Глава 3

Производни

§ 1. Техника на диференцирането

Границата $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ или все едно $\lim\limits_{t\to x}\dfrac{f(t)-f(x)}{t-x}$ (ако съществува) се нарича **производна** на f в точката x и се означава с $f'(x)$, $\dfrac{df(x)}{dx}$, $\dot f(x)$, $Df(x)$ (означения съответно на Лагранж, Лайбниц, Нютон и Коши). В такъв случай казваме, че f е диференцуема в точката x. Функцията $x\mapsto f'(x)$ е дефинирана в точките, където f е диференцуема, и се нарича производна на f. Тя се означава с f', $\dfrac{df}{dx}$, $\dot f$, Df. Да диференцираме f значи да намерим f'. Функцията f се нарича примитивна на f' (в дефиниционната област на f').

Диференцирането извършваме въз основа на следните правила и формули:

$(cu)'=cu'$, $(u+v)'=u'+v'$, $(uv)'=u'v+uv'$,

$\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$, $[f(u)]'=f'(u)\,u'$; за $x=f(y)$ с непрекъсната обратна функция $y=g(x)$ имаме $g'(x)=\dfrac{1}{f'(g(x))}$; $c'=0$, $x'=1$, $(u^\alpha)'=\alpha u^{\alpha-1}u'$, $(e^u)'=e^u u'$, $(\ln|u|)'=\dfrac{1}{u}u'$, $(\sin u)'=\cos u\,.\,u'$, $(\cos u)'=-\sin u\,.\,u'$, $(\mathrm{tg}\,u)'=\dfrac{1}{\cos^2 u}u'$, $(\mathrm{ctg}\,u)'=\dfrac{-1}{\sin^2 u}u'$,

$(\arcsin u)'=\dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}=-(\arccos u)'$, $(\mathrm{arctg}\,u)'=\dfrac{u'}{1+u^2}=-(\mathrm{arcctg}\,u)'$.

Тук $u=u(x)$ и $v=v(x)$ са диференцуеми функции, c и α — константи. Ако имат смисъл десните страни на тези равенства, то имат смисъл и левите им страни и равенствата са изпълнени. Например $g'(x)=\dfrac{1}{f'(g(x))}$, ако f има различна от нула производна в точката $g(x)$. При $\alpha=2,\dfrac{1}{2},-1$ получаваме $(u^2)'=2uu'$, $(\sqrt{u})'=\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$, $\left(\dfrac{1}{u}\right)'=\dfrac{-u'}{u^2}$. Освен това $(a^u)'=a^u\ln a\,.\,u'$, $a>0$; $(\log_a u)'=\dfrac{1}{u\ln a}u'$, a е константа, $a>0$, $a\neq 1$; $(\mathrm{sh}u)'=\mathrm{ch}u.u'$, $(\mathrm{ch}u)'=\mathrm{sh}u.u'$, $(\mathrm{th}u)'=\dfrac{1}{\mathrm{ch}^2u}u'$, $(\mathrm{cth}u)'=\dfrac{-1}{\mathrm{sh}^2u}u'$.

1.1. Изведете формулите за диференциране на хиперболичните функции $\left(\mathrm{sh}x=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2},\ \mathrm{ch}x=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2},\ \mathrm{th}x=\dfrac{\mathrm{sh}x}{\mathrm{ch}x},\ \mathrm{cth}x=\dfrac{\mathrm{ch}x}{\mathrm{sh}x}\right)$. Като знаете, че $(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$ за $x>0$, докажете, че $(\ln|x|)'=\dfrac{1}{x}$ при $x\neq 0$ и още $(\log_a x)'=\dfrac{1}{x\ln a}$ за $x>0$, $a>0$, $a\neq 1$. Изведете формулата $(a^x)'=a^x\ln a$ от $(e^x)'=e^x$ (a е положителна константа). Например: $(10^x)'\approx 2{,}30.10^x$; $(\lg x)'=\dfrac{M}{x}\approx\dfrac{0{,}4343}{x}$, $M=\dfrac{1}{\ln 10}$, $\lg x=\log_{10}x$; $(2^x)'\approx 0{,}693\,.\,2^x$; $(\log_2 x)'\approx\dfrac{1{,}4427}{x}$.

1.2. Намерете производните на тригонометричните функции, ако аргументът се измерва в градуси.

Решение. $(\sin x^\circ)'=\left(\sin\dfrac{\pi x}{180}\right)'=\cos\dfrac{\pi x}{180}\cdot\left(\dfrac{\pi x}{180}\right)'\approx 0{,}01745\cos x^\circ$. Тук $u(x)=\dfrac{\pi x}{180}$. По същия начин $(\cos x^\circ)'=-\dfrac{\pi}{180}\sin x^\circ$, $(\mathrm{tg}x^\circ)'=\dfrac{\pi}{180}\dfrac{1}{\cos^2x^\circ}$, $(\mathrm{ctg}x^\circ)'=\dfrac{\pi}{180}\dfrac{-1}{\sin^2x^\circ}$.

За следващите функции определете в кои точки са диференцуеми и намерете производните им (a е положителна константа).

1.3. а) $1+\dfrac{x}{1!}+\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^3}{3!}$; б) $x-\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^5}{5!}-\dfrac{x^7}{7!}$;

в) $1-\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^4}{4!}-\dfrac{x^6}{6!}$; г) $x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{x^4}{4}$.

1.4. а) $\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x}$; б) $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}$; в) $\dfrac{1}{\sqrt{x}}+\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}+\dfrac{1}{\sqrt[4]{x}}$;

г) $\log_2x+\ln x+\lg x$; д) $\sqrt{x}\ln x+\sqrt{x}\ln 2+\sqrt{2}\ln x$;

е) $x^{\sqrt{2}}+e^{\sqrt{2}}+\ln\sqrt{2}$; ж) $\log_a x+\log_x a+\log_x x$; з) $e^{\frac{1}{x}}+e^{-x}+e^{-x^2}$;

и) $a^x+x^a+x^x$; й) $\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$; к) $\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}$;

л) $xe^x\ln x$; м) $\ln\ln x+\sin\sin x+\operatorname{th}\operatorname{th} x$; н) x^{x^x}.

Решение. Нека y е съответната функция.

ж) При $x>0$ и $x\neq 1$ е в сила $\log_x x=1$, $\log_x a=\dfrac{\ln a}{\ln x}$. Така

$$y'=\frac{1}{x\ln a}-\frac{\ln a}{(\ln x)^2}\,\frac{1}{x}\left(\text{защото } \left(\frac{1}{u}\right)'=\frac{-u'}{u^2}\right).$$

и) При $x>0$ имаме $x^x=e^{\ln x^x}=e^{x\ln x}$, затова $(x^x)'=e^{x\ln x}(x\ln x)'$ $=x^x(\ln x+1)$. Тук $u(x)=x\ln x$.

й) $$y'=\frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}\left(1+\frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}}\left(1+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)\right),\ x>0.$$

Първо имахме $u=x+\sqrt{x+\sqrt{x}}$, после $u=x+\sqrt{x}$.

к) $y=x^{\frac12+\frac14+\frac18}=x^{\frac78}$, $y'=\dfrac{7}{8}\,x^{-\frac18}$ за $x>0$.

л) y' се състои от три събираеми. При всяко от тях производната на една от трите функции се умножава с другите две, останали без промяна.

н) При $x>0$ е в сила $\ln y=x^x\ln x$ и като диференцираме, получаваме

$$\frac{1}{y}\,y'=x^x(\ln x+1)\ln x+x^{x-1},\quad y'=x^{x^x}x^{x-1}(x(\ln x+1)(\ln x+1)$$

(вж. и)). Ако функцията $\ln y$ има производна, то и $y=e^{\ln y}$ е диференцуема.

1.5. а) $(x^2+1)^3$; б) $\operatorname{arctg}^2 x$; в) $\sin^2 2x^2$;

г) $x^2\sin\dfrac{1}{x}$; д) $\arccos\dfrac{1}{x}$; е) $\sqrt{1+\sqrt[3]{1+x^3}}$;

ж) $\ln\dfrac{1-e^x}{e^x}$; з) $\dfrac{\sin x}{x}$; и) $\operatorname{arctg}\dfrac{1+x}{1-x}$;

й) $\dfrac{ax+b}{cx+d}$. Тук a, b, c и d са константи.

1.6. а) $\ln|x+\sqrt{x^2+a}|$, a е константа, $a\neq 0$;

б) $\ln|\cos x|$; в) $\ln\ln\sin x$; г) $\operatorname{sh} x\operatorname{ch} x$;

д) $\ln\cos\operatorname{arctg}\operatorname{sh} x$; е) $\sin\cos\operatorname{tg}\operatorname{ctg} x$.

Решение. а) $$y'=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+a}}\left(1+\frac{2x}{2\sqrt{x^2+a}}\right)=\frac{1}{\sqrt{x^2+a}},$$

$x^2+a>0$. Тук първо $u=x+\sqrt{x^2+a}$, после $u=x^2+a$.

в) $y'=\dfrac{1}{\ln\sin x}\,\dfrac{1}{\sin x}\cos x$. Формално успяхме да диференцираме функция, която не е дефинирана никъде! Всъщност получихме производната на $\ln|\ln\sin x|$ при $0<\sin x<1$.

г) $y=\dfrac12\,2\operatorname{sh} x\operatorname{ch} x=\dfrac12\operatorname{sh}2x$, затова $y'=\operatorname{ch}2x=\operatorname{sh}^2x+\operatorname{ch}^2x$.

Хиперболичните функции са сходни с тригонометричните.

д) $$y'=\frac{-\sin\operatorname{arctg}\operatorname{sh}x}{\cos\operatorname{arctg}\operatorname{sh}x}\,\frac{\operatorname{ch}x}{1+\operatorname{sh}^2x}=-\operatorname{tg}\operatorname{arctg}\operatorname{sh}x\,\frac{\operatorname{ch}x}{\operatorname{ch}^2x}=-\frac{\operatorname{sh}x}{\operatorname{ch}x}=-\operatorname{th}x,$$

защото $\operatorname{ch}^2x-\operatorname{sh}^2x=1$ (проверете чрез формулите от зад. 1.1).

Стойностите на arctg са в $\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$, косинусът е положителен. Допустима е всяка стойност на x.

1.7. а) $\sqrt[x]{x}$; б) $\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$; в) $(1+x)^{\frac{1}{x}}$;

г) $\sqrt[\ln x]{x}$; д) $x^{\ln x}$; е) $x^{\sin x}$;

ж) $\sqrt{\dfrac{x(x-1)}{x-2}}$; з) $\dfrac{(x-3)^2(2x-1)}{(x+1)^3}$; и) $\sqrt[3]{1+x}\,\sqrt{2+x^2}\,(3+x^3)$.

Решение. а) $y'=(e^{\frac{1}{x}\ln x})' = e^{\frac{1}{x}\ln x}\frac{1-\ln x}{x^2} = \sqrt[x]{x}\,\frac{1-\ln x}{x^2},\ x>0.$

г) $\ln y = \frac{1}{\ln x}\ln x = 1,\quad y = e,\quad y' = 0\quad (x>0,\ x \neq 1).$

ж) За $x > 2$ или $0 < x < 1$ имаме

$$\ln y = \frac{1}{2}(\ln x + \ln|x-1| - \ln|x-2|),$$

$$\frac{1}{y}y' = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x-2}\right)$$

и оттук намираме y'. За изрази от вида u^v или съставени с умножение, деление и коренуване често е уместно предварително да се логаритмува.

1.8. а) $\arcsin(x-1)$;

б) $\frac{1}{3}\cos^3 x - \cos x$;

в) $\arcsin x - \sqrt{1-x^2}$;

г) $\frac{\sin x+\cos x}{\sin x-\cos x}$;

д) $\frac{1}{\sqrt{2}}\ \mathrm{arctg}\,\frac{x^2-1}{x\sqrt{2}}$;

е) $\frac{1+\cos 8x}{\mathrm{ctg}\,2x - \mathrm{tg}\,2x}$;

ж) $\frac{x^{3/2}+x^{1/2}-x-1}{1+x-x^{1/4}-x^{3/4}}$;

з) $\mathrm{arctg}\,(x-\sqrt{1+x^2})$;

и) $\frac{2}{3}\,\mathrm{arctg}\,x + \frac{1}{3}\,\mathrm{arctg}\,\frac{x}{1-x^2}$;

й) $\frac{1}{\sqrt{3}}\,\mathrm{arctg}\,\frac{x\sqrt{3}}{1-x^2}$;

к) $x\,\mathrm{arctg}\,x - \ln\sqrt{1+x^2}$;

л) $x\arcsin x + \sqrt{1-x^2}$;

м) $\mathrm{tg}^2 x + \ln\cos^2 x$;

н) $\frac{1}{3}\mathrm{tg}^3 x - \mathrm{tg}\,x + x$;

о) $\frac{\arcsin x}{\arccos x}$;

п) $\frac{x}{2}(\sin\ln x + \cos\ln x)$;

р) $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}\,(x^2+\sqrt{1+x^4})}$;

с) $(x^2-2x+2)\,e^x$;

т) $\frac{1}{3}\ln\frac{x+1}{\sqrt{x^2-x+1}} + \frac{1}{\sqrt{3}}\,\mathrm{arctg}\,\frac{2x-1}{\sqrt{3}}$;

у) $\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\frac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\,\mathrm{arctg}\,\frac{x\sqrt{2}}{1-x^2}$;

ф) $\ln\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}} + 2\,\mathrm{arctg}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$;

х) $\mathrm{arctg}\,x + \ln\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$;

ц) $x(\arccos x)^2 - 2x - 2\sqrt{1-x^2}\arccos x.$

Един поглед върху отговорите към тази задача ще ни убеди, че действието, обратно на диференцирането, няма да бъде лесно!

1. 9. Посочете някоя примитивна на функцията: а) x; б) x^2; в) x^α; г) e^{-x}; д) a^x; е) $\mathrm{tg}x$; ж) $\frac{\ln x}{x}$; з) $\frac{x}{1+x^4}$; и) $\frac{x}{\sqrt{1-x^4}}$.

Решение. а) $\left(\frac{x^2}{2}\right)'=x.$ б) $\left(\frac{x^3}{3}\right)'=x^2.$

в) Ако $\alpha \neq -1$, то $\left(\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right)' = x^\alpha$. Ако $\alpha = -1$, то $(\ln x)' = \frac{1}{x}$.

г) $e^{-x} = -e^{-x}(-x)' = (-e^{-x})'.$

д) $a^x = \frac{1}{\ln a}a^x\ln a = \left(\frac{a^x}{\ln a}\right)',\ a>0,\ a\neq 1.$

е) $\mathrm{tg}x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{-(\cos x)'}{\cos x} = (-\ln|\cos x|)'.$

ж) $\frac{\ln x}{x} = \ln x\,(\ln x)' = \left(\frac{1}{2}\ln^2 x\right)'.$

з) $\frac{x}{1+x^4}=\frac{1}{2}\,\frac{1}{1+(x^2)^2}\,(x^2)'=\left(\frac{1}{2}\,\mathrm{arctg}\,x^2\right)'$.

и) $\frac{x}{\sqrt{1-x^4}}=\frac{1}{2}\,\frac{1}{\sqrt{1-(x^2)^2}}\,(x^2)'=\left(\frac{1}{2}\,\arcsin x^2\right)'$.

1. 10 (формула на Симпсон). Ако $S(x)$ е полином, чиято степен не надминава три, образуваме

$$V(x)=\frac{x}{6}\left[\,S(0)+4\,S\left(\frac{x}{2}\right)+S(x)\right].$$

Проверете, че $V'(x)=S(x)$.

Решение. Ако равенството е вярно за S, то ще е вярно и за λS при всеки избор на константата λ. Ако е вярно за S_1 и S_2, ще е вярно и за S_1+S_2. Следователно е достатъчно да го проверим за

$S(x)=1,\ x,\ x^2,\ x^3$. При $S=1$ имаме $V=\frac{x}{6}\,(1+4+1)=x$,

$V'=1=S$. Формулата е вярна и при $S=x,\ x^2,\ x^3$. Вярна ли е тя за полиноми от по-висока степен?

1. 11. а) Намерете производната на функцията

$$f=A\,e^{-kx}\sin(\omega x+\alpha);$$

б) Спрямо коя от променливите $A,\ k,\ x,\ \omega,\ \alpha$ диференцирахте? Намерете производната и по всяка от останалите четири променливи.

1.12. Ако t е време, $v(t)$ — скорост, $F(t)$ — действаща сила, m — маса на покой, $c=3.10^{10}$ cm/s — скоростта на светлината, то извършете диференцирането в уравнението на Айнщайн

$$m\left(\frac{v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right)'=F.$$

1. 13. За $y=ae^x,\ \ (ax+b)e^x,\ \ a\sin x+b\cos x,\ \ 4\,\mathrm{arctg}\,e^{ax+b}$,

$\left(\frac{d}{dx}-2\,\mathrm{th}\,x\right)\left(\frac{d}{dx}-\mathrm{th}\,x\right)\left(A\,e^{ax}+B\,e^{-ax}\right)$ проверете, че

съответно: $y'-y=0,\ y''-2y'+y=0,\ y''+y=0,\ y''=a^2\sin y$,

$y''=\left(a^2-\frac{6}{\mathrm{ch}^2\,x}\right)y\ (y''=(y')')$.

1.14. Ако u и v са диференцуеми функции, намерете производните на:

а) u^v; б) $\log_u v$; в) $\ln\left|\frac{u}{v}\right|$;

г) $\mathrm{arctg}\,\frac{v}{u}$; д) $u(\sin^2 x)+v(\cos^2 x)$; е) $u(u(x))$.

Решение. а) $y=u^v$, $\ln y=v\ln u$, $\frac{1}{y}\,y'=v'\ln u+\frac{v}{u}\,u'$,

$$y'=u^v\left(v'\ln u+\frac{v}{u}\,u'\right).\ \text{Тук}\ u>0.$$

б) $\log_u v=\frac{\ln v}{\ln u}$.

д) $y'=u'(\sin^2 x)\,2\sin x\cos x+v'(\cos^2 x)\,2\cos x\,(-\sin x)$ и т. н.

1. 15. а) Докажете, че ако $u,\ v,\ w$ и z са диференцуеми функции, то

$$\begin{vmatrix} u & v \\ w & z \end{vmatrix}'=\begin{vmatrix} u' & v' \\ w & z \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} u & v \\ w' & z' \end{vmatrix};$$

б) Напишете и докажете формула за диференциране на детерминанта от n-ти ред, елементите на която са диференцуеми функции с обща дефиниционна област.

Решение. а) $(uz-vw)'=u'z+uz'-v'w-vw'=(u'z-v'w)+(uz'-vw')$.

б) Детерминантата е сума от $n!$ произведения от по n елемента, всяко произведение, взето със знак + или −. Следователно производната е сума от n детерминанти, при всяка от които се диференцират елементите на един ред, а останалите елементи са без промяна.

1.16. Докажете, че производната на четна функция е нечетна, на нечетна функция — четна, а на периодична функция с период T — периодична функция с период T.

Решение. Ако $f(-x)=f(x)$, след диференциране получаваме $f'(x)=-f'(-x)$. Ако $f(-x)=-f(x)$, то $-f'(x)=-f'(-x)$. Ако $f(x+T)=f(x)$, то $f'(x)=f'(x+T)$.

Дефиницията на понятието производна има смисъл и ако разглеждаме функции от тип $\mathbf{R} \to \mathbf{C}$ или от тип $\mathbf{C} \to \mathbf{C}$. Тук $\mathbf{R}$ е реалната права, а $\mathbf{C}$ — множеството на комплексните числа (вж. гл. 0). Правилата за диференциране са валидни и в тези два случая. Например $(u + iv)' = u' + iv'$.

1.17. Намерете производните на:

а) z^n, n — цяло неотрицателно число, функцията е дефинирана в $\mathbf{C}$);

б) $\dfrac{1}{ix+1}$, x — реално.

Решение. **а)** $(z^n)' = nz^{n-1}$, щом правилото за диференциране на произведение е вярно.

б) $\left(\dfrac{1}{ix+1}\right)' = \dfrac{-1}{(ix+1)^2}(ix+1)' = \dfrac{-i}{(ix+1)^2}$. Производната е намерена. Впрочем нека представим тези числа във вида $a + bi$:

$$\frac{1}{ix+1} = \frac{ix-1}{(ix+1)(ix-1)} = \frac{ix-1}{i^2x^2-1} = \frac{1-ix}{x^2+1} = \frac{1}{x^2+1} + i\frac{-x}{x^2+1};$$

$$\frac{-i}{(ix+1)^2} = \frac{-i}{-x^2+2ix+1} = -i\frac{1-x^2-2ix}{(1-x^2)^2+4x^2} = \frac{-2x}{(x^2+1)^2} + i\frac{x^2-1}{(x^2+1)^2}.$$

Полученото равенство се свежда до

$$\left(\frac{1}{x^2+1}\right)' = \frac{-2x}{(x^2+1)^2} \text{ и } \left(\frac{-x}{x^2+1}\right)' = \frac{x^2-1}{(x^2+1)^2}.$$

1.18. Дефинирайте експоненциалната функция e^z за комплексни стойности на z така, че и за $\lambda \in \mathbf{C}$ да остане вярна формулата $(e^{\lambda x})' = \lambda e^{\lambda x}$, $x \in \mathbf{R}$, а в реалната област функцията да не се промени.

Решение. Нека първо $\lambda = i$. Трябва да намерим такава двойка реални функции $u(x)$ и $v(x)$, че като положим $e^{ix} = u(x) + iv(x)$, да имаме $(e^{ix})' = ie^{ix}$, т. е. $(u+iv)' = i(u+iv) = -v + iu$. Така $u' = -v$, $v' = u$. Освен това $e^{i0} = e^0 = 1 = u(0) + iv(0)$. Следователно $u(0) = 1$, $v(0) = 0$. Сигурно вече се досетихте, че функциите $u = \cos x$ и $v = \sin x$ удовлетворяват тези условия. (Друга такава двойка няма според зад. 7.6.) Тогава да положим по дефиниция $e^{ix} = \cos x + i\sin x$ (формула на Ойлер), а $e^{\alpha+i\beta} = e^{\alpha}e^{i\beta} = e^{\alpha}(\cos\beta + i\sin\beta)$. Проверете, че при тази дефиниция наистина имаме $(e^{\lambda x})' = \lambda e^{\lambda x}$ за $\lambda \in \mathbf{C}$ и дори се запазва свойството $e^{z_1}e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$. В реалната област функцията не се промени. Имаме $e^{\pi i} = -1$ (Тогава какви стойности ще получи $\sqrt[i]{-1}$?) Или: $(\cos x + i\sin x)^n = (e^{ix})^n = e^{inx} = \cos nx + i\sin nx$ (формула на Моавър). При $n = 2$ получаваме $(\cos x + i\sin x)^2 = (\cos^2 x - \sin^2 x) + i\,2\sin x\cos x = \cos 2x + i\sin 2x$. Следователно $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$, $\sin 2x = 2\sin x\cos x$. Положете $n = 3$.

1.19. Пресметнете: **а)** $1 + 2x + 3x^2 + \ldots + nx^{n-1}$;

б) $1^2 + 2^2x + 3^2x^2 + \ldots + n^2x^{n-1}$.

Решение. **а)** $1 + x + \ldots + x^n = \dfrac{1-x^{n+1}}{1-x}$ при $x \neq 1$. Тогава

$$1 + 2x + \ldots + nx^{n+1} = \left(\frac{1-x^{n+1}}{1-x}\right)'.$$

б) $$\sum_{k=1}^{n} k^2x^{k-1} = \left(x\sum_{k=1}^{n} kx^{k-1}\right)' = \left[x\left(\frac{1-x^{n+1}}{1-x}\right)'\right]', \quad x \neq 1.$$

1.20. Диференцирайте функциите, обратни на:

а) $x = y + y^3$; **б)** $x = y + \ln y$; **в)** $x = y + e^y$; **г)** $x = \operatorname{sh} y$.

Решение. **б)** $x(y) = y + \ln y$ расте в $(0, \infty)$, защото е сума на две растящи функции. Следователно тя има непрекъсната обратна функция $y(x)$. Тъй като е диференцуема, такава е и обратната

$$y' = \frac{1}{x'(y)} = \frac{1}{1+\dfrac{1}{y}} = \frac{y}{1+y} \quad (1 + y \neq 0, \text{ защото } y > 0).$$

г) $x = \dfrac{e^y - e^{-y}}{2}$ расте в $\mathbf{R}$, защото e^y расте и следователно $e^{-y} = \dfrac{1}{e^y}$ намалява, а $-e^{-y}$ расте; $y' = \dfrac{1}{\operatorname{ch} y} = \dfrac{1}{\sqrt{1+\operatorname{sh}^2 y}} = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$,

защото $\operatorname{ch}^2 y - \operatorname{sh}^2 y = 1$. Всъщност $y = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$ и $y' = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

според зад. 1.6, а). Наистина $e^y - e^{-y} = 2x$, $(e^y)^2 - 2xe^y - 1 = 0$, $e^y = x + \sqrt{x^2+1}$. Знакът пред корена е „+“, защото $e^y > 0$.

1.21. Диференцирайте функцията $y(x)$, зададена с уравнението $y^3 + yx^2 = x^4$.

Решение. При $x \neq 0$ да положим $t = \dfrac{y}{x}$. Тогава $y = tx$, $t^3x^3 + tx^3 = x^4$, $x = t^3 + t$. Тази функция расте от $-\infty$ до $+\infty$ и следователно има непрекъсната обратна функция $t(x)$, дефинирана за всяко x. Еднозначно се определя $y = xt(x)$. Тогава

$$y' = xt'(x) + t(x) = \frac{x}{3t^2+1} + t = \frac{4t^3+2t}{3t^2+1} = \frac{4y^3+2yx^2}{3y^2x+x^3}.$$

Въобще, ако една функция $y(x)$ е дадена параметрично, т. е. $x = u(t)$, $y = v(t)$, $u(t)$ има непрекъсната обратна $t(x)$ и образуваме $y(x) = v(t(x))$, то $y'(x) = \dot v(t(x))\, t'(x) = \dfrac{\dot v(t(x))}{\dot u(t(x))}$ или $y' = \dfrac{\dot v}{\dot u}$ (щом $\dot u$ и $\dot v$ съществуват и $\dot u \neq 0$).

В задачата $x = t^3 + t$, $y = tx = t^4 + t^2$. Следователно $y' = \dfrac{4t^3+2t}{3t^2+1}$. Обикновено вместо u и v пишем x и y, т. е. $y' = \dfrac{\dot y}{\dot x}$, или подробно $y'(x) = \dfrac{\dot y(t(x))}{\dot x(t(x))}$. Тук буквите x и y означават по две различни функции. След като разбрахме, че $y'(x)$ съществува (защото $t'(x)$ съществува), можем да диференцираме тъждеството $y^3 + yx^2 = x^4$. Ще получим $3y^2y' + y'x^2 + y\,2x = 4x^3$ и $y' = \dfrac{4x^3 - 2xy}{x^2 + 3y^2}$.

1.22. Нека в една околност на точката a са дефинирани функциите f и g. Ако съществуват $f'(a)$ и $g'(a) \neq 0$, пресметнете:

а) $\lim\limits_{n\to\infty} n\left[f\left(a+\dfrac{1}{n}\right) - f(a)\right]$; б) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{xf(a) - af(x)}{x-a}$;

в) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$, ако $f(a) = g(a) = 0$.

Решение. а) $\dfrac{f\left(a+\frac{1}{n}\right) - f(a)}{\frac{1}{n}} \to f'(a)$.

б) $\dfrac{xf(a) - af(x)}{x-a} = \dfrac{x-a}{x-a} f(a) - a\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \to f(a) - af'(a)$.

в) Тъй като $\dfrac{g(x)}{x-a} = \dfrac{g(x)-g(a)}{x-a} \to g'(a) \neq 0$, то при $x \neq a$ в близост до a $g \neq 0$ и $\dfrac{f}{g}$ има смисъл; $\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} : \dfrac{g(x)-g(a)}{x-a} \to \dfrac{f'(a)}{g'(a)}$ $(x \to a)$.

Всъщност това е правилото, което маркиз дьо Лопитал е научил от своя учител Йохан Бернули. Днес правило на Лопитал се наричат няколко по-общи твърдения, които ще разгледаме в § 11.

Така при $b > 0$ имаме $\lim\limits_{a\to 0} \dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \left.\dfrac{\frac{-4c}{2\sqrt{b^2-4ac}}}{2}\right|_{a=0} = -\dfrac{c}{b}$, а $\lim\limits_{a\to 0} \dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = -\dfrac{c}{b}$ при $b < 0$ (диференцирахме по a).

1.23. Нека функцията φ е дефинирана в околност на точката a и е непрекъсната в тази точка. Докажете, че ако $f(x) = (x-a)\varphi(x)$ и $g(x) = |x-a|\varphi(x)$, то $f'(a) = \varphi(a)$, $g'(a)$ не съществува при $\varphi(a) \neq 0$, а при $\varphi(a) = 0$ имаме $g'(a) = 0$.

Решение. $\dfrac{f(x) - f(a)}{x-a} = \varphi(x) \to \varphi(a)$ при $x \to a$. Образуваме $\dfrac{g(x)-g(a)}{x-a} = \dfrac{|x-a|}{x-a}\varphi(x)$. Този израз клони към $\varphi(a)$, ако

$x \to a,\ x > a$, и към $-\varphi(a)$, ако $x \to a,\ x < a$.

Лявата и дясната граница на диференчното частно (ако съществуват) се наричат съответно **лява и дясна производна** на f и се означават с f'_- и f'_+. В задачата получихме, че $g'_+(a) = \varphi(a)$, $g'_-(a) = -\varphi(a)$.

1.24. Докажете: **а)** Функцията $|x|$ е непрекъсната в $\mathbf{R}$, но няма производна в точката 0. В същото време тя е диференцуема в интервала $[0,1]$;

б) $(x\,|x|)' = 2\,|x|$;

в) ако $a_1, a_2, \ldots a_n$ са различни, то функцията $|(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n)|$ няма производна в тези точки;

г) ако $y = x(x-1)\ldots(x-n)$, то $y'(0) = (-1)^n n\,!$;

д) ако $y = (x-1)^3(x-2)^2(x-3)$, то $y'(1) = y'(2) = 0$, $y'(3) = 8$.

Решение. **а)** Следва от зад. 1.23 при $\varphi = 1$, $a = 0$. В интервала $[0,1]$ $|x| = x$.

б) Така е при $x > 0$ и при $x < 0$. За $x = 0$ следва от зад. 1.23.

1.25. Нека $f(0) = 0$ и $f(x)$ при $x \neq 0$ е съответно:

а) $x \sin\dfrac{1}{x}$; **б)** $x^2 \sin\dfrac{1}{x}$;

в) $x^2 \sin\dfrac{1}{x^2}$; **г)** $x^2 \left|\sin\dfrac{1}{x}\right|$.

Докажете, че функцията от а) е непрекъсната в точката 0, но няма там дори лява и дясна производна; функцията от б) е диференцуема навсякъде, но производната ѝ не е непрекъсната в 0; функцията от в) е диференцуема навсякъде, като производната не е ограничена в никоя околност на 0; за функцията f от г) съществува $f'(0)$, но всяка околност на 0 съдържа безброй точки, в които f не е диференцуема.

§ 2. Повторно диференциране

Производните от по-висок ред се означават с: $f'' = (f')'$, $f''' = (f'')'$, $\ldots$, $f^{(n)}$, или $\dfrac{d^2 f}{dx^2}, \dfrac{d^3 f}{dx^3}, \ldots, \dfrac{d^n f}{dx^n}$, или $\ddot{f}, \dddot{f}, \ldots, \overset{(n)}{f}$, или $D^2 f, D^3 f, \ldots, D^n f$. За удобство считаме $f = f^{(0)}$.

2.1. Намерете y'', ако **а)** $y = \sqrt{1+x^2}$; **б)** $y = x\sqrt{1+x^2}$; **в)** $y = \arcsin x$; **г)** $y = u^v$; **д)** $y = u(\sin x)$;

е) y е обратна на някоя от функциите от зад. 1.20;

ж) y е функцията от зад. 1.21;

з) $y = T_n = \cos(n \arccos x)$ (и проверете, че $(1-x^2)\,T_n'' - x\,T_n' + n^2 T_n = 0$).

Решение. **д)** $y' = u'(\sin x)\cos x$, $y'' = u''(\sin x)\cos^2 x + u'(\sin x)(-\sin x)$, ако u е два пъти диференцуема функция.

е) За случая б) на зад. 1.20 $y' = \dfrac{y}{1+y} = 1 - \dfrac{1}{1+y}$, $y'' = \dfrac{1}{(1+y)^2}\,y' = \dfrac{1}{(1+y)^2}\,\dfrac{y}{1+y} = \dfrac{y}{(1+y)^3}$.

За обратната функция на $x = f(y)$ имаме $y' = \dfrac{1}{f'(y)} = \dfrac{1}{f'}$, $f'(y) \neq 0$,
$y'' = \dfrac{-1}{f'^2} f''\,y' = -\dfrac{f''}{f'^3}$, $y''' = \dfrac{3f''^2 - f'\,f'''}{f'^5}$ и т. н.

ж) От $y' = \dfrac{4t^2 + 2t}{3t^2 + 1}$ получаваме

$$y'' = \frac{2(6t^4 + 3t^2 + 1)}{(3t^2 + 1)^2}\,t' = \frac{2(6t^4 + 3t^2 + 1)}{(3t^2+1)^3}.$$

Въобще за функция, зададена параметрично: $x(t)$, $y(t)$ и $\dot{x}(t) \neq 0$, имаме
$y' = \dfrac{\dot{y}}{\dot{x}}$, $y'' = \dfrac{\ddot{y}\dot{x} - \dot{y}\ddot{x}}{\dot{x}^2}\,t'_x = \dfrac{\ddot{y}\dot{x} - \dot{y}\ddot{x}}{\dot{x}^3}$.

