20. Теореми за средните стойности (Рол, Лагранж и Коши). Формула на Тейлър.

1.Теореми за средните стойности

Определение. *Казваме, че функцията f има локален максимум (локален минимум) в точката x_0, ако дефиниционната област на f съдържа такъв отворен интервал $\Delta \ni x_0$, че $f(x) \leq f(x_0)$ (съответно $f(x) \geq f(x_0)$) за $x \in \Delta$. Функционалната стойност на $f(x_0)$ наричаме локален максимум (минимум).*

По-нататък за удобство локалните максимуми и локалните минимуми ще наричаме локални екстремуми.

Теорема 1 (Ферма). *Ако функцията f има локален екстремум в точката x_0 и е диференцируема в x_0, то $f'(x_0) = 0$.*

Доказателство. Ако функцията f има локален максимум в точката x_0, то съществува такава околност на x_0 от вида $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, $\delta > 0$, в която стойностите на f са по-малки от $f(x_0)$. Тогава за $0 < h < \delta$ имаме

$$0 \geq \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \longrightarrow f'(x_0) \quad \text{при } h \longrightarrow 0,$$

откъдето получаваме $f'(x_0) \leq 0$. Аналогично за $0 > h > -\delta$ имаме

$$0 \leq \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \longrightarrow f'(x_0) \quad \text{при } h \longrightarrow 0,$$

откъдето извеждаме $f'(x_0) \geq 0$. Следователно $f'(x_0) = 0$, което доказва теоремата в случая, когато имаме локален максимум.

Доказателството в точка на минимум е аналогично.

Теорема 2. (Рол) *Нека функцията f е дефинирана и непрекъсната в затворения интервал $[a, b]$, диференцируема в отворения интервал (a, b) и $f(a) = f(b)$. Тогава съществува такава точка $\xi \in (a, b)$, че $f'(\xi) = 0$.*

Доказателство на теоремата на Рол. Тъй като по условие функцията f е непрекъсната в крайния затворен интервал $[a, b]$, то съгласно теоремата на Вайерщрас тя има най-голяма и най-малка стойности. Имаме следните възможности:

1) функцията f приема максималната или минималната си стойности в точка ξ, вътрешна за интервала $[a, b]$ (т.е. $\xi \in [a, b]$). Тогава f има локален екстремум в точката ξ и $f'(\xi) = 0$ по теорема 1.

2) функцията $f(x)$ приема максималната и минималната си стойности в точките a и b. Тогава от условието $f(a) = f(b)$ получаваме, че най-голямата и най-малката стойности на функцията f съвпадат, следователно f е константа и $f'(x) = 0$ за всяко $x \in (a, b)$. С това теоремата е доказана.

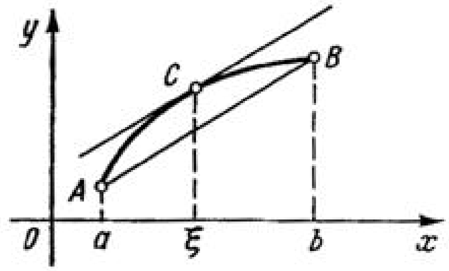
Теорема 3. (за крайните нараствания, на Лагранж) Нека функцията f е непрекъсната в затворения интервал $[a, b]$ и диференцируема в отворения интервал (a, b). Тогава съществува такава точка $\xi \in (a, b)$, че

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a) \qquad \text{(формула за крайните нараствания)}$$

Доказателство. Разглеждаме функцията $h(x) = f(x) - kx$, където константата k е подбрана така, че $h(a) = f(a) - ka = f(b) - kb = h(b)$, т.е. $k = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$. Очевидно функцията $h(x)$ удовлетворява условията на теоремата на Рол, следователно съществува такава точка $\xi \in (a, b)$, че $h'(\xi) = f'(\xi) - k = 0$. Оттук получаваме $k = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi)$, което доказва теоремата.

