. Историческите стимули за въвеждането на определения интеграл са свързани главно със стремежа да се придаде строг смисъл на понятието лице на фигура. Като отправна точка може да се приеме лицето на правоъгълник, което е равно на произведението на дължините на страните му. Ние ще се опитаме да сведем лицето на произволна фигура към сума от лицата на подходящи правоъгълници.

Нека f е неотрицателна функция, дефинирана в интервала $[a, b]$; да си поставим задачата да намерим лицето на фигурата, заградена от абцисната ос, графиката на функцията и вертикалните прави през точките a и b (виж черт.).

Да разделим основата на фигурата, т.е. интервала $[a, b]$, на краен брой части с помощта на делящите точки $x_0, x_1, \ldots, x_n$, като x_0 съвпада с точката a, а x_n - с b . Така фигурата се разделя на краен брой вертикални ивици. Всяка от тях можем да заменим с близък по размери правоъгълник.

За височина на такъв правоъгълник можем да вземем стойността на функцията в някоя точка ξ_i от съответния интервал $[x_{i-1}, x_i]$. Тогава лицето на съответния правоъгълник е равно на $f(\xi_i)\,(x_i - x_{i-1})$, а лицето на фигурата, съставена от всички правоъгълници, се получава чрез сумиране на всички събираеми от този вид при $i = 1, 2, \ldots, n$.

Интуитивно ясно е, че колкото по-малки са дължините на интервалите $[x_{i-1}, x_i]$, толкова повече тази фигура се доближава до дадената фигура, а нейното лице - до търсеното от нас лице.

Ще преминем към точните определения. Всяка крайна система от точки $x_0, x_1, \ldots, x_n$ такива, че $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ ще наричаме разбиване на интервала $[a, b]$. Разбиванията ще означаваме обикновено с τ, а точките, определящи разбиването ще наричаме <u>делящи</u> точки. Под <u>диаметър</u> на разбиването τ ще разбираме числото:

$$d(\tau) \,=\, \max_{1 \le i \le n}\,(x_i - x_{i-1}).$$

Във всеки от интервалите $[x_{i-1}, x_i]$ на дадено разбиване $\tau :\ a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ да изберем точка $\xi_i \in [x_{i-1}, x_n]$. Точките $\xi_1, \ldots \xi_n$ наричаме <u>междинни</u> точки за разбиването τ.

<u>Римановата сума</u> за функцията $f(x)$, съответствуваща на разбиването τ на интервала $[a, b]$ и избраните междинни точки $\{\xi_i\}_{i=1}^n$, се определя с формулата:

$$R(f, \tau, \{\xi_i\}_{i=1}^n) \,=\, \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,(x_i - x_{i-1}).$$

Ще обърнем внимание на читателя, че поради свободата в избора на междинните точки на всяко фиксирано разбиване τ на интервала $[a, b]$ съответстват безбройно много риманови суми. Често (когато изборът на междинните точки не е от значение) римановите суми ще означаваме за краткост с $R_\tau(f)$, а когато няма опасност от недоразумение - просто с R_τ.

Определение на Риман за интеграл. *Ще казваме, че числото I е граница на римановите суми R_τ на f в $[a, b]$ при $d(\tau) \to 0$ (записваме $I = \lim_{d(\tau)\to 0} R_\tau$), ако за всяко $\varepsilon > 0$ съществува $\delta > 0$ такова, че за всяко разбиване τ на $[a, b]$ с диаметър $d(\tau) < \delta$, имаме*

$$|R_\tau - I| \,<\, \varepsilon$$

(при произволен избор на междинните точки).

Всяка функция f, за която съществува така дефинираната граница на римановите суми, ще наричаме <u>интегруема</u> в интервала $[a, b]$. Границата I се нарича <u>определен</u> <u>интеграл</u> от функцията f в интервала $[a, b]$ и се бележи с

$$I \,=\, \int_a^b f(x)\,dx. \qquad \textit{(четем: интеграл от a до b от } f\,(x)\ \ dx \textit{).}$$

Ориентирано лице. Видяхме, че когато $f(x)$ е неотрицателна, геометричният смисъл на определения интеграл от f се дава от лицето на фигурата, намираща се под нейната графика. Общия случай може да бъде интерпретиран по аналогичен начин.