з) Всъщност T_n е полином от n-та степен (полином на Чебишев): $T_0 = 1$, $T_1 = x$. Ако $\alpha = \arccos x$, от $2\cos\alpha \times \cos(n-1)\alpha = \cos n\alpha + \cos(n-2)\alpha$ имаме $T_n = 2x\,T_{n-1} - T_{n-2}$, $n \geqq 2$. Оттук е ясно, че коефициентът пред x^n в T_n е 2^{n-1}, $n \geqq 1$. Самото диференциране се извършва непосредствено.

2.2. Ако f, u и v са три пъти диференцуеми функции, намерете третата производна на:

а) uv; **б)** u^2; **в)** $\ln|u|$;

г) $f(u)$; **д)** $f(x^2)$; **е)** $f(e^x)$.

Решение. **а)** $(uv)' = u'v + uv'$, $(uv)'' = (u''v + u'v') + (u'v' + uv'') = u''v + 2u'v' + uv''$, $(uv)''' = u'''v + u''v' + 2u''v' + 2u'v'' + u'v'' + uv''' = u'''v + 3u''v' + 3u'v'' + uv'''$.

Въобще формулата на Лайбниц е

$$(uv)^{(n)} = u^{(n)}v + \binom{n}{1} u^{(n-1)}v' + \ldots + \binom{n}{n} uv^{(n)}.$$

2.3. Докажете, че: **а)** $(x^\alpha)^{(n)} = \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)\,x^{\alpha-n}$ при $x>0$;

б) $(e^{\lambda x})^{(n)} = \lambda^n e^{\lambda x}$; **в)** $(\ln x)^{(n)} = (-1)^{n-1}\dfrac{(n-1)!}{x^n}$ при $x>0$;

г) $\left(\dfrac{1}{x}\right)^{(n)} = \dfrac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}$ при $x \neq 0$; **д)** $(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x+n\dfrac{\pi}{2}\right)$;

е) $(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x+n\dfrac{\pi}{2}\right)$. **ж)** $(a^x)^{(n)} = (\ln a)^n a^x$, $a>0$.

Тук n е естествено число, α, λ и a са константи.

Решение. **в)** Получава се от г), което следва от а) при $\alpha = -1$.

д) и **е)** $(\cos x + i\sin x)^{(n)} = (e^{ix})^{(n)} = i^n e^{ix} = (e^{i\frac{\pi}{2}})^n e^{ix}$

$= e^{i(x+n\frac{\pi}{2})} = \cos\left(x+n\dfrac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(x+n\dfrac{\pi}{2}\right)$. Тук се възползвахме

от б) при $\lambda = i$. Написахме $i = e^{i\frac{\pi}{2}} = \cos\dfrac{\pi}{2} + i\sin\dfrac{\pi}{2}$. Освен това

$(u+iv)^{(n)} = u^{(n)} + iv^{(n)}$.

2.4. Намерете n-тата производна на функцията:

а) $\dfrac{1}{x+a}$; **б)** $\dfrac{1}{(x+a)^m}$; **в)** $\dfrac{1}{ax+b}$;

г) $\dfrac{1}{x^2-a^2}$, $a \neq 0$; **д)** $\dfrac{1}{1+x^2}$; **е)** $\operatorname{arctg} x$.

(n е естествено число, m, a и b са константи.)

Решение. Тъй като $[f(ax+b)]^{(n)} = a^n f^{(n)}(ax+b)$, то а) и б) получаваме от зад. 2.3, г) и а) (или непосредствено).

в) Получава се от зад. 2.3, г) или, като напишем $\dfrac{1}{ax+b}$

$= \dfrac{1}{a}\,\dfrac{1}{x+\frac{b}{a}}$, от зад. 2.4, а).

г) $\dfrac{1}{x^2-a^2} = \dfrac{1}{2a}\,\dfrac{x+a-(x-a)}{(x+a)(x-a)} = \dfrac{1}{2a}\left(\dfrac{1}{x-a} - \dfrac{1}{x+a}\right)$.

Може и така: $\dfrac{1}{(x+a)(x-a)} = \dfrac{A}{x-a} + \dfrac{B}{x+a}$, $1 = A(x+a) + B(x-a)$.

Като положим $x=a$, получаваме $A = \dfrac{1}{2a}$, а при $x=-a$ имаме

$B = \dfrac{-1}{2a}$. Константите A и B ще получим и ако напишем

$1 = (A+B)x + (Aa-Ba)$ и приравним коефициентите пред x и свободните членове.

Дроб от вида $\dfrac{p(x)}{(x-a)^m \ldots (x-d)^p}$ се представя като:

$$\frac{A_1}{(x-a)^m} + \frac{A_2}{(x-a)^{m-1}} + \ldots + \frac{A_m}{x-a} + \ldots + \frac{D_1}{(x-d)^p} + \frac{D_2}{(x-d)^{p-1}} + \ldots + \frac{D_p}{x-d},$$

стига степента на числителя да е по-малка от степента на знаменателя (което постигаме с предварително деление, ако е нужно). Коефициентите намираме както по-горе. Числата $a, \ldots, d$ са различни.

д) Полагаме в г) $a = i$:

$$\left(\frac{1}{1+x^2}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{2i}\left[\frac{1}{(x-i)^{n+1}} - \frac{1}{(x+i)^{n+1}}\right]$$

$$= \frac{(-1)^n n!}{2i\,(x^2+1)^{n+1}}\left[(x+i)^{n+1} - (x-i)^{n+1}\right].$$

Числото $x+i$ се представя с точката $(x, 1)$ от равнината. Да построим лъч с начало $(0, 0)$ през $(x, 1)$. Нека той сключва ъгъл $\varphi \in (0, \pi)$ с оста x. Тогава $\operatorname{ctg}\varphi = x$ и следователно $\varphi = \operatorname{arcctg} x$.

Тъй като $\cos\varphi = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ и $\sin\varphi = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$, можем да представим

$x + i = \sqrt{x^2+1}\,(\cos\varphi + i\sin\varphi) = \sqrt{x^2+1}\,e^{i\varphi}$ (вж. зад. 1.18). Тогава

$x-i = \sqrt{x^2+1}\; e^{-i\varphi}$, $(x+i)^{n+1}-(x-i)^{n+1}=(x^2+1)^{\frac{n+1}{2}}\left[e^{i(n+1)\varphi} - e^{-i(n+1)\varphi}\right]$

$= (x^2+1)^{\frac{n+1}{2}}\, 2i \sin(n+1)\varphi$, защото $e^{it} - e^{-it} = (\cos t + i \sin t)$

$-(\cos t - i \sin t) = 2\, i \sin t$. Окончателно $\left(\dfrac{1}{1+x^2}\right)^{(n)}$

$$= \frac{(-1)^n\, n!}{(1+x^2)^{\frac{n+1}{2}}} \quad \sin\left[(n+1)\operatorname{arcctg} x\right].$$

е) $(\operatorname{arctg} x)^{(n)} = \left(\dfrac{1}{1+x^2}\right)^{(n-1)} = \dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x^2)^{\frac{n}{2}}} \sin(n \operatorname{arcctg} x)$

според д).

2.5. Намерете n-тата производна $(n \geqq 1)$ на:

а) $\sqrt{x}$; **б)** $\dfrac{1}{\sqrt{x}}$; **в)** $\dfrac{x^2}{1-x}$;

г) $\dfrac{1}{x^2-3x+2}$; **д)** $\dfrac{1}{(x^2-1)(x+1)}$; **е)** $\dfrac{x+2}{2x+1}$;

ж) $\dfrac{1}{a^2+x^2}$, $a>0$; **з)** $\dfrac{1}{x^2+px+q}$, $p^2-4q<0$; **и)** $\dfrac{1}{x^4-1}$;

й) $\dfrac{x}{(1+x^2)^2}$; **к)** $\dfrac{1+x}{\sqrt{1-x}}$; **л)** $\sqrt{ax+b}$;

м) $\sin^2 x$; **н)** $\sin^3 x$; **о)** $\sin^4 x+\cos^4 x$;

п) $\sin 2x \sin 3x$; **р)** $x \ln x$.

Решение. **а)** и **б)** получаваме от зад. 2.3, а) при $\alpha = \dfrac{1}{2}$ и $\alpha = -\dfrac{1}{2}$.

В отговора е употребен знакът „двоен факториел": $(2n)!! = 2.4.6\ldots(2n)$, $(2n-1)!! = 1.3.5\ldots(2n-1)$, по дефиниция $(-1)!! = 1$.

в) $\dfrac{x^2}{1-x} = \dfrac{x^2-1+1}{1-x} = \dfrac{1}{1-x} - x - 1 = \dfrac{-1}{x-1} - x - 1$,

$$y' = \frac{1}{(x-1)^2} - 1,$$

$y^{(n)} = \dfrac{(-1)^{n+1}\, n!}{(x-1)^{n+1}} = \dfrac{n!}{(1-x)^{n+1}}$ при $n \geqq 2$, $x \neq 1$. Приложихме зад. 2.4, а), което е зад. 2.3, г) или по-общо зад. 2.3, а), а тя се решава непосредствено. Отначало извършихме предварителното деление, споменато в зад. 2.4, г).

г) $\dfrac{1}{x^2-3x+2} = \dfrac{1}{(x-1)(x-2)}$ и разлагаме на елементарни дроби както в зад. 2.4, г).

д) $\dfrac{1}{(x^2-1)(x+1)} = \dfrac{1}{(x-1)(x+1)^2}$ и разлагаме както в зад. 2.4, г).

е) $\dfrac{x+2}{2x+1} = \dfrac{1}{2}\,\dfrac{2x+1+3}{2x+1} = \dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{3}{2x+1}\right)$.

ж) $y = \dfrac{1}{a^2+x^2} = \dfrac{1}{a^2}\,\dfrac{1}{1+\left(\dfrac{x}{a}\right)^2}$. Нека $\varphi(t) = \dfrac{1}{1+t^2}$. Тогава

$y(x) = \dfrac{1}{a^2}\varphi\left(\dfrac{x}{a}\right)$, $y^{(n)}(x) = \dfrac{1}{a^2}\,\dfrac{1}{a^n}\varphi^{(n)}\left(\dfrac{x}{a}\right)$, $\varphi^{(n)}$ знаем от зад. 2.4, д).

з) Да направим субституцията на Хорнер $x = t - \dfrac{p}{2}$. Тогава

$x^2+px+q = t^2 + \dfrac{4q-p^2}{4} = t^2 + a^2$. Положихме $a^2 = \dfrac{4q-p^2}{4} > 0$. Ако

$\varphi(t) = \dfrac{1}{t^2+a^2}$, имаме $y(x) = \dfrac{1}{x^2+px+q} = \varphi\left(x + \dfrac{p}{2}\right)$,

$y^{(n)}(x) = \varphi^{(n)}\left(x + \dfrac{p}{2}\right)$. За $\varphi^{(n)}$ вж. зад. 2.5, ж).

и) $\dfrac{1}{x^4-1}=\dfrac{1}{2}\,\dfrac{(1+x^2)+(1-x^2)}{(x^2-1)\,(x^2+1)}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{x^2-1}-\dfrac{1}{x^2+1}\right)$,

$\dfrac{1}{x^2-1}$ разлагаме както в зад. 2.4, г), за $\dfrac{1}{x^2+1}$ вж. зад. 2.4, д).

Дроб от вида $\dfrac{P(x)}{(x-a)^m\ldots(x^2+px+q)^n\ldots}$ се представя като:

$$\frac{A_1}{(x-a)^m}+\ldots+\frac{A_m}{x-a}+\ldots+\frac{M_1x+N_1}{(x^2+px+q)^n}+\ldots+\frac{M_nx+N_nx}{x^2+px+q}+\ldots$$

Тук $p^2-4q<0$, степента на $P(x)$ е по-ниска от степента на знаменателя.

й) $\left(\dfrac{1}{1+x^2}\right)'=\dfrac{-2x}{(1+x^2)^2}$.

к) $\dfrac{1+x}{\sqrt{1-x}}=\dfrac{2-(1-x)}{\sqrt{1-x}}=\dfrac{2}{\sqrt{1-x}}-\sqrt{1-x}$ и прилагаме зад. 2.3, а) (или зад. 2.5, а, б)).

м) $\sin^2 x=\dfrac{1-\cos 2x}{2}$ и после както в зад. 2.3, е).

н) Ако положим $n=3$, както се предлага в края на зад. 1.18, ще получим $\sin 3x = 3\cos^2 x\sin x-\sin^3 x$ (извежда се и непосредствено). Тогава $\sin^3 x=\dfrac{3}{4}\sin x-\dfrac{1}{4}\sin 3x$ и продължаваме както в зад. 2.3, д).

о) $\sin^4 x+\cos^4 x=(\sin^2 x+\cos^2 x)^2-2\sin^2 x\cos^2 x=1-\dfrac{1}{2}\sin^2 2x$

$$=1-\frac{1}{2}\,\frac{1-\cos 4x}{2}=\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\cos 4x.$$

п) $\sin 2x\sin 3x=\dfrac{1}{2}(\cos x-\cos 5x)$.

р) $y'=\ln x+1$.

2.6. Намерете n-тата производна на:

а) $e^x\cos x$; б) $e^x\sin x$;

в) $\cos\left(x\sin\dfrac{2\pi}{k}\right)e^{x\cos\frac{2\pi}{k}}$, k — цяло положително число.

Решение. а) и б) Образуваме $y=e^x(\cos x+i\sin x)=e^x e^{ix}=e^{(1+i)x}$ (вж. зад. 1.18), $y^{(n)}=(1+i)^n e^{(1+i)x}$. За да пресметнем $(1+i)^n$, представяме

$$1+i=\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{i}{\sqrt{2}}\right)=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}},$$

$$y^{(n)}=2^{\frac{n}{2}}e^{x+i(x+n\frac{\pi}{4})}=2^{\frac{n}{2}}e^x\left[\cos\left(x+n\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(x+n\frac{\pi}{4}\right)\right].$$

Така се диференцират и $e^{ax}\cos bx$, $e^{ax}\sin bx$.

в) Нека $a=\cos\dfrac{2\pi}{k}$, $b=\sin\dfrac{2\pi}{k}$. Образуваме $y=u+iv$

$=e^{x\cos\frac{2\pi}{k}}\left[\cos\left(x\sin\dfrac{2\pi}{k}\right)+i\sin\left(x\sin\dfrac{2\pi}{k}\right)\right]=e^{\alpha x}$ при $\alpha=\cos\dfrac{2\pi}{k}$

$+\,i\sin\dfrac{2\pi}{k}=e^{i\frac{2\pi}{k}}$, $y^{(n)}=\alpha^n e^{\alpha x}=e^{in\frac{2\pi}{k}}e^{\alpha x}$. Оттук $u^{(n)}=e^{x\cos\frac{2\pi}{k}}$

$\times\cos\left(x\sin\dfrac{2\pi}{k}+n\dfrac{2\pi}{k}\right)$. Различни са $u, u', \ldots, u^{(k-1)}$, а $u^{(k)}=u$.

Всъщност $u=\cos x$ при $k=4$ и $u=e^{-x}$ при $k=2$.

2.7. Докажете равенствата:

а) $(x^n\ln x)^{(n)}=n!\left(\ln x+1+\dfrac{1}{2}+\ldots+\dfrac{1}{n}\right)$;

б) $\left(\dfrac{\ln x}{x}\right)^{(n)}=\dfrac{(-1)^{n-1}n!}{x^{n+1}}\left(1+\dfrac{1}{2}+\ldots+\dfrac{1}{n}-\ln x\right)$;

в) $\left[x^{n-1} f\left(\frac{1}{x}\right)\right]^{(n)} = \dfrac{(-1)^n f^{(n)}\left(\frac{1}{x}\right)}{x^{n+1}}$;

г) $(x^{n-1} \ln x)^{(n)} = \dfrac{(n-1)!}{x}$, $n \geqq 1$.

Решение. а) $(x^{n+1} \ln x)^{(n+1)} = [(x^{n+1} \ln x)']^{(n)} = [(n+1) x^n \ln x + x^n]^{(n)}$ и т.н. по индукция. Отговорът може да се получи и с последователно диференциране.

2.8. Намерете n-тата производна на:

а) xe^{-x} ; б) $x^2 e^{ax}$; в) $x \sin x$; г) $x^2 \cos x$;

д) $\dfrac{x}{\sqrt[3]{1+x}}$; е) $\dfrac{e^x}{x}$; ж) $\arcsin x$.

Решение. а) Във формулата на Лайбниц (вж. зад. 2.2, а)) полагаме $v = x$, $u = e^{-x}$ (а не $u = x$, $v = e^{-x}$). Получаваме $(xe^{-x})^{(n)} = (-1)^n e^{-x} x + n(-1)^{n-1} e^{-x} = (-1)^n e^{-x}(x - n)$.

б) $v = x^2$, $u = e^{ax}$. в) $v = x$, $u = \sin x$.

г) $v = x^2$, $u = \cos x$. д) $v = x$, $u = (1+x)^{-\frac{1}{3}}$.

е) Различни от нула са всичките $n + 1$ събираеми във формулата на Лайбниц.

ж) $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x}} \dfrac{1}{\sqrt{1+x}} = (1-x)^{-\frac{1}{2}}(1+x)^{-\frac{1}{2}}$.

2.9. Намерете $y^{(n)}(0)$ за: а) $y = \operatorname{arctg} x$; б) $y = \arcsin x$.

Решение. а) $y' = \dfrac{1}{1+x^2}$, $y'(1+x^2) = 1$. Диференцираме това равенство $n-1$ пъти посредством формулата на Лайбниц (зад. 2.2, а)), като $v = 1+x^2$, $u = y'$. Получаваме

$$y^{(n)}(1+x^2) + (n-1)\, y^{(n-1)}\, 2x + \frac{(n-1)(n-2)}{2}\, y^{(n-2)}\, 2 = 0, \quad n \geqq 2.$$

Полагаме тук $x = 0$ и за $n \geqq 2$ имаме $y^{(n)}(0) = -(n-1) \times (n-2)\, y^{(n-2)}(0)$. Освен това $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$. Следователно $y^{(2n)}(0) = 0$, $y^{(2n+1)}(0) = (-1)^n (2n)!$.

б) $y' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $y'' = \dfrac{x}{(1-x^2)^{3/2}}$ и оттук $xy' = y''(1-x^2)$.

Диференцираме както в а) $n-2$ пъти, после полагаме $x=0$.

2.10. Докажете, че:

а) Полиномът на Льожандър $P_n(x) = [(x^2-1)^n]^{(n)}$ удовлетворява уравнението $(1-x^2)\, y'' - 2xy' + n(n+1)\, y = 0$ и $P_n(1) = 2^n n!$;

б) полиномът на Лагер $L_n(x) = e^x (x^n e^{-x})^{(n)}$ удовлетворява уравнението $xy'' + (1-x)\, y' + ny = 0$;

в) полиномът на Ермит $H_n(x) = e^{x^2} (e^{-x^2})^{(n)}$ удовлетворява уравнението $y'' - 2xy' + 2ny = 0$, $n \geqq 0$.

Решение. а) Ако $f = (x^2-1)^n$, то $(x^2-1) f' = 2nxf$. Диференцираме $n+1$ пъти посредством формулата на Лайбниц (зад. 2.2, а)) и т. н.

б) $f = x^n e^{-x}$, $xf' + (x-n) f = 0$, диференцираме $n+1$ пъти.

в) $f = e^{-x^2}$, $f' + 2xf = 0$, диференцираме $n+1$ пъти.

2.11. Нека $y' = f(y)$ и f има производни от всякакъв ред. Докажете, че и y има производни от всякакъв ред.

Решение. Пресмятаме $y'' = f'(y)\, y' = f'(y) f(y)$, $y''' = f''(y) f(y) y' + f'(y)^2 y' = f''(y) f^2(y) + f'^2(y) f(y)$. Допускаме, че $y^{(n)}$ е сбор от изрази, които имат вида $c\,[f(y)]^{\alpha_0}\,[f'(y)]^{\alpha_1} \ldots [f^{(n-1)}(y)]^{\alpha_{n-1}}$, α_k е неотрицателно цяло число. Тогава е ясно, че и $y^{(n+1)}$ съществува и е подобен сбор (като множител може да участва и $[f^{(n)}(y)]^{\alpha_n}$).

2.12. Нека $f(x) = (x-a)^n \varphi(x)$, φ има производни до $(n-1)$-ви ред в околност на a, $\varphi^{(n-1)}$ е непрекъсната в a. Тогава $f(a) = f'(a) = \ldots = f^{(n-1)}(a) = 0$ и съществува $f^{(n)}(a) = n!\, \varphi(a)$.

Решение. $f^{(n-1)}(x) = n!\,(x-a)\, \varphi(x) + (x-a)^2 g(x)$, като g е непрекъсната в a (защото такава е $\varphi^{(n-1)}$). Тогава

$$f^{(n)}(a) = \lim_{x \to a} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(a)}{x - a}$$

$$= \lim_{x \to a} [n!\,\varphi(x) + (x-a)\,g(x)] = n!\,\varphi(a).$$

Ако една функция f има производни до n-ти ред в точката a, $f(a) = f'(a) = \ldots = f^{(n-1)}(a) = 0$, а $f^{(n)}(a) \neq 0$, казваме, че a е нула на f от кратност n. В зад. 2.12 това е така, ако $\varphi(a) \neq 0$.

2.13. Докажете, че полиномът $E_n(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}$ няма кратни нули (нули от кратност, по-голяма от едно).

Решение. $E_n(x) = E_n'(x) + \frac{x^n}{n!}$. Може $E_n(x) = E_n'(x) = 0$ само ако $x = 0$, но $E_n(0) \neq 0$.

Казваме, че графиките на f и g имат при $x = a$ допиране от ред n, ако a е нула от кратност $n+1$ на $f - g$.

2.14. Да се построи окръжност, която има в точката $(a, f(a))$ допиране от максимално възможен ред към графиката на функцията f (т. нар. оскулачна окръжност).

Решение. Разстоянието между точките (α, β) и (x, y) е $r = \sqrt{(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2}$ (теорема на Питагор). Следователно уравнението на окръжност с център (α, β) и радиус r е $(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = r^2$. Оттук се определя функция $y(x)$ (с графика горната или долната полуокръжност). Диференцираме два пъти това тъждество: $(x-\alpha) + (y-\beta)\,y' = 0$, $1 + y'^2 + (y-\beta)\,y'' = 0$. (Откъде знаем, че y' и y'' съществуват?) При $x = a$ трябва $y(a) = f(a)$, $y'(a) = f'(a)$, $y''(a) = f''(a)$ и т. н. — колкото е възможно. Изразяваме последователно:

$$y - \beta = -\frac{1+y'^2}{y''}, \quad x - \alpha = \frac{1+y'^2}{y''}\,y',$$

$$r^2 = \left(\frac{1+y'^2}{y''}\right)^2 (1+y'^2) = \frac{(1+y'^2)^3}{y''^2}.$$

При $x = a$ вместо y можем да пишем f. Така, ако $f''(a) \neq 0$, то α, β и r еднозначно се определят от трите условия — постигнато е допиране от ред поне 2. Центърът на оскулачната окръжност има координати $\alpha = a - \frac{1+f'^2(a)}{f''(a)}\,f'(a)$, $\beta = f(a) + \frac{1+f'^2(a)}{f''(a)}$,

а радиусът ѝ е $r = \frac{(1+f'^2(a))^{\frac{3}{2}}}{|f''(a)|}$.

Наричаме r радиус на кривина, а $k = \frac{1}{r}$ — кривина на графиката на f в точката $(a, f(a))$.

2.15. Докажете, че ако $P(x) = a_0 + a_1(x-a) + \ldots + a_n(x-a)^n$, то

$$a_k = \frac{P^{(k)}(a)}{k!}, \quad k = 0, 1, \ldots, n.$$

Решение. Това е така, защото $P^{(k)}(x) = k!\,a_k + (x-a)\,g(x)$, g е полином. Следователно

$$P(x) = P(a) + \frac{P'(a)}{1!}(x-a) + \ldots + \frac{P^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

(формула на Тейлор, при $a=0$ — формула на Маклорен).

Всеки полином може да се напише както в условието на задачата, ако положим $x = a + t$ и подредим по степените на t. Резултатът е валиден и в комплексна област (зад. 1.17, а)). Ако a е нула от кратност k за P, получаваме $P(x) = (x-a)^k\,Q(x)$, Q е полином, $Q(a) \neq 0$.

2.16. Изведете от зад. 2.15 формулата за нютоновия бином:

$$(1+x)^n = 1 + \binom{n}{1}x + \ldots + \binom{n}{n}x^n, \quad \binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}.$$

Решение. $P(x) = (1+x)^m$, $a=0$, $P^{(k)}(x) = n(n-1)\ldots \times (n-k+1)(1+x)^{n-k}$.

2.17 (правило на Нютон). Докажете, че ако P е полином от n-та степен и $P(a)$, $P'(a), \ldots, P^{(n)}(a)$ са положителни, то $P > 0$ в $[a, \infty)$.

Решение. От зад. 2.15 имаме $P(x) = P(a) + \frac{P'(a)}{1!}(x-a) + \ldots + \frac{P^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n > 0$ при $x \geqq a$. Задачата е решена.

Да намерим краен интервал, който съдържа всичките реални нули на $P(x) = x^4 - 8x^3 + 21x^2 - 20x - 1$. Пресмятаме: $P'(x) = 2(2x^3 - 12x^2 + 21x - 10)$, $P''(x) = 6(2x^2 - 8x + 7)$, $P'''(x) = 24(x-2)$. При $x > 2$ имаме $P'''(x) > 0$. Тъй като $P''(2) < 0$, търсим $a > 2$, за което $P''(a) > 0$. Искаме да намерим възможно по-малък интервал, без това да усложни сметките. Ще работим с цели стойности на a. Пресмятаме $P''(3)$ — положително е. Затова полагаме засега $a = 3$. В тази точка P''' и P'' са положителни, следователно положителни са и в $[3, \infty)$. Тъй като $P'(3) < 0$, ще увеличим a, за да стане и $P'(a) > 0$. Пресмятаме $P'(4)$ — то е положително и затова полагаме $a = 4$. В $[4, \infty)$ са положителни P', P'' и P''', но $P(4) < 0$. Затова ще увеличим отново a. Оказва се, че $P(5) > 0$. Полагаме окончателно $a = 5$. В $[5, \infty)$ имаме $P > 0$ и следователно P няма нули.

За да направите оценка и отдолу, разгледайте по същия начин $y(x) = P(-x) = x^4 + 8x^3 + 21x^2 + 20x - 1$ и се убедете, че $y > 0$ в $[1, \infty)$, т. е. P няма нули в $(-\infty, -1]$. Следователно реалните нули на P са в $(-1, 5)$. Колко са те?

2.18. Докажете, че функциите ln и arctg не са рационални.

Решение. Нека P и Q са полиноми, а $\frac{P}{Q}$ е несъкратима дроб. Представяме $\left(\frac{P}{Q}\right)' = \frac{P'Q - PQ'}{Q^2}$ като несъкратима дроб $\frac{R}{S}$. Ако $a \in \mathbf{C}$ е нула на Q от кратност $n \geqq 1$, то a е нула от кратност $n - 1$ за $P'Q - PQ'$ $(P(a) \neq 0)$ и следователно след съкращаването a е нула на S от кратност $n + 1 \geqq 2$. Но за $\frac{1}{x}$ и $\frac{1}{x^2+1}$ знаменателят няма кратни корени.

Послужихме си с „основната теорема на алгебрата": Всеки полином, различен от константа, има нула в **C** (вж. зад. 3.10, гл. 4 от ч. II на ръководството).

2.19. Нека $L(y) = y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y$, а $\varphi(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n$ (характеристичен полином на L).

а) Докажете, че $L(e^{\lambda x}) = e^{\lambda x}\varphi(\lambda)$. **б)** Пресметнете $L(ue^{\lambda x})$.

Тук $a_1, a_2, \ldots, a_n$ са константи, u е функция, притежаваща производни до n-ти ред.

Решение. **а)** Следва от $(e^{\lambda x})^{(k)} = \lambda^k e^{\lambda x}$.

б) $(ue^{\lambda x})^{(k)} = e^{\lambda x}[\lambda^k u + \binom{k}{1}\lambda^{k-1}u' + \ldots + \binom{k}{k}u^{(k)}]$

по формулата на Лайбниц (зад. 2.2, а)). Оттук

$$L(ue^{\lambda x}) = e^{\lambda x}\left[u\varphi(\lambda) + \frac{u'\varphi'(\lambda)}{1!} + \frac{u''\varphi''(\lambda)}{2!} + \ldots + \frac{u^{(n)}\varphi^{(n)}(\lambda)}{n!}\right].$$

Например, ако λ е нула на φ, то $y = ce^{\lambda x}$ е решение на уравнението $L(y) = 0$ при всеки избор на константата c. За уравнението $y'' + y = 0$ полиномът $\varphi(\lambda) = \lambda^2 + 1$ има нули $\pm i$ и следователно решения са e^{ix} и e^{-ix}. Тогава решения са и $\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$, $\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2}$ и произволна тяхна линейна комбинация $A\cos x + B\sin x$.

От **б)** следва, че ако λ е нула на φ от кратност k, то $y = ue^{\lambda x}$ е решение на уравнението $L(y) = 0$ при всеки избор на u като полином, чиято степен не надминава $k-1$.

§ 3. Геометричен смисъл и първи приложения на производната

Правата с уравнение $y = f(a) + f'(a)(x-a)$ е допирателна към графиката на f в точката $(a, f(a))$. Стойността на производната $f'(a)$ е наклонът (ъгловият коефициент) на допирателната. Ако $\lim\limits_{x \to a} |f'(x)| = \infty$, имаме вертикална допирателна $x = a$.

3.1. При какво условие се допира до оста x:

а) параболата $y = ax^2 + bx + c$; **б)** кубичната парабола $y = x^3 + px + q$.

Решение. **а)** $b^2 - 4ac = 0$.

б) Трябва да има точка x, в която $y = 0$ и $y' = 0$, т.е. $x^3 + px + q = 0$, $3x^2 + p = 0$.

Оттук

$$x^2 = -\frac{p}{3},\ xx^2 + px + q = \frac{2p}{3}x + q = 0,$$

$$\left(\frac{2p}{3}\right)^2 x^2 = -\frac{4p^3}{27} = q^2,\ \frac{4p^3}{27} + q^2 = 0.$$

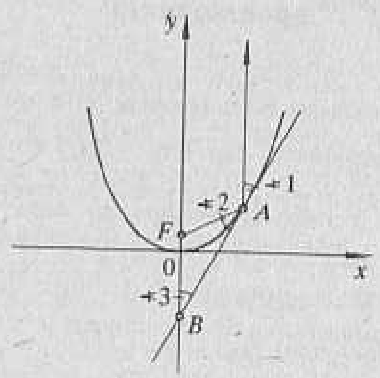
Обратно, ако това условие е изпълнено, то от $p = 0$ следва $q = 0$ и

$y = x^3$ се допира до оста x. При $p \neq 0$ полагаме $x = -\frac{3}{2}\frac{q}{p}$ и проверяваме, че в тази точка има допиране. Така уравнението $x^3 + px + q = 0$ има кратен корен само ако $\frac{4p^3}{27} + q^2 = 0$.

3.2. От кои точки в равнината параболата $y = x^2$ се вижда под прав ъгъл?

Решение. Допирателната в точката (a, a^2) е $y = a^2 + 2a(x-a) = 2ax - a^2$. Фиксираме (x, y) и търсим a. Уравнението $a^2 - 2ax + y = 0$ има при $y < x^2$ две решения: $a = x \pm \sqrt{x^2 - y}$. Наклоните на двете допирателни са $k_{1,2} = 2a_{1,2} = 2(x \pm \sqrt{x^2-y})$. Допирателните са перпендикулярни, ако $k_1k_2 = -1$, т.е. $4y = -1$. Получихме точките на правата $y = -\frac{1}{4}$.

3.3. Докажете, че лъчите, излизащи от фокуса $F\left(0, \frac{1}{4a}\right)$ на параболата $y = ax^2$, $a > 0$, след отражение от нея стават успоредни на оста y (фиг. 9).



Фиг. 9

Решение. Нека AB е допирателната в точката $A(x, y)$ и $\sphericalangle 1 = \sphericalangle 2$ (отразяване). Трябва да докажем, че $\sphericalangle 1 = \sphericalangle 3$ (успоредност), т.е. че $|FA| = |FB|$. За означенията вж. фиг. 9. От една страна, $|FA| = \sqrt{x^2 + \left(y - \frac{1}{4a}\right)^2} = ax^2 + \frac{1}{4a} = y + \frac{1}{4a}$.

От друга страна, уравнението на AB е $\eta = y + 2ax(\xi - x)$. AB пресича оста y в точката $B(0, -y)$ и $|FB| = y + \frac{1}{4a}$.

3.4. Докажете: **а)** допирателната към елипсата $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ в точката (x_0, y_0) има уравнение $\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1$;

б) допирателната към хиперболата $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ в точката (x_0, y_0) има уравнение $\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1$;

в) допирателната към параболата $y^2 = 2px$ в точката (x_0, y_0) има уравнение $yy_0 = p(x + x_0)$;

г) лъч, излизащ от единия фокус $F_1(-\sqrt{a^2 - b^2}, 0)$ на елипсата от а), след отражение от нея попада в другия фокус $F_2(\sqrt{a^2 - b^2}, 0)$; $a > b > 0$.

3.5. Намерете ъглите, които сключват в пресечните си точки графиките на функциите:

а) $u = x^2$ и $v = \sqrt{x}$; **б)** $u = \frac{1}{x}$ и $v = \sqrt{x}$; **в)** $u = \sin x$ и $v = \cos x$.

Тангенсът на острия ъгъл φ между две прави с наклони k_1 и k_2 е $\operatorname{tg}\varphi = \left|\frac{k_1 - k_2}{1 + k_1k_2}\right|$ (а при $k_1k_2 = -1$ двете прави са перпендикулярни).