Геометричен смисъл: Да напишем равенството от теоремата във вида

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi).$$



Тогава лявата страна на равенството съвпада с ъгловия коефициент на секущата, минаваща през точките $(a, f(a))$ и $(b, f(b))$, лежащи на графиката на $f(x)$. Според геометричното тълкуване на производната, дясната страна съвпада с ъгловия коефициент на допирателната към графиката на $f(x)$, прекарана в точката $(\xi, f(\xi))$. Знаем, че ако две прави имат еднакви ъглови коефициенти, те са успоредни.
Така получаваме геометричната формулировка на теоремата на Лагранж:

Съществува точка в интервала (a, b), допирателната в която е успоредна на хордата, определена от крайните точки на интервала.

Теорема 4. (Обобщена теорема за крайните нараствания, или теорема на Коши) *Нека функциите f и g са дефинирани и непрекъснати в затворения интервал $[a, b]$. Предполагаме, че $f(x)$ и $g(x)$ са диференцируеми в отворения интервал (a, b) и $g'(x) \neq 0$ за всяко $x \in (a, b)$. Тогава съществува такава точка $\xi \in (a, b)$, че*

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

(обобщена формула за крайните нараствания).

Доказателство. Нека първо да отбележим, че условието $g'(x) \neq 0$ за всяко $x \in (a, b)$ ни гарантира $g(b) - g(a) \neq 0$, тъй като по теоремата за крайните нараствания имаме $g(b) - g(a) = g'(\xi_1)(b - a) \neq 0$.

Прилагаме теоремата на Рол за функцията $f(x) = f(x) - kg(x)$, където константата k е подбрана така, че $h(a) = f(a) - kg(a) = f(b) - kg(b)$, т.е. $k = \dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$. По теоремата на Рол съществува такава точка $\xi \in (a, b)$, че
$h'(\xi) = f'(\xi) - kg'(\xi) = 0$. Оттук получаваме, че

$$k = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

По-нататък ще изложим някои непосредствени следствия от теоремата на Лагранж за крайните нараствания.

Теорема 5. *Нека функцията f е дефинирана и диференцируема в отворения интервал (a, b). Ако $f'(x) = 0$ за всяко $x \in (a, b)$ то f е константа в интервала (a, b).*

Доказателство. Фиксираме произволна точка $x_0 \in (a, b)$. По теоремата за крайните нараствания за всяко $x \in (a, b)$ имаме

$$f(x) - f(x_0) = f'(\xi)(x - x_0) = 0,$$

следователно $f(x) = f(x_0)$ за всяко $x \in (a, b)$.

Теорема 6. *Ако функцията f е дефинирана и диференцируема в отворения интервал (a, b), то тя е монотонно растяща (намаляваща) в (a, b) тогава и само тогава когато $f'(x) \geq 0$ ($f'(x) \leq 0$) за всяко $x \in (a, b)$.*

Доказателство. Достатъчно е да разгледаме случая на монотонно растяща функция, тъй като чрез умножаване с -1 получаваме от монотонно намаляваща функция монотонно растяща и обратно.

Нека f е монотонно растяща диференцируема функция в интервала $x \in (a,b)$. Тогава за произволно $x \in (a,b)$ при достатъчно малки $h > 0$ имаме $\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \geq 0$. Оттук след граничен преход при $h \longrightarrow 0$ получаваме $f'(x) \geq 0$. Обратно, нека $f'(x) \geq 0$ за всяко $x \in (a,b)$. Взимаме произволни точки $x_1, x_2 \in (a,b)$ удовлетворяващи $x_1 < x_2$. По теоремата за крайните нараствания съществува такова $\xi \in (x_1, x_2)$, че

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1) \geq 0.$$

Оттук получаваме $f(x_1) \leq f(x_2)$, което доказва, че функцията f е монотонно растяща. С това теоремата е доказана.

2.Формула на Тейлър.

Формула на Тейлор за полиноми. Отначало ще разгледаме случая, когато първоначално зададената функция е полином от ред n , т.е. има вида:

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n.$$

Като извършим n последователни диференцирания, получаваме:

$$\begin{aligned}
p'(x) &= a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \ldots + n a_n x^{n-1}, \\
p''(x) &= 1.2a_2 + 2.3a_3 x + \ldots + (n-1)n a_n x^{n-2}, \\
p'''(x) &= 1.2.3a_3 + 2.3.4a_4 x + \ldots + (n-2)(n-1)n a_n x^{n-3}, \\
\ldots\ldots & \\
p^{(n)}(x) &= 1.2.3 \ldots n.a_n.
\end{aligned}$$

Полагайки във всички горни равенства $x = 0$ получаваме, че

$$a_k = \frac{p^{(k)}(0)}{k!} \qquad , \qquad k = 0, \ldots, n$$

(където, както обикновено, полагаме $p^{(0)}(x) = p(x)$ и $0! = 1$).