Можем да разгледаме тези части от дефиниционния интервал, в които функцията е положителна и да вземем съответните лица със знак плюс, а към тях да прибавим със знак минус лицата, намиращи се под абцисната ос, т.е. отговарящи на участъците, в които функцията е отрицателна. Полученото число се нарича ориентирано лице на фигурата, заградена от абцисната ос и графиката на функцията. Лесно се съобразява, че римановите суми на f дават приблизителна стойност за това число и следователно ориентираното лице представлява геометрична интерпретация на определения интеграл в общия случай.

Определение на Дарбу. Тъй като в редица случаи доказателството на сходимостта в дефиницията на Риман е затруднително, ние ще дадем еквивалентна дефиниция за понятието определен интеграл.

Нека предположим, че функцията $f(x)$ е ограничена в интервала $[a, b]$ и нека е зададено разбиване $\tau : \ a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ на този интервал. Да означим с M_i , съответно с m_i , точната горна и точната долна граница на стойностите на $f(x)$ в интервала $[x_{i-1}, x_n]$. Да разгледаме изразите:

$$S_\tau \;=\; \sum_{i=1}^{n} M_i\,(x_i - x_{i-1}),$$

$$s_\tau \;=\; \sum_{i=1}^{n} m_i\,(x_i - x_{i-1}),$$

които ще наричаме съответно голяма и малка сума на Дарбу, съответстващи на разбиването τ . Ще обърнем внимание на читателя, че на всяко разбиване τ съответстват точно една голяма и една малка сума на Дарбу, за разлика от римановите суми, които са безбройно много. При това

$$s_\tau \;\le\; R_\tau \;\le\; S_\tau\,,$$

независимо от избора на междинните точки, използвани при получаването на R_τ.

Свойства. Ще отбележим някои важни за нас свойства на сумите на Дарбу.

Ще казваме, че разбиването τ' следва разбиването τ, (ще записваме $\tau' \succ \tau$) , ако делящите точки на τ са делящи точки и на τ' .

Свойство 1. *Ако τ' следва τ , то са в сила неравенствата*

$$s_\tau \;\le\; s_{\tau'} \qquad , \qquad S_\tau \;\ge\; S_{\tau'}\,.$$

Доказателство. Трябва да докажем, че при добавяне на нови делящи точки малките суми на Дарбу не намаляват, а големите - не растат[1]. Достатъчно е да се разгледа случая, когато τ' се получава от τ чрез добавяне на една деляща точка. Нека означим с $x_0, x_1, \ldots, x_n$ делящите точки на τ и нека τ' да съдържа освен тях и още една деляща точка x' , лежаща в интервала (x_{i-1}, x_i).

Да означим с M' и M'' точната горна граница на $f(x)$ съответно в интервалите $[x_{i-1}, x']$ и $[x', x_i]$. Очевидно числата M' и M'' не надминават M_i . Да сравним изразите за S_τ и $S_{\tau'}$. Ясно е, че $S_{\tau'}$ се получава от S_τ , като събираемото $M_i\,(x_i - x_{i-1})$ се замени с две нови събираеми $M'(x' - x_{i-1}) \,+\, M''(x_i - x')$. Имаме обаче

$$M'(x' - x_{i-1}) \,+\, M''(x_i - x') \;\le\; M_i(x' - x_{i-1}) \,+\, M_i(x_i - x') \;=\; M_i(x_i - x_{i-1})$$

и следователно $S_\tau \;\ge\; S_{\tau'}$. Неравенството за малките суми на Дарбу се доказва аналогично. ■

Свойство 2. *Всяка малка сума на Дарбу не надминава коя да е голяма сума.*

[1] Понякога за простота казваме, че малките суми растат, а големите намаляват, когато добавяме нови делящи точки

Доказателство. Нека τ_1 и τ_2 са две разбивания на интервала $[a,b]$. Ще докажем, че $s_{\tau_1} \le S_{\tau_2}$. Наистина, да означим с τ_3 разбиването, определено от всички делящи точки на τ_1 и τ_2 . Тогава имаме $\tau_3 \succ \tau_1$ и $\tau_3 \succ \tau_2$. Следователно по свойство 1 получаваме:

$$s_{\tau_1} \le s_{\tau_3} \le S_{\tau_3} \le S_{\tau_2}. \qquad \blacksquare$$

От свойство 2. следва, че големите и малките суми на Дарбу на дадена функция образуват ограничени множества.