Решение. **а)** Общи точки са $(0, 0)$ и $(1, 1)$. Допирателните в $(0, 0)$ са съответно хоризонтална $(u'(0) = 0)$ и вертикална $\left(\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} v' = \infty\right)$ и сключват ъгъл $\frac{\pi}{2}$. От $u'(1) = 2 = k_1$ и $v'(1) = \frac{1}{2} = k_2$ получаваме $\operatorname{tg}\varphi = \frac{3}{4}$. В точката $(1, 1)$ допирателните, а следователно и линиите сключват остър ъгъл $\varphi = \operatorname{arctg}\frac{3}{4} \approx 36° 52' 12''$.

3.6. Окръжност с радиус r и център върху оста y се спуска надолу, докато опре в параболата $y = x^2$. За кои стойности на r първият допир ще е в точката $(0, 0)$?

Решение. Уравнението на окръжност с център $(0, a)$ е $x^2 + (y - a)^2 = r^2$ (зад. 2.14). Долната полуокръжност е графика на функцията $y = a - \sqrt{r^2 - x^2}$. В точка (x, y) на допиране с параболата трябва $a - \sqrt{r^2-x^2} = x^2$, $(a - \sqrt{r^2-x^2})' = (x^2)'$, т. е. $\frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}} = 2x$,

$x(1 - 2\sqrt{r^2 - x^2}) = 0$. При $x = 0$ ще бъде и $y = 0$, $a = r$.

При $x \neq 0$ имаме $\sqrt{r^2 - x^2} = \frac{1}{2}$, $r^2 = x^2 + \frac{1}{4}$, $r > \frac{1}{2}$, $a = x^2 + \frac{1}{2}$

$= r^2 + \frac{1}{4}$, $a - r = \left(r - \frac{1}{2}\right)^2 > 0$. Така, ако $r \leqq \frac{1}{2}$, първият допир е в $(0, 0)$. Иначе той се осъществява при $a > r$ в точките $x = \pm\sqrt{r^2 - \frac{1}{4}}$, $y = r^2 - \frac{1}{4}$.

3.7. Ако решаваме уравнението $f(x) = 0$ и сме получили приблизително $x = a$ (но $f(a) \neq 0$), като заместим графиката на f с допирателната към нея в точката $(a, f(a))$, имаме уравнението

$f(a) + f'(a)(x - a) = 0$ с решение $x_1 = a - \frac{f(a)}{f'(a)}$ (ако $f'(a) \neq 0$).

Тази формула на Нютон може отново да се приложи (с $a = x_1$) и т.н. Разгледайте уравнението $x^2 - 2 = 0$.

Решение. $f(x) = x^2 - 2$, $f(1) = -1$, $f(2) = 2$. Следователно f има нула в $(1,2)$. Да положим $a = 2$. Тогава $x_1 = 2 - \frac{2}{4} = 1{,}5$.

Прилагаме още веднъж формулата $(a = 1{,}5)$ $x_2 = 1{,}5 - \frac{1}{12} = 1{,}4166\ldots$ Да я приложим и трети път за удобство към $a = 1{,}4$. Имаме

$$\sqrt{2} \approx 1{,}4 - \frac{1{,}96 - 2}{2{,}8} = 1{,}4 + \frac{1}{70} \approx 1{,}414.$$

Нека $f(a)$ и $f(b)$ са с различни знаци и f е монотонна в $[a, b]$. Вместо с допирателна може да заменим графиката на f с хордата, която съединява точките $(a, f(a))$ и $(b, f(b))$. Уравнението на хордата е $y = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$. От $y = 0$ имаме $x = a - \frac{b - a}{f(b) - f(a)} f(a) = b - \frac{b - a}{f(b) - f(a)} f(b)$. Този метод на хордите може да се комбинира с метода на Нютон.

3.8. Намерете с точност до 2 — 3 знака реален корен на уравнението:

а) $x^3+x-3=0$; б) $x^3-3x-1=0$; в) $x^3+3x-1=0$;
г) $x^5+5x+1=0$; д) $e^x \ln x = 1$ (това е всъщност $e^{-x} - \ln x = 0$);
е) $\operatorname{tg} x = x$, $x \neq 0$; ж) $\operatorname{tg} x = \cos x$.

3.9. Пресметнете границите:

а) $\lim\limits_{x \to 0} (1+x)^{\frac{a}{x}}$; б) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{e^x - ex}{\ln x}$;

в) $\lim\limits_{x \to 3} \frac{\sqrt{x+6} - 3\sqrt[3]{x-2}}{\sqrt[3]{2x+2} - \sqrt{x+1}}$; г) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\pi - 4 \operatorname{arctg} \frac{1}{x+1}}{x}$;

д) $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^2-5x+6}{x^3-2x^2-x+2}$;

е) $\lim\limits_{x \to a} \left(\frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} a}\right)^{\operatorname{ctg}(x-a)}$, $a \neq 0$, $-\frac{\pi}{2} < a < \frac{\pi}{2}$.

Решение. Ще приложим правилото на Лопитал от зад. 1.22, в).

а) Нека $y = (1 + x)^{\frac{a}{x}}$. Тогава $\ln y = \frac{a}{x} \ln(1+x) \to a$,

защото $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \left.\frac{\frac{1}{1+x}}{1}\right|_{x=0} = 1$. Следователно $y = e^{\ln y} \to e^a$ при $x \to 0$ (функцията e^t е непрекъсната).

г) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\pi - 4 \operatorname{arctg} \frac{1}{x+1}}{x} = \left.\frac{-4}{1 + \left(\frac{1}{1+x}\right)^2} \cdot \frac{-1}{(x+1)^2}\right|_{x=0} = 2.$

3.10. Нека в интервала $[a, b]$ е дефинирана и непрекъсната неотрицателната функция f. Лицето на фигурата, която се огражда от графиката на f, оста x и вертикалните прави през точките a и $x \in [a, b]$, означаваме с $S(x)$. Докажете, че $S'(x) = f(x)$.

Решение. Нека $h > 0$, а x и $x + h \in [a, b]$. Непрекъснатата функция f достига в $[x, x + h]$ най-малка стойност $f(x_1)$ и най-голяма стойност $f(x_2)$, x_1 и $x_2 \in [x, x+h]$. Частта от фигурата над $[x, x+h]$ съдържа правоъгълник с основа h и височина $f(x_1)$ и се съдържа в правоъгълник с основа h и височина $f(x_2)$. Затова лицето на тази част $S(x+h) - S(x)$ е число между $hf(x_1)$ и $hf(x_2)$. От $f(x_1) \leqq \dfrac{S(x+h) - S(x)}{h} \leqq f(x_2)$ при $h \to 0$ получаваме, че дясната производна (зад. 1.23) $S'_+(x)$ съществува и е равна на $f(x)$. Случаят $h < 0$ се разглежда аналогично. Тъй като не предполагахме, че понятието лице е дефинирано, тук боравехме с него като с натурфилософско (т. е. естественонаучно) понятие. Докажете, че от съществуване на лява и дясна производна следва диференцуемост, ако двете производни са равни помежду си.

3.11. Нека в интервала $[a, b]$ е дефинирана и непрекъсната една неотрицателна функция f. През точката $x \in [a, b]$ перпендикулярно на оста x минава равнината α_x. Да разгледаме ротационното тяло, което се загражда, ако завъртим графиката на f около оста x, и е разположено между α_a и α_b. Обема на частта от тялото, заключена между равнините α_a и α_x, означаваме с $V(x)$. (Така $V(a) = 0$). Сечението с α_x е кръг с радиус $f(x)$ и лице $S(x) = \pi f^2(x)$. Докажете, че $V'(x) = S(x)$.

Решение. Нека $h > 0$, а x и $x + h \in [a, b]$. Непрекъснатата функция S достига в $[x, x+h]$ най-малка стойност $S(x_1)$ и най-голяма стойност $S(x_2)$, x_1 и $x_2 \in [x, x+h]$. Частта от тялото, заключена между α_x и α_{x+h}, съдържа цилиндър с височина h и лице на основата $S(x_1)$ и се съдържа в цилиндър с височина h и лице на основата $S(x_2)$. Затова обемът на тази част $V(x+h) - V(x)$ е число между $hS(x_1)$ и $hS(x_2)$. От $S(x_1) \leqq \dfrac{V(x+h)-V(x)}{h} \leqq S(x_2)$ при $h \to 0$ получаваме, че дясната производна (зад. 1.23) $V'_+(x)$ съществува и е равна на $S(x)$. Случаят $h < 0$ се разглежда аналогично. По същия начин можем да разсъждаваме и в по-общия случай, когато сечението с α_x не е кръг, а е фигура с лице $S(x)$, S е непрекъсната функция в $[a, b]$ и за всеки две такива фигури, проектирани в равнината α_a, едната се съдържа в другата. Тъй като не предполагахме, че понятията обем и лице са дефинирани, тук боравехме с тях като с естественонаучни понятия.

3.12. От долния край на съд изтича течност. Нека $x(t)$ е нивото на течността в момента t, $V(x)$ — обемът на течността с ниво x, $[V(x(t))]' = q$ — потокът, за който приемаме, че при изтичане от тънка дълга тръба е $q = -ax$, а при изтичане от отвор в тънка

стена е $q = -a\sqrt{x}$, $a > 0$. Напишете уравнението на изтичане: а) от цилиндричен съд; б) от (обърнат) конус.

Решение. Имаме $q(x(t)) = [V(x(t))]' = V'(x(t))\,\dot{x}(t)$. Според зад. 3.11 $V'(x) = S(x)$, $S(x)$ е лицето на хоризонталното сечение на ниво x. Така получаваме уравнението на изтичане $S(x)\,\dot{x} = q(x)$.

а) За случай на цилиндър S е константа (S_0) и уравнението е $S_0\dot{x} = -ax$ (дебела стена и тънък отвор) или $S_0\dot{x} = -a\sqrt{x}$ (тънка стена).

б) За случай на конус $S(x) = kx^2$ и уравнението е $kx\dot{x} = -a$ (дебела стена и тънък отвор) или $kx\sqrt{x}\,\dot{x} = -a$ (тънка стена).

§ 4. Диференциал

Нека f е функция, дефинирана и диференцуема в множество D от реални числа, и $x \in D$. Функцията $\Delta f(x) : h \mapsto f(x+h) - f(x)$, дефинирана за тези стойности на h, за които $x + h \in D$, наричаме нарастване на f в точката x. Функцията $df(x) : h \mapsto f'(x)\,h$, дефинирана за всяко реално h, наричаме диференциал на f в точката x. Тъй като $\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x) + o(1)$ при $h \to 0$, то $f(x+h) - f(x) = f'(x)\,h + o(h)$ $(h \to 0)$. Затова казваме, че диференциалът е линейната част на нарастването. Понеже $x' = 1$, то dx е идентитетът $h \mapsto h$. Това ни дава възможност да пишем $df(x) = f'(x)\,dx$. Вместо $dx(0,2) = 0{,}2$ често пишем $dx = 0{,}2$. Ако G е примитивна на g, изразът $g(x)\,dx$ придобива вида $dG(x)$. Според зад. 3.10 можем да очакваме, че непрекъснатите в интервал функции имат примитивни. Означението на Лайбниц $\dfrac{df(x)}{dx}$ за $f'(x)$ сега можем да възприемем като дроб.

4.1. а) Каква е разликата между Δx и dx?

б) Докажете правилата за диференциране: $d(cu) = c\,du$ (c е константа), $d(u+v) = du + dv$, $d(uv) = v\,du + u\,dv$, $d\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{v\,du - u\,dv}{v^2}$, $df(u) = f'(u)\,du$. Ако $x(y)$ има обратна $y(x)$ и $\dfrac{dx}{dy} \neq 0$, то $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{\dfrac{dx}{dy}}$.

в) Докажете формулите за диференциране: $dc = 0$, $du^\alpha = \alpha u^{\alpha-1}\,du$, $de^u = e^u\,du$, $d\ln|u| = \dfrac{du}{u}$ и т. н. (c и α са константи).

Решение. а) И двете са идентитетът $h \mapsto h$. Но ако дефинираме $f(x) = x$ в D, то $\Delta f(x) = \Delta x$ е дефинирана само за такива стойности на h, за които $x + h \in D$. Всъщност пишем неточно Δx и dx, защото нямаме удобен знак за функцията $x \mapsto x$.

б) $df(u) = [f(u)]'\, dx = f'(u)\, u'\, dx = f'(u)\, du$. Това равенство се получава формално от $df(x) = f'(x)\, dx$, като се замести x с u. Затова казваме, че диференциалът е инвариантен. Формулата $y' = \dfrac{dy}{dx}$ запазва смисъл и ако функцията е зададена параметрично (зад. 1.21):

$$y' = \frac{\dot{y}\, dt}{\dot{x}\, dt} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}.$$

4.2. Диференцирайте (изнесете зад знака на диференциала):

а) $d\sqrt{u}$; б) $d\dfrac{1}{u}$; в) $d \arcsin x$;

г) $d(xe^x)$; д) $d \operatorname{arctg} \dfrac{u}{v}$; е) $d\sqrt{u^2+v^2}$;

ж) $d \ln \sqrt{u^2+v^2}$; з) $d\ln|u+\sqrt{u^2+a}|$; и) $d(uvw)$;

й) $d(u^v)$.

Решение. а) $d\sqrt{u} = \dfrac{1}{2\sqrt{u}}\, du$. б) $d\dfrac{1}{u} = \dfrac{-1}{u^2}\, du$.

з) $d \ln |u + \sqrt{u^2+a}| = \dfrac{d(u+\sqrt{u^2+a})}{u+\sqrt{u^2+a}} = \dfrac{du + d\sqrt{u^2+a}}{u+\sqrt{u^2+a}}$

$$= \frac{du + \dfrac{d(u^2+a)}{2\sqrt{u^2+a}}}{u+\sqrt{u^2+a}} = \frac{du + \dfrac{2u\,du}{2\sqrt{u^2+a}}}{u+\sqrt{u^2+a}}$$

$$= \frac{\sqrt{u^2+a}+u}{u+\sqrt{u^2+a}}\,\frac{du}{\sqrt{u^2+a}} = \frac{du}{\sqrt{u^2+a}}.$$

4.3. Внесете под знака на диференциала:

а) $x\,dx$; б) $\dfrac{dx}{x}$; в) $\dfrac{dx}{x^2}$;

г) $x^a\, dx$; д) $\cos x\, dx$; е) $\sin x\, dx$;

ж) $e^x\, dx$; з) $\dfrac{dx}{x+1}$; и) $\sin 2x\, dx$;

й) $\operatorname{tg} x\, dx$; к) $\operatorname{tg}^2 x\, dx$; л) $\dfrac{x\,dx}{1+x^4}$;

м) $\dfrac{x\,dx}{\sqrt{1-x^4}}$; н) $xe^x\, dx$; о) $\ln x\, dx$;

п) $\operatorname{arctg} x\, dx$; р) $\sqrt{a^2-x^2}\, dx$, $a > 0$.

Решение. Прилагаме формулата $f'(x)\, dx = df(x)$.

а) $x\,dx = d\dfrac{x^2}{2}$. б) $\dfrac{dx}{x} = d\ln|x|$, $x \neq 0$.

в) $\dfrac{dx}{x^2} = d\left(\dfrac{-1}{x}\right)$, $x \neq 0$. г) $x^a\, dx = d\left(\dfrac{x^{a+1}}{a+1}\right)$,

ако $a \neq -1$, а при $a = -1$ — като б), $x > 0$.

д) $\cos x\, dx = d \sin x$. е) $\sin x\, dx = d(-\cos x)$.

ж) $e^x\, dx = d\, e^x$. з) $\dfrac{dx}{x+1} = \dfrac{d(x+1)}{x+1} = d\ln|x+1|$, $x \neq -1$.

и) $\sin 2x\, dx = \dfrac{1}{2} \sin 2x\, d\,2x = d\left(-\dfrac{1}{2}\cos 2x\right)$. Може и така:

$\sin 2x\, dx = 2 \sin x \cos x\, dx = 2 \sin x\, d \sin x = d(\sin^2 x)$.

й) $\operatorname{tg} x\, dx = \dfrac{\sin x}{\cos x}\, dx = \dfrac{-d\cos x}{\cos x} = d(-\ln|\cos x|)$, ако $\cos x \neq 0$.

к) $\operatorname{tg}^2 x\, dx = \dfrac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}\, dx = \dfrac{dx}{\cos^2 x} - dx = d \operatorname{tg} x - dx = d(\operatorname{tg} x - x)$,

ако $\cos x \neq 0$.

л) $\dfrac{x\,dx}{1+x^4} = \dfrac{1}{2}\,\dfrac{dx^2}{1+(x^2)^2} = d\left(\dfrac{1}{2}\operatorname{arctg} x^2\right)$.

н) $xe^x\, dx = x\,de^x = d(xe^x) - e^x\, dx = d(xe^x - e^x)$.

Приложихме формулата $u dv = d(uv) - v du$.

о) Отново по тази формула $\ln x\, dx = d(x \ln x) - x d \ln x = d(x \ln x) - \frac{x}{x} dx = d(x \ln x - x)$, $x > 0$.

п) $\operatorname{arctg} x\, dx = d(x \operatorname{arctg} x) - x\, d \operatorname{arctg} x = d(x \operatorname{arctg} x) - \frac{1}{2} \frac{d(x^2+1)}{1+x^2}$ и т. н.

р) $$\sqrt{a^2-x^2}\, dx = d(x\sqrt{a^2-x^2}) - x d\sqrt{a^2-x^2} = d(x\sqrt{a^2-x^2}) - \frac{-x^2}{\sqrt{a^2-x^2}} dx = d(x\sqrt{a^2-x^2}) - \frac{a^2-x^2}{\sqrt{a^2-x^2}} dx + a^2 \frac{d\frac{x}{a}}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}}$$

$$= d(x\sqrt{a^2-x^2}) - \sqrt{a^2-x^2}\, dx + d\left(a^2 \arcsin\frac{x}{a}\right).$$

Решаваме това равенство относно $\sqrt{a^2-x^2}\, dx$ и получаваме

$$\sqrt{a^2-x^2}\, dx = d\left(\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}\right), \ -a < x < a.$$

В разгледаните примери по дадена функция намирахме нейна примитивна.

4.4. а) Функцията $y(x)$ е зададена параметрично: $x = 1 + t + t^3$, $y = t^4 - t^2$. Намерете y';

б) Същото за функцията от зад. 1.21.

Решение. а) $$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{d(t^4-t^2)}{d(1+t+t^3)} = \frac{(4t^3-2t)\,dt}{(1+3t^2)\,dt} = \frac{4t^3-2t}{1+3t^2}.$$

Тук $x(t)$ расте, затова има непрекъсната обратна $t(x)$, $y(x) = t^4(x) - t^2(x)$, dt е всъщност $t'(x)\,dx$. Защо съществува $t'(x)$? И защо $t'(x) \neq 0$?

4.5. Намерете решения на уравненията:

а) четирите уравнения на изтичане от зад. 3.12;

б) $y' = -\frac{x}{y}$; в) $(x+xy^2)\,dx + (y+yx^2)\,dy = 0$.

Решение. а) Преди съкращаването на x в т. б) на зад. 3.12 уравненията имат очевидното решение $x(t) \equiv 0$ (празен съд). Да потърсим други решения. Преобразуваме четирите уравнения във вида $x^\alpha \dot{x} = p$, $p \neq 0$ е константа, $\alpha = -1, -\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}$, x е функция на t. При $\alpha \neq -1$ пресмятаме: $x^\alpha \dot{x} dt = p\,dt$, $x^\alpha dx = d\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} = d(pt)$, $d\left(\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} - pt\right) = 0$. Диференциалът на константата е нула. Затова да положим $\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} - pt = q$, q е константа. Тогава $x = [(\alpha+1)(pt+q)]^{\frac{1}{\alpha+1}}$. Проверете, че тези функции (q е произволно) наистина удовлетворяват уравнението. При $\alpha = -1$ имаме $\frac{dx}{x} = d\ln|x| = d(pt)$, $d(\ln|x| - pt) = 0$. Да положим $\ln|x| - pt = q$, $|x| = e^{pt+q}$. Проверете, че $x = e^{pt+q}$ и $x = -e^{pt+q}$ са решения (q е произволна константа). Кога ще завърши изтичането?

б) $y' = \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$, $y\,dy = -x\,dx$, $\frac{1}{2} d(x^2+y^2) = 0$.

Да положим $x^2+y^2 = c > 0$ и оттук да определим $y = \sqrt{c-x^2}$ или $y = -\sqrt{c-x^2}$. Това са полуокръжности с радиус $\sqrt{c}$ и център $(0,0)$. Направете проверка.

в) $\frac{x\,dx}{1+x^2} + \frac{y\,dy}{1+y^2} = 0$ (както се казва, отделихме променливите), $\frac{1}{2}\frac{d(x^2+1)}{1+x^2} + \frac{1}{2}\frac{d(y^2+1)}{1+y^2} = 0$, $\frac{1}{2} d \ln[(1+x^2)(1+y^2)] = 0$.

Ще положим $(1+x^2)(1+y^2) = c > 0$. Продължете по-нататък.

4.6. Ще измерваме една повърхнина с количеството боя, необходимо за боядисването ѝ, а именно като разделим това количество с дебелината h на слоя, ще оставим h да клони към 0. Като знаете обема на кълбото, намерете повърхнината на сферата.

Решение. Обемът на кълбо с радиус r е $V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$.

Тогава $\dfrac{dV(r)}{dr} = \dfrac{d\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right)}{dr} = \dfrac{4\pi r^2 dr}{dr} = 4\pi r^2$ е повърхнината на сферата с радиус r, т. е.

$$\lim_{h\to 0} \frac{V(r+h)-V(r)}{h} = V'(r) = 4\pi r^2.$$

Ако боядисваме окръжност с радиус r, за дължината ѝ ще получим $\dfrac{d(\pi r^2)}{dr} = 2\pi r$. Често извършваме граничния преход в завоалирана форма, както беше по-горе: заменяме нарастването $V(r+h) - V(r)$ с диференциала $dV(r)$ и образуваме $\dfrac{dV(r)}{dr}$. За това, че граничният преход е вече извършен, напомняме, като кажем, че dr е безкрайно малко.

Ако в равенството $df(x)(h) = f'(x)h$ заменим диференциала с нарастването, ще получим приближената „формула за безкрайно малките нараствания" $f(x+h) \approx f(x) + f'(x)h$. Като прилагаме тази формула, все едно че заменяме графиката на f с допирателната към нея в точката $(x, f(x))$ — както в зад. 3.7.

4.7. а) Изведете в този дух приближените формули: $(1+h)^\alpha \approx 1+\alpha h$, например $\dfrac{1}{1+h} \approx 1-h$, $\ln(1+h) \approx h$, $e^h \approx 1+h$, $\ln\dfrac{1+h}{1-h} \approx 2h$, $\lg(1+h) \approx Mh \left(M = \dfrac{1}{\ln 10} \approx 0{,}4343\right)$, $\lg\dfrac{1+h}{1-h} \approx 2Mh$, $10^h \approx 1+h\ln 10$;

б) пресметнете: $\dfrac{3}{(1{,}002)^5}$, $(2{,}01)^3$, $\sqrt[5]{\dfrac{2{,}97}{3{,}03}}$;

в) пресметнете с лист и молив приблизително: $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{\dfrac{1}{2}}$, $\sqrt{10}$, $\sqrt{g}\ (g = 9{,}8)$, $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[3]{3}$, $\sqrt[3]{4}$, $\sqrt[4]{2}$, $\sqrt[10]{1000}$, $\ln 2$, $\ln 10$, $M = \dfrac{1}{\ln 10}$, $\sqrt[10]{2}$, e^3 $(e \approx 2{,}72)$.

Решение. **а)** Ако $f(x) = \ln\dfrac{1+x}{1-x}$, то $f(0) = 0$, $f'(0) = 2$. Затова $f(h) \approx 2h$. Тук имахме $x = 0$. За другите случаи последователно $f(x) = x^\alpha$, $\ln x$, e^x и съответно $x = 1, 1, 0$. Знаем, че $\lg x = M\ln x$, $10^x = e^{x\ln 10}$.

б) $(2{,}01)^3 = 8(1+0{,}005)^3 \approx 8(1+0{,}015) = 8{,}12$;

$$\sqrt[5]{\frac{2{,}97}{3{,}03}} = \sqrt[5]{\frac{1-0{,}01}{1+0{,}01}} \approx \sqrt[5]{(1-0{,}01)^2} \approx 1 - \frac{0{,}02}{5} = 1-0{,}004 = 0{,}996.$$

в) В редицата от квадрати: 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, . . . търсим два, които са приблизително в отношение 1:2. Например 25 и 49. Тогава

$$\sqrt{2} = \sqrt{\frac{49}{25} + \frac{1}{25}} = \frac{7}{5}\sqrt{1+\frac{1}{49}} = 1{,}4\sqrt{\frac{50}{49}} = \frac{1{,}4}{\sqrt{1-\frac{1}{50}}}$$

$$= 1{,}4\left(1-\frac{1}{50}\right)^{-\frac{1}{2}} \approx 1{,}4\left(1+\frac{1}{100}\right) = 1{,}414.$$

Аналогично

$$\sqrt{3} = \sqrt{\frac{49}{16} - \frac{1}{16}} = \frac{7}{4}\sqrt{1-\frac{1}{49}} \approx \frac{7}{4}\left(1 - \frac{1}{2.49}\right) = \frac{7}{4} - \frac{1}{56}$$

$$\approx 1{,}75 - 0{,}018 = 1{,}732;$$

$$\sqrt{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{25}{49} - \frac{1}{2.49}} = \frac{5}{7}\sqrt{1-\frac{1}{50}} \approx \frac{5}{7}\left(1-\frac{1}{100}\right) \approx 0{,}7143$$

$$- 0{,}0071 \approx 0{,}707;$$

$$\sqrt{10} = \sqrt{\frac{169}{16} - \frac{9}{16}} \approx 3{,}16; \quad \sqrt{g} = \sqrt{9+0{,}8} = 3\sqrt{1+\frac{8}{90}} \approx 3 + \frac{2}{15} \approx 3{,}13;$$

$$\sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{\frac{125}{64} + \frac{3}{64}} \approx 1{,}26; \quad \sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{\frac{27}{8} - \frac{3}{8}} \approx 1{,}44;$$

$$\sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{\frac{27}{8} + \frac{5}{8}} \approx 1{,}59; \quad \sqrt[4]{2} \approx \sqrt{1{,}4} \approx 1 + \frac{1}{5} = 1{,}2;$$

$\sqrt[10]{1000} = \sqrt[10]{2^{10} - 24} \approx 1{,}9953.$

При $h = \dfrac{1}{3}$ имаме $\dfrac{1+h}{1-h} = 2$. Затова $\ln 2 \approx \dfrac{2}{3} \approx 0{,}7$.

От $e \approx 2{,}72$ следва $\ln 10 = 2\ln\sqrt{10} \approx 2\ln 3{,}16 \approx 2\ln(e + 0{,}44)$

$\approx 2 + \dfrac{0{,}88}{2{,}72} \approx 2 + \dfrac{9}{27} = \dfrac{7}{3} \approx 2{,}3;\quad M = \dfrac{1}{\ln 10} \approx 0{,}43;$

$$\sqrt[10]{2} = e^{\frac{1}{10}\ln 2} \approx e^{0{,}07} \approx 1{,}07;$$

$e^3 \approx (3 - 0{,}3)^3 = 27\,(1 - 0{,}1)^3 \approx 27\,(1 - 0{,}3) = 27.0{,}7 \approx 19$

(всъщност $e^3 = 20{,}0855\ldots$).

4.8. Какво ще бъде увеличението на националния доход за 50 години, ако ежегодното му нарастване е 6%? Трябва да пресметнем $(1{,}06)^{50}$. За малки стойности на h имаме приблизителните равенства $(1+h)^\alpha \approx 1 + \alpha h$ и $(1+h)^\alpha = e^{\alpha \ln(1+h)} \approx e^{\alpha h}$ (защото $\ln(1+h) \approx h$ съгласно зад. 4.7). От първото получаваме $(1{,}06)^{50} \approx 1 + 3 = 4$, а от второто $(1{,}06)^{50} \approx e^3 \approx 20$. Кой от двата резултата по-добре ни ориентира за истинската стойност на $(1{,}06)^{50}$?

Решение. Нека $\alpha h = 3$. Тогава $(1+h)^\alpha = (1+h)^{\frac{3}{h}} \to e^3$ при $h \to 0$ (зад. 3.9). Следователно формулата $(1+h)^\alpha \approx e^3$ става все по-точна при намаляване на $|h|$ (евентуално немонотонно). В същото време $1 + \alpha h = 4$ не зависи от h. Тъй като $h = 0{,}06$ е сравнително малко, очакваме, че $(1{,}06)^{50}$ е по-скоро 20, отколкото 4. В действителност $(1{,}06)^{50} = 18{,}42\ldots$ Нека идем по-далеч в опростяването и да положим (както в зад. 4.7) $e^3 \approx 2{,}7^3 \approx 27\,(1 - 0{,}3) = 27.0{,}7 = 18{,}9$. Това число е по-близо до $(1{,}06)^{50}$, отколкото e^3! Обяснете явлението. Какви свойства да очакваме от приближената формула $(1+h)^\alpha \approx 3^{\alpha h}\left(1 - \dfrac{\alpha h}{10}\right)$?

4.9. Ако за уравнението $f(x)=0$ (зад. 3.7) вместо корена x_0 е намерена приблизителна стойност a, приложете „формулата за безкрайно малките нараствания", за да изразите $|a - x_0|$.

Решение. $0 = f(x_0) \approx f(a) + f'(a)(x_0 - a)$. Следователно $|a - x_0| \approx \left|\dfrac{f(a)}{f'(a)}\right|$, което ни дава възможност да преценим точността на

апроксимацията a, без да знаем точната стойност на x_0. Каква е връзката със зад. 3.7?

4.10. Приблизително под какъв ъгъл (в градуси) графиката на функцията $y = \sin x^0$ пресича оста x в точката $(0{,}0)$?

Решение. От зад. 1.2 имаме $y'(0) = \dfrac{\pi}{180}$. Следователно ъгълът е $\operatorname{arctg}\dfrac{\pi}{180} \approx \dfrac{\pi}{180}$ rad, т.е. $\dfrac{\pi}{180}\,\dfrac{180}{\pi} = 1^0$. Получихме равенството $\operatorname{arctg} h \approx h$ от „формулата за безкрайно малките нараствания".

4.11. Докажете, че ъгъл x се определя по-точно от таблицата на тангенсите, отколкото от таблицата на синусите, ако двете таблици са еднакво точни.

Решение. Дадени са $s = \sin x$ и $t = \operatorname{tg} x$, $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$, с еднакъв брой верни знаци, т.е. грешките при определянето им са равни ($\delta s = \delta t$). Търсим грешката δx при определянето на $x = \arcsin s = \operatorname{arctg} t$. При ориентировъчни преценки за грешката я заменяме с диференциала (което е пак „формулата за безкрайно малките нараствания"). Поради $ds = \cos x\,dx$ и $dt = \dfrac{dx}{\cos^2 x}$ имаме $\delta x \approx \dfrac{\delta s}{|\cos x|}$ в първия случай и $\delta x \approx \delta t \cos^2 x$ във втория, а $\delta s = \delta t$.

Функцията $d^n f(x) : h \mapsto f^{(n)}(x)\,h^n$ наричаме диференциал от n-ти ред. Тъй като $(dx)^n$ е функцията $h \mapsto h^n$, можем да напишем $d^n f(x) = f^{(n)}(x)(dx)^n$, така че $f^{(n)}(x) = \dfrac{d^n f(x)}{dx^n}$ (скобите подразбираме).

4.12. Пресметнете: **а)** $d^2 e^x$; **б)** $d^2 e^u$; **в)** $d^2(uv)$; **г)** $d^2 f(u)$.

Решение. **а)** $d^2 e^x = (e^x)''(dx)^2 = e^x(dx)^2$.

в) $d^2(uv) = v\,d^2u + 2\,du\,dv + u\,d^2v$.

г) $[f(u)]' = f'(u)u'$, $[f(u)]'' = [f(u)u']' = f''(u)u'^2 + f'(u)u''$. Тогава $d^2 f(u) = [f''(u)u'^2 + f'(u)u''](dx)^2 = f''(u)(du)^2 + f'(u)d^2u$. Вторият диференциал не е инвариантен (срв. зад. 4.1, б)).

§ 5. Теорема на Ферма

Нека a е вътрешна точка за дефиниционната област D на функцията f. Казваме, че f има локален максимум (минимум) в a, ако съществува такава околност U на a, че $U \subset D$ и $f(x) \leqq f(a)$ $(f(x) \geqq f(a))$ при $x \in U$. Казваме, че f има локален

екстремум в a, ако има в a локален максимум или локален минимум. Ако f има локален екстремум в a и $f'(a)$ съществува, то $f'(a)=0$ (**теорема на Ферма**).

Ако f е непрекъсната в краен затворен интервал D, то според теоремата на Вайерщрас f достига там най-голяма и най-малка стойност. Според теоремата на Ферма това може да стане само в точки, в които f' се анулира или не съществува, или в някой край на интервала.

5.1. Да се намерят екстремните (най-малка и най-голяма) стойности на функциите:

а) $2x^3-3x^2-36x-8$ и $[-3,6]$; **б)** $x^{\frac{2}{3}}+(x+2)^{\frac{2}{3}}$ в $[-3,1]$;

в) $|x^2-x|$ в $[0,2]$; **г)** $\sqrt{1+x^2}-x\ln(x+\sqrt{1+x^2})$ в $[0,1]$;

д) $x-\arcsin x-x\ln(2+2\sqrt{1-x^2})$ в $[-1,1]$; **е)** $\dfrac{x}{1+x^2}$ в $\mathbf{R}$;

ж) $\dfrac{x+3}{\sqrt{1+x^2}}$ в $\mathbf{R}$; **з)** $\operatorname{tg}x+\operatorname{ctg}x$ в $\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$;

и) $\operatorname{arctg}x-\ln\sqrt{1+x^2}$ в $\mathbf{R}$; **й)** $\dfrac{1-x+x^2}{1+x-x^2}$ в $[0,1]$;

к) $(x^2-2x)^{\frac{2}{3}}$ в $[0,3]$.