Горните равенства позволяват полиномът да бъде записан във вида:

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{p^{(k)}(0)}{k!} x^k.$$

Да фиксираме реалното число a . Сега ние ще заменим развитието на $p(x)$ по степени на x с развитие по степените на $x - a$. За тази цел да положим $x - a = y$, т.е. да разгледаме помощния полином $q(y) = p(a+y)$. Нека полиномът q да има вида:

$$q(y) = b_0 + b_1 y + b_2 y^2 + \ldots + b_n y^n.$$

Като използуваме изведените по-горе формули, получаваме за коефициентите b_k равенствата:

$$b_k = \frac{q^{(k)}(0)}{k!} \qquad , \qquad k = 0, \ldots, n.$$

Лесно се доказва (индуктивно), че при всяко естествено k имаме:

$$q^{(k)}(y) = p^{(k)}(a+y),$$

откъдето

$$b_k = \frac{p^{(k)}(a)}{k!}.$$

Нека сега в представянето на $q(y)$ заместим коефициентите b_k с техните равни и променливата y с $x - a$. Като вземем пред вид, че $q(x-a) = p(x)$, получаваме:

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{p^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

или, в развит вид

$$p(x) = p(a) + \frac{p'(a)}{1!}(x-a) + \frac{p''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{p^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

Полиноми на Тейлор за n - кратно диференцируема функция. Ред на Тейлор. Нека функцията f е n - кратно диференцируема в точката a от дефиниционната си област. Това означава, че a е вътрешна точка за дефиниционната област, нейните производни до ред $n-1$ включително съществуват в някаква околност на a, а n - та производна на f е диференцируема в точката a. Тогава по аналогия с формулата от предния пункт ще дефинираме полинома

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

$T_n(x)$ се нарича полином на Тейлор от ред n за функцията $f(x)$ в точката a.

Лесно се вижда, че ако функцията f има в точката производни от произволен ред, то полиномите на Тейлор могат да бъдат разглеждани като частични суми на безкрайният ред:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k,$$

който се нарича ред на Тейлор на функцията $f(x)$ около точката a. Да отбележим, че този ред може да бъде и разходящ.

Лема 1. *T_n е единственият полином от степен n, чиито производни в точката a до ред n включително съвпадат със съответните производни на f в тази точка.*

Доказателство. Равенствата $T_n^{(k)}(a) = f^{(k)}(a)$, $k = 0, 1, \ldots, n$ се проверяват, като диференцираме $T_n(x)$ последователно k пъти и положим в получените равенства $x = a$. Обратно, ако $p(x)$ е полином от степен n, удовлетворяващ условието на лемата, то, прилагайки за него формулата на Тейлор за полиноми, ще получим, че той съвпада с $T_n(x)$.

За да се оцени колко се отличават стойностите на полиномите на Тейлор в дадена точка x от стойността на функцията в тази точка, се въвежда величината

$$R_n(x) = f(x) - T_n(x),$$

наречена остатъчен член. Тогава можем да напишем формулата

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + R_n(x),$$

наричана обикновено формула на Тейлор. Очевидно остатъчният член $R_n(x)$ представлява грешката във формулата $f(x) \approx T_n(x)$. Ето защо формулата на Тейлор би добила съдържание само, ако имаме израз или оценка за остатъчния член $R_n(x)$. Ние ще посочим различни изрази за него, които водят и до различни варианти на формулата на Тейлор.

Формули на Лагранж и на Коши за остатъчния член.