Да означим с $\underline{I}$ точната горна граница на всички малки суми на Дарбу , а с $\overline{I}$ - точната долна граница на всички големи суми на Дарбу за функцията f в интервала $[a,b]$:

$$\underline{I} = \sup_{\tau} s_\tau \qquad , \qquad \overline{I} = \inf_{\tau} S_\tau$$

по всевъзможните разбивания τ на интервала $[a,b]$. Числата $\underline{I}$ и $\overline{I}$ се наричат съответно <u>долен и горен</u> интеграл от f в $[a,b]$. От свойство 2 очевидно следва неравенството

$$\underline{I} \le \overline{I}.$$

Определение на Дарбу за интеграл. *Ограничената функция f се нарича <u>интегруема</u>, ако горният и долният и интеграл съвпадат помежду си. Тяхната обща стойност се нарича определен интеграл от f в интервала $[a,b]$.*

Едно основно преимущество на дефиницията на Дарбу е, че при нея по-лесно се проверява дали дадена функция е интегруема. По-точно, изпълнен е следният:

Критерий на Дарбу. *Функцията $f(x)$ е интегруема в $[a,b]$ тогава и само тогава, когато за всяко $\varepsilon > 0$ съществуват разбивания τ_1, τ_2 на интервала $[a,b]$ такива, че*

$$S_{\tau_1} - s_{\tau_2} < \varepsilon.$$

Доказателство. Ако горното условие е изпълнено, то от неравенствата

$$s_{\tau_2} \le \underline{I} \le \overline{I} \le S_{\tau_1}$$

следва, че $\overline{I} - \underline{I} < \varepsilon$ за всяко $\varepsilon > 0$. Следователно $\overline{I} = \underline{I}$.

Обратно, нека f е интегруема и $\varepsilon > 0$. От определенията на точна долна и точна горна граница следва, че могат да се намерят разбивания τ_1 , τ_2 , така че

$$s_{\tau_2} > \underline{I} - \frac{\varepsilon}{2} \quad , \quad S_{\tau_1} < \overline{I} - \frac{\varepsilon}{2},$$

откъдето, използвайки че $\underline{I} = \overline{I}$, веднага получаваме неравенството в условието. $\blacksquare$

Забележка. Лесно се вижда, че можем да смятаме, че $\tau_1 = \tau_2$. Наистина, ако τ следва τ_1 и τ_2, то $S_\tau - s_\tau \le S_{\tau_1} - s_{\tau_2}$. В този случай неравенството от условието се записва във вида

$$\sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) < \varepsilon.$$

Лесно се проверява (направете това!) че, разликата $M_i - m_i$ е точно осцилацията $\omega_i = \omega(f,[x_{i-1},x_i])$ на функцията f в интервала $[x_{i-1},x_i]$, което ни позволява да запишем неравенството и така

$$\sum_{i=1}^{n} \omega_i(x_i - x_{i-1}) < \varepsilon.$$

Следствие. *Сума и произведение на интегруеми функции също е интегруема функция.*

Класове интегруеми функции. Използувайки доказания по-горе критерий на Дарбу, ние ще получим няколко достатъчни условия за интегруемост на функции. [2]

1. *Всяка функция, непрекъсната в интервала* $[a, b]$ *, е интегруема в него.*

Доказателство. Както знаем, ако функцията f е непрекъсната в интервала $[a, b]$, то тя е равномерно непрекъсната в този интервал и за нея е в сила теоремата за осцилациите (Следствие 6 на 1.11). Да фиксираме $\varepsilon > 0$ произволно и да намерим $\delta > 0$ такова, че осцилацията на f във всеки подинтервал на $[a, b]$ с дължина по-малка от δ да бъде по-малка от $\dfrac{\varepsilon}{b-a}$. Сега за всяко разбиване $\tau : a = x_0 < \ldots < x_n = b$ с диаметър $d(\tau) < \delta$ ще имаме $\omega_i = \omega(f, [x_{i-1}, x_i]) < \dfrac{\varepsilon}{b-a}$, откъдето

$$S_\tau - s_\tau = \sum_{i=1}^{n} \omega_i(x_i - x_{i-1}) < \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) = \varepsilon.$$