Решение. **а)** $y=2x^3-3x^2-36x-8$, $y'=6(x+2)(x-3)$. Екстремна стойност може да се достига при $x=-3,-2,3,6$. Съответно $y(-3)=19$, $y(-2)=36$, $y(3)=-89$, $y(6)=100$. Най-малка стойност (-89) y достига при $x=3$, а най-голяма (100) при $x=6$.

г) В интервала $(0,1)$ производната y' съществува и не се анулира, а y е непрекъсната в $[0,1]$. Следователно екстремни са стойностите $y(0)=1$ и $y(1)=\sqrt{2}-\ln(1+\sqrt{2})$. Първата е най-голяма, втората — най-малка стойност, защото $1>\sqrt{2}-\ln(1+\sqrt{2})$.

Имаме последователно $\ln(1+\sqrt{2})>\sqrt{2}-1$, $e^{\sqrt{2}-1}<e^{\frac{1}{2}}<1+\sqrt{2}$, $e<(1+\sqrt{2})^2=3+2\sqrt{2}$, като използвахме, че $\sqrt{2}-1<\dfrac{1}{2}$, $\sqrt{2}<\dfrac{3}{2}$, $2<\dfrac{9}{4}$. Оттук се връщаме обратно.

е) $y'=\dfrac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$ се анулира при $x=\pm 1$. Съответно $y(1)=\dfrac{1}{2}$, $y(-1)=-\dfrac{1}{2}$. Тъй като $y\to 0$ при $x\to\infty$, то за всяко положително ε има такова положително число A, че извън интервала $(-A,A)$ е в сила $|y|<\varepsilon$. Избираме $\varepsilon<\dfrac{1}{2}$. Тъй като $\dfrac{1}{2}$ и $-\dfrac{1}{2}$ са стойности на y, разбираме, че y има в $\mathbf{R}$ най-голяма и най-малка стойност — това са екстремните стойности на y в $[-A,A]$. Те се достигат в $(-A,A)$, защото $|y|<\varepsilon<\dfrac{1}{2}$ при $x=\pm A$ и следователно са $y(1)=\dfrac{1}{2}$ и $y(-1)=-\dfrac{1}{2}$.

ж) $y'=\dfrac{1-3x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}=0$ само при $x=\dfrac{1}{3}$ и $y\left(\dfrac{1}{3}\right)=\sqrt{10}$. Тъй като $y\to 1$ при $x\to\infty$ и $y\to -1$ при $x\to-\infty$, както в е) получаваме, че $\sqrt{10}$ е най-голяма стойност. Най-малка стойност не се достига, защото $y\to -1$ при $x\to-\infty$, но винаги $y(x)\neq -1$ и следователно $y>-1$, защото е непрекъсната и $y\left(\dfrac{1}{3}\right)>0$. Наистина, ако $\dfrac{x+3}{\sqrt{1+x^2}}=-1$, то $(x+3)^2=1+x^2$, $x=-\dfrac{4}{3}$, но $y\left(-\dfrac{4}{3}\right)=1\neq -1$.

5.2. Да се намери централният ъгъл α на кръгов сектор, от който може да се направи фуния (без застъпване) с максимална вместимост.

5.3. Да се намери растоянието от точката $(0,a)$ до параболата $y=x^2$.

Решение. Търсим най-малката стойност d на разстоянието $r(x)$ от $(0,a)$ до (x,x^2). Първо ще изясним въпроса за съществуване. По теоремата на Питагор $r^2(x)=x^2+(x^2-a)^2=f(x)$. Функциите f и r достигат екстремуми в едни и същи точки, защото $r\geqq 0$. Нека $A>f(0)$. При $x\to\infty$ и при $x\to-\infty$ имаме $f(x)\to\infty$ и затова съществува B такова, че щом $|x|>B$, то $f(x)>A>f(0)$. Според теоремата на Вайерщрас f има най-малка стойност в $[-B,B]$. Тя не надминава $f(0)$ и следователно е най-малка стойност на f в $\mathbf{R}$ и се достига в точка x, в която $f'(x)=0$, т.е. $x(2x^2+1-2a)=0$. При

$a \leqq \frac{1}{2}$ единствено решение е $x = 0$, $f_{\min} = f(0) = a^2$, $d = |a|$. При $a > \frac{1}{2}$ има още две решения: $x = \pm\sqrt{a - \frac{1}{2}}$, $f\left(\pm\sqrt{a-\frac{1}{2}}\right) = a - \frac{1}{4}$, като $a^2 > a - \frac{1}{4}$, защото $a^2 - a + \frac{1}{4} = \left(a - \frac{1}{2}\right)^2$.

Следователно $f_{\min} = a - \frac{1}{4}$, $d = \sqrt{a - \frac{1}{4}}$.

5.4. Докажете, че полиномът $E_n(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!}$ има една реална нула при нечетно n и няма реални нули при четно n.

Решение. Очевидно E_n няма неотрицателни нули. Нека $a < b < 0$ са две съседни нули на E_n, т.е. $E_n(a) = E'_n(a) + \frac{a^n}{n!} = 0$, $E_n(b) = E'_n(b) + \frac{b^n}{n!} = 0$ (наистина $E'_n = E_{n-1}$) и $E_n \neq 0$ в (a,b). Тогава $E'_n(a) \neq 0$, $E'_n(b) \neq 0$ и имат един и същ знак. Следователно $\frac{E_n(a+h) - E_n(a)}{h}$ и $\frac{E_n(b-h) - E_n(b)}{-h}$ имат един и същ знак при достатъчно малко $h > 0$, т.е. $E_n(a+h)$ и $E_n(b-h)$ имат различни знаци. Но това е невъзможно, щом $E_n \neq 0$ в (a,b). Така E_n има не повече от една нула. За големи стойности на x са в сила $E_{2n+1}(x) > 0$, $E_{2n+1}(-x) < 0$ и E_{2n+1} има една нула (тя е от кратност 1 според зад. 2.13), а $E_{2n}(x) > 0$ и $E_{2n}(-x) > 0$. Ако в някоя точка p имаме $E_{2n}(p) < 0$, това би довело до две различни нули, следователно $E_{2n} \geqq 0$. Ако $E_{2n}(p) = 0$ в някоя точка p, това би било точка на локален минимум за E_{2n} и трябва $E'_{2n}(p) = 0$. От $E_{2n}(p) = E'_{2n}(p) + \frac{p^{2n}}{(2n)!}$ получаваме $p = 0$, но $E_{2n}(0) \neq 0$. Следователно E_{2n} не се анулира в $\mathbf{R}$.

5.5 (Теорема на Дарбу). Докажете, че ако функцията f е диференцуема в интервала $[a,b]$, то f' приема всяка стойност между $f'(a)$ и $f'(b)$.

Решение. Първо ще докажем, че ако $f'(a)$ и $f'(b)$ са с различни знаци, то има точка $\xi \in (a,b)$, в която f' се анулира. Нека

например $f'(a) > 0$, $f'(b) < 0$. Тогава за достатъчно малко $h > 0$ ще имаме $\frac{f(a+h) - f(a)}{h} > 0$, $\frac{f(b-h) - f(b)}{-h} < 0$. Така $f(a+h) > f(a)$, $f(b-h) > f(b)$ и следователно f достига най-голямата си стойност в поне една вътрешна точка ξ и $f'(\xi) = 0$ според теоремата на Ферма. Ако λ е между $f'(a)$ и $f'(b)$, то за функцията $\varphi(x) = f(x) - \lambda x$ прилагаме същите разсъждения.

5.6. Ако функцията f е дефинирана и диференцуема в интервала $[a,b]$ и достига най-малка стойност в точката x_0, докажете, че при $x \in [a,b]$ е в сила $f'(x_0)(x - x_0) \geqq 0$.

§ 6. Теореми за средните стойности

Нека функцията f е дефинирана и непрекъсната в интервала $[a,b]$, $a<b$, и е диференцуема в (a,b). Тогава съществува точка $\xi \in (a,b)$, за която $f(b) - f(a) = (b-a) f'(\xi)$. Това е формулата на Лагранж за крайните нараствания. Можем да я запишем още и така:

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a+\theta h), \quad 0<\theta<1.$$

При $f(a) = f(b)$ излиза, че $f'(\xi) = 0$ (теорема на Рол). Ако и втора функция g е дефинирана и непрекъсната в $[a,b]$ и е диференцуема в (a,b), като g' не се анулира, то съществува точка $\xi \in (a,b)$, за която

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \quad \text{(формула на Коши).}$$

6.1. Нека функцията f е непрекъсната в някоя околност на a и е диференцуема там с евентуално изключение на a и нека още $\lim\limits_{x \to a} f' = \lambda$. Докажете, че производната $f'(a)$ съществува и е равна на λ.

Решение. $\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = f'(a+\theta h) \to \lambda$ при $h \to 0$. В този смисъл твърдението е вярно и при $\lambda = \infty$ или $\lambda = -\infty$ (тогава $f'(a)$ не съществува).

6.2. Докажете: **а)** ако f' е ограничена в краен интервал, то и f е ограничена там; **б)** ако f' е ограничена в интервал, то f е равномерно непрекъсната там.

Решение. **а)** Нека $f(x) = f(a) + (x-a) f'(\xi)$, ξ е между a и x. Тъй като x и f' са ограничени, то и f е ограничена.

б) Нека $|f'| \leqq M$. Тогава $|f(x) - f(y)| = |(x-y) f'(\xi)| \leqq M|x-y|$, тук ξ е между x и y. При $|x-y| < \frac{\varepsilon}{M}$ ще бъде в сила $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

6.3. Нека функцията f е диференцуема в $\mathbf{R}$. Докажете, че ако във формулата $f(a+h)=f(a)+hf'(a+\theta h)$: **а)** винаги $\theta=0$, то f е полином от степен, която не надминава 1;

б) ако винаги $\theta = \frac{1}{2}$ и съществува f'', то f е полином от степен, която не надминава 2.

Решение. **а)** При $a=0$ получаваме $f(x)=f(0)+xf'(0)$.

б) Диференцираме равенството

$$f(a+x)=f(a)+xf'(a+\frac{x}{2}) \tag{1}$$

и получаваме $f'(a+x)=f'(a+\frac{x}{2})+\frac{x}{2}f''(a+\frac{x}{2})$. Като положим $a=-\frac{x}{2}$, имаме $f'(\frac{x}{2})=f'(0)+\frac{x}{2}f''(0)$. Полагаме в (1) $a=0$ и получаваме $f(x)=f(0)+xf'(\frac{x}{2})=f(0)+xf'(0)+\frac{x^2}{2}f''(0)$.

6.4. За $x \geqq 0$ прилагаме формулата на Лагранж: $\sqrt{x+1}-\sqrt{x}=\frac{1}{2\sqrt{x+\theta}}$. Докажете, че от това равенство еднозначно се определя функция $\theta(x) \in (0,1)$, която е непрекъсната и растяща в $[0,\infty)$, $\lim\limits_{x\to\infty} \theta(x)=\frac{1}{2}$.

Решение. $\theta = \frac{1}{4}(1-2x+2\sqrt{x^2+x}) = \frac{1}{4}+\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1}$.

От първото представяне е ясно, че θ е непрекъсната в $[0,\infty)$, а от второто (при $x\neq 0$), че θ расте в $(0,\infty)$ и $\lim\limits_{x\to\infty}\theta(x)=\frac{1}{2}$, откъдето следва, че θ расте в $[0,\infty)$?

6.5. Да приложим формулата на Лагранж към функцията $f(x) = x \sin \ln x$ за точките 0 и $x>0$. Формално f не е дефинирана в нулата, но $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$. Затова ще положим $f(0)=0$. Функцията f е дефинирана и непрекъсната в $[0,\infty)$. И така $f(x)-f(0)=xf'(\xi)$ $= x(\sin \ln \xi + \cos \ln \xi)$, $\xi \in (0,x)$. Докажете, че ако една функция $\xi(x)$ удовлетворява това равенство за $x>0$, то произволно близо до нулата тя има точки на прекъсване.

Решение. $\sin \ln x = \sin \ln \xi + \cos \ln \xi$, $\sin^2 \ln x = 1 + \sin 2\ln \xi$, $\sin 2\ln\xi = \sin^2 \ln x - 1 \leqq 0$. Следователно $2\ln\xi$ не принадлежи на интервалите $(2k\pi, (2k+1)\pi)$, k — цяло. Нека $\varepsilon > 0$. Ако $\xi(x)$ е непрекъсната в $(0,\varepsilon)$, то $2\ln\xi(x)$ е също непрекъсната в $(0,\varepsilon)$ и не може да пропуска никоя междинна стойност. Но $0<\xi(x)<x$ и при $x\to 0$ имаме $\xi(x)\to 0$, $2\ln\xi(x)\to -\infty$, като пропуска споменатите интервали.

6.6. Докажете неравенствата: **а)** $|\sin x - \sin y| \leqq |x-y|$;

б) $|\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y| \leqq |x-y|$;

в) $\frac{y-x}{y} < \ln\frac{y}{x} < \frac{y-x}{x}$ $(0<x<y)$;

г) $\frac{x-y}{\cos^2 y} < \operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y < \frac{x-y}{\cos^2 x}$ $(0<y<x<\frac{\pi}{2})$;

д) $\alpha x^{\alpha-1}(y-x) < y^\alpha - x^\alpha < \alpha y^{\alpha-1}(y-x)$ $(0<x<y,\ \alpha>1)$.

Решение. **д)** Нека $f(x)=x^\alpha$. Тогава $f(y)-f(x)=(y-x)f'(\xi)$, т.е. $y^\alpha - x^\alpha = (y-x)\alpha\xi^{\alpha-1}$ $(x<\xi<y)$. Неравенството следва от $x^{\alpha-1}<\xi^{\alpha-1}<y^{\alpha-1}$. (Защо функцията $t^{\alpha-1}$ е растяща?)

6.7. Ако за уравнението $f(x)=0$ (зад. 3.7 и 4.9) вместо корена x_0 е намерена приблизителна стойност a, то приложете формулата за крайните нараствания, за да направите оценка на $|a-x_0|$.

Решение. $f(a)=f(a)-f(x_0)=(a-x_0)f'(\xi)$, ξ е между a и x_0. Нека $a, x_0 \in (p,q)$ и $m = \inf\limits_{(p,q)} |f'| > 0$. Тогава можем да напишем

$$|a-x_0| = \frac{|f(a)|}{|f'(\xi)|} \leqq \frac{|f(a)|}{m}.$$ Например, ако f' е непрекъсната в $[p,q]$ и не се анулира, то сигурно $m>0$.

6.8. Нека функцията f е непрекъсната в $[a,b]$ и диференцуема в (a,b), $0<a<b$. Докажете, че съществува $\xi \in (a,b)$, за което

$$\frac{af(b)-bf(a)}{a-b} = f(\xi) - \xi f'(\xi).$$

Упътване. Приложете формулата на Коши към функциите $\frac{f(x)}{x}$ и $\frac{1}{x}$.

6.9. Нека функцията g е непрекъсната в интервала $[a,b]$ и диференцуема в (a,b), а функцията f — непрекъсната и диференцуема в (a,b). Нека още $|f'|\leqq g'$ и g' не се анулира. Докажете, че: **а)** $|f(y)-f(x)|\leqq g(y)-g(x)$ при $x<y$, $x,y\in(a,b)$; **б)** f може да се продължи до функция, непрекъсната в $[a,b]$.

Решение. **а)** От формулата на Коши имаме $\left|\dfrac{f(y)-f(x)}{g(y)-g(x)}\right|=\left|\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}\right|\leqq 1$. **б)** Тъй като g има граница при $x\to a$, то за всяко положително ε съществува $\delta>0$, за което от $x,y\in(a,a+\delta)$ следва $|g(x)-g(y)|<\varepsilon$ (необходимо и достатъчно условие на Коши). Тогава и $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$ и според условието на Коши f има граница при $x\to a$. Полагаме $f(a)=\lim\limits_{x\to a,\,x>a} f(x)$ и аналогично дефинираме $f(b)$. Новата функция е непрекъсната в $[a,b]$ и съвпада с f върху (a,b).

В а) имахме $g(y)-g(x)=(y-x)\,g'(\eta)>0$ при $x<y$. Въобще, ако $\varphi'>0$ в някой интервал, то φ расте в него; ако $\varphi'<0$, то φ намалява. При нестроги неравенства имаме монотонност евентуално в нестрог смисъл.

6.10. Функцията f е два пъти диференцуема в R и $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-ax)=b$, т.е. графиката на f има при $x\to\infty$ наклонена асимптота $y=ax+b$. Докажете, че ако $f''(x)>0$ за $x>p$, то при $x>p$ графиката е над асимптотата.

Решение. Да изучим $g(x)=f(x)-ax-b$ в интервала (p,∞). Тъй като $g''=f''>0$, то g' расте. Ако за някое $q\in(p,\infty)$ е изпълнено $g'(q)>0$, то $g'(x)>g'(q)>0$ при $x>q$ и тогава $g(x)-g(q)=(x-q)\,g'(\xi)>(x-q)\,g'(q)\to\infty$ при $x\to\infty$, а по условие $g(x)\to 0$. (Тук имахме $q<\xi<x$.) Следователно $g'\leqq 0$ в (p,∞) и g намалява, евентуално нестрого. Ако $g(r)<0$ за някое $r\in(p,\infty)$, то $g(x)\leqq g(r)<0$ при $x\geqq r$, а по условие $g(x)\to 0$ при $x\to\infty$. Следователно $g\geqq 0$ в (p,∞). Ако $g(s)=0$ за някое $s\in(p,\infty)$, то $0\leqq g(x)\leqq g(s)=0$ при $x\geqq s$, $g\equiv 0$ в $[s,\infty)$, а по условие $g''>0$. Затова $g>0$ в (p,∞).

6.11. Нека функцията f е диференцуема в интервала (a,b) и има равни граници при $x\to a$ и при $x\to b$. Докажете, че съществува точка от (a,b), в която f^1 се анулира. Разгледайте и случай на безкраен интервал.

Решение. Продължаваме f до непрекъсната в $[a,b]$ функция прилагаме теоремата на Рол. В случай на безкраен интервал правим смяна на променливата $t=\operatorname{arctg}x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ и свеждаме въпроса към функцията $\varphi(t)=f(\operatorname{tg}t)$.

6.12. Нека $a_0<a_1<\ldots<a_n$ са нули на една функция f, дефинирана и непрекъсната в $[a_0,a_n]$ и n пъти диференцуема в (a_0,a_n). Докажете, че $f^{(n)}$ има поне една нула в (a_0,a_n).

Решение. От теоремата на Рол получаваме, че f' има в (a_0,a_n) поне n нули. Тогава f'' има в (a_0,a_n) поне $n-1$ нули и т.н. Полином от n-та степен не може да има повече от n нули, защото $f^{(n)}$ е константа, различна от нула.

6.13. Нека a е нула от кратност 2, а b е нула от кратност 3 за една функция f (зад. 2.12). Докажете, че f^{IV} има нула в (a,b).

Решение. $f(a)=f'(a)=0$, $f(b)=f'(b)=f''(b)=0$. Първо, съществува точка $\xi_1\in(a,b)$, за която $f'(\xi_1)=0$. По-нататък: съществуват точки $\eta_1\in(a,\xi_1)$ и $\eta_2\in(\xi_1,b)$, които анулират f''. Но тогава съществуват точки $\zeta_1\in(\eta_1,\eta_2)$ и $\zeta_2\in(\eta_2,b)$, които анулират f'''. И накрая, съществува точка между ζ_1 и ζ_2, която анулира f^{IV}. Какви предположения за f използвахме при това доказателство?

Ако a е нула от кратност m, а b — от кратност n на една функция f, то в (a,b) има поне една нула на $f^{(m+n-1)}$.

6.14. Докажете, че ако p е полином от степен n и има само реални нули, то и производните на p имат само реални нули, и нулите на p са не повече от n, даже ако всяка броим с кратността ѝ.

6.15. Докажете, че уравнението $y=x^n+px+q=0$ има не повече от три реални корена, ако n е нечетно, и не повече от два реални корена, ако n е четно.

Решение. Реалните корéни са не повече от три, защото уравнението $y''=n(n-1)\,x^{n-2}=0$ има единствен корен. При четно n дори уравнението $y'=nx^{n-1}+p=0$ има единствен реален корен.

6.16. Докажете, че: **а)** полиномът на Льожандър $P_n(x)$ има n различни нули в интервала $(-1,1)$;

б) полиномът на Лагер $L_n(x)$ има n различни нули в $(0,\infty)$;

в) полиномът на Ермит $H_n(x)$ има n различни реални нули (вж. зад. 2.10).

Решение. **а)** 1 и -1 са нули от кратност n на полинома $(x^2-1)^n$. По-нататък разсъждаваме както в зад. 6.13. **б)** За $y=x^ne^{-x}$, $n\geqq 1$ имаме $y(0)=0$, $y(\infty)=0$ (т.е. $\lim\limits_{x\to\infty}y=0$). Според зад. 6.11 съществува $\xi_1>0$, за което $y'(\xi_1)=0$, освен това $y'(0)=0$, $y'(\infty)=0$ (ако $n>0$). Продължаваме аналогично, като имаме предвид, че $y^{(k)}(x)=x^{n-k}\,e^{-x}\,Q_k(x)$, $k=0,1,\ldots,n$. Тук Q_k е полином от степен k. За границата $y^{(k)}(\infty)=0$ вж. зад. 11.2, а). **в)** Сега $y=e^{-x^2}\to 0$ при $x\to\pm\infty$ и според зад. 6.11 съществува ξ_1, за което $y'(\xi_1)=0$. Освен това $y'(\pm\infty)=0$. Въобще $y^{(k)}(x)=e^{-x^2}Q_k(x)$, $k=0,1,\dots,n$, Q_k е полином от степен k. (За границата $y^{(k)}(\pm\infty)=0$ вж. зад. 11.2, а).)

6.17. а) Ако функцията f е непрекъсната в интервала $[a,b]$, диференцуема в (a,b) и $f(a)=f(b)=0$, а λ е произволно число, докажете, че съществува точка ξ от (a,b), за която $f'(\xi)-\lambda f(\xi)=0$,

б) нека една диференцуема в $\mathbf{R}$ функция f има поне N различни нули; докажете, че $(D-\lambda)f$ има поне $N-1$ различни нули за произволно число λ ($(D-\lambda)f=f'-\lambda f$);

в) докажете, че функцията $y=\sum_{k=1}^{n} c_k e^{\lambda_k x}$ има не повече от $n-1$ нули в $\mathbf{R}$ ($\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n$ са различни, $(c_1,c_2,\dots,c_n)\neq(0,0,\dots,0)$).

Решение. **а)** Прилагаме теоремата на Рол към $e^{-\lambda x}f(x)$.

б) Да вземем N от нулите на f. Според а) между всеки две съседни от тях имаме нула на $(D-\lambda)f$.

в) Нека $c_1\neq 0$. Да вземем N от нулите на y. Тогава $y_1=(D-\lambda_n)y$ ще има поне $N-1$ различни нули. Пресмятаме:

$$(D-\lambda_n)y=(D-\lambda_n)\sum_{k=1}^{n}c_k e^{\lambda_k x}=\sum_{k=1}^{n}c_k(D-\lambda_n)e^{\lambda_k x}=\sum_{k=1}^{n-1}c_k(\lambda_k-\lambda_n)e^{\lambda_k x}.$$

По-нататък: $y_2=(D-\lambda_{n-1})y_1$ ще има поне $N-2$ нули и т.н. Стигаме до $y_{n-1}=c_1(\lambda_1-\lambda_n)(\lambda_1-\lambda_{n-1})\dots(\lambda_1-\lambda_2)e^{\lambda_1 x}$ с поне $N-(n-1)$ нули. Следователно $N\leqq n-1$.

От доказаното в зад. 6.17, в) следва, че функциите $e^{\lambda_k x}$ са линейно независими.

6.18. Нека функцията f е непрекъсната в интервала $[a,\infty)$, диференцуема в (a,∞), $f'>k>0$ и $f(a)<0$. Докажете, че f се анулира в една единствена точка, която лежи в интервала $\left(a,a-\frac{f(a)}{k}\right)$.

Решение. От формулата на Лагранж имаме

$$f\left(a-\frac{f(a)}{k}\right)-f(a)=\left[\left(a-\frac{f(a)}{k}\right)-a\right]f'(\xi),\ \xi\in\left(a,a-\frac{f(a)}{k}\right).$$

Следователно

$$f\left(a-\frac{f(a)}{k}\right)=f(a)-\frac{f(a)}{k}f'(\xi)>f(a)-f(a)=0,$$

а същевременно $f(a)<0$. Тъй като $f'>0$, то f се анулира в не повече от една точка.

6.19. Щом $(\ln x)'=\frac{1}{x}$, то по формулата за крайните нараствания $\ln(n+1)-\ln n=\frac{1}{n+\theta}$, $0<\theta<1$, $n\geqq 1$. Докажете, че редицата с общ член $a_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{n}-\ln n$ е сходяща.

Решение. $\frac{1}{n+1}<\frac{1}{n+\theta}<\frac{1}{n}$ при $0<\theta<1$, и следователно $\frac{1}{n+1}<\ln(n+1)-\ln n<\frac{1}{n}$. Тогава $a_{n+1}-a_n=\left[1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}-\ln(n+1)\right]-\left[1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}-\ln n\right]=\frac{1}{n+1}-[\ln(n+1)-\ln n]<0$, т.е. $a_{n+1}<a_n$. Редицата $\{a_n\}$ е намаляваща. Тя е ограничена, защото $a_1\geqq a_n=\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{n}-\ln n>(\ln 2-\ln 1)+(\ln 3-\ln 2)+\dots+(\ln(n+1)-\ln n)-\ln n=\ln(n+1)-\ln n>0$. Доказахме, че редицата е сходяща, но не намерихме границата ѝ.

Тази граница се нарича константа на Ойлер и се означава с C (вж. зад. 2.13 от гл. 0). Така $1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}-\ln n\to C$, т. е. $1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}=\ln n+C+o(1)$, $n\to\infty$, $C=0{,}5772\dots$

Ако означим с H_n сумата $1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}$, то

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\dots+\frac{1}{n+n}=H_{2n}-H_n=\ln 2n-\ln n+o(1)=\ln 2+o(1),\ n\to\infty,$$

т. е. $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\dots+\frac{1}{n+n}\to\ln 2$ (както в зад. 2.14 от гл. 1).

Също така $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\dots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}=H_{2n}-H_n\to\ln 2$, или

$$1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\dots+\frac{1}{4n+1}+\frac{1}{4n+3}-\frac{1}{2n+2}$$

$$=H_{4n+4}-\frac{1}{2}H_{2n+2}-\frac{1}{2}H_{n+1}=\frac{1}{2}\ln\frac{(4n+4)^2}{(2n+2)(n+1)}+o(1)\to\frac{3}{2}\ln 2.$$

Пресметнете $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{4n+2}-\frac{1}{4n+4}\right)$.

6.20. Докажете, че при $\alpha \geqq 0$ и $\alpha \neq 1$ редицата с общ член $a_n = 1+\frac{1}{2^\alpha}+\frac{1}{3^\alpha}+\ldots+\frac{1}{n^\alpha}-\frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}$ е сходяща.

Решение. Функцията $f(x)=\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}$ има производна $\frac{1}{x^\alpha}$. По формулата за крайните нараствания $f(n+1)-f(n)=\frac{1}{(n+\theta)^\alpha}$, $0<\theta<1$. Следователно $\frac{1}{(n+1)^\alpha}\leqq f(n+1)-f(n)\leqq\frac{1}{n^\alpha}$. Тогава

$$a_{n+1}-a_n=\frac{1}{(n+1)^\alpha}-[f(n+1)-f(n)]\leqq 0,\ a_{n+1}\leqq a_n.$$

Редицата $\{a_n\}$ е намаляваща. Тя е ограничена, защото

$$a_1\geqq a_n=\frac{1}{1^\alpha}+\frac{1}{2^\alpha}+\ldots+\frac{1}{n^\alpha}-f(n)\geqq[f(2)-f(1)]+[f(3)-f(2)]+\ldots$$
$$+[f(n+1)-f(n)]-f(n)=f(n+1)-f(n)-f(1)>-f(1).$$

Доказахме, че редицата е сходяща. Да означим границата ѝ с $A(\alpha)$. Например $A(0)=0$. Така при $\alpha\geqq 0$ и $\alpha\neq 1$ получихме

$$1+\frac{1}{2^\alpha}+\ldots+\frac{1}{n^\alpha}=\frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}+A(\alpha)+o(1),\ n\to\infty.$$

Например $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}=2\sqrt{n}+A\left(\frac{1}{2}\right)+o(1)$.

При $\alpha>1$ имаме $1+\frac{1}{2^\alpha}+\ldots+\frac{1}{n^\alpha}\to A(\alpha)$, защото $\frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}\to 0$.

В този случай наричаме функцията $A(\alpha)$ дзета-функция на Риман и я означаваме с $\zeta(\alpha)$. Така $1+\frac{1}{2^\alpha}+\ldots+\frac{1}{n^\alpha}\to\zeta(\alpha)$ при $\alpha>1$.

6.21. При означенията на зад. 6.20 докажете, че $\zeta(\alpha)=\frac{1}{\alpha-1}+C+o(1)$, $\alpha\to 1$, $\alpha>1$, като C е константата на Ойлер (зад. 6.19).

Решение. Нека $\alpha>1$. Щом редицата $\{a_n\}$ намалява и клони към $\zeta(\alpha)$, то $\zeta(\alpha)\leqq a_n$. За да намерим оценка отдолу за $\zeta(\alpha)$, разглеждаме редицата $b_n=1+\frac{1}{2^\alpha}+\ldots+\frac{1}{n^\alpha}-f(n+1)$. Тя клони към $\zeta(\alpha)$, защото $a_n-b_n=f(n+1)-f(n)\to 0$, и расте, защото $b_n-b_{n-1}=\frac{1}{n^\alpha}-[f(n+1)-f(n)]\geqq 0$ при $n>1$. Следователно $b_n\leqq\zeta(\alpha)\leqq a_n$, $b_n-\frac{1}{\alpha-1}\leqq\zeta(\alpha)-\frac{1}{\alpha-1}\leqq a_n-\frac{1}{\alpha-1}$, или по-подробно:

$$(1)\quad 1+\frac{1}{2^\alpha}+\ldots+\frac{1}{n^\alpha}-\frac{1}{\alpha-1}[1-(n+1)^{1-\alpha}]\leqq\zeta(\alpha)-\frac{1}{\alpha-1}$$
$$\leqq 1+\frac{1}{2^\alpha}+\ldots+\frac{1}{n^\alpha}-\frac{1}{\alpha-1}(1-n^{1-\alpha}).$$

При фиксирано n границите при $\alpha\to 1$ на изразите отляво и отдясно са съответно $1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}-\ln(n+1)$ и $1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}-\ln n$, защото $\lim\limits_{\alpha\to 1}\frac{1-n^{1-\alpha}}{\alpha-1}=\left.\frac{n^{1-\alpha}\ln n}{1}\right|_{\alpha=1}=\ln n$. Приложихме правилото на Лопитал от зад. 1.22, в). Нека $\varepsilon>0$. Може да се намери такова n, че $1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}-\ln n$ и $1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}-\ln(n+1)$ $\in\left(C-\frac{\varepsilon}{2},\ C+\frac{\varepsilon}{2}\right)$. (Първата редица клони към C (зад. 6.19), втората също, защото $\ln(n+1)-\ln n=\ln\frac{n-1}{n}\to\ln 1=0$.) Фиксираме едно n с това свойство и избираме $\delta>0$ по такъв начин, че при $|\alpha-1|<\delta$ изразите отляво и отдясно в неравенството (1) да се различават съответно от $1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}-\ln(n+1)$ и $1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}-\ln n$ с числа, по-малки от $\frac{\varepsilon}{2}$. Тогава тяхното отклонение от C ще е по-малко от ε и следователно $\zeta(\alpha) - \frac{1}{\alpha - 1} \in (C - \varepsilon, C + \varepsilon)$. За всяко положително число ε намерихме δ по такъв начин, че щом $|\alpha-1|<\delta$, то $\zeta(\alpha)- \frac{1}{\alpha-1} \in(C-\varepsilon,\ C+\varepsilon)$.

Това означава, че $\lim\limits_{\alpha \to 1,\ \alpha > 1} \left(\zeta(\alpha) - \frac{1}{\alpha - 1}\right) = C$.

Разгледайте и случая $\alpha < 1$ с $A(\alpha)$ вместо $\zeta(\alpha)$. Единственото усложнение е във връзка с твърдението, че $f(n + 1) - f(n) \to 0$. Да пресметнем тази граница:

$$\frac{(n+1)^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha} = \frac{n^{-\alpha}}{1-\alpha} \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{1-\alpha} - 1}{\frac{1}{n}}.$$

Първият множител клони към нула (ако $\alpha > 0$), а вторият — към $1 - \alpha$, защото при $h \to 0$ имаме от зад. 1.22, в)

$$\frac{(1+h)^{1-\alpha} - 1}{h} \to (1-\alpha)(1+h)^{-\alpha}\big|_{h=0}.$$

6.22. Докажете теоремата на Дарбу (зад. 5.5), като разгледате при фиксирано достатъчно малко $h > 0$ функцията $x \mapsto \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$, дефинирана при $a \leqq x \leqq b - h$. (Например за случая $f'(a) > 0$, $f'(b) < 0$.)

Решение. Тази непрекъсната функция ще бъде положителна в a и отрицателна в $b - h$ (ако h е достатъчно малко) и следователно съществува $\xi \in (a,\ b - h)$, за което $f(\xi + h) - f(\xi) = 0$, т. е. $f(\xi + h) = f(\xi)$. От теоремата на Рол получаваме, че съществува $\eta \in (\xi,\ \xi + h)$ такова, че $f'(\eta) = 0$.