Нека предположим, че функцията $f(x)$ притежава производни до ред $n+1$ включително в някаква околност на точката a. Да фиксираме точка x от тази околност и да разгледаме в затворения интервал, определен от точките a и x, помощната функция

$$\varphi(t) = f(x) - \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(t)}{k!}(x-t)^k\right) =$$

$$= f(x) - f(t) - \frac{f'(t)}{1!}(x-t) - \ldots - \frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^n.$$

Вижда се, че горната формула наподобява израза за $R_n(x)$, в който константата a е заместена с променливата t. Оттук получаваме:

$$\varphi(a) = R_n(x) \qquad \text{и} \qquad \varphi(x) = 0\,.$$

Диференцирайки функцията $\varphi(t)$, имаме:

$$\begin{aligned}
\varphi'(t) = -f'(t) \quad & - \quad \left(\frac{f''(t)}{1!}(x-t) - f'(t)\right) - \\
& - \quad \left(\frac{f'''(t)}{2!}(x-t)^2 - \frac{f''(t)}{1!}(x-t)\right) - \\
& - \quad \left(\frac{f^{IV}(t)}{3!}(x-t)^3 - \frac{f'''(t)}{2!}(x-t)^2\right) - \\
& - \quad \ldots\ldots \\
& - \quad \left(\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n - \frac{f^{(n)}(t)}{(n-1)!}(x-t)^{n-1}\right).
\end{aligned}$$

Всички събираеми, освен последното, се срещат в тази сума по два пъти с противоположни знаци. Следователно

$$\varphi'(t) = -\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n\,.$$

Да положим $\psi(t) = (x-t)^p$, където p е естествено число, което ще изберем допълнително. За двете функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ ще приложим обобщената теорема за крайните нараствания в интервала $[a,x]$. Виждаме, че в интервала (a,x) съществува точка ξ , за която е изпълнено:

$$\frac{\varphi(a) - \varphi(x)}{\psi(a) - \psi(x)} = \frac{\varphi'(\xi)}{\psi'(\xi)}\,,$$

откъдето, използувайки стойностите на $\varphi(a)$ и $\varphi(x)$, и израза за φ', намерени по-горе, получаваме:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n . \frac{\psi(a)-\psi(x)}{\psi'(\xi)} = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!p}(x-\xi)^{n+1-p}(x-a)^p\,.$$

Тази обща форма на остатъчния член се нарича форма на Шлемилх и Рош. Понякога тя се записва и по друг начин. Да означим

$$\theta = \frac{\xi - a}{x - a}\,.$$

Очевидно θ лежи в интервала $(0,1)$. Имаме

$$\xi = a + \theta(x-a) \qquad , \qquad x - \xi = (1-\theta)(x-a)$$

и формулата добива вида:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(a+\theta(x-a))}{n!p}(1-\theta)^{n+1-p}(x-a)^{n+1}\,.$$

Обикновено се използуват два частни случая на горната формула, които ние ще отбележим специално. Да положим $p = n+1$. Получаваме:

Формула на Лагранж за остатъчния член. *Нека функцията $f(x)$ притежава производни до ред $n+1$ включително в някаква околност на точката a и x е точка от тази околност. Тогава в интервала $(a,x)((x,a))$ съществува точка ξ , за която е в сила равенството*

$$R_n(x) \;=\; \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}\,.$$

Това е най-често употребяваната форма на остатъчния член. При нея формулата на Тейлор добива вида:

$$f(x) \;=\; f(a) \;+\; \frac{f'(a)}{1!}(x-a) \;+\; \ldots \;+\; \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \;+\; \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}\,.$$

В частност, при $n=0$ получаваме формулата

$$f(x) \;=\; f(a) \;+\; f'(\xi)(x-a)\,.$$

Прехвърляйки $f(a)$ от лявата страна на равенството, виждаме, че изучената по-рано формула за крайните нараствания представлява частен случай на формулата на Тейлор.

Друга често употребявана форма на остатъчния член се получава при $p=1$ (ние ще я дадем само във формата , в която участвува θ):

Формула на Коши за остатъчния член . *При направените по-горе предположения съществува $\theta \in (0,1)$, така че*

$$R_n(x) \;=\; \frac{f^{(n+1)}(a+\theta(x-a))}{n!}(1-\theta)^n(x-a)^{n+1}\,.$$