Твърдението сега следва директно от критерия на Дарбу. ■

2.[3] *Всяка ограничена функция, непрекъсната навсякъде в интервала* $[a, b]$*, освен в краен брой точки, е интегруема в него.*

Доказателство. Нека $y_1, \ldots y_k$ са точките на прекъсване на функцията $f(x)$, и ε е произволно положително число. Да разгледаме интервалите

$$(y_1 - \varepsilon, y_1 + \varepsilon), \ldots, (y_k - \varepsilon, y_k + \varepsilon)$$

и да означим с W тяхното обединение. Можем да считаме, че ε е избрано толкова малко, че тези интервали не се пресичат помежду си.[4] Множеството $[a, b] \setminus W$ се представя като обединение на краен брой затворени интервали $\Delta_1, \ldots, \Delta_s$, във всеки от които функцията е непрекъсната.

От теоремата за осцилациите следва, че можем да разделим на свой ред всеки от интервалите от $[a, b] \setminus W$ на подинтервали такива, че осцилацията на $f(x)$ във всеки от тях да е по-малка от ε . Като добавим към тях и интервалите от W , получаваме разбиване на интервала $[a, b]$, което ще означим с τ, а делящите му точки - с $x_0, x_1, \ldots, x_n$. Имаме:

$$S_\tau - s_\tau = \sum_{i=1}^{n} \omega_i(x_i - x_{i-1}) = \sum{}' \omega_i(x_i - x_{i-1}) + \sum{}'' \omega_i(x_i - x_{i-1}),$$

където сумирането в $\sum'$ се извършва по интервалите от W, а това в $\sum''$ - по интервалите от $[a, b] \setminus W$. Да означим с m и M съответно една долна и една горна граница за $f(x)$ в $[a, b]$. Тогава

$$\sum{}' \omega_i(x_i - x_{i-1}) \le (M - m) \sum{}' (x_i - x_{i-1}) \le (M - m).2k\varepsilon.$$

Втората сума се оценява по начин, аналогичен на използувания в предното твърдение:

$$\sum{}'' \omega_i(x_i - x_{i-1}) \le \varepsilon \sum{}'' (x_i - x_{i-1}) \le \varepsilon(b - a).$$

В последна сметка получаваме:

$$S_\tau - s_\tau \le (2k(M - m) + (b - a))\, \varepsilon.$$

Тъй като множителят пред ε е константа (не зависеща от ε), то горната разлика може да бъде направена произволно малка и критерият на Дарбу е удовлетворен. ■

3. *Всяка монотонна функция е интегруема.*

[2] Както ще покажем в края на параграфа, определенията за интегруемост на Риман и Дарбу са еквивалентни.

[3] Материалът оттук до края на параграфа може да бъде пропуснат при първо четене.

[4] Лесно се вижда, че това е изпълнено при $\varepsilon < \frac{1}{2} \min\limits_{i=1,\ldots,k-1} |y_{i+1} - y_i|$.

Доказателство. Да предположим, че $f(x)$ е например монотонно растяща. Нека ε е произволно положително число и $\delta = \dfrac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}$. Нека τ е произволно разбиване с делящи точки $x_0, x_1, \ldots, x_n$ и диаметър, по-малък от δ . Тогава очевидно $M_i = f(x_i)$, $m_i = f(x_{i-1})$ и

$$S_\tau \, - \, s_\tau \, = \, \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) \, \le$$

$$\le \, \delta \sum (f(x_i) - f(x_{i-1})) \, = \, \delta \, (f(b) - f(a)) \, = \, \varepsilon \, ,$$

което доказва твърдението. ■

Еквивалентност на дефинициите на Риман и Дарбу. Ще ни бъдат необходими две помощни твърдения:

Лема 1. *Нека M и m са съответно точната горна и точната долна граница на функцията $f(x)$ в интервала $[a, b]$. Нека τ_1 и τ_2 са две разбивания на този интервал, като τ_2 се получава от τ_1 чрез добавяне на k нови делящи точки. Тогава за съответните суми на Дарбу са изпълнени неравенствата:*

$$S_{\tau_1} \, - \, S_{\tau_2} \, \le \, k(M - m)\, d(\tau_1) \quad , \quad s_{\tau_2} \, - \, s_{\tau_1} \, \le \, k(M - m)\, d(\tau_1).$$

Доказателство. Достатъчно е да се разгледа случаят, когато τ_2 се получава от τ_1 чрез добавяне на 1 деляща точка - общият случай може да бъде доказан, като се приложи k пъти полученото твърдение. Нека предположим, че новата деляща точка x' се намира в интервала (x_{i-1}, x_i) , и да означим с M' , M'' точната горна граница на $f(x)$ съответно в интервалите $[x_{i-1}, x']$ и $[x', x_i]$. Тогава имаме:

$$\begin{aligned} S_{\tau_1} \, - \, S_{\tau_2} \, &\le \, (M_i - M')(x' - x_{i-1}) + (M_i - M'')(x_i - x') \, \le \\ &\le \, (M - m)(x' - x_{i-1}) + (M - m)(x_i - x') \, = \\ &= \, (M - m)(x_i - x_{i-1}) \, \le \, (M - m)\, d(\tau_1), \end{aligned}$$

с което твърдението за големите суми е доказано. За малките суми то се доказва аналогично. ■

Лема 2. (Лема на Дарбу) *Изпълнени са равенствата:*

$$\overline{I} \, = \, \lim_{d(\tau) \to 0} S_\tau \quad , \quad \underline{I} \, = \, \lim_{d(\tau) \to 0} s_\tau .$$

(границите при $d(\tau) \to 0$ се разбират по същия начин, както при дефиницията на Риман за интеграл).

Доказателство. Ще докажем твърдението за големите суми на Дарбу. За малките то се доказва аналогично. По дефиницията на $\overline{I}$ за фиксирано $\varepsilon > 0$ може да се намери разбиване τ_0 на интервала $[a, b]$ с делящи точки $x_0, \ldots, x_k$, така че

$$S_{\tau_0} \, < \, \overline{I} \, + \, \frac{\varepsilon}{2} \, .$$

Да положим $\delta = \dfrac{\varepsilon}{2k(M-m)}$, където M и m са като в лема 1. Нека τ е произволно разбиване с диаметър, по-малък от δ. Да означим с τ_1 разбиването, определено от делящите точки на τ и τ_0. От лема 1 имаме:

$$S_\tau \, - \, S_{\tau_1} \, \le \, k(M - m)\, d(\tau) \, < \, \frac{\varepsilon}{2} \, .$$

Тъй като $S_{\tau_1} \, \le \, S_{\tau_0}$ по свойство 1 на сумите на Дарбу, то $S_{\tau_1} - \overline{I} < \dfrac{\varepsilon}{2}$ и следователно

$$S_\tau \, - \, \overline{I} \, = \, S_\tau \, - \, S_{\tau_1} \, + \, S_{\tau_1} - \overline{I} \, \le \, \frac{\varepsilon}{2} \, + \, \frac{\varepsilon}{2} \, = \, \varepsilon. \blacksquare$$

Сега сме в състояние да докажем основния резултат на този раздел:

Теорема. *Една функция е интегруема по дефиницията на Риман тогава и само тогава, когато е интегруема по дефиницията на Дарбу. При това двете дефиниции дават една и съща стойност на интеграла.*

Доказателство. 1) Да допуснем, че функцията $f(x)$ е интегруема в интервала $[a, b]$ според определението на Риман. Да фиксираме $\varepsilon > 0$ и да изберем $\delta > 0$ такова, че при всяко разбиване τ с $d(\tau) < \delta$ да имаме за римановата сума R_τ за това разбиване

$$|I - R_\tau| < \varepsilon$$

независимо от избора на междинните точки.