6.23. Ако функцията f е ограничена и два пъти диференцуема в $\mathbf{R}$, докажете, че съществува точка, в която f'' се анулира.

Решение. Ако f'' не се анулира, то тя и не сменя знака си според теоремата на Дарбу. Нека $f'' > 0$ (при $f'' < 0$ разглеждаме функцията $-f$). Тогава f' расте. Ако $f'(a) = k > 0$ за някоя точка a, то $f' \geqq k$ в $[a, \infty)$ и в този интервал $f(x) - kx$ расте: $f(x) - kx \geqq f(a) - ka$, т. е. $f(x) \geqq kx + f(a) - ka \to \infty$ при $x \to \infty$, а f е ограничена. Ако $f'(b) = l < 0$ за някоя точка b, то $f' \leqq l$ в $(-\infty, b]$ и в този интервал $f(x) - lx$ намалява: $f(x) - lx \geqq f(b) - lb$, т. е. $f(x) \geqq lx + f(b) - lb \to \infty$ при $x \to -\infty$, а f е ограничена. Следователно $f' \equiv 0$, което противоречи на $f'' > 0$.

6.24. Нека функцията f е диференцуема в интервала $(a,\ b)$ и непрекъсната в краищата му. Докажете, че ако f не е константа или полином от първа степен, то съществува точка $\xi \in (a,\ b)$, за която

$$|f'(\xi)| > \frac{|f(b) - f(a)|}{b - a} \text{ (естествено } a < b).$$

Решение. Ако $f' \equiv 0$ в $(a,\ b)$, то при $x,\ c \in (a,\ b)$ функцията $f(x) = f(c) + (x - c)f'(\eta) = f(c)$ е константа. Следователно за $f(a) = f(b)$ въпросът е решен. Нека $f(a) < f(b)$. Функцията $g(x) = px + q$ се определя еднозначно от условията $g(a) = f(a)$ и $g(b) = f(b)$. При това $p = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} > 0$. Щом $f \not\equiv g$, то съществува $c \in (a,\ b)$, за което $f(c) \neq g(c)$.

Ако $f(c) > g(c)$, то

$$p = \frac{g(c) - g(a)}{c - a} < \frac{f(c) - f(a)}{c - a} = f'(\xi_1),\ \xi_1 \in (a,\ c).$$

Ако $f(c) < g(c)$, то

$$p = \frac{g(b) - g(c)}{b - c} < \frac{f(b) - f(c)}{b - c} = f'(\xi_2),\ \xi_2 \in (c,\ b).$$

При $f(a) > f(b)$ разглеждаме по същия начин функцията $-f$.

6.25. Ако функцията f е дефинирана и диференцуема в интервала $[0,\ 1]$, $f(0) + f(1) = 0$ и $|f'(x)| \leqq 1$, докажете, че $|f(x)| \leqq \frac{1}{2}$.

§ 7. Основна теорема на интегралното смятане

Ако функцията f е дефинирана и диференцуема в интервал и $f'(x) = 0$ за всяка точка x от интервала, то f е константа.

7.1. Докажете (с диференциране) тъждествата:

а) $\arcsin x = \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$, $|x| < 1$;

б) $\operatorname{arctg} x = \arcsin \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$;

в) $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \dfrac{1}{x} = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2} \text{ за } x > 0, \\ -\dfrac{\pi}{2} \text{ за } x < 0; \end{cases}$

г) $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg} \dfrac{x+y}{1-xy}$, $xy < 1$;

д) $\arcsin x + \arcsin y = \arcsin (x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}$ при $xy \leqq 0$ или при $xy > 0$, $x^2 + y^2 \leqq 1$.

Решение. в) Функцията $y = \operatorname{arct} x + \operatorname{arctg} \dfrac{1}{x}$ има производна 0 при $x \neq 0$. Следователно тя е константа в интервалите $(-\infty, 0)$ и $(0, \infty)$. Но това може да е една константа за $(-\infty, 0)$, а друга — за $(0, \infty)$. Определяме двете константи, като дадем конкретни удобни стойности на x. Например $y(1) = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{2}$, $y(-1) = -\dfrac{\pi}{2}$.

Задачата е решена.

Можем да постъпим и така: $\lim\limits_{x\to\infty} y(x) = \dfrac{\pi}{2} + 0 = \dfrac{\pi}{2}$,

$\lim\limits_{x\to-\infty} y(x) = -\dfrac{\pi}{2} + 0 = -\dfrac{\pi}{2}$.

г) За $y=0$ равенството е вярно. Фиксираме $y \neq 0$ и разглеждаме получените функции на x. Производните им (по x) съвпадат при $x \neq \dfrac{1}{y}$. Следователно $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg} \dfrac{x+y}{1-xy} + C$ при $x \neq \dfrac{1}{y}$, като C може да има една стойност в интервала $\left(-\infty, \dfrac{1}{y}\right)$ и друга — в интервала $\left(\dfrac{1}{y}, \infty\right)$. Тези стойности могат да зависят от y. При $x = 0$ получаваме $\operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg} y + C$. Следователно $C = 0$ в този от интервалите, който съдържа 0. При $y > 0$ това е $\left(-\infty, \dfrac{1}{y}\right)$ а при $y < 0$ това е $\left(\dfrac{1}{y}, \infty\right)$. От $xy < 1$ следва $x < \dfrac{1}{y}$ при $y > 0$ и $x > \dfrac{1}{y}$ при $y > 0$.

7.2. Какви изводи ще направите от равенствата:

$$\left(\operatorname{arctg} \frac{x-1}{x+1}\right)' = \left(\operatorname{arctg} \frac{1+x}{1-x}\right)' = \left(-\operatorname{arctg} \frac{1}{x}\right)' = (\operatorname{arctg} x)' ?$$

7.3. Докажете (с диференциране) тъждествата:

а) $\arcsin \dfrac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{2} = \dfrac{1}{2} \arcsin x$, $|x| \leqq 1$;

б) $\arcsin \sqrt{\dfrac{x-a}{b-a}} = \operatorname{arctg} \sqrt{\dfrac{x-a}{b-x}}$, $a \leqq x < b$;

в) $\arcsin \dfrac{1}{2} \sqrt{2 - \sqrt{2-2x}} = \dfrac{1}{4} \arcsin x$, $|x| \leqq 1$;

г) $3\arccos x - \arccos (3x - 4x^3) = \pi$, $|x| \leqq \dfrac{1}{2}$.

7.4. Изразете $\arcsin \dfrac{2x}{1+x^2}$ чрез $\operatorname{arctg} x$.

7.5. Решете уравненията:

а) $y' = 0$; б) $y'' = 0$; в) $y^{(n)} = 0$;

г) уравненията от зад. 4.5; д) $y' + ay = 0$;

е) $y'' - y' - 2y = 0$; ж) $y'' + 3y' + 2y = 0$; з) $y'' - 2y' + y = 0$;

и) $y'' + y = 0$; й) $y'' + y' + y = 0$.

Решение. а) Според основната теорема на интегралното смятане само константите са решения на това уравнение, ако го разглеждаме в някой интервал. Но ако го разгледаме например в $D = [0, 1] \cup [2, 3]$, решения ще бъдат и функции, които не са константи.

Примерите в тази задача (освен г)) разглеждаме в $\mathbf{R}$.

б) Ако $y'' = (y')' = 0$ в $\mathbf{R}$, то $y' = a$. Следователно $(y - ax)' = 0$ и $y - ax = b$. Проверяваме, че $y = ax + b$ е решение. Всички решения са от вида $y = ax + b$, където a и b са произволни константи.

в) Решенията са полиноми от степен, която не надминава $n - 1$, и всеки такъв полином е решение. Имаме n произволни константи.

г) В зад. 4.5 намерихме решения на уравненията. Да видим дали няма други решения. Ако $x^\alpha \dot{x} = p$, то $\left(\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} - pt\right)' = 0$ и наистина $\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} - pt$ е константа ($\alpha \neq -1$). Ако $\dfrac{\dot{x}}{x} = p$, то $(\ln|x| - pt)' = 0$ и $\ln|x| - pt$ е константа. За този случай трябва $x(t) \neq 0$ и следователно или $x > 0$ в $\mathbf{R}$, или $x < 0$ в $\mathbf{R}$. Наистина са намерени всички решения. Първия случай ($\alpha \neq -1$) разгледайте самостоятелно. Например при $\alpha = 1$ имаме $x\dot{x} = p$, $p \neq 0$. Нека в някой интервал Δ е дефинирана диференцуема функция $x(t)$, за която $x\dot{x} = p$. Тогава в Δ са в сила $\left(\dfrac{x^2}{2} - pt\right)' = 0$ и $\dfrac{x^2}{2} - pt = q$, т. е. $x^2 = 2pt + 2q$. Непременно трябва $\Delta \subset D_q = \{t\colon pt + q \geqq 0\}$, което налага ограничение за Δ (ако $p > 0$, трябва Δ да е ограничен отляво; ако $p < 0$, трябва Δ да е ограничен отдясно). Функцията $x(t)$ не се анулира освен при $t_0 = -\dfrac{q}{p}$. Тогава $t_0 \notin \Delta$, или t_0 е край на Δ. Следователно $x(t)$ не мени знаки си във вътрешността на Δ: или $x(t) = \sqrt{2pt + 2q}$, или $x(t) = -\sqrt{2pt + 2q}$ в Δ, q е произволно, стига $D_q \supset \Delta$. В зад. 4.5 не посочихме второто решение. Разгледайте и другите два примера на зад. 4.5.

е) Характеристичният полином е $\varphi(\lambda) = \lambda^2 - \lambda - 2 = (\lambda + 1)(\lambda - 2)$ и според резлтатите на зад. 2.19 $y = Ae^{-x} + Be^{2x}$ е решение при всеки избор на константите A и B (това може да проверим и непосредствено). Ще докажем, че други решения няма. Нека y е решение. Да потърсим такива A и B, че $y = Ae^{-x} + Be^{2x}$. Тогава трябва и $y' = -Ae^{-x} + 2Be^{2x}$. Като решим тези две уравнения относно неизвестните A и B, получаваме $A = (y' - 2y)e^x$, $3B = (y' + y)e^{-2x}$. Убедете се (с диференциране), че тези изрази наистина са константи, а после по обратен път намерете оттук y.

з) Сега $\varphi(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2$, характеристичното уравнение $\varphi(\lambda) = 0$ има двоен корен $\lambda = 1$ и $y = (Ax + B)e^x$ е решение

(зад. 2.19). За да докажем, че няма други решения, да разгледаме едно решение y. Убедете се, че $(ye^{-x})'' = 0$.

и) Както в точка е) се убедете, че няма други решения освен намерените в зад. 2.19.

й) $\varphi(\lambda) = \lambda^2 + \lambda + 1 = 0$, $\lambda = -\dfrac{1}{2} \pm i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Според правилото от зад. 2.19 функциите $e^{\lambda x} = e^{-\frac{x}{2}}\left(\cos x\dfrac{\sqrt{3}}{2} \pm i\sin x\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$, а следователно и $e^{-\frac{x}{2}}\left(A\cos x\dfrac{\sqrt{3}}{2} + B\sin x\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ са решения. Както в точка е) се убеждаваме, че други решения няма.

7.6. Решете в $\mathbf{R}$ системата $u' = -v$, $v' = u$ при условие, че $u(0) = 1$, $v(0) = 0$.

Решение. Едно решение посочихме в зад. 1.18. За да докажем, че друго няма, да разгледаме две диференцуеми в $\mathbf{R}$ функции u и v, които удовлетворяват системата и условието. Убедете се (с диференциране), че функциите $f = u\sin x - v\cos x$ и $q = u\cos x + v\sin x$ са константи, а после изразете u и v чрез тези константи. Определете константите от условието при $x = 0$. Впрочем, щом $u' = -v$, а $v' = u$, то $u'' = -v' = -u$, $u'' + u = 0$ и въпросът се свежда до зад. 7.5, и).

7.7. Моделите на Малтус (1802) и Ферхюлст (1845) за развитие на популация са съответно: **а)** $y' = ky$ и **б)** $y' = ky - ly^2$, k и l са положителни константи. Решете тези уравнения (вж. зад. 4.5 и 2.4, г)).

(Моделът а) е за развитие в идеални условия — броят на ражданията е пропорционален на наличната биомаса. Моделът б) отчита, че „всеки пречи на всеки": n човека си разменят $\dfrac{n(n-1)}{2} \sim \dfrac{n^2}{2}$ $(n \to \infty)$ ръкостискания.)

7.8. Докажете, че ако в някой интервал F и G са примитивни на една и съща функция, то $F - G$ е константа.

Решение. Дадено е, че $F' = G'$. Тогава $(F - G)' = 0$.

Така примитивната на една функция f (ако съществува) е определена с точност до адитивна константа (в интервал). Ако знаем, че $F' = f$, не можем да кажем нищо за $F(a)$. Но $F(b) - F(a)$ не зависи от избора на примитивната (a и b са точки от интервала).

7.9. При означенията на зад. 3.11 имаме $V'(x) = S(x)$. Ако $S(x)$ е полином, чиято степен не надминава три, изразете обема $V(b)$

чрез трите лица $S(a)$, $S\left(\frac{a+b}{2}\right)$ и $S(b)$, като си послужите с резултата от зад. 1.10.

Решение. Да разгледаме функцията $f(t) = S(a+t)$. Тя е полином, чиято степен не надминава 3. От зад. 1.10 имаме $\left(\frac{t}{6}\left[f(0) + 4f\left(\frac{t}{2}\right) + f(t)\right]\right)' = f(t)$. Полагаме тук $t = x - a$ и получаваме

$$\left(\frac{x-a}{6}\left[S(a) + 4S\left(\frac{a+x}{2}\right) + S(x)\right]\right)' = S(x)(x-a)' = S(x).$$

$\left(\text{Имахме } a + t = x,\ a + \frac{t}{2} = \frac{a+x}{2}.\right)$ Получихме една примитивна на S, която има стойност 0 при $x = a$. Следователно това е V. Тогава

$$V(b) = \frac{b-a}{6}\left[S(a) + 4S\left(\frac{a+b}{2}\right) + S(b)\right].$$

Изведете от тази формула на Симпсон формулите за обем, които се доказват в училище.

7.10. Като си послужите с резултатите от зад. 3.10, 3.11 и 4.3, р), намерете: **а)** лицето на елипса с полуоси a и b;
б) обема на елипсоид с полуоси a, b и c.

Решение. Елипсата (като линия) има уравнение $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, a и b са положителни. Горната половина на елипсата е графиката на функцията $y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$, $-a \leqq x \leqq a$ (решихме уравнението относно y). Да означим с $S(x)$ лицето на фигурата, която тя огражда заедно с оста x над $[-a, x]$. От зад. 3.10 имаме $S' = y$, а в зад. 4.3, р) е намерена една примитивна F на функцията $\sqrt{a^2 - x^2} = \frac{a}{b}y$. Следователно S и $\frac{b}{a}F$ се различават с константа. Тогава

$$S(a) = S(a) - S(-a) = \frac{b}{a}\left[F(a) - F(-a)\right] = \frac{b}{a}\,\frac{\pi a^2}{2} = \frac{1}{2}\pi ab.$$

(в пресмятането $\arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$, $\arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2}$). Следователно лицето на елипса с полуоси a и b е πab.

б) Елипсоидът (като повърхнина) има уравнение $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, a, b и c са положителни. Сечението с равнина през точка $x \in (-a, a)$, успоредна на равнината yz, има уравнение $\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2}$, или $\frac{y^2}{\left(b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\right)^2} + \frac{z^2}{\left(c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\right)^2} = 1$. Следователно то е елипса с полуоси $b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$ и $c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$. Лицето на тази елипса е $S(x) = \pi bc\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)$. Веднага можем да напишем една примитивна на $S(x)$: $F(x) = \pi bc\left(x - \frac{x^3}{3a^2}\right)$. Но и обемът $V(x)$ от зад. 3.11 е примитивна на $S(x)$. Следователно $F - V$ е константа. Тогава

$$V(a) = V(a) - V(-a) = F(a) - F(-a) = \pi bc\left(2a - \frac{2}{3}\frac{a^3}{a^2}\right) = \frac{4}{3}\pi abc.$$

Така обемът на елипсоид с полуоси a, b и c е $\frac{4}{3}\pi abc$. Получете този резултат и от формулата на Симпсон (зад. 7.9). Да отбележим, че сечението при $x = \pm a$ е точка и $S(\pm a) = 0$.

7.11. Ако завъртим кръг с център $(0, a)$ и радиус b, $0 < b < a$, около оста x, се получава тяло, наречено тор. Намерете обема и повърхнината (вж. зад. 4.6) на тора.

7.12. Нека функциите f, g, F и G са дефинирани в някой интервал Δ, $F' = f$, $G' = ge^{-F}$.

а) докажете, че при всеки избор на константата C функцията $y = e^F(G + C)$ удовлетворява уравнението $y' = fy + g$ (линейно уравнение);

б) ако функцията y е решение в Δ на уравнението $y' = fy + g$, докажете, че съществува константа C, за която $y = e^{F}(G + C)$.

в) решете уравненията $y' + 2xy = xe^{-x^2}$ и $y' + 4xy = 2xe^{-x^2}\sqrt{y}$ (за уравнението на Бернули $y'=fy+gy^a$ положете $z = y^{1-a}$).

§ 8. Монотонност и екстремуми

Ако функцията f е дефинирана и диференцуема в някой интервал и производната f' е неотрицателна (неположителна), то f е монотонно растяща (намаляваща), евентуално в нестрог смисъл. Ако при това производната не се анулира тъждествено в някой подинтервал (различен от точка), то f е растяща (намаляваща). Ако една функция е дефинирана и непрекъсната в интервал и е монотонна във вътрешността му, то тя е монотонна. За понятието локален естремум вж. § 5.

8.1. Намерете локалните екстремуми на функциите:

а) $x^2 - x^4$; **б)** $x(x+1)^2(x-1)^3$; **в)** $(x - x^2)^3$;

г) $\dfrac{x+1}{x^2+1}$; **д)** $\sqrt[3]{x - x^2}$; **е)** $x - \sqrt[3]{x}$;

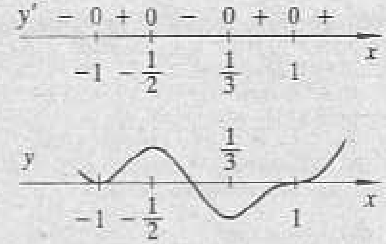
ж) $(x-1)\sqrt[3]{x^2}$; **з)** $\sqrt{x^3 + x^2}$; **и)** $\ln x + \dfrac{1}{x}$;

й) $(1-x)^{\frac{1}{3}}(2-x)^{\frac{2}{3}}$; **к)** x^2e^{-x}; **л)** $x^2e^{-x^2}$;

м) $x^3 + \dfrac{1}{x^2}$; **н)** e^{x^3-x}; **о)** $\arcsin\dfrac{2x}{1+x^2}$;

п) $\left(1 + \dfrac{x}{1!} + \dfrac{x^2}{2!} + \ldots + \dfrac{x^n}{n!}\right)e^{-x}$; **р)** $\cos x + \operatorname{ch} x$.

Решение. **б)** $y' = (x-1)^2(x+1)(6x^2 + x - 1)$, анулира се в точките $-1, -\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, 1$. Те разделят реалната права на 5 отворени интервала (фиг. 10). Знаците на y' във всеки от тях са (последователно отляво надясно): $-, +, -, +, +$. Например за големи стойности на x явно $y' > 0$. Движим се (мислено) отдясно наляво и щом преминем през нула a на y' (или точка, в която y' не съществува), сменяме знака или не в зависимост от това, дали множителят, който се анулира в a, сменя знака си. Това най-често зависи от степента на множителя — нечетна или четна. Така в



Фиг. 10

точката 1 знакът не се сменя, а в останалите нули се сменя ($6x^2 + x - 1 = (2x+1)(3x-1)$). Най-левият интервал получи знак минус. Проверяваме за големи по модул отрицателни стойности на x — явно $y' < 0$. Разбира се, нищо не ни пречи да извършим тази процедура и отляво надясно. В краен случай може да дадем конкретни стойности на x — по една за всеки интервал.

И така y първо намалява, после расте (следователно в точката -1 имаме локален минимум), след това отново намалява (в $-\dfrac{1}{2}$ имаме локален максимум), после пак расте (в $\dfrac{1}{3}$ имаме локален минимум) и след точката 1 продължава да расте (в 1 няма екстремум). Винаги съпровождаме тези разсъждения с прост чертеж, върху който нагледно отразяваме цялата получена до момента информация. Установихме, че y има локален минимум в точките -1 и $\dfrac{1}{3}$ и локален максимум в точката $-\dfrac{1}{2}$. Стойностите на тези екстремуми са: $y(-1) = 0$, $y\left(\dfrac{1}{3}\right) = -\dfrac{2^7}{3^6}$, $y\left(-\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{3^3}{2^6}$. Други екстремуми няма. Най-малка стойност на y е $y\left(\dfrac{1}{3}\right)$. Най-голяма стойност y няма, защото $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y = \infty$. На фиг. 10 е отразено всъщност повече от това, което получихме. Производната y' намерихме както в зад. 1.4, л), без да разкриваме скобите.

ж) $y' = \dfrac{5x-2}{3\sqrt[3]{x}}$ — анулира се при $x = \dfrac{2}{5}$, не съществува при $x = 0$. Знаците на y' са последователно $+, -, +$; при $x = 0$

имаме локален максимум $y(0) = 0$, а при $x = \frac{2}{5}$ — локален минимум $y\left(\frac{2}{5}\right) = -\frac{3}{5}\sqrt[3]{\frac{4}{25}}$.

о) y' не съществува в точките ± 1.

п) $y' = -\frac{x^n}{n!}\, e^{-x}$.

8.2. Пресметнете:

а) $\max\limits_{0<\alpha<e}\ \min\limits_{x}\ (e^x - \alpha x)$; **б)** $\min\limits_{\alpha>0}\left(\max\limits_{x\geq 1}\ \frac{\ln^{\alpha} x}{x}\right)$;

в) $\min\limits_{\alpha>0}\ \max\limits_{x}\ [(x+\alpha)e^{-2\alpha x}]$; **г)** $\min\limits_{\alpha>0}\ \max\limits_{x}\ [(x+2e\alpha)e^{-\alpha x}]$;

д) $\max\limits_{\alpha\geq 0}\ \min\limits_{x\geq 0}\left(x\ln\frac{1+x^2}{1+\alpha^2} - 2\frac{\alpha^2 x}{1+\alpha^2} + 2\alpha\right)$;

е) $\max\limits_{0<\alpha<4}\ \min\limits_{x}\ \ln(x^2 + \alpha x + \alpha)$;

ж) $\max\limits_{\frac{1}{2}\leq x\leq 2}\ \min\limits_{\frac{1}{3}\leq y\leq 1}\ (xy\ln y - xy - y\ln x)$.

Решение. **е)** $y = \ln(x^2 + \alpha x + \alpha)$ е дефинирана за всяко x, защото дискриминантата на квадратния тричлен $D = \alpha(\alpha - 4)$ е отрицателна и коефициентът пред x^2 е положителен. Производната $y' = \frac{2x + \alpha}{x^2 + \alpha x + \alpha}$ се анулира в точката $x = -\frac{\alpha}{2}$, като отляво $y' < 0$, а отдясно $y' > 0$. Следователно y отляво намалява, а отдясно расте. Най-малката стойност на y е $y\left(-\frac{\alpha}{2}\right) = \ln\left(\alpha - \frac{\alpha^2}{4}\right) = m(\alpha)$. Пресмятаме $m'(\alpha) = \frac{2-\alpha}{2\alpha\left(1-\frac{\alpha}{4}\right)}$. В интервала $(0, 4)$

производната $m'(\alpha)$ се анулира при $\alpha = 2$, отляво $m' > 0$, а отдясно $m' < 0$. Следователно m отляво расте, отдясно намалява. Най-голямата стойност на m в интервала $(0, 4)$ е $m(2) = \ln 1 = 0$.

8.3. Кое е най-голямото от числата: $1, \sqrt{2}, \sqrt[3]{3}, \sqrt[4]{4}, \ldots$?

Решение. Разглеждаме функцията $y = \sqrt[x]{x}$, $x > 0$. Производната $y' = x^{\frac{1}{x}}\frac{1 - \ln x}{x^2}$ се анулира при $x = e$, отляво $y' > 0$, отдясно $y' < 0$ (защото $\ln x$ расте и тогава $1 - \ln x$ намалява). Следователно y отляво расте, отдясно намалява. Най-голямата стойност на y е $y(e) = \sqrt[e]{e}$. Но тъй като e не е цяло число, това не решава задачата. Щом y намалява в (e, ∞), то $\max\sqrt[n]{n}$ съществува и ще бъде $\sqrt{2}$ или $\sqrt[3]{3}$. Но $\sqrt[3]{3} > \sqrt{2}$, защото $3^2 > 2^3$ (повдигнахме в шеста степен). Така $\max\sqrt[n]{n} = \sqrt[3]{3}$. Използвахме, че $e < 3$.

8.4. Намерете точките на максимална и минимална кривина за графиките на следните функции: **а)** x^2; **б)** x^3; **в)** x^4; **г)** $\ln x$. (За понятието кривина вж. зад. 2.14.)

Решение. **г)** Кривината е $k(x) = \frac{|y''(x)|}{(1 + y'^2(x))^{\frac{3}{2}}} = \frac{x}{(x^2 + 1)^{\frac{3}{2}}}$,

$k'(x) = \frac{1 - 2x^2}{(x^2 + 1)^{\frac{5}{2}}}$ и k има най-голяма стойност $k\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{2}{3\sqrt{3}}$, а няма най-малка стойност. Точката на максимална кривина има координати $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{\ln 2}{2}\right)$.

8.5. Уравнението $x^3 + px + q = 0$ има реален корен (като всяко уравнение от нечетна степен). Изяснете в зависимост от p и q кога уравнението има три различни реални корена, кога един прост (от кратност единица), кога един прост и един двоен и т. н. (За кратност на корен вж. зад. 2.12.)

Решение. $y = x^3 + px + q$, $y' = 3x^2 + p$. Нека уравнението има три различни реални корена. Ако $p \geqq 0$, то y расте и има една нула. Следователно $p < 0$. Тогава y' се анулира в две точки: $x_1 = -\sqrt{\frac{-p}{3}}$, $x_2 = \sqrt{\frac{-p}{3}}$, като y има локален максимум в x_1 и локален минимум в x_2. Условието да имаме три корена е $y(x_1) > 0$ и $y(x_2) < 0$. Пресмятаме $y(x_1)y(x_2) = \frac{4}{27}\ p^3 + q^2 = \Delta$. Имаме три корена само ако $\Delta < 0$, защото, обратно, ако $\Delta < 0$, то $p < 0$ и т. н. Продължете самостоятелно.

§ 9. Монотонност и неравенства

9.1. Докажете неравенствата:

а) $1 + x < e^x \ (x \neq 0)$; **б)** $ex < e^x \ (x \neq 1)$;

в) $(1 + x)^\alpha \geqq 1 + \alpha x \ (x \geqq -1,\ \alpha > 1)$;

г) $x^\alpha \leqq \alpha x + 1 - \alpha \ (x \geqq 0,\ 0 < \alpha \leqq 1)$;

д) $1 + \alpha \ln x \leqq x^\alpha \ (x,\ \alpha > 0)$; **е)** $\frac{x}{1 + x} < \ln(1 + x) \ (x > 0)$;

ж) $x - \frac{x^2}{2} < \ln(1 + x) < x \ (x > 0)$;

з) $x - \frac{x^3}{6} < \sin x < x \ (x > 0)$; **и)** $1 - \frac{x^2}{2} \leqq \cos x$;

й) $x + \frac{x^3}{3} < \operatorname{tg} x \ \left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right)$;

к) $x - \frac{x^3}{3} < \operatorname{arctg} x < x \ (x > 0)$;

л) $\frac{2x}{\pi} < \sin x \ \left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right)$; **м)** $\operatorname{tg} x < \frac{4x}{\pi} \ \left(0 < x < \frac{\pi}{4}\right)$;

н) $1 + \frac{x}{1!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} < e^x \ (x > 0)$;

о) $(1 - x)^\alpha \leqq 1 - x^\alpha \ (0 \leqq x \leqq 1,\ \alpha \geqq 1)$.

Решение. **а)** Нека $y = e^x - 1 - x$. Производната $y' = e^x - 1$ се анулира при $x = 0$, отляво $y' < 0$, отдясно $y' > 0$ (защото e^x, а следователно и y' расте). Така y отляво на точката 0 намалява, а отдясно расте. Най-малката стойност на y е $y(0) = 0$, като $y(x) > 0$ при $x \neq 0$. Можем да постъпим и така: $e^x - 1 = e^x - e^0 = xe^\xi$ при $x \neq 0$, като ξ е между 0 и x. Ако $x > 0$, то $xe^\xi > xe^0 = x$; ако $x < 0$, то $e^\xi < e^0 = 1$ и $xe^\xi > x$.

Например, ако $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$, получаваме

$$e^{H_n} = e^1 e^{\frac{1}{2}} \ldots e^{\frac{1}{n}} > (1 + 1)\left(1 + \frac{1}{2}\right) \ldots \left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{2}{1}\,\frac{3}{2} \ldots \frac{n+1}{n} = n + 1,$$

$H_n > \ln(n + 1)$. От друга страна,

$$e^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{3}} \ldots e^{-\frac{1}{n}} > \left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right) \ldots \left(1 - \frac{1}{n}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{2}{3} \ldots \frac{n-1}{n} = \frac{1}{n},$$

$1 - H_n > \ln\frac{1}{n} = -\ln n$, $H_n - \ln n < 1$. Но $H_n - \ln n > \ln(n + 1) - \ln n > 0$. Така $0 < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln n < 1$ (вж. зад. 6.19).

в) $y = (1 + x)^\alpha - 1 - \alpha x$, $y' = \alpha[(1 + x)^{\alpha-1} - 1]$ се анулира при $x = 0$, като отляво $y' < 0$, а отдясно $y' > 0$ (при $\alpha > 1$ функцията $u = (1 + x)^{\alpha-1}$ расте в $(-1, \infty)$, защото $u' = (\alpha - 1)(1 + x)^{\alpha-1} > 0$; освен това $y'(-1) = -\alpha < 0$). Следователно y намалява отляво на точката 0, отдясно расте и има най-малка стойност $y(0) = 0$. Щом установихме, че $y \geqq 0$, неравенството е доказано. И тук можехме да напишем $(1 + x)^\alpha - 1 = x\alpha(1 + \xi)^{\alpha-1}$, ξ е между 0 и x и т. н. Каква е връзката с пример г)? Докажете по индукция (преход от n към $n + 2$), че при $\alpha = n$ — цяло неотрицателно число, това неравенство на Бернули е вярно за $x \geqq -2$. За кои стойности на n неравенството е вярно без ограничения за x?

л) Нека $y = \frac{\sin x}{x}$, тогава $y' = \frac{1}{x^2}(x\cos x - \sin x)$. За да изучим y', полагаме $u = x\cos x - \sin x$, $u' = -x\sin x < 0$ в $(0, \frac{\pi}{2}]$ (дори в $(0, \pi)$).

Следователно u намалява в $(0, \frac{\pi}{2}]$, но тъй като е непрекъсната в $[0, \frac{\pi}{2}]$, намалява и там. При $0 < x \leqq \frac{\pi}{2}$ имаме $u(x) < u(0) = 0$. Получихме, че $y' < 0$ и следователно y намалява в $(0, \frac{\pi}{2}]$, дори в $(0; \pi)$. Ако $0 < x < \frac{\pi}{2}$, то $y(x) > y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2}{\pi}$.

и) Нека $y_n = e^x - 1 - \frac{x}{1!} - \frac{x^2}{2!} - \dots - \frac{x^n}{n!}$. Тогава $y'_n = u_{n-1}$, $y_n(0) = 0$. Ако $y_n > 0$ в $(0, \infty)$, то y_{n+1} расте в $(0, \infty)$ и дори в $[0, \infty)$ и от $y_{n+1}(0) = 0$ следва, че и $y_{n+1} > 0$ в $(0, \infty)$. От друга страна, $y_0 = e^x - 1 > 0$ в $(0, \infty)$. При $x > 0$ примерът е обобщение на а). Как ще обобщите в този смисъл примерите ж), з), и)?

9.2. Докажете неравенствата:

а) $\frac{\ln^2 x}{2} \leqq \frac{x-1}{e}$ $(x \geqq 1)$; **б)** $1 - \frac{x+1}{e^x} \leqq \frac{x}{e}$ $(x \geqq 0)$;

в) $\arcsin x \leqq \frac{x + x^3}{\sqrt{1-x^2}}$ $(0 \leqq x < 1)$; **г)** $\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x} \geqq \frac{x - 2x^3}{1-x^2}$;

д) $\operatorname{arctg}\frac{1-x}{1+x} \leqq \frac{1}{\sqrt{x}} - 1$ $(0 < x \leqq 1)$;

е) $\sin \pi x \geqq \pi(x - x^2)$; **ж)** $\cos \pi x \geqq \frac{\pi}{4} - \pi x^2$;

з) $(2x^2 + 1)\arcsin x \geqq \frac{\pi}{2}x^2 - 3x\sqrt{1-x^2}$ $(0 \leqq x \leqq 1)$;

и) $(x^2 - 1)\operatorname{arctg} x \geqq x\ln(1 + x^2) + \frac{\pi}{4}x^2 - 2x$ $(x \geqq 0)$;

й) $x^2 + 4x + 6 \geqq 2(3 - x)e^x$;

к) $\left(\frac{x^3}{3} - x\right)\operatorname{arctg} x + \frac{5x^2}{6} \geqq \left(\frac{x^2}{2} - \frac{1}{6}\right)\ln(1 + x^2)$;

л) $(1 + x)\operatorname{arctg} x + \frac{x-1}{2}\ln(1 + x^2) \leqq 4x + \frac{x^2}{2}$ $(x \geqq 0)$;

м) $\operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{3}}\right) + \operatorname{arctg}(\sqrt{3}\operatorname{tg} x) < x\sqrt{3} + \pi\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ $\left(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\right)$;

н) $(x^4 + 3)\operatorname{arctg} x + 2x\ln(1 + x^2) \geqq x^3 + 3x$ $(x \geqq 0)$;

о) $1 + x\ln(x + \sqrt{1 + x^2}) \geqq \sqrt{1 + x^2}$;

п) $(x^2 - 1)\ln(1 + x^2) + 4x\operatorname{arctg} x \geqq 3x^2$ $(x \geqq 0)$;

р) $\ln x > 2\frac{x-1}{x+1}$ $(x > 1)$; **с)** $\cos x \leqq \left(\frac{\sin x}{x}\right)^3$ $\left(0 < |x| \leqq \frac{\pi}{2}\right)$.