Нека сега делящите точки на фиксирано разбиване τ с $d(\tau) < \delta$ са $x_0, x_1, \ldots, x_n$. Тогава горното неравенство ще бъде изпълнено при всеки избор на междинните точки $\xi_1, \ldots \xi_n$.

Да оставим всяка от стойностите $f(\xi_i)$ да клони най-напред към точната горна граница M_i, а след това към точната долна граница m_i на $f(x)$ в интервала $[x_{i-1}, x_i]$. Тогава чрез граничен преход в горното неравенство имаме[5]:

$$\left| I - \sum_{i=1}^{n} M_i \,(x_i - x_{i-1}) \right| \leq \varepsilon \quad , \quad \left| I - \sum_{i=1}^{n} m_i \,(x_i - x_{i-1}) \right| \leq \varepsilon \,.$$

Оттук получаваме:

$$I - \varepsilon \leq s_\tau \leq \underline{I} \leq \overline{I} \leq S_\tau \leq I + \varepsilon \,.$$

Тъй като ε е произволно, то оттук следва, че $\underline{I} = \overline{I} = I$.

2) Сега ще докажем обратното твърдение - че от интегруемост по определението на Дарбу следва интегруемост според определението на Риман. Очевидно за всяко разбиване τ са в сила неравенствата:

$$s_\tau \leq R_\tau \leq S_\tau \,,$$

както и да избираме междинните точки в израза за R_τ . По лема 2 за всяко $\varepsilon > 0$ съществува $\delta > 0$, така че при $d(\tau) < \delta$ да имаме

$$\underline{I} - \varepsilon < s_\tau \leq S_\tau < \overline{I} + \varepsilon \,.$$

Ако разглежданата функция е интегруема по Дарбу и означим с I общата стойност на $\overline{I}$ и $\underline{I}$, то при $d(\tau) < \delta$ имаме $|R_\tau - I| < \varepsilon$. ∎

2.Свойства на определените интеграли.

Ще установим някои основни свойства на определения интеграл, използувайки двете еквивалентни дефиниции, дадени в предния параграф.

1. Линейност. *Нека функциите $f(x)$ и $g(x)$ са интегруеми в интервала $[a, b]$ и $\lambda \in \mathbb{R}$. Тогава $f(x) + g(x)$ и $\lambda f(x)$ също са интегруеми и са в сила равенствата:*

$$\int_a^b (f(x) + g(x))\, dx = \int_a^b f(x)\, dx + \int_a^b g(x)\, dx \,,$$

$$\int_a^b \lambda f(x)\, dx = \lambda \int_a^b f(x)\, dx \,.$$

2. Позитивност. *Ако $f(x)$ е неотрицателна интегруема функция, то*

$$\int_a^b f(x)\, dx \geq 0 \,.$$

[5] В частност, от тук се вижда, че $f(x)$ е ограничена във всеки подинтервал на разбиването τ и следователно в целия интервал $[a, b]$.

3. *Ако функцията $f(x)$ е интегруема в $[a,b]$, то $|f(x)|$ е също интегруема този интервал и е в сила неравенството:*

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx\,.$$

4. Адитивност. *Нека $c \in (a,b)$. Тогава f е интегруема в $[a,b]$ тогава и само тогава, когато f е интегруема във всеки от интервалите $[a,c]$ и $[b,c]$. При това*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

всеки път, когато трите интеграла съществуват.

Конвенция. Досега разглеждахме определени интеграли, за които долната граница е по-малка от горната. Удобно е да се освободим от това ограничение. Нека $a > b$. Ще положим

$$\int_a^b f(x)\,dx \stackrel{def}{=} -\int_b^a f(x)\,dx\,.$$

При $a = b$ ще считаме горният интеграл равен на нула.