Решение. **м)** Нека y е разликата между лявата и дясната страна на неравенството, $y' = \sqrt{3}\left(\frac{4}{(3\cos^2 x + \sin^2 x)(\cos^2 x + 3\sin^2 x)} - 1\right) \geqq 0$, защото $4 \geqq (3c^2 + s^2)(c^2 + 3s^2) = (1 + 2c^2)(1 + 2s^2) = 1 + 2 + 4s^2c^2 = 3 + (\sin 2x)^2$, $s = \sin x$, $c = \cos x$. Равенство имаме (в интервала $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$) само при $x = \pm\frac{\pi}{4}$. Следователно y расте в $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Да пресметнем $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2},\, x < \frac{\pi}{2}} y$. Щом $x \to \frac{\pi}{2}$, $x < \frac{\pi}{2}$, то $\operatorname{tg} x \to \infty$, $y \to \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} - \sqrt{3}\,\frac{\pi}{2} - \pi\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 0$. Следователно можем да продължим y до функция, непрекъсната в $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, като положим $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$. Тази функция расте в $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, а значи и в $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ (вж. § 8). При $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ имаме $y(x) < y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$. (За новата функция запазихме означението y.) Можеше и направо да напишем $y(x) < \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2},\, x < \frac{\pi}{2}} y$.

9.3. Докажете неравенствата:

а) $\cos x \leqq e^{-\frac{x^2}{2}}$ $(|x| \leqq \pi)$; **б)** $\operatorname{ch} x \leqq e^{\frac{x^2}{2}}$;

в) $\operatorname{ctg} 2x \geqq \ln \operatorname{ctg} x \left(0 < x \leqq \dfrac{\pi}{4}\right)$;

г) $(2x + 1)\arccos x \leqq (x + 2)\sqrt{1 - x^2}(-1 \leqq x \leqq 1)$.

Решение. **б)** Нека $y = e^{-\frac{x^2}{2}}\operatorname{ch} x$. Имахме $\operatorname{ch} x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ (зад. 1.1). Разглеждаме само $x \geqq 0$, защото y е четна функция. Пресмятаме $y' = e^{-\frac{x^2}{2}}(\operatorname{sh} x - x\operatorname{ch} x)$. Отделно разглеждаме $u = \operatorname{sh} x - x\operatorname{ch} x$, $u' = -x\operatorname{sh} x$. Функцията $\operatorname{sh} x$ расте, защото $(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x > 0$. Тъй като $\operatorname{sh} 0 = 0 \left(\operatorname{sh} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}\right)$, то $\operatorname{sh} x > 0$ при $x > 0$. Получихме, че $u' < 0$ в $(0, \infty)$ и следователно u намалява в $[0, \infty)$. Тогава $u(x) < u(0) = 0$ при $x > 0$, а значи и $y'(x) < 0$, y намалява в $[0, \infty)$. Така $y(x) \leqq y(0) = 1$ при $x \geqq 0$. Поради четността $y(x) \leqq 1$ за всяко x.

в) Нека $y = \operatorname{ctg} 2x - \ln\operatorname{ctg} x$. Тогава $y' = -2\dfrac{1 - \sin 2x}{\sin^2 2x} \leqq 0$ при $x \in \left(0, \dfrac{\pi}{4}\right]$ (и не само тук). Следователно y намалява в $\left(0, \dfrac{\pi}{4}\right]$ и $y(x) \geqq y\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 0$ при $0 < x \leqq \dfrac{\pi}{4}$.

9.4. Докажете неравенствата:

а) $\sin x + \operatorname{tg} x > 2x$, $x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$;

б) $\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x < e < \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^{x+1}$, $x \in (0, \infty)$;

в) ако $u(x) = e^{-\lambda x}$, $v(x) = \dfrac{1}{\lambda} u(u(x))$, то $v' \leqq \dfrac{1}{e}$ $(\lambda > 0)$.

Решение. **а)** Нека $y = \sin x + \operatorname{tg} x - 2x$, $y' = \cos x + \dfrac{1}{\cos^2 x} - 2$

$= \varphi(\cos x)$, като $\varphi(t) = t + \dfrac{1}{t^2} - 2$, $\varphi'(t) = \dfrac{t^3 - 2}{t^3} < 0$ при $0 < t \leqq 1$, φ намалява в $(0, 1]$, тогава $\varphi(t) > \varphi(1) = 0$ при $0 < t < 1$. Следователно $y' > 0$ в $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$, y расте в $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ и дори в $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right)$. Така $y(x) > y(0) = 0$ при $x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$.

б) Имаме

$$x\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) < 1 < (x + 1)\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right),$$

т. е. $\dfrac{1}{x + 1} < \ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right) < \dfrac{1}{x}$. Като положим $t = \dfrac{1}{x}$, получаваме $\dfrac{t}{1 + t} < \ln(1 + t) < t, t > 0$. Нататък продължаваме както в зад. 9.1, е) и ж). Преобразуванията, които направихме, са обратими.

9.5. а) Докажете, че $e^{x^2} > x^5$; **б)** докажете, че $\pi^e < e^\pi$;
в) за кои положителни стойности на α уравнението $x^\alpha = e^x$ има едно решение в $[0, \infty)$?

Решение. **а)** Неравенството е очевидно при $x \leqq 0$. За $x > 0$ да образуваме $y = x^{-5}e^{x^2}$, $y' = x^{-6}e^{x^2}(2x^2 - 5)$. В точката $x_0 = \sqrt{\dfrac{5}{2}}$ функцията y има най-малка стойност $y(x_0) = \left(\dfrac{2}{5}e\right)^{\frac{5}{2}} > 1$, защото $2e > 5$ $(e > 2{,}7)$.

б) Да положим първо $y = \dfrac{x^e}{e^x}$, а после $u = \ln y = e\ln x - x$ и т.н.

9.6. Докажете неравенствата:

а) $\ln(1 + x) < \sin x$, $x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$;

б) $\operatorname{ch} x \leqq \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$, $x \in (-1, 1)$;

в) $\operatorname{sh} x < \arcsin x$, $x \in (0, 1]$.

Решение. а) $y = \sin x - \ln(1+x)$, $y' = \cos x - \frac{1}{1+x}$, $y'' = -\sin x + \frac{1}{(1+x)^2}$, $y''' = -\cos x - \frac{2}{(1+x)^3} < 0$ в $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ и y'' намалява. Тъй като $y''(0) = 1$, $y''\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{\left(1+\frac{\pi}{2}\right)^2} - 1 < 0$, то y'' се анулира в единствена точка $a \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, отляво $y'' > 0$, отдясно $y'' < 0$ (защото намалява). В $[0, a]$ производната y' расте от стойността $y'(0) = 0$ до $y'(a) > 0$, а после намалява в $\left[a, \frac{\pi}{2}\right]$ до $y'\left(\frac{\pi}{2}\right) < 0$. Следователно y' се анулира в една точка $b \in \left(a, \frac{\pi}{2}\right)$, като отляво $y' > 0$, а отдясно $y' < 0$. Тогава y расте в $[0, b]$ от $y(0) = 0$ до $y(b) > 0$ и намалява в $\left(b, \frac{\pi}{2}\right)$ до $y\left(\frac{\pi}{2}\right) > 0$. Следователно $y > 0$ в $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Наистина $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 - \ln\left(1+\frac{\pi}{2}\right) = \ln e - \ln\left(1+\frac{\pi}{2}\right) > 0$, защото $1 + \frac{\pi}{2} < 1 + \frac{3,16}{2} = 2,58 < 2,7 < e$.

В зад. 4.7, 4.8, 5.1, г) и д) и 8.3 използвахме приближени стойности на числата e и π. И тук в зад. 9.5, а) предположихме за известно, че $e > \frac{5}{2}$, в зад. 9.5, б) — че $e \neq \pi$, а току-що, че $1 + \frac{\pi}{2} < e$. Това е така, защото $2,7 < e < 2,8$, а $3,1 < \pi < 3,2$. Но още не сме пресмятали числата e и π. Някои оценки можем да получим от неравенствата в този параграф. Например от зад. 9.1, к) при $x = 1$ получаваме $\frac{8}{3} < \pi < 4$. От зад. 9.1, н) при $x = 1$ и $n = 3$ следва $\frac{8}{3} < e$, а от зад. 9.2, р) при $x = e$ имаме $e < 3$. Тези груби оценки не са достатъчни дори за да разберем, че $e \neq \pi$.

9.7. Докажете, че ако в интервала $[0, a]$ уравнението $y' = x + y^2$ има решение, което се анулира при $x = 0$, то $a < 1 + \frac{\pi}{2}$.

Решение. Нека $y(x)$ е такова решение. Да разгледаме функцията $\varphi(x) = \operatorname{arctg} y(x)$. Ако $a > 1$, нека $1 \leqq x \leqq a$. Тогава

$$\varphi' = \frac{y'}{1+y^2} = \frac{x+y^2}{1+y^2} \geqq 1, \quad (\varphi(x) - x)' \geqq 0.$$

Щом $\varphi(x) - x$ расте в $[1, a]$, то $\varphi(a) - a \geqq \varphi(1) - 1 \geqq -1$. Наистина $\varphi(1) \geqq \varphi(0) = 0$, защото $\varphi' = \frac{x+y^2}{1+y^2} \geqq 0$ и φ расте в $[0, a]$. Така $a - 1 \leqq \varphi(a) < \frac{\pi}{2}$, $a < 1 + \frac{\pi}{2}$. Стойностите на функцията arctg принадлежат на интервала $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, затова писахме $\varphi(a) < \frac{\pi}{2}$.

9.8. Докажете, че функцията $x = \ln y + \frac{1}{y}$ е обратима при $y \geqq 1$, а за обратната функция $y(x)$ е в сила неравенството

$$1 < e^x - y(x) < e - 1, \quad x \in (1, \infty).$$

9.9. Докажете, че дефиниционната област на всяка рационална функция се представя като сума от интервали, във всеки от които функцията е монотонна.

Решение. Ако P и Q са полиноми, то $\left(\frac{P}{Q}\right)'$ е рационална функция и може да смени знака си само в краен брой точки, във всяка от които или не е дефинирана, или се анулира.

9.10. За кои стойности на a:

а) $x^3 + ax$ расте в $\mathbf{R}$;
б) $x^3 + ax^2$ расте в $\mathbf{R}$;
в) $1 - 2a\cos x + a\cos 2x \geqq 0$ при $x \in \mathbf{R}$;
г) $(x+2)(\sqrt{x^2+1} - 1) \leqq ax^2$ при $x \in \mathbf{R}$.

9.11. а) Нека $x_1, x_2, \ldots, x_n$ са неотрицателни числа. Докажете, че

$$\sqrt[n]{x_1, x_2 \ldots x_n} \leqq \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n},$$

като равенство се достига само при $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$ (неравенство на Коши).

б) Ако a, b и c са положителни числа, докажете, че $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geqq 3$, като равенство се достига само при $a = b = c$.

Решение. **а)** Ако някое $x_i = 0$, неравенството е изпълнено, като равенство се достига само при $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$. Нека числата x_i са положителни. Фиксираме $x_2, \ldots, x_n$ и разглеждаме функцията

$$f(x_1) = \sqrt[n]{x_1 \ldots x_n} - \frac{x_1 + \ldots + x_n}{n}.$$

Тя достига при $x_1 = \sqrt[n-1]{x_2 \ldots x_n}$ най-голяма стойност

$$f_{\max} = \frac{n-1}{n}\left(\sqrt[n-1]{x_2 \ldots x_n} - \frac{x_2 + \ldots + x_n}{n-1}\right).$$

Приложете индукция.

§ 10. Изпъкналост и неравенства

10.1. Докажете, че ако една функция f е диференцуема в някой интервал Δ и f' расте, то:

а) за всяка точка c от Δ при $x \neq c$ и $x \in \Delta$ графиката на f лежи над допирателната към нея в точката $(c, f(c))$;

б) за всеки две точки a и b от Δ, $a < b$, графиката на f (в интервала (a, b)) лежи под съединителната отсечка на точките $(a, f(a))$ и $(b, f(b))$;

в) за всеки n точки $x_1, x_2, \ldots, x_n$ от Δ и при всеки избор на положителните числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ със сума 1 е в сила неравенството на Йенсен:

$$f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n) \leqq \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2) + \ldots + \alpha_n f(x_n).$$

Равенство се достига само при $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$.

Решение. **а)** Допирателната има уравнение $y = f(c) + (x - c)f'(c)$. По формулата за крайните нараствания $f(x) = f(c) + (x - c)f'(\xi)$. При $x > c$ имаме $x > \xi > c$, $f'(\xi) > f'(c)$ и $f(x) > y(x)$. При $x < c$ съответно $x < \xi < c$, $f'(\xi) < f'(c)$ и отново $f(x) > y(x)$. Разбира се, ако f' намалява, графиката (при $x \neq c$) ще лежи под допирателната.

б) Една точка $c \in (a, b)$ се представя така: $c = \frac{b-c}{b-a}a + \frac{c-a}{b-a}b = \alpha a + \beta b$, като α и β са положителни, $\alpha + \beta = 1$. Ако $y(x) = px + q$, то $y(\alpha a + \beta b) = (\alpha a + \beta b)p + q = \alpha(ap + q) + \beta(bp + q) + \alpha y(a) + \beta y(b)$. Допирателната към графиката на f в точката $(c, f(c))$ е графика на функцията $y_1 = f(c) + (x - c)f'(c)$. Правата, съединяваща точките $(a, f(a))$ и $(b, f(b))$, е графика на функцията $y_2 = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$. Функциите y_1 и y_2 имат вида $px + q$. Тъй като a и b са различни от c, то според а) $f(a) > y_1(a)$ и $f(b) > y_1(b)$. Окончателно имаме $y_2(c) = y_2(\alpha a + \beta b) = \alpha y_2(a) + \beta y_2(b) = \alpha f(a) + \beta f(b) > \alpha y_1(a) + \beta y_1(b) = y_1(\alpha a + \beta b) = y_1(c) = f(c)$. Разбира се, ако f' намалява, графиката ще лежи над съединителната отсечка. Получихме неравенството $f(\alpha a + \beta b) < \alpha f(a) + \beta f(b)$.

в) Нека между точките има различни. При $n = 2$ твърдението е доказано в б), защото точката $c = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2$ е вътрешна за интервала с краища x_1 и x_2. Например, ако $x_1 < x_2$, то $c < (\alpha_1 + \alpha_2)x_2 = x_2$. Ако неравенството е вярно за $n \geqq 2$, то за $n + 1$ ще имаме (сега $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_{n+1} = 1$):

$$f(\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n + \alpha_{n+1} x_{n+1})$$

$$= f\left(\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_{n-1} x_{n-1} + (\alpha_n + \alpha_{n+1})\left(\frac{\alpha_n}{\alpha_n + \alpha_{n+1}} x_n + \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n + \alpha_{n+1}} x_{n+1}\right)\right)$$

$$< \alpha_1 f(x_1) + \ldots + \alpha_{n-1} f(x_{n-1}) + (\alpha_n + \alpha_{n+1}) f\left(\frac{\alpha_n}{\alpha_n + \alpha_{n+1}} x_n + \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n + \alpha_{n+1}} x_{n+1}\right)$$

$$\leqq \alpha_1 f(x_1) + \ldots + \alpha_{n-1} f(x_{n-1}) + \alpha_n f(x_n) + \alpha_{n+1} f(x_{n+1}).$$

Второто неравенство е нестрого, защото може x_n и x_{n+1} да съвпадат. Случаят $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$ е очевиден. Разбира се, ако f' намалява, неравенството е в обратната посока.

Нека функцията f има производна в някой интервал Δ. Според резултатите на зад. 10.1, ако f' расте, то f е изпъкнала в Δ; ако f' намалява, то f е вдлъбната. Казваме още „изпъкнала надолу" и „изпъкнала нагоре". С други думи, ако наклонът на допирателната расте, функцията е изпъкнала; ако той намалява, функцията е вдлъбната. В частност, ако f има втора производна и $f'' > 0$, имаме изпъкналост, ако $f'' < 0$ — вдлъбнатост.

10.2. Докажете неравенствата:

а) $\dfrac{e^x+e^y}{2} > e^{\frac{x+y}{2}}$ $(x \neq y)$;

б) $\dfrac{x^\alpha + y^\alpha}{2} > \left(\dfrac{x+y}{2}\right)^\alpha$ $(x,\ y > 0,\ x \neq y,\ \alpha > 1)$;

в) $x\ln x + y\ln y > (x+y)\ln\dfrac{x+y}{2}$ $(x, y > 0, x \neq y)$.

Решение. **а)** Нека $f(x) = e^x$, $f'(x) = e^x$ — расте. В неравенството на Йенсен (зад. 10.1, в)) да положим $n=2$, $\alpha_1=\alpha_2=\dfrac{1}{2}$, т.е.

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) < \frac{f(x)+f(y)}{2}.$$

в) $\dfrac{x\ln x + y\ln y}{2} > \dfrac{x+y}{2}\ln\dfrac{x+y}{2}$. Виждаме, че това е неравенството на Йенсен за функцията $f(x) = x\ln x$, $n = 2$, $\alpha_1 = \alpha_2 = \dfrac{1}{2}$. Вярно е, защото $f' = \ln x + 1$ расте.

10.3. Докажете, че средното геометрично на n неотрицателни числа не надминава тяхното средно аритметично: $\sqrt[n]{x_1x_2\ldots x_n} \leqq \dfrac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}$ (зад. 9.11, а)).

Решение. За положителни x_i имаме

$$\ln\sqrt[n]{x_1\ldots x_n} = \frac{\ln x_1 + \ldots + \ln x_n}{n} \leqq \ln\frac{x_1+\ldots+x_n}{n},$$

защото това е неравенството на Йенсен за функцията $f(t) = \ln t$, $\alpha_i = \dfrac{1}{n}$ $\left(f' = \dfrac{1}{t}\right.$ намалява$\left.\right)$. Равенство имаме само при $x_1 = \ldots = x_n$. Ако някое $x_i = 0$, неравенството е очевидно. И тогава равенство ще имаме само при $x_1 = \ldots = x_n$ $(= 0)$.

10.4. Нека функцията f е два пъти диференцуема в интервала $[a, b]$ и $f(a)$ и $f(b)$ са с различни знаци. Скицирайте графиката на f за случаите: **а)** $f' > 0$, $f'' > 0$; **б)** $f' > 0$, $f'' < 0$; **в)** $f' < 0$, $f'' > 0$; **г)** $f' < 0$, $f'' < 0$. За коя точка (a или b) е сигурно, че като приложим към нея формулата на Нютон (зад. 3.7), ще получим по-добра нова стойност на x? Как са разположени спрямо корена приближенията, получени по метода на Нютон и по метода на хордите? Докажете наблюденията си.

10.5. Докажете, че функцията $y = \text{ch}x + \cos x$ е изпъкнала.

Решение. $y' = \text{sh}x - \sin x$, $y'' = \text{ch}x - \cos x > 0$ при $x \neq 0$, защото $\cos x \leqq 1$, а $\text{ch}x > 1$ при $x \neq 0$ $\left(\text{ch}x = \dfrac{e^x+e^{-x}}{2} > 1,\right.$ $e^x + e^{-x} > 2$, $(e^x)^2 - 2e^x + 1 = (e^x-1)^2 > 0\left.\right)$. Така косинусът се представя като разлика на две изпъкнали функции: $\cos x = (\text{ch}x + \cos x) - \text{ch}x$.

§ 11. Правило на Лопитал

Когато се затрудняваме да намерим границата на $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ при $x \to a$ (защото $f(x)$ и $g(x)$ клонят към 0 или ∞ при $x \to a$), можем да приложим правилото на Лопитал: $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$, стига втората граница да съществува (включително и като $+\infty$ или $-\infty$). Тук a е реално число или $+\infty$, или $-\infty$. Разбира се, f и g са дефинирани и диференцуеми в точките x на една околност на a, евентуално при $x \neq a$, а $g'(x) \neq 0$. Околност на $+\infty$ се нарича всеки неограничен отдясно интервал. И при крайно a може да имаме едностранна „околност" от вида $[a, b)$.

11.1. Пресметнете границите:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x+e^{-x}-2\cos x}{x^2}$; **б)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x - \text{tg}x}{x^3}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\,\text{ctg}x - 1}{x^2}$; **г)** $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2} - \text{ctg}^2x\right)$;

д) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{\ln x} - \dfrac{1}{x-1}\right)$; **е)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x-\frac{x^2}{2}} - 1 - x}{x^3}$;

ж) $\lim\limits_{x\to 0,\ x>0}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{1-\cos\sqrt{x}}$; **з)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - e}{x}$;

и) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^x - x}{\ln x - x + 1}$; **й)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}(\text{cth}x - \text{ctg}x)$;

к) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{e^{-x}+x}{e^{x}-x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$; **л)** $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\operatorname{tg}x)^{\operatorname{tg}2x}$;

м) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2}{\pi}\arccos x\right)^{\frac{1}{x}}$; **н)** $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\cos x}{\operatorname{ch}x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$;

о) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\sin x}\right)$; **п)** $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{e^{x}-1}{x}\right)^{\frac{1}{e^x-1}}$;

р) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\cos\dfrac{x}{n}+\alpha\sin\dfrac{x}{n}\right)^{n}$; **с)** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x-x^2\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\right)$;

т) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-x}-2x)$; **у)** $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{\ln x}{x-1}\right)^{\frac{1}{\ln x}}$.

Решение. **б)** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x-\operatorname{tg}x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\dfrac{1}{\cos^2 x}}{3x^2}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos^3x-1}{3x^2\cos^2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos^3x-1}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{3\cos^2x(-\sin x)}{6x}=-\frac{1}{2}.$$

При първото и четвъртото равенство приложихме правилото на Лопитал, като предварително се убедихме, че имаме случая „$\dfrac{0}{0}$". При третото равенство изпуснахме множителя $\cos^2x$, защото той клони към 1 при $x\to 0$. Накрая използвахме, че $\dfrac{\sin x}{x}\to 1$ при $x\to 0$, за да спестим финала: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-\sin x}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-\cos x}{2}=-\dfrac{1}{2}$.
Едва в последния момент разбрахме, че границата, която търсим, наистина съществува.

з) Знаменателят $x\to 0$. Да потърсим границата на числителя. Нека $y=(1+x)^{\frac{1}{x}}$, $\ln y=\dfrac{1}{x}\ln(1+x)$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{1+x}}{1}=1$. Щом $\ln y\to 1$, то $y=e^{\ln y}\to e^1=e$. И числителят клони към 0. Ще приложим правилото на Лопитал. Първо да намерим y'. Пресмятаме: $\dfrac{1}{y}\,y'=\dfrac{\frac{x}{1+x}-\ln(1+x)}{x^2}$. И така

$$\lim_{x\to 0}\frac{y-e}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{y'}{1}=\lim_{x\to 0}y\,\frac{\frac{x}{1+x}-\ln(1+x)}{x^2}$$

$$=e\lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{1}{1+x}-\ln(1+x)}{x^2}=e\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{(1+x)^2}-\frac{1}{1+x}}{2x}$$

$$=e\lim_{x\to 0}\frac{1-(1+x)}{2x(1+x)^2}=e\lim_{x\to 0}\frac{-1}{2(1+x)^2}=-\frac{e}{2}.$$

Тук се убедихме, че границата, която търсим, съществува. В първоначалния израз $\dfrac{\frac{x}{1+x}-\ln(1+x)}{x^2}$ не можем да изпуснем $1+x$, въпреки че клони към 1, защото не е множител на числителя или знаменателя. И наистина

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\ln(1+x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{1}{1+x}}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2(1+x)}=\frac{1}{2}\ \text{вместо}\ -\frac{1}{2}.$$

Представихме $\dfrac{x}{1+x}=1-\dfrac{1}{1+x}$ само за удобство при диференцирането.

м) Нека $y=\left(\dfrac{2}{\pi}\arccos x\right)^{\frac{1}{x}}$, $\ln y=\dfrac{1}{x}\ln\left(\dfrac{2}{\pi}\arccos x\right)$. Тъй като $\arccos 0=\dfrac{\pi}{2}$, случаят е „$\dfrac{0}{0}$". Пресмятаме:

$$\lim_{x\to 0}\ln y=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{2}{\pi}}{\frac{2}{\pi}(\arccos x)\sqrt{1-x^2}}=-\frac{2}{\pi}.$$

Така $y = e^{\ln y} \to e^{-\frac{2}{\pi}}$.

При изрази от вида u^v предварително логаритмуваме, ако имаме неопределеност от вида 1^∞, ∞^0 или 0^0. След логаритмуването получаваме случай „$0 \cdot \infty$", който преобразуваме като $\frac{\infty}{\frac{1}{0}}$ или като $\frac{0}{\frac{1}{\infty}}$, за да приложим правилото на Лопитал.

При неопределеност от вида „$\infty - \infty$" постъпваме според обстановката. Ако има възможност, привеждаме към общ знаменател или изваждаме множител пред скоби с надеждата да получим „$0 \cdot \infty$". Неопределените форми са седем: $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0 \cdot \infty$, 1^∞, ∞^0, 0^0, $\infty - \infty$.

с) Тук няма знаменател. Ще изнесем x пред скоби: $x\left(1 - x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)\right) = \dfrac{1 - x\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}$. За удобство да положим $t = \frac{1}{x}$; $t \to 0$ при $x \to \infty$. По-нататък $\dfrac{1 - \frac{1}{t}\ln(1+t)}{t} = \dfrac{t - \ln(1+t)}{t^2}$.

При $t \to 0$ имаме случая „$\frac{0}{0}$", т. е.

$$\lim_{t\to 0} \frac{t - \ln(1+t)}{t^2} = \lim_{t\to 0} \frac{1 - \frac{1}{1+t}}{2t} = \lim_{t\to 0} \frac{1}{2(1+t)} = \frac{1}{2}.$$

Границата е намерена. Едновременно с това установихме, че тя съществува.

11.2. Пресметнете границите:

а) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^\alpha}{a^x}$, $a > 1$; **б)** $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln x}{x^\varepsilon}$, $\varepsilon > 0$;

в) $\lim\limits_{x\to 0} x^\varepsilon \ln x$, $\varepsilon > 0$; **г)** $\lim\limits_{x\to 1,\ x<1} \ln x \ln(1-x)$;

д) $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt[x]{x}$; **е)** $\lim\limits_{x\to 0,\ x>0} x^x$;

ж) $\lim\limits_{x\to 0,\ x>0} (-\ln x)^x$; **з)** $\lim\limits_{x\to\infty} (\ln x)^{\frac{1}{x}}$;

и) $\lim\limits_{x\to\infty} (\operatorname{th} x)^x$; **й)** $\lim\limits_{x\to 0} (\operatorname{ctg} x)^{\sin x}$;

к) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{2}{\pi}\operatorname{arctg} x\right)^x$; **л)** $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^{\ln x}}{(\ln x)^x}$;

м) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2},\ x<\frac{\pi}{2}} \left[\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)\operatorname{tg} x\right]^{\operatorname{tg} x}$;

н) $\lim\limits_{x\to\infty} \left[(x+a)^{1+\frac{1}{x}} - x^{1+\frac{1}{x+a}}\right]$;

о) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2x+1}\right)^{\frac{1}{x}}$; **п)** $\lim\limits_{x\to 0} x^{(x^x - 1)}$;

р) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \left(x\operatorname{tg} x - \dfrac{\pi}{2\cos x}\right)$; **с)** $\lim\limits_{x\to 1,\ x<1} \dfrac{\arccos x}{\sqrt{1-x}}$.

Решение. а) Ако $\alpha = 1$, то $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x}{a^x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{a^x \ln a} = 0$.

Ако $\alpha > 0$, то $\dfrac{x^\alpha}{a^x} = \left[\dfrac{x}{\left(a^{\frac{1}{\alpha}}\right)^x}\right]^\alpha \to 0$ при $x \to \infty$, защото $a^{\frac{1}{\alpha}} > 1$.

За $\alpha \leq 0$ границата очевидно е 0.

Граници от вида $\lim\limits_{x\to\infty} P(x)e^{-x}$ или $\lim\limits_{x\to\pm\infty} P(x)e^{-x^2}$ са 0, като P е полином, а това, че сменихме $a > 1$ с e, е без значение. Например $Pe^{-x} = \dfrac{P}{x^n}\,\dfrac{x^n}{e^x}$. Вторият множител клони към 0 при $x \to \infty$, но и първият клони към нула, ако вземем n, по-голямо от степента на P. Разгледайте границата от другия вид самостоятелно.

д) $y = x^{\frac{1}{x}}$, $\ln y = \dfrac{\ln x}{x}$, $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln x}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\frac{1}{x}}{1} = 0$, $y = e^{\ln y} \to e^0 = 1$.

Например при $x = \dfrac{1}{n}$ и $n \to \infty$ имаме $\sqrt[n]{n} \to 1$.

л) $\dfrac{x^{\ln x}}{(\ln x)^x} = e^{\ln^2 x - x\ln\ln x} = e^{x\left(\frac{\ln^2 x}{x} - \ln\ln x\right)}$.

м) Ако $x \to \dfrac{\pi}{2}$, $x < \dfrac{\pi}{2}$, то $\operatorname{tg}x \to \infty$. Да намерим границата на $\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)\operatorname{tg}x$. Пресмятаме

$$\lim \frac{\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\sin x}{\cos x} = \lim \frac{\frac{\pi}{2} - x}{\cos x} = \lim \frac{-1}{-\sin x} = 1.$$

(В тази точка вместо „$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2},\ x<\frac{\pi}{2}}$" ще пишем просто „lim").

Следователно имаме неопределената форма „1^{∞}".

Ако $y = u^v$, $u \to 1$ и $v \to \infty$ при $x \to a$, то представяме $\ln y = v\ln u = v\ln[1 + (u-1)] \sim v(u-1)$ при $x \to a$ и въпросът се свежда към границата на $v(u-1)$, защото при $t \to 0$ имаме $\ln(1+t) \sim t$, т. е.

$$\lim_{t\to 0} \frac{\ln(1+t)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{1}{1+t} = 1 \quad (\text{горе } t = u - 1 \to 0).$$

Пишем $f \sim g(x \to a)$, ако $\dfrac{f(x)}{g(x)} \to 1$ при $x \to a$, и казваме, че f и g са еквивалентни при $x \to a$. Като търсим граници, един множител можем да заменим с друг, еквивалентен на него.

В задачата

$$v = \operatorname{tg}x,\quad u = \left(\frac{\pi}{2} - x\right)\operatorname{tg}x,\quad \lim v(u-1) = \lim \frac{\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\operatorname{tg}x - 1}{\cos x}\sin x$$

$$= \lim \frac{\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\operatorname{tg}x - 1}{\cos x} = \lim \frac{-\operatorname{tg}x + \dfrac{\frac{\pi}{2} - x}{\cos^2 x}}{-\sin x} = \lim \frac{\frac{\pi}{2} - x - \frac{1}{2}\sin 2x}{-\cos^2 x}$$

$$= \lim \frac{-1 - \cos 2x}{2\cos x\sin x} = \lim \frac{-1 - \cos 2x}{2\cos x} = \lim \frac{2\sin 2x}{-2\sin x} = 0.$$

Три пъти изоставихме множителя $\sin x \to 1$. Щом $\ln y = v\ln u \sim v(u-1) \to 0$, то $y = e^{\ln y} \to e^0 = 1$.

в) $(x + a)^{1 + \frac{1}{x}} - x^{1 + \frac{1}{x+a}} = x^{1 + \frac{1}{x}}\left[\left(1 + \dfrac{a}{x}\right)^{1 + \frac{1}{x}} - x^{-\frac{a}{x(x+a)}}\right]$.

От д) знаем, че $x^{\frac{1}{x}} \to 1$ при $x \to \infty$. Да положим $t = \dfrac{1}{x}$. Трябва да намерим границата

$$\lim_{t\to 0} \frac{(1 + at)^{1+t} - t^{\frac{at^2}{1+at}}}{t}.$$

Първо пресмятаме границата на $t^{\frac{at^2}{1+at}}$ (това е „0^0"), а после прилагаме правилото на Лопитал и т. н.

11.3. Пресметнете границите:

а) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\arccos x}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x - \sin x}{x + \cos x}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{e^{\ln^2 x}}{x}$;

г) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{e^{x^2}}{e^x}$; д) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2 \sin\frac{1}{x}}{\sin x}$.

11.4. Пресметнете:

а) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{a^x + b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$; б) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\dfrac{a^x + b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$; в) $\lim\limits_{x\to -\infty} \left(\dfrac{a^x + b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$.

Докажете, че ако $a \neq b$, функцията $\left(\dfrac{a^x + b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$ расте (a и b са положителни константи).

11.5. Пресметнете границите:

а) $\lim\limits_{b\to\infty} \dfrac{\sqrt{ab} - a}{b - a}$, $a > 0$; б) $\lim\limits_{a\to 0,\ a>0} \dfrac{\sqrt{ab} - a}{b - a}$, $b > 0$;

в) $\lim\limits_{a\to\infty} \dfrac{\sqrt{a(a+x)} - a}{x}$, $x \neq 0$; г) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{a(a+x)} - a}{x}$, $a > 0$.

11.6. За кои реални стойности на p функцията $(\arccos x)^p$ има втора производна при $x = 1$?

11.7. Нека $u = x^{\sin x}$, $v = (\sin x)^x$, $x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right]$. Докажете, че u и v

могат да се продължат до непрекъснати в $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ функции, които не са диференцуеми в 0, а частното им е диференцуемо.

11.8. Нека $y = e^{-\frac{1}{x^2}}$ при $x \neq 0$. Докажете, че y се продължава до непрекъснатата в $\mathbf{R}$ функция, която има производни от всеки ред, и $y^{(n)}(0) = 0$ за всяко естествено n.

Решение. Тъй като $y \to 0$ при $x \to 0$, полагаме $y(0) = 0$ и запазваме за новата функция старото означение y. Функцията y е непрекъсната в $\mathbf{R}$, $y' = \frac{2}{x^3} e^{-\frac{1}{x^2}}$ при $x \neq 0$. По индукция проверяваме, че $y^{(n)} = P\left(\frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x^2}}$, като P е полином. Отново провеждаме индукция. Ако $y^{(n)}(0) = 0$, $n \geqq 0$, то диференчното частно за $y^{(n+1)}$ в точката 0 е

$$\frac{y^{(n)}(x) - y^{(n)}(0)}{x - 0} = \frac{y^{(n)}(x)}{x} = \frac{1}{x} P\left(\frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x^2}}.$$

Да положим тук $t = \frac{1}{x}$. При $x \to 0$, $x > 0$ ще имаме $t \to \infty$ и тогава $\frac{t\,P(t)}{e^{t^2}} \to 0$ според забележката при зад. 11.2, а). Така ще бъде и при $x \to 0$, $x < 0$ (тогава $t \to -\infty$). Следователно $y^{(n+1)}(0) = 0$. При това $y^{(0)}(0) = y(0) = 0$.

Така y има нула от безкраен ред при $x = 0$ (вж. зад. 2.12).

11.9. Докажете, че от релация между f' и g':

а) $f' \sim g'$ $(x \to a)$, **б)** $f' = o(g')$ $(x \to a)$,

следва релация между f и g от същия вид, ако f и g клонят към 0 или към ∞ при $x \to a$.

Решение. **а)** $f' \sim g'$ $(x \to a)$ означава, че $\lim\limits_{x \to a} \frac{f'}{g'} = 1$. Тогава $\lim\limits_{x \to a} \frac{f}{g} = 1$ според правилото на Лопитал.

б) $f' = o(g')$ $(x \to a)$ означава, че $\frac{f'}{g'} \to 0$ при $x \to a$. Тогава и $\frac{f}{g} \to 0$. При всяко деление предполагахме, че делителят е

различен от нула (за $x \neq a$), a е реално число или $+\infty$ или $-\infty$.

11.10. Докажете равенствата:

а) $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$;

б) $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x) - f(a) - (x - a)f'(a)}{(x - a)^2} = \frac{1}{2!} f''(a)$;

в) $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x) - f(a) - (x - a)f'(a) - \frac{(x - a)^2}{2!} f''(a)}{(x - a)^3} = \frac{1}{3!} f'''(a)$.

Да напишем тези равенства с помощта на знака „o", решени спрямо $f(x)$:

$$f(x) = f(a) + (x - a)f'(a) + o(x - a), \quad x \to a,$$

$$f(x) = f(a) + (x - a)f'(a) + \frac{(x - a)^2}{2} f''(a) + o((x - a)^2), \quad x \to a,$$

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2} f''(a) + \frac{(x-a)^3}{3!} f'''(a) + o((x-a)^3),$$

$$x \to a.$$

Как стана това? Напишете и докажете формулата, която завършва с $o((x - a)^n)$ (формули на Тейлор—Пеано). При какви предположения доказахте а), б) и в)?

Решение. Нека в някоя околност на a е дефинирана функцията f с производни до ред $n - 1$ и $f^{(n)}(a)$ съществува. За а), б) и в) съответно $n = 1, 2, 3$. Тогава

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a) - (x - a)f'(a)}{(x - a)^2} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x) - f'(a)}{2(x - a)} = \frac{f''(a)}{2}.$$

Приложихме правилото на Лопитал и дефиницията за производна. Доказахме, че

$$\frac{f(x) - f(a) - (x - a)f'(a)}{(x - a)^2} = \frac{f''(a)}{2} + o(1), \quad x \to a,$$

следователно

$$f(x) - f(a) - (x-a)f'(a) = \frac{(x-a)^2}{2} f''(a) + o((x-a)^2),\ x \to a.$$

Послужихме си с равенството $uo(v) = o(uv)$, $x \to a$, което лесно се проверява (u и v са различни от нула при $x \neq a$).

11.11. Нека в някоя околност на точката x е дефинирана и $n-1$ пъти диференцуема функцията f, като $f^{(n)}(x)$ съществува. За а), б), в), г) имаме съответно $n = 1, 2, 2, 3$. Докажете:

а) $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} = f'(x)$;

б) $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} = f''(x)$;

в) $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x)}{h^2} = f''(x)$;

г) $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x+3h) - 3f(x+2h) + 3f(x+h) - f(x)}{h^3} = f'''(x)$. И т. н.

11.12. Нека функцията f е дефинирана и диференцуема в интервала (a, ∞) и съществува $\lim\limits_{x\to\infty} f' = \lambda$. Докажете:

а) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lambda$;

б) ако $f(x) = o(x)(x \to \infty)$, то непременно $\lambda = 0$.

§ 12. Формула на Тейлор — Пеано

Нека функцията f е дефинирана и $n-1$ пъти диференцуема в някоя околност на точката a и $f^{(n)}(a)$ съществува. Тогава е в сила формулата на Тейлор с остатъчен член във формата на Пеано:

$$f(x) = f(a) + \frac{x-a}{1!}f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!}f''(a) + \ldots + \frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + o((x-a)^n)\ (x \to a)$$

(зад. 11.10). При $a = 0$ я наричаме още формула на Маклорен. Ако f има производни от всеки ред, можем да я напишем за всяко n. Ето как изглежда началото ѝ за някои често срещани функции при $a = 0$:

$e^x = 1 + \dfrac{x}{1!} + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!}$ и т. н.;

$\sin x = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \dfrac{x^7}{7!}$ и т. н.;

$\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} - \dfrac{x^6}{6!}$ и т. н.;

$\ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^4}{4}$ и т. н.;

$(1+x)^m = 1 + \binom{m}{1}x + \binom{m}{2}x^2$ и т. н.;

$\dfrac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3$ и т. н.

Например при $x \to 0$ имаме $e^x = 1 + o(1)$, $e^x = 1 + x + o(x)$, $e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + o(x^2)$ и т. н. Формулите за $(1+x)^m$ (нютонов бином) се отнасят за всяко реално m. При $m = -1$, като сменим x с $-x$, се получават формулите за $\dfrac{1}{1-x}$.

12.1. Решете примерите от зад. 11.1, като си послужите с формулата на Тейлор.

Решение. а) При $x \to 0$ имаме

$$e^x + e^{-x} - 2\cos x = \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) + \left(1 - x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)$$

$$-2\left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) = 2x^2 + o(x^2),\quad \frac{e^x + e^{-x} - 2\cos x}{x^2} = 2 + o(1) \to 2.$$

Заменихме израза $o(x^2) + o(x^2) - 2o(x^2)$ просто с $o(x^2)$, защото всъщност това е $u + v - 2w$, като знаем, че $\dfrac{u}{x^2}$, $\dfrac{v}{x^2}$ и $\dfrac{w}{x^2}$ клонят към 0 при $x \to 0$. Тогава и $\dfrac{u+v-2w}{x^2} \to 0$. Освен това $\dfrac{1}{x^2}\, o(x^2) = o(1)$, защото $uo(v) = o(uv)$ $(x \to a)$; $u, v \neq 0$ при $x \neq a$. Наистина, ако $f = o(v)$, то $\dfrac{f}{v} \to 0$, $\dfrac{uf}{uv} \to 0$ и $uf = o(uv)$. Знаменателят x^2 ни подсказа, че членовете от втора степен ще играят роля. Не винаги от пръв поглед е ясно колко члена от формулата на Маклорен е достатъчно да вземем. Тогава просто опитваме с известен брой членове.

б) За да развием $y = \operatorname{tg}x$ при $x \to 0$, ще намерим първите няколко производни в точката 0: $y' = \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x}$ $= 1 + \operatorname{tg}^2 x = 1 + y^2$, $y'(0) = 1$. Диференцираме втори път: $y'' = 2yy'$, $y''(0) = 0$; и още веднъж: $y''' = 2(y'^2 + yy'')$, $y'''(0) = 2$.

Следователно $\operatorname{tg}x = x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$ $(x \to 0)$. Тогава

$$\frac{\sin x - \operatorname{tg}x}{x^3} = \frac{\left(x - \frac{x^3}{3!}\right) - \left(x + \frac{x^3}{3}\right) + o(x^3)}{x^3}$$

$$= -\frac{1}{2} + o(1) \to -\frac{1}{2} \text{ при } x \to 0.$$

м) Ако $y = \arccos x$, то $y(0) = \frac{\pi}{2}$, $y' = \frac{-1}{\sqrt{1 - x^2}}$, $y'(0) = -1$, следователно $\arccos x = \frac{\pi}{2} - x + o(x)$ $(x \to 0)$. Оттук $\ln\left(\frac{2}{\pi}\arccos x\right)^{\frac{1}{x}}$ $= \frac{1}{x}\ln\left[\frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} - x + o(x)\right)\right] = \frac{1}{x}\ln\left(1 - \frac{2}{\pi}x + o(x)\right)$ $= \frac{1}{x}\left(-\frac{2}{\pi}x + o(x)\right) = -\frac{2}{\pi} + o(1) \to -\frac{2}{\pi}$, $\left(\frac{2}{\pi}\arccos x\right)^{\frac{1}{x}}$ $\to e^{-\frac{2}{\pi}}$ при $x \to 0$. Имаме $\frac{2}{\pi}o(x) = o(x)$, защото, ако $\frac{u}{x} \to 0$, то и $\frac{\frac{2}{\pi}u}{x} \to 0$. Всъщност трябваше да напишем: $\ln\left(1 - \frac{2}{\pi}x + o(x)\right) =$ $-\frac{2}{\pi}x + o(x) + o\left(-\frac{2}{\pi}x + o(x)\right)$. (Поради $\ln(1 + t) = t + o(t)$ $(t \to 0)$, тук

$t = -\frac{2}{\pi}x + o(x) \to 0$. Освен това при $x \neq 0$ за достатъчно малки $|x|$ ще бъде $t \neq 0$, защото $\frac{t}{x} \to -\frac{2}{\pi} \neq 0$.) Но $o\left(-\frac{2}{\pi}x + o(x)\right) = o(x)$, защото, ако $\frac{u}{-\frac{2}{\pi}x + o(x)} \to 0$, то $\frac{u}{x} = \frac{u}{-\frac{2}{\pi}x + o(x)}$ $\times \frac{-\frac{2}{\pi}x + o(x)}{x} \to 0 \cdot \left(-\frac{2}{\pi}\right) = 0$. Най-често ще изпускаме тези очевидни обосновавания.

В зад. 2.9, б) са намерени производните на функцията $\arcsin x$ при $x = 0$. Когато ги заместим, получаваме при $x \to 0$ развитието: $\arcsin x = x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\frac{x^5}{5}$ и т. н. Освен това $\arccos x$ $= \frac{\pi}{2} - \arcsin x$. От зад. 2.9, а) при $x \to 0$ получаваме $\operatorname{arctg}x =$ $x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5}$ и т. н.

с) $x - x^2\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = x - x^2\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)$

$$= \frac{1}{2} + o(1) \to \frac{1}{2} \ (x \to \infty).$$

Първо имахме $\ln(1 + t) = t - \frac{t^2}{2} + o(t^2)$ $(t \to 0)$, а после положихме $t = \frac{1}{x}$.

у) Полагаме $t = x - 1$ и т. н.

12.2. Пресметнете

$$\max_{-\frac{\pi}{2} \le \alpha \le \frac{\pi}{2}} \lim_{x \to \alpha} \frac{(x^2 + \alpha^2)\operatorname{arctg}\frac{\sin\alpha - \sin x}{\sin\alpha + \sin x}}{\cos^2 x - \cos^2\alpha}.$$

Достига ли се най-малка стойност?

Решение. По формулата на Тейлор $\sin x = \sin\alpha + (x-\alpha)\cos\alpha + o(x-\alpha)$, $\cos x = \cos\alpha - (x-\alpha)\sin\alpha + o(x-\alpha)$ $(x \to \alpha)$. При $\alpha \neq 0, \pm\frac{\pi}{2}$ имаме

$$t = \frac{\sin\alpha - \sin x}{\sin\alpha + \sin x} \sim \frac{(\alpha - x)\cos\alpha}{2\sin\alpha} \ (x \to \alpha), \ \mathrm{arctg}\, t \sim t \ (t \to 0),$$

$$\cos^2 x - \cos^2\alpha = (\cos x + \cos\alpha)(\cos x - \cos\alpha) \sim 2\cos\alpha \cdot (\alpha - x)\sin\alpha \quad (x \to \alpha).$$

Следователно

$$\frac{(x^2 + \alpha^2)\mathrm{arctg}\, t}{\cos^2 x - \cos^2\alpha} \sim \frac{2\alpha^2(\alpha - x)\cos\alpha}{2\sin\alpha}\, \frac{1}{2\cos\alpha \cdot (\alpha - x)\sin\alpha} = \frac{\alpha^2}{2\sin^2\alpha}$$

при $x \to \alpha$. Случаите $\alpha = 0, \pm\frac{\pi}{2}$, а също и останалата част от решението разгледайте самостоятелно.

Формулата на Тейлор — Пеано следва от правилото на Лопитал, но често (при известен опит) води до целта по-бързо, а при някои въпроси е незаменима. Например, ако ни интересува локалното поведение на функцията $\mathrm{tg}x - \sin x$ при $x \to 0$, то от зад. 11.1, б) имаме $\mathrm{tg}x - \sin x \sim \frac{x^3}{2}$ $(x \to 0)$. Това лесно ще докажем с правилото на Лопитал, но то не ни подсеща да разделим с x^3. Ако $f(x)$ $\sim c(x-a)^n$ $(x \to a)$, наричаме $c(x-a)^n$ главна част на f при $x \to a$ $(c \neq 0)$. Ако $f(x) \sim cx^n$ $(x \to \infty)$ наричаме cx^n главна част на f при $x \to \infty$. Функцията e^x няма главна част при $x \to \infty$.

12.3. Намерете главните части при $x \to 0$ на функциите:

а) $\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos x\right)$; б) $(1+x)^x - 1$;

в) $\ln\ln(e+x)$; г) $\mathrm{tg}x - \dfrac{x - \frac{x^3}{6}}{1 - \frac{x^2}{2}}$;

д) $\mathrm{ctg}x - \frac{1}{x}$; е) $\mathrm{ctg}x - \frac{1}{x} + \frac{x}{3}$;

ж) $\frac{1}{\cos x} - \frac{1}{\mathrm{ch}x}$; з) $\mathrm{tg}(\sin x) - \sin(\mathrm{tg}x)$.

Решение. а) При $x \to 0$ имаме

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos x\right) = \cos\left[\frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{x^2}{2!} + o(x^2)\right)\right]$$

$$= \cos\left[\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi x^2}{4} + o(x^2)\right)\right] = \sin\left(\frac{\pi x^2}{4} + o(x^2)\right) = \frac{\pi x^2}{4} + o(x^2).$$

Главната част при $x \to 0$ е $\frac{\pi x^2}{4}$.

ж) $$\frac{1}{\cos x} - \frac{1}{\mathrm{ch}x} = \frac{1}{1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)} - \frac{1}{1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2)}$$

$$= \left(1 + \frac{x^2}{2}\right) - \left(1 - \frac{x^2}{2}\right) + o(x^2) = x^2 + o(x^2)$$

при $x \to 0$. Главната част е x^2. Послужихме си с равенството $\frac{1}{1-t} = 1 + t + o(t)$ $(t \to 0)$.

12.4. Намерете главните части на функцията $\arccos x$:

а) при $x \to 0$; б) при $x \to 1$, $x < 1$.

Решение. а) $\arccos 0 = \frac{\pi}{2} \neq 0$. Главната част при $x \to 0$ е $\frac{\pi}{2}$.

б) От зад. 11.2, с) следва, че главната част при $x \to 1$, $x < 1$, е $\sqrt{2}\,\sqrt{1-x}$.

12.5. Докажете, че:

а) ако $y = a_0 + a_1(x-a) + \ldots + a_n(x-a)^n = o((x-a)^n)$ $(x \to a)$, то $a_0 = a_1 = \ldots = a_n = 0$;

б) всяко развитие на четна функция по формулата на Маклорен съдържа само четни степени на x, а на нечетна функция — само нечетни степени;

в) формулата на Тейлор—Пеано може почленно да се диференцира (с формално диференциране под знака o).

Решение. **в)** След диференциране (по x) получаваме

$$f'(x) = f'(a) + \ldots + \frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(a) + o((x-a)^{n-1}) \quad (x \to a).$$

Тази формула е вярна, защото е също формула на Тейлор — Пеано (за f' и $n-1$). Заместихме $o(n(x-a)^{n-1})$ с $o((x-a)^{n-1})$.

Ако по същия начин диференцираме равенството $x^2 \sin \frac{1}{x} = o(\sin x)$ $(x \to 0)$, ще получим неверен резултат.

Тъй като $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$, вместо да търсим производни от по-висок ред (които без съмнение съществуват), можем да напишем с неопределени коефициенти $(x + Ax^3$ и т. н.$)' = \frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2$ и т. н. Оттук $A = -\frac{1}{3}$. Като заместим в тъждеството $\cos x \cdot \operatorname{tg} x = \sin x$ развития на $\sin x$, $\cos x$ и $\operatorname{tg} x = x + Bx^3$ и т. н., след разкриване на скобите и приравняване на коефициентите ще получим $B = \frac{1}{3}$. Впрочем разделете непосредствено $\sin x$ на $\cos x$ (или $\cos x$ на $\sin x$). При деление на полиноми степените се подреждат в низходящ ред, а тук — във възходящ.

12.6. Намерете константи, при които за $x \to 0$ са верни следните равенства:

а) $x = A\sin x + B\operatorname{tg} x + o(x)^4$; **б)** $\operatorname{tg} x = \dfrac{x + Ax^3}{1 + Bx^2} + o(x^6)$;

в) $\operatorname{ctg} x = \dfrac{1 + Ax^2}{x + Bx^3} + o(x^4)$; **г)** $e^x = \dfrac{1+Ax+Bx^2}{1+Cx+Dx^2} + o(x^4)$.

Решение. **а)** При $x \to 0$ имаме

$$x = A\left(x - \frac{x^3}{6}\right) + B\left(x + \frac{x^3}{3}\right) + o(x^4)$$

$$= (A + B)x + \left(\frac{B}{3} - \frac{A}{6}\right)x^3 + o(x^4).$$

Приравняваме коефициентите пред еднаквите степени на x и получаваме $A + B = 1$, $\frac{B}{3} - \frac{A}{6} = 0$. Оттук $A = \frac{2}{3}$, $B = \frac{1}{3}$.

Послужихме ли си с резултата на зад. 12.5, а)? Писахме $o(x^4)$, а не $o(x^3)$, защото членовете от четвърта степен имат коефициент 0 и за $\sin x$, и за $\operatorname{tg} x$.

б) Освободете се от знаменателите. Сравнете със зад. 12.3, г).

12.7. **а)** Напишете маклоренова формула за функциите $\operatorname{sh} x$ и $\operatorname{ch} x$;

б) същото за функцията $e^{-\frac{1}{x^2}}$, която считаме за равна на нула при $x = 0$;

в) същото за функцията $\dfrac{1}{x^2 - 3x + 2}$;

г) същото за обратната функция $y(x)$ на $x = y + y^3$ до $o(x^4)$;

д) ако $y = x^2 \sin 2x$, пресметнете $y^{(11)}(0)$;

е) намерете главната част при $x \to 0$ на $10^x + \lg(1 + x) - \cos x^{n}$;

ж) ако $u = o(v) = w$, какво общо има между u и w?

Решение. **б)** Според зад. 11.8 $e^{-\frac{1}{x^2}} = o(x^n)$ $(x \to 0)$ за всяко естествено n и това е маклореново развитие на тази функция.

в) $$\frac{1}{x^2 - 3x + 2} = \frac{1}{(x-1)(x-2)} = \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-1}$$

$$= \frac{1}{1-x} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{x}{2}} \quad \text{и т.н.}$$

Разложихме на елементарни дроби както в зад. 2.4, г).

г) $y' = \dfrac{1}{1+3y^2}$ и според зад. 2.11 функцията y има производни от всеки ред.

ж) Нищо освен това, че $\frac{u}{v} \to 0$ и $\frac{w}{v} \to 0$ при $x \to a$. Например функциите $\sin x$, $\operatorname{arctg} x$, $\arcsin x$, $\ln(1 + x)$, $\operatorname{tg} x$ при $x \to 0$ са от вида $x + o(x)$.

12.8. Докажете, че приближителното равенство $f(x+h) \approx f(x) + hf'\left(x + \frac{h}{2}\right)$ е по-точно от „формулата за безкрайно малките нараствания“ (вж. бележката след зад. 4.6).

Решение. Ако f е диференцуема в някоя околност на x, а $f''(x)$ съществува, можем да напишем

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) + o(h^2) \quad (h \to 0).$$

Освен това $f'\left(x + \frac{h}{2}\right) = f'(x) + \frac{h}{2}f''(x) + o(h) \quad (h \to 0).$

Разглеждаме разликите

$$\Delta_1 = f(x+h) - f(x) - hf'(x) = \frac{h^2}{2}f''(x) + o(h^2),$$

$$\Delta_2 = f(x+h) - f(x) - hf'\left(x + \frac{h}{2}\right) = o(h^2).$$

При $f''(x) \neq 0$ ще имаме $\Delta_2 = o(\Delta_1)$ $(h \to 0)$.

12.9. В зад. 3.7 получихме формулата на Нютон, като заменихме уравнението $f(a+h) = 0$ с $f(a) + hf'(a) = 0$. Вземете и члена с h^2, за да получите евентуално по-добра формула, но без да решавате квадратно уравнение.

Решение. $f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2}f''(a) = 0$, $hf(a) + h^2f'(a) + \frac{h^3}{2}f''(a) = 0$. От първото уравнение, умножено с $f'(a)$, изваждаме второто, умножено с $\frac{f''(a)}{2}$, и пренебрегваме члена с h^3:

$$f(a)f'(a) + h\left[f'^2(a) - \frac{1}{2}f(a)f''(a)\right] \approx 0.$$

Новото приближение за корена x е

$$x = a + h \approx a - \frac{f(a)f'(a)}{f'^2(a) - \frac{1}{2}f(a)f''(a)}.$$

12.10. Нека една функция f има в някоя околност на точката a производни до $(n-1)$-ви ред и $f^{(n)}(a)$ съществува.

а) За $n = 2$ докажете, че $f(a+h) - f(a-h) = 2hf'(a) + o(h^2)$ и $f(a+h) - f(a-h) = h[f'(a+h) + f'(a-h)] + o(h^2)$ при $h \to 0$;

б) За $n = 4$ намерете такива константи A, B и C, че при $h \to 0$ да бъде в сила

$$f(a+h) - f(a-h) = 2h[Af'(a+h) + Bf'(a) + Cf'(a-h)] + o(h^4).$$

Решение. **б)** $f(a+h) - f(a-h) = [f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2!}f''(a)$

$$+ \frac{h^3}{3!}f'''(a) + \frac{h^4}{4!}f^{IV}(a) + o(h^4)] - [f(a) - hf'(a) + \frac{h^2}{2!}f''(a) - \frac{h^3}{3!}f'''(a)$$

$$+ \frac{h^4}{4!}f^{IV}(a) + o(h^4)] = 2hf'(a) + \frac{h^3}{3}f'''(a) + o(h^4).$$

Този израз трябва да бъде равен на

$$2h\Big(A[f'(a) + hf''(a) + \frac{h^2}{2!}f'''(a) + \frac{h^3}{3!}f^{IV}(a)] + Bf'(a)$$

$$+ C[f'(a) - hf''(a) + \frac{h^2}{2!}f'''(a) - \frac{h^3}{3!}f^{IV}(a)] + o(h^3)\Big).$$

Приравняваме коефициентите: $A + B + C = 0$, $A - C = 0$, $A + C = \frac{1}{3}$. Намираме $A = C = \frac{1}{6}$, $B = \frac{4}{6}$. Формулата е точна (т. е. вярна без остатъка $o(h^4)$), ако f е полином, чиято степен не надминава 4. Сравнете със зад. 1.10 и 7.9.

12.11. **а)** Сравнете точността на формулите $f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ и $f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$ (вж. зад. 11.11, а));

б) Направете същото за двете формули, които се получават от зад. 11.11, б) и в).

Решение. **а)** $\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) + o(h^2)}{h}$

$= f'(x) + \frac{h}{2} f''(x) + o(h)$ при $h \to 0$. В същото време

$$\frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} = \frac{1}{2h}\left(\left[f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2!}f''(x) + \frac{h^3}{3!}f'''(x)\right]\right)$$

$$-\left[f(x) - hf'(x) + \frac{h^2}{2!}f''(x) - \frac{h^3}{3!}f'''(x)\right] + o(h^3)) = f'(x) + \frac{h^2}{6}f'''(x) + o(h^2).$$

Втората формула е по-добра.

12.12. Нека s е дължината на дъга от окръжност, d — съответната ѝ хорда, а δ — хордата, съответна на половината от дъгата. Изведете приблизителна формула от вида $s \approx A d\alpha + B\delta$ за малък централен ъгъл (формула на Хюйгенс).

Решение. При централен ъгъл $2x$ и радиус 1 имаме $s = 2x$, $d = 2\sin x$, $\delta = 2\sin\frac{x}{2}$,

$$x = A\sin x + B\sin\frac{x}{2} + o(x^3) = A\left(x - \frac{x^3}{6}\right) + B\left(\frac{x}{2} - \frac{x^3}{48}\right) + o(x^3).$$

$$A + \frac{B}{2} = 1, \quad \frac{A}{6} + \frac{B}{48} = 0, \quad A = -\frac{1}{3}, \quad B = \frac{8}{3}.$$

Формулата на Хюйгенс е: $s \approx \frac{8\delta - d}{3}$ с грешка $o(x^3)$ $(x \to 0)$.

12.13. Определете константите така, че при $h \to 0$ да бъде в сила равенството:

а) $y'(a) = \frac{1}{2h}[Ay(a) + By(a+h) + Cy(a+2h)] + o(h)$;

б) $y''(a) = \frac{1}{h^2}[Ay(a) + By(a+h) + Cy(a+2h) + Dy(a+3h)] + o(h)$.

12.14. Нека функцията f е дефинирана и три пъти диференцуема в някоя околност U на точката a, $f: U \to U$, $x_0 \in U$ и равенствата $x_{n+1} = f(x_n)$ определят редица $\{x_n\}$, за която $x_n \neq a$ и $x_n \to a$ (тогава $f(a) = a$). Докажете:

а) ако $|f'(x)| \leqq k < 1$ при $x \in U$, то $|x_n - a| \leqq k^n|x_0 - a|$;

б) ако $f'(a) = 1$ и $f''(a) \neq 0$, то $n(x_n - a) \to \frac{-2}{f''(a)}$ при $n \to \infty$;

в) ако $f'(a) = 1$, $f''(a) = 0$ и $f'''(a) < 0$, то $n(x_n - a)^2 \to \frac{-3}{f'''(a)}$ при $n \to \infty$;

г) ако $f'(a) = -1$, $F(x) = f(f(x))$ и $F'''(a) < 0$, то $n(x_n - a)^2 \to \frac{-6}{F'''(a)}$ при $n \to \infty$.

Решение. **б)** При $x \to a$, $x \neq a$ имаме

$$f(x) - f(a) = (x-a)f'(a)\left[1 + \frac{x-a}{2}\frac{f''(a)}{f'(a)} + o(x-a)\right] \neq 0,$$

когато x е достатъчно близо до a. Следователно

$$\frac{1}{f(x) - f(a)} = \frac{1}{(x-a)f'(a)}\left[1 - \frac{x-a}{2}\frac{f''(a)}{f'(a)} + o(x-a)\right]$$

$$= \frac{1}{x-a} - \frac{1}{2}f''(a) + o(1).$$

Нека $y_n = \frac{1}{x_n - a}$. Тогава

$$y_{n+1} - y_n = \frac{1}{f(x_n) - f(a)} - \frac{1}{x_n - a} = -\frac{1}{2}f''(a) + o(1) \to -\frac{1}{2}f''(a)$$

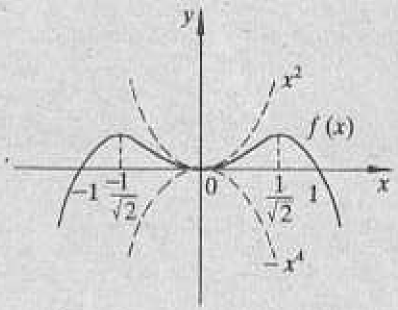
при $n \to \infty$. От зад. 4.3., в) на гл. 1 получаваме $\frac{y_n}{n} = \frac{1}{n(x_n - a)} \to -\frac{1}{2}f''(a)$.

§ 13. Графики на функции

Изследването на функции провеждаме на три етапа: **А.** Разглеждаме функцията и начертаваме графиката ѝ без помощта на производните. **Б.** Изследваме първата производна и уточняваме или коригираме чертежа. **В.** Изследваме втората производна и допълнително уточняваме чертежа.

13.1. Начертайте графиките на функциите от зад. 8.1.

Решение. а) А. Тъй като $y = x^2 - x^4 = x^2(1 - x^2) \sim x^2$ при $x \to 0$, то близо до 0 графиката е сходна с тази на функцията x^2, а тъй като $y = -x^4\left(1 - \frac{1}{x^2}\right) \sim -x^4$ при $x \to \pm\infty$, за големи по абсолютна стойност x графиката е сходна с тази на функцията $-x^4$. Освен това y се анулира само при $x = 0, 1, -1$ и е четна (т. е. графиката е симетрична относно оста y). Тези наблюдения са достатъчни, за да нахвърлим фиг. 11. Линията е без прекъсване и



Фиг. 11

плавна, защото y е непрекъсната и диференцуема (графиката има допирателна във всяка своя точка). Наклонът на допирателната се изменя плавно, защото y' е непрекъсната. Казваме „графика“, а всъщност рисуваме скица на графиката. Например за графиките на функциите $|x|^\alpha$ при всевъзможни $\alpha > 1$ рисуваме една и съща скица.

На фиг. 11 виждаме два максимума. Виждаме и две инфлексни точки, които ръката сама е изразила. Това са точки, отделящи интервал на изпъкналост от интервал на вдлъбнатост.

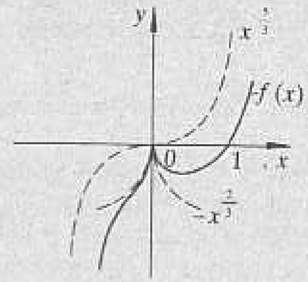
Б. Производната $y' = 2x - 4x^3 = 2x(1 - 2x^2)$ се анулира само при $x = 0$ и $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$. За хоризонталната допирателна при $x=0$ ($y'(0) = 0$) знаехме (защото $y \sim x^2$ при $x \to 0$). Научихме къде се достигат двата максимума (и че наистина са два). Пресмятаме $y\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{4}$. Допирателните в точките на максимум са хоризонтални (защото $y'\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 0$). Освен това $y' > 0$ в

$\left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $y' < 0$ в $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \infty\right)$, т.е. y расте в интервала $\left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ и намалява в $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \infty\right)$. Знака на y' определихме както в зад. 8.1.

б). Не разгледахме случая $x < 0$, защото имаме симетрия относно оста y. Тези изследвания обосноваха фиг. 11.

В. Втората производна $y'' = 2 - 12x^2 = 2(1 - 6x^2)$ се анулира само при $x = \pm\frac{1}{\sqrt{6}}$; $y'' > 0$ при $|x| < \frac{1}{\sqrt{6}}$; $y''<0$ при $|x| > \frac{1}{\sqrt{6}}$. Следователно функцията е изпъкнала в интервала $\left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$ и вдлъбната в интервалите $\left(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$ и $\left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \infty\right)$. При $x = \pm\frac{1}{\sqrt{6}}$ имаме инфлексия, $y\left(\pm\frac{1}{\sqrt{6}}\right) = \frac{5}{36}$. Намерихме инфлексните точки $\left(\pm\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{5}{36}\right)$. Тези изследвания допълнително обосноваха фиг. 11.

ж) А. Тъй като $y = (x-1)\sqrt[3]{x^2} \sim -\sqrt[3]{x^2} = -x^{\frac{2}{3}}$ при $x \to 0$, близо до 0 графиката е сходна с тази на функцията $-x^{\frac{2}{3}}$, т. е. има при $x = 0$ вертикална допирателна и т. нар. рогова точка. Тъй като $y = x^{\frac{5}{3}}\left(1 - \frac{1}{x}\right) \sim x^{\frac{5}{3}}$ при $x \to \pm\infty$, за големи по абсолютна стойност x графиката е сходна с тази на функцията $x^{\frac{5}{3}}$ (без да се доближава асимптотично към нея), която скицираме както и графиката на функцията x^3 (защото $\frac{5}{3} > 1$ и $x^{\frac{5}{3}}$ е нечетна; трябва да познаваме функциите x^α). Освен това y се анулира само при $x = 0$ и при $x = 1$ (фиг. 12). От $y \sim x - 1$ при $x \to 1$ получаваме, че близо до 1 графиката е сходна с правата $x - 1$, т. е. пресича оста x под ъгъл $45°$. Ръката сама е изразила една инфлексна точка; при $x = 0$ имаме локален максимум; виждаме и един локален минимум.