5. Първа теорема за средната стойност. *Нека функциите $f(x)$ и $g(x)$ са интегруеми в интервала $[a,b]$, като $g(x)$ не си мени знака. Да означим с M и m точната горна и точната долна граници на $f(x)$ в $[a,b]$. Тогава съществува число μ, $m \le \mu \le M$, за което е изпълнено равенството*

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = \mu \int_a^b g(x)\,dx\,.$$

Доказателство. Да предположим например, че $g(x) \ge 0$. Интегрирайки в интервала $[a,b]$ неравенството

$$m\,f(x) \le f(x)\cdot g(x) \le M\,f(x)$$

получаваме

$$m\int_a^b g(x)\,dx \le \int_a^b f(x)g(x)\,dx \le M\int_a^b g(x)\,dx\,.$$

При $\int_a^b g(x)\,dx = 0$ твърдението на теоремата е очевидно независимо от избора на μ. В противен случай, означавайки

$$\mu = \frac{\int_a^b f(x)g(x)\,dx}{\int_a^b g(x)\,dx}\,,$$

можем да запишем горното неравенство във вида $m \le \mu \le M$, откъдето следва исканото твърдение.

Случаят $g(x) \le 0$ се разглежда аналогично.

Използвайки теоремата за междинните стойности за непрекъснати функции (следствие 3 от §1.10), получаваме:

Следствие 1. *Ако функцията $f(x)$ е непрекъсната в $[a,b]$, то съществува $\xi \in [a,b]$, така че*

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(\xi)\int_a^b g(x)\,dx\,.$$

Ще отбележим, че теоремата се използува най-често в случая, когато $g(x) = 1$ - тогава горното следствие се записва във вида:

$$\int_a^b f(x)\,dx \;=\; f(\xi)\,(b-a)\,.$$

Следствие 2. *Нека $f(x)$ е интегруема в интервала $[a, b]$. Тогава функцията, определена с формулата*

$$F(x) \;=\; \int_a^x f(t)\,dt\,,$$

е непрекъсната в $[a, b]$.

Наистина, ако $|f(t)| \le M$, то от горното твърдение следва, че за всеки две точки $x, y \in [a, b]$ имаме [6]

$$|F(y) - F(x)| \;=\; \left| \int_x^y f(t)\,dt \right| \le\; M\,|x-y|\;.$$

3. Пресмятане на определените интеграли.

В настоящия параграф ще изложим някои теореми, използувани при пресмятане на определените интеграли.

Теорема на Лайбниц - Нютон. Тук ще изясним връзката между въведения в тази глава определен интеграл и неопределения интеграл, въведен по-рано. Знаем, че определеният интеграл е реално число, докато неопределеният е функция. Независимо от това, тези две понятия са тясно свързани. Нека функцията $f(x)$ е интегруема в $[a, b]$. Тогава, както видяхме в предния параграф, функцията [7]

$$F(x) \;=\; \int_a^x f(t)\,dt\,,$$

дефинирана също в $[a, b]$, е непрекъсната. Естествено възниква въпросът при какви предположения за f функцията F ще се окаже диференцируема. Отговор дава следната фундаментална

Теорема на Лайбниц - Нютон. *Нека функцията f е непрекъсната в $[a, b]$. Тогава функцията F е диференцируема и е в сила равенството*

$$F'(x) \;=\; f(x)\,.$$

Доказателство. Нека $x \in [a, b]$ и нека h е толкова малко, че $x + h$ също принадлежи на $[a, b]$. Да образуваме диференчното частно

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} \;=\; \frac{1}{h}\left(\int_a^{x+h} f(t)\,dt \;-\; \int_a^x f(t)\,dt \right) \;=\; \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t)\,dt\,.$$

(виж свойства 4 и 4').

Тогава според Следствие 1 на първата теорема за средната стойност съществува $\xi \in (x, x+h)$ ($\xi \in (x+h, x)$ при $h < 0$) такова, че

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} \;=\; f(\xi)\,.$$

Ако сега оставим h да клони към нула, то ξ ще клони към x . Като използуваме още веднъж непрекъснатостта на $f(x)$, получаваме исканото твърдение. ■

[6] Доказаното неравенство се нарича свойство на Липшиц за функцията $F(x)$ и влече след себе си нейната непрекъснатост.

[7] За да не възникне объркване, интеграционната променлива означаваме с буквата t . Разбира се, това не влияе на стойността на интеграла.

Следствие. *Всяка непрекъсната функция притежава примитивна.*

Формула на Лайбниц - Нютон. От горната теорема е ясно как неопределеният интеграл от една непрекъсната функция, т.е. нейните примитивни, могат да се изразят чрез определения интеграл от нея. Следващото твърдение показва, обратно, как може да бъде пресметнат определеният интеграл от функцията, ако е известна някоя нейна примитивна.

Нека $f(x)$ е непрекъсната в $[a,b]$ и $\Phi(x)$ е произволна нейна примитивна. Тогава е изпълнена формулата

$$\int_a^b f(x)\,dx \;=\; \Phi(b) \;-\; \Phi(a).$$

Доказателство. Нека F е примитивната на f , дефинирана в теоремата на Лайбниц - Нютон. Очевидно тя удовлетворява равенството $F(a)=0$. Както знаем, разликата на всеки две примитивни на дадена функция е константа и следователно

$$F(x) \;=\; \Phi(x) \;+\; C\,.$$

Като положим тук $x=a$, получаваме

$$F(a) \;=\; \Phi(a) \;+\; C\,, \qquad \text{т.е.} \quad C \;=\; -\,\Phi(a)\,.$$

Оттук имаме

$$\int_a^b f(x)\,dx \;=\; F(b) \;=\; \Phi(b) \;-\; \Phi(a)\,.\blacksquare$$

Забележка. За удобство ние ще използваме означението

$$\Phi(x)\big|_a^b \;\stackrel{def}{=}\; \Phi(b) \;-\; \Phi(a).$$

Следствие. Ако функцията f притежава непрекъсната първа производна в $[a,b]$, то е в сила равенството

$$\int_a^b f'(x)\,dx \;=\; f(x)\big|_a^b\,.$$

Пример. Имаме

$$\int_0^\pi \sin x\,dx \;=\; (-\cos x)\big|_0^\pi \;=\; 1 \;-\; (-1) \;=\; 2.$$

Лесно се вижда, че този интеграл изразява лицето на фигурата, оградена от една дъга на синусоидата и от абцисната ос.

Правило за интегриране по части. С помощта на доказаните по-горе твърдения някои от свойствата на неопределения интеграл лесно могат да бъдат преформулирани и за определените интеграли. Нека функциите f и g са непрекъснати в интервала $[a,b]$. Тогава от формулата за диференциране на произведение имаме

$$f(x)\,g'(x) \;=\; (f(x)g(x))' \;-\; g(x)\,f'(x)\,.$$

Интегрирайки горното равенство в граници от a до b , получаваме формулата за интегриране по части за определени интеграли [8].

$$\int_a^b f(x)\,dg(x) \;=\; f(x)g(x)\big|_a^b \;-\; \int_a^b g(x)\,df(x).$$

[8]Ще напомним, че изразите $df(x)$ и $dg(x)$ са съкратени означения съответно за $f'(x)\,dx$ и $g'(x)\,dx$.

Формула за смяна на променливата. В сила е следното твърдение:

Нека функцията $f(x)$ е непрекъсната в интервала Δ . Нека функцията $\varphi(t)$ притежава непрекъсната първа производна в интервала $[\alpha, \beta]$, като стойностите и принадлежат на Δ . Да положим

$$a = \varphi(\alpha) \quad , \quad b = \varphi(\beta)\,,$$

и нека $[a, b] \subset \Delta$. Тогава имаме

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_\alpha^\beta f\left(\varphi(t)\right)\,d\varphi(t)\,.$$

Забележка. Функцията $\varphi(t)$ може да взема стойности и извън интервала $[a, b]$, но, разбира се, не и извън Δ.

Доказателство. Да означим с $F(x)$ произволна примитивна на функцията $f(x)$ в интервала Δ и нека $\Phi(t) = F(\varphi(t))$. Тогава от формулата

$$\Phi'(t) = f(\varphi(t))\,\varphi'(t)$$

следва, че

$$\int\limits_\alpha^\beta f\left(\varphi(t)\right)\,\varphi'(t)\,dt = \Phi(\beta) - \Phi(\alpha) = F(b) - F(a) = \int\limits_a^b f(x)\,dx.$$

■