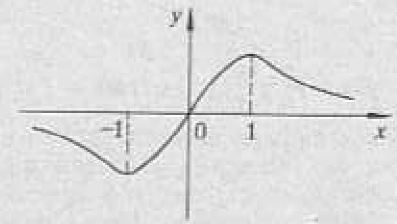
Фиг. 12

Б. Производната $y' = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x}}(5x - 2)$ при $x \to 0$ клони по абсолютна стойност към ∞, но от т. А вече знаем за вертикалната допирателна. Анулира се само при $x = \dfrac{2}{5}$ — отляво $y' < 0$, отдясно $y' > 0$. Намерихме точката на локален минимум $y\left(\dfrac{2}{5}\right) = -\dfrac{3}{5}\sqrt[3]{\dfrac{4}{25}}$. Определете самостоятелно знаците на y' (както в зад. 8.1, б)) и съответно интервалите на монотонност за y.

В. Втората производна $y'' = \dfrac{2(5x + 1)}{9x\sqrt[3]{x}}$ се анулира само за $x = -\dfrac{1}{5}$, като сменя знака си; при $x \to 0$ клони към безкрайност, $y\left(-\dfrac{1}{5}\right) = -\dfrac{6}{5}\sqrt[3]{\dfrac{1}{25}}$. Намерихме инфлексната точка. Интервалите на изпъкналост и вдлъбнатост определете самостоятелно.

о) А. Функцията $y = \arcsin\dfrac{2x}{1 + x^2}$ е дефинирана при $\left|\dfrac{2x}{1 + x^2}\right| \leqq 1$, т. е. при $2|x| \leqq 1 + x^2$, $(1 - |x|)^2 \leqq 0$, т. е. за всяко x. Графиката е симетрична относно началото, защото функцията е нечетна. Тъй като $\dfrac{2x}{1 + x^2} \to 0$, $y \to \arcsin 0 = 0$ при $x \to \pm\infty$, оста x

е асимптота на графиката, а тъй като $\dfrac{2x}{1 + x^2} \sim 2x$ и $y \sim 2x$ при $x \to 0$ (поради $\arcsin t \sim t$ $(t \to 0)$, тук $t = \dfrac{2x}{1 + x^2}$), близо до 0 графиката е сходна с правата $2x$ и има в 0 наклон 2. Функцията y се анулира само за $x=0$. Изразяваме получената информация на фиг. 13. Виждаме два локални екстремума, които всъщност са



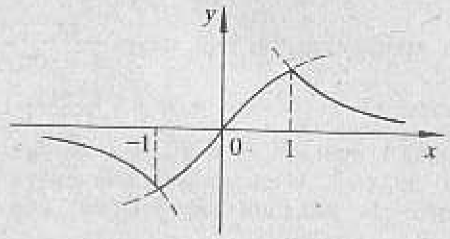
Фиг. 13

известни, защото максималната стойност на $\arcsin t$ е $\dfrac{\pi}{2}$ и се достига в точката 1, а $\dfrac{2x}{1 + x^2} = 1$ само за $x = 1$. Така y има при $x = 1$ най-голяма стойност $y(1) = \dfrac{\pi}{2}$ и при $x = -1$ — най-малка стойност $y(-1) = -\dfrac{\pi}{2}$. Ръката е изразила и три инфлексни точки. В примерите **а)** и **ж)** y' ни послужи, за да намерим точки на локален екстремум, а тук ги намерихме без производната. Въпреки това да преминем към т. **Б.**

Б. Производната $y' = \dfrac{2}{1 + x^2}\dfrac{1 - x^2}{|1 - x^2|}$ съществува за $x \neq \pm 1$.

Имаме $y' = \dfrac{2}{1 + x^2}$ при $x \in (-1, 1)$ и $y' = -\dfrac{2}{1 + x^2}$ за $|x| > 1$.

В точката 1 производна не съществува (няма допирателна), но границата на y' при $x \to 1$ отляво е 1, а отдясно е -1. Правите през точката на максимум с наклон 1 и -1 са допирателни съответно към лявата и дясната част на графиката. Нищо подобно не е изразено на фиг. 13. Нахвърляме нова скица (фиг. 14). Имаме две ъглови точки, от трите инфлексни точки остана една, а за други две ръката не подсказва. Интервалите на монотонност определете сами.



Фиг. 14

В. Пресмятаме $y'' = \dfrac{-4x\varepsilon}{(1+x^2)^2}$, като $\varepsilon = 1$ при $|x| < 1$, $\varepsilon = -1$ при $|x| > 1$. Началото е инфлексна точка, защото y'' се анулира при $x = 0$ и сменя знака си. Всъщност y'' сменя знака си (а значи y сменя посоката на изпъкналост) още и в точките ± 1. Но в тези точки y'' (както и y') не съществува. Прегледайте дефинициите в учебника, за да разберете има ли инфлексия при $x = \pm 1$. Интервалите на изпъкналост намерете самостоятелно.

п) Вж. зад. 5.4.

13.2. Начертайте графиките на функциите:

а) $\mathrm{sh}x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$; **б)** $\mathrm{ch}x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$; **в)** $\mathrm{th}x = \dfrac{\mathrm{sh}x}{\mathrm{ch}x}$;

г) $\mathrm{cth}x = \dfrac{\mathrm{ch}x}{\mathrm{sh}x}$; **д)** $\arcsin(\sin x)$; **е)** $\arccos(\cos x)$;

ж) $\mathrm{arctg}(\mathrm{tg}x)$; **з)** $\mathrm{arcctg}(\mathrm{ctg}x)$; **и)** $\sqrt{1-x}$;

й) $\sqrt[3]{1-x}$; **к)** $(1-x)^3$; **л)** $\sqrt{1+x}$;

м) $\sqrt[3]{1+x}$; **н)** $x^n e^{-x}$, $n = 0, 1, 2, 3$;

о) $x^n e^{-x^2}$, $n = 0, 1, 2, 3$,

13.3. Колко скици е достатъчно да направим, за да бъде представена всяка функция от вида x^α? Осите x и y се чертаят и означават.

13.4. Да се построят графиките на функциите:

а) $\dfrac{x+3}{\sqrt{1+x^2}}$; **б)** $\dfrac{(x-1)^2}{\sqrt{x^4+1}}$; **в)** $\sqrt[3]{x^3 - x^2}$;

г) $\mathrm{arctg}(x^3 - x^2)$; **д)** $e^{x^3 - x^2}$; **е)** $x^3 - 6x + 6\mathrm{arctg}x$;

ж) $\ln^2 x$; **з)** $\ln(1 + x^2)$; **и)** $\ln(1 + e^x)$;

й) $\dfrac{x^3}{x^2-1}$; **к)** $\dfrac{x^2}{x^2-1}$; **л)** $\dfrac{x}{x^2-1}$;

м) $x^2 + \dfrac{1}{x}$; **н)** $\dfrac{1}{x^3+1}$; **о)** $\dfrac{x^3-1}{x^2-5x+6}$;

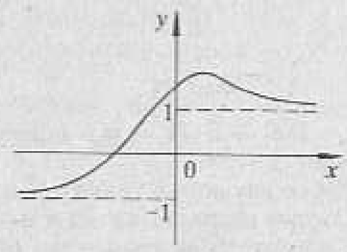
п) $\sqrt[3]{1-x^3}$; **р)** $\dfrac{x^4}{x^3-1}$; **с)** $\sqrt[x]{x}$;

т) x^x; **у)** $\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$; **ф)** $x^{\frac{2}{3}} - (x^2-1)^{\frac{1}{3}}$;

х) $\dfrac{x}{\sqrt[3]{1-x^2}}$; **ц)** $x\ln x$; **ч)** $\dfrac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}$;

щ) решението на уравнението на Ферхюлст (зад. 7.7) при $k = 1$, $c = 1$ и $y(0) = 5 \,.\, 10^9$.

Решение. **а) А.** Правата $y = 1$ е асимптота при $x \to \infty$, а правата $y = -1$ — при $x \to -\infty$, защото $y = \dfrac{x+3}{\sqrt{1+x^2}} \to \pm 1$ при $x \to \pm\infty$. Функцията y се анулира само при $x = -3$, $y(0) = 3 > 1$. Чертаем фиг. 15. Очакваме максимум, но не знаем къде е (и дали е един). Очакваме и две инфлексни точки.

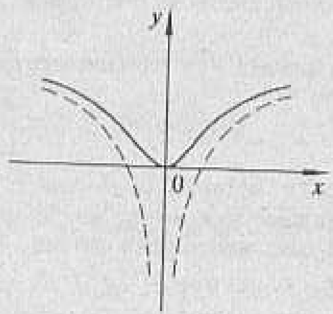


Фиг. 15

Б. $y' = \dfrac{1-3x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}$ се анулира само за $x = \dfrac{1}{3}$, отляво $y' > 0$, отдясно $y' < 0$. Функцията y достига най-голяма стойност $y\left(\dfrac{1}{3}\right) = \sqrt{10}$, расте до $x = \dfrac{1}{3}$, а после намалява.

В. $y'' = \dfrac{3(2x^2-x-1)}{(1+x^2)^{\frac{5}{2}}}$ се анулира само за $x = 1$ и $x = -\dfrac{1}{2}$ и в тези две точки сменя знака си. Имаме инфлексия при $x = 1$ и $x = -\dfrac{1}{2}$, като в интервалите $\left(-\infty, -\dfrac{1}{2}\right)$ и $(1, \infty)$ функцията е изпъкнала (защото там $y'' > 0$), а в интервала $\left(-\dfrac{1}{2}, 1\right)$ е вдлъбната (там $y'' < 0$).

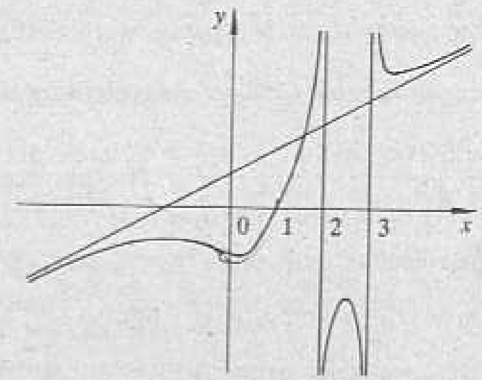
з) Функцията е четна и расте в $[0, \infty)$. Близо до 0 графиката е сходна с параболата $y = x^2$, защото $\ln(1+x^2) \sim x^2$ при $x \to 0$. Тъй като $\ln(1+x^2) - \ln x^2 = \ln\dfrac{1+x^2}{x^2} \to 0$ при $x \to \infty$, линията с уравнение $y = \ln x^2 = 2\ln|x|$ е асимптотична за графиката. На чертежа възникват две инфлексни точки (фиг. 16). Продължете самостоятелно.



Фиг. 16

и) От $\ln(1+e^x) - \ln e^x \to 0$ $(x \to \infty)$ получаваме, че правата $y = x$ е асимптота при $x \to \infty$.

о) А. Знаменателят се анулира в точките 2 и 3. При $x \to 2$ или 3 функцията y по абсолютна стойност клони към ∞. Правите $x = 2$ и $x = 3$ са вертикални асимптоти за графиката (фиг. 17). Функцията



Фиг. 17

се анулира само за $x = 1$, положителна е в $(1, 2)$ и $(3, \infty)$, отрицателна е в $(-\infty, 1)$ и $(2, 3)$. При $x \to \pm\infty$ имаме $y = \dfrac{x^3-1}{x^2-5x+6} \to \pm\infty$. Да разделим двата полинома. Получаваме частно $x + 5$ и остатък $19x - 31$. Следователно $y = x + 5 + \dfrac{19x-31}{x^2-5x+6} = x + 5 + R$, като $R \to 0$ при $x \to \pm\infty$ и правата $y = x + 5$ е асимптота на графиката.

Една рационална функция има при $x \to \pm\infty$ асимптота $y = ax + b$, $a \neq 0$, ако степента p на числителя е с единица по-голяма от степента q на знаменателя. Асимптотата намираме с деление. Ако $p \leqq q$, имаме хоризонтална асимптота. При други функции пресмятаме $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{y}{x} = a$, $\lim\limits_{x\to\infty} (y - ax) = b$, асимптота е $y = ax + b$. Ако някоя от границите не съществува, асимптота (при $x \to \infty$) няма. Така постъпваме и при $x \to -\infty$.

В конкретния случай $R > 0$ при $x > 3$ и графиката е разположена над асимптотата, а при $x < 0$ тя е под асимптотата, защото $R < 0$. Пресмятаме: $y(0) = -\dfrac{1}{6}$, $y = -\dfrac{1}{6}\dfrac{1-x^3}{1-\frac{5}{6}x+\frac{1}{6}x^2}$

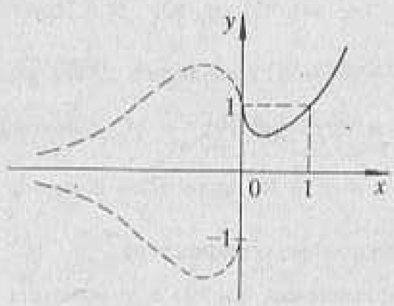
$$= -\frac{1}{6}(1-x^3)\left(1+\frac{5}{6}x+o(x)\right) = -\frac{1}{6}\left(1+\frac{5}{6}x\right) + o(x)$$

$= -\frac{1}{6} - \frac{5}{36}x + o(x)$ $(x \to 0)$. Наклонът при $x = 0$ е отрицателен.

На фиг. 17 виждаме четири локални екстремума и една инфлексна точка.

Б. $y' = \dfrac{x^4 - 10x^3 + 18x^2 + 2x - 5}{(x^2 - 5x + 6)^2}$. Тук ще преустановим изследването.

т) А. Ще разгледаме функцията $y = x^x$ при $x > 0$. Пресмятаме: $\lim\limits_{x \to \infty} y = \infty$, $y = x^x = e^{x\ln x} \to e^0 = 1$ при $x \to 0$, защото $x\ln x \to 0$. В интервала $(1, \infty)$ функцията y расте, защото расте $x\ln x$ (произведение на две растящи положителни функции). Освен това $y(1) = 1$, а $0 < y(x) < 1$ при $0 < x < 1$, защото $x\ln x < 0$ (фиг. 18). При $x \to 0$ имаме $y = e^{x\ln x} = 1 + x\ln x + o(x\ln x)$, откъдето бихме



Фиг. 18

получили, че в точката $(0, 1)$ графиката има вертикална допирателна, но вместо това да преминем към т. Б.

Б. Производната $y' = x^x(\ln x + 1)$ се анулира само за $x = \frac{1}{e}$, отляво $y' < 0$, отдясно $y' > 0$ (защото $\ln x$ расте). Следователно y намалява до най-малка стойност при $x = e^{-1}$, а после расте. Тъй като $y' \to -\infty$ при $x \to 0$, в точката $(0, 1)$ имаме вертикална допирателна. Функциите $e^{u(x)}$ и $u(x)$ имат едни и същи интервали на монотонност, затова можеше да разгледаме $u = x\ln x$ вместо y. Намерихме y' само за да пресметнем границата при $x \to 0$. Изучете y'' самостоятелно.

Да положим $x = -\frac{p}{q}$, като p и q са цели положителни числа, а q е нечетно. Имаме $\left(-\frac{p}{q}\right)^{-\frac{p}{q}} = \dfrac{1}{\sqrt[q]{\left(-\frac{p}{q}\right)^p}}$. При четно p това е $\left(\frac{p}{q}\right)^{-\frac{p}{q}} = (-x)^x$, а при нечетно p е $-\left(\frac{p}{q}\right)^{-\frac{p}{q}} = -(-x)^x$.

Точките лежат върху графиките на функциите $\pm(-x)^x$ при $x < 0$ (без да ги запълват). Изследвайте тези функции. Графиките им са дадени с пунктир на фиг. 18.

13.5. Да се построят графиките на следните функции:

а) $\sin(\pi\cos x)$; **б)** $\sin^3 x + \cos^3 x$; **в)** $\sqrt{x}\,\sin x$;

г) $x\sin\frac{1}{x}$; **д)** $x^2\sin\frac{1}{x}$.

13.6. Да се начертаят кривите:

а) $y^2(x^2 + 1) = (x - 1)^2$; **б)** $x^2y^2 = x^2 + y^2$; **в)** $x^2(4 - 9y^2) = 6y^3$;

г) $y^2(x - 1) = x^3$; **д)** $x^3 + y^3 = 1$;

е) $(x - 1)[(x + 2)^2 - 3y^2] = 8$; **ж)** $(x + 2)y^2 = x(1 - x^2)$;

з) $y^2 = x^3 - x$; **и)** $(1 - x)y^2 = x^2(1 + x)$; **й)** $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1$;

к) $(y - x^2)^2 = x^5$; **л)** $(x - 1)^2(x^2 + y^2) = 3x^2$; **м)** $\ln x + e^y = 0$;

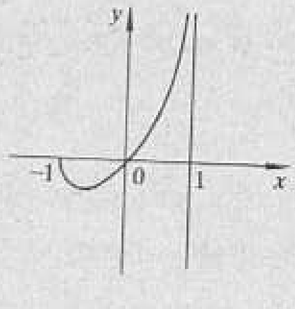
н) $y^2 + \ln x = 0$; **о)** $y^2 = x^4(x + 1)$; **п)** $y^2 - x^4 + x^6 = 0$;

р) $x^3 - 3xy^2 = x^2 + y^2$; **с)** $x^y = a$, $a > 0$.

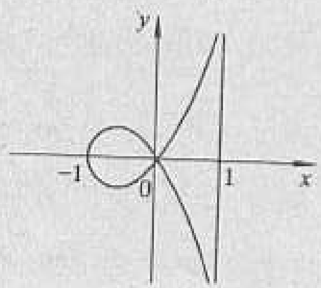
Решение. **б)** Кривите от вида $y^2 = f(x)$ са симетрични относно оста x, защото трансформацията $y \mapsto -y$ не променя уравнението и ако точката (x, y) принадлежи на кривата, то и $(x, -y)$ й принадлежи. В случая уравнението не се променя и от смяната $x \mapsto -x$, следователно имаме симетрия и относно оста y. И трансформациите $(x, y) \mapsto (y, x)$, $(x, y) \mapsto (-y, x)$ не променят уравнението. Каква симетрия на кривата следва оттук? От $(x^2 - 1)y^2 = x^2$ следва $|x| > 1$ или $x = y = 0$. Точката $(0, 0)$ е изолирана, а $y = \dfrac{\pm x}{\sqrt{x^2 - 1}}$ при $|x| > 1$. Достатъчно е да изследваме $y = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}$ при $x > 1$.

в) Уравнението може да се реши относно x.

и) Нека $y = x\sqrt{\dfrac{1 + x}{1 - x}}$. Функцията е дефинирана за $x \in [-1, 1)$, има знака на x, $y \sim x$ $(x \to 0)$, $y \to \infty$ при $x \to 1$, правата $x = 1$ е вертикална асимптота, y се анулира само при $x = 0$ и $x = -1$, при $x = -1$ имаме вертикална допирателна, тъй като $y \sim -\dfrac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1 + x}$ за $x \to -1$ (зад. 13.2, л)). Кривата ще получим, като начертаем и линията, симетрична на графиката от фиг. 19, относно оста x (тази линия е графиката на функцията $y = -x\sqrt{\dfrac{1 + x}{1 - x}}$.), вж. фиг. 20.



Фиг. 19



Фиг. 20

к) От $x^5 \geqq 0$ имаме $x \geqq 0$, $y_1 = x^2(1 + \sqrt{x})$, $y_2 = x^2(1 - \sqrt{x})$. Изследваме поотделно тези две функции.

13.7. Във връзка със зад. 3.1 и 8.5 начертайте в равнината pq кривата $\dfrac{4}{27}p^3 + q^2 = 0$.

13.8 (Й. Табов). В стремежа си „да обхванем необхватното", вместо кривата $F(x, y) = 0$ е по-добре да чертаем кривата $\Phi(u, v) = F(\operatorname{tg}u, \operatorname{tg}v) = 0$ в квадрата $-\dfrac{\pi}{2} < u, v < \dfrac{\pi}{2}$. Периодичността на тангенса води до покриване на равнината uv с безброй квадрати, съдържащи еднакви рисунки. Съобразете какъв е новият вид на познатите графики. Например „правите" (с някои изключения) имат по две инфлексни точки. Въоръжени с компютър, може да спестите размишленията, помествайки рисунките в един или девет квадрата: $|u|, |v| < \dfrac{\pi}{2}$ или $\dfrac{3\pi}{2}$.

13.9. Докажете, че графиката на полином от трета степен има една инфлексна точка.

13.10 (Ойлер). Начертайте кривата

$$y = \pm\sqrt{6x - x^2} \pm \sqrt{6x + x^2} \pm \sqrt{36 - x^2},$$

като вземете всички възможни комбинации от знаците.

Решение. Скицираме графиките на трите корена, а после мислено събираме и изваждаме. Особено внимание изискват точките $(0, \pm 6)$ и $(6, \pm 6\sqrt{2})$.

13.11. а) Нека u и v са две функции, дефинирани в някоя околност на точката a, $u(a) = v(a) = 0$, $u \neq 0$ при $x \neq a$, $v \sim u(x \to a)$. Докажете, че ако графиката на u има допирателна при $x = a$, то същата допирателна има и графиката на v;

б) Ако u и v имат производни до $(n - 1)$-ви ред в околността и n-та производна поне в точката a, като a е нула от n-ти ред на u, и $v \sim u$ $(x \to a)$, то a е нула от n-ти ред и на v, а графиките на u и v имат при $x = a$ допиране поне от n-ти ред.

Решение. **а)** По условие $\dfrac{u(x) - u(a)}{x - a} \to \lambda$ при $x \to a$, като $\lambda = u'(a)$ или $\lambda = \pm\infty$ (в случай на вертикална допирателна). Тогава

$$\frac{v(x) - v(a)}{x - a} = \frac{v(x)}{u(x)}\,\frac{u(x) - u(a)}{x - a} \to 1 \,.\, \lambda = \lambda \text{ при } x \to a.$$

б) Щом $u(a) = u'(a) = \ldots = u^{(n-1)}(a) = 0$, то

$$u(x) = \frac{(x - a)^n}{n!}u^{(n)}(a) + o((x - a)^n) \quad (x \to a).$$

От $u^{(n)}(a) \neq 0$ имаме $u(x) \neq 0$ в някоя околност на a при $x \neq a$. Щом $v \sim u$ $(x \to a)$, то и

$$v = \frac{(x-a)^n}{n!} u^{(n)}(a) + o((x-a)^n) \ (x \to a).$$

Поради единствеността на разлагането (зад. 12.5, а)) оттук следва $v(a) = \ldots = v^{(n-1)}(a) = 0$, $v^{(n)}(a) = u^{(n)}(a)$. Получихме, че графиките на u и v имат при $x = a$ допиране поне от n-ти ред (ако малко разширим дефиницията преди зад. 2.14).

13.12. Начертайте кривите:

а) $\ln(x+y) = \ln x + \ln y$; **б)** $e^{xy} = e^x e^y$; **в)** $e^{x+y} = e^x + e^y$;

г) $\ln(xy) = \ln x \ln y$; **д)** $\dfrac{1}{x+y} = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}$; **е)** $\sqrt{x+y} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$.

§ 14. Криви, зададени параметрично

Ако $x(t)$ и $y(t)$ са две функции на параметъра t, при изменението му точката $(x(t), y(t))$ описва крива в равнината. Ако $x(t)$ е монотонна в някой интервал и $t(x)$ е обратната ѝ функция, то $y(t(x))$ е функцията на x. Съответната част от кривата е графика на тази функция. Производните на x и y по t ще означаваме с $\dot{x}$ и $\dot{y}$. Функцията $y(t(x))$ ще означаваме кратко пак с y, а производната ѝ по x — с y' или y'_x. Нека t' или $t'_x = \dfrac{1}{\dot{x}}$ е производната на обратната функция. Тогава $y'_x = \dot{y}t'_x = \dfrac{\dot{y}}{\dot{x}}$. Това е наклонът на допирателната в точката $(x(t), y(t))$. Нека $t \to \tau$. Ако $y \to \alpha$, а x е неограничена, кривата има хоризонтална асимптота $y = \alpha$. Ако $x \to \alpha$, а y е неограничена, имаме вертикална асимптота $x = \alpha$. Ако и двете са неограничени, кривата може да има наклонена асимптота. Наистина има такава само ако съществуват и двете граници: $\lim\limits_{t \to \tau} \dfrac{y}{x} = a$, $\lim\limits_{t \to \tau} (y - ax) = b$. Тогава правата $y = ax + b$ е асимптота.

14.1. Начертайте кривите:

а) $x = \dfrac{t}{t^2-4}$, $y = \dfrac{t+2}{t(t-2)}$; **б)** $x = 2t - t^2$, $y = 3t - t^3$;

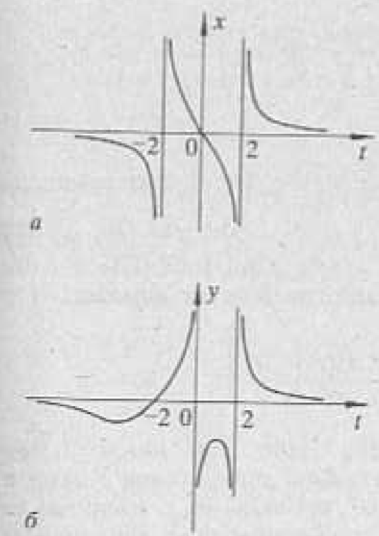
в) $x = \dfrac{3t}{t^2+1}$, $y = \dfrac{t}{t+1}$; **г)** $x = \dfrac{1}{t^2-2t}$, $y = \dfrac{2t-5}{t^2-4}$;

д) $x = \dfrac{t}{1-t^2}$, $y = \dfrac{1-t}{t(t-2)}$; **е)** $x = \dfrac{t^2}{t-1}$, $y = \dfrac{1}{t^2-t}$;

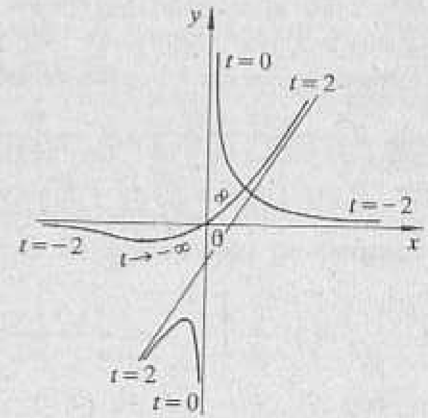
ж) $x = \dfrac{t-2}{t^2+t-2}$, $y = \dfrac{4}{t^2+2t}$; **з)** $x = t + \dfrac{1}{t}$, $y = t + \dfrac{1}{t^2}$;

и) $x = \dfrac{t}{(1-t)^2}$, $y = \dfrac{t+t^3}{2-t}$.

Решение. а) А. Преди всичко да начертаем графиките на x и y като функции на t. Функцията $x(t)$ се анулира само при $t = 0$, клони към 0 при $t \to \pm\infty$, става неограничена при $t \to \pm 2$, сменя знака си в точките -2, 0, 2 и е положителна за $t > 2$ (фиг. 21, а). Функцията $y(t)$ се анулира само за $t = -2$, клони към 0 при $t \to \pm\infty$, става неограничена при $t \to 0$ и $t \to 2$, сменя знака си в точките -2, 0, 2 и е положителна при $t > 2$ (фиг. 21, б). Получените графики ще обосновем после, когато намерим $\dot{x}$ и $\dot{y}$. Сега да проследим движението на точката $(x(t), y(t))$, когато t описва реалната ос от $-\infty$ до ∞. Гледаме ту към графиките на $x(t)$ и $y(t)$, ту към равнината xy, където нанасяме следата на точката



Фиг. 21



Фиг. 22

$(x(t),\ y(t))$. При $t \to -\infty$ функциите $x(t)$ и $y(t)$ клонят към 0 (точката тръгва от (0, 0)). В $(-\infty, -2)$ функцията $x(t)$ намалява от 0 до $-\infty$, $y(t)$ първо намалява (от 0), а после расте отново до 0 (точката тръгва от (0, 0) наляво и надолу, завива нагоре, но пак наляво и отива към левия край на оста x. Оста x е асимптота и кривата я доближава отдолу при $x \to -\infty$). В $(-2, 0)$ функцията $x(t)$ намалява от $+\infty$ до 0, $y(t)$ расте от 0 до $+\infty$. (Точката отскача и се явява от другия край на оста x над нея. Движи се наляво и нагоре — към горния край на оста y. Оста y е асимптота.) В (0, 2) функцията $x(t)$ намалява от 0 до $-\infty$, $y(t)$ първо расте (от $-\infty$), а после намалява отново до $-\infty$, $y < 0$ (точката отскача и се явява от долния край на оста y отляво; движи се наляво, първо се изкачва, а после се спуска към долния ляв ъгъл на чертежа). В $(2, \infty)$ функциите $x(t)$ и $y(t)$ намаляват от $+\infty$ до 0 (точката отскача и се явява от горния десен ъгъл, спуска се наляво и надолу до (0, 0). На фиг. 22 са означени характерните стойности на t. При $t \to 2$ има възможност за наклонена асимптота. Пресмятаме

$$\lim_{t\to 2} \frac{y}{x} = \lim_{t\to 2}\left(\frac{t+2}{t(t-2)}\,\frac{t^2-4}{t}\right) = 4 = a,$$

$$\lim_{t\to 2} (y - ax) = \lim_{t\to 2}\left(\frac{t+2}{t(t-2)} - \frac{4t}{t^2-4}\right) = -1 = b.$$

Правата $y = 4x - 1$ е асимптота.

Б. $\dot{x} = \dfrac{-(t^2+4)}{(t^2-4)^2}$, $\dot{y} = \dfrac{-(t^2+4t-4)}{t^2(t-2)^2}$, $\dot{x} < 0$, $x(t)$ намалява (фиг. 21, а). Производната $\dot{y}$ се анулира при $t = 2(-1 \pm \sqrt{2})$; между корените $\dot{y} < 0$, а извън тях $\dot{y} < 0$; y има един минимум и един максимум, но стойностите им са без значение за чертежа. От

$$y'_x(0) = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}\bigg|_{t\to\pm\infty} = \frac{-(t^2+4t-4)(t+2)^2}{-(t^2+4)t^2}\bigg|_{t\to\pm\infty} = 1$$

получаваме, че в точката (0, 0) двата клона (при $t \to \infty$ и при $t \to -\infty$) се съединяват плавно и имат обща допирателна с наклон 1. Изследването е завършено. Не се занимаваме с въпроса за изпъкналост и вдлъбнатост. Кривата се самопресича в една двойна точка. За чертежа това няма да има значение, но нека я потърсим. За две различни крайни стойности t и s трябва $x(t) = x(s)$, $y(t) = y(s)$. Оттук имаме

$$\frac{s}{t} = \frac{s^2-4}{t^2-4},\quad \frac{s+2}{t+2} = \frac{s}{t}\,\frac{s-2}{t-2},\quad \frac{s}{t} = \frac{s^2-4}{t^2-4} = \frac{(s+2)(t-2)}{(t+2)(s-2)},$$

$$\frac{s-2}{t-2} = \frac{t-2}{s-2},\quad (s-2)^2 = (t-2)^2,$$

но $s \neq t$. Следователно $s - 2 = 2 - t$, $t + s = 4$ (вариантите $s, t = 0, \pm 2$ се отхвърлят лесно). Заместваме $s = 4 - t$ в уравнението $\dfrac{s}{t} = \dfrac{s^2-4}{t^2-4}$ и го свеждаме до $t^3 - 6t^2 + 4t + 8 = 0$. За корена $t = 2$ получаваме $s = 2$, а трябва $s \neq t$. Като разделим с $t - 2$, имаме $t^2 - 4t - 4 = 0$, $t = 2(1 \pm \sqrt{2})$. Например $t = 2(1 + \sqrt{2})$, тогава $s = 2(1 - \sqrt{2})$. Двойната точка е $\left(\dfrac{1}{4},\ \dfrac{1}{2}\right)$.

б) Решете задачата самостоятелно. След $t = 0$ функциите x и y растат, а после намаляват. За чертежа е важно как са разположени една спрямо друга точките t на максимум за x и за y. Оказва се (чрез изследване на $\dot{x}$ и $\dot{y}$), че и двата максимума се достигат при $t = 1$. Точката (x, y) се движи (след $t = 0$) надясно и нагоре, а при $t = 1$ тръгва наляво и надолу. Тъй като $y' = \dfrac{\dot{y}}{\dot{x}} = \dfrac{3}{2}(1 + t)$, $y' = 3$ за $t = 1$, двата клона имат при $t = 1$ обща допирателна с наклон 3; точката (1, 2) е рогова. Такава точка има и кривата от г).

14.2. По какво се различава функцията $y(x)$, зададена параметрично: $x = \sin^2 t$, $y = \cos^2 t$, от функцията $1 - x$?

Решение. Функцията $y(x)$ е дефинирана в $[0, 1]$.

14.3. Начертайте кривите:

а) $x^3 + y^3 = xy$; **б)** $xy^2 + x^2y = 1$; **в)** $x^3 + y^2 = 3xy$;

г) $x^2y^2 = x^3 - y^3$; **д)** $y(x^2 - y^2) = x^4$; **е)** $y^4 + x(y - x)^2 = 2xy^3$;

ж) $x^4 + y^4 = 2xy^2$; **з)** $x^4 + y^4 + y^3 = 3x^2y + 2x^2y^2$;

и) $x^5 + y^5 = x^2y^2$; **й)** $x^5 + y^5 = xy$;

к) $x^2 + y^2 = x^4 + y^4$; **л)** $x^3 + y^3 = x + 2y$;

м) $x^4 + x^2y^2 + y^2 = 6x^2y$; **н)** $x^4 - y^4 + xy = 0$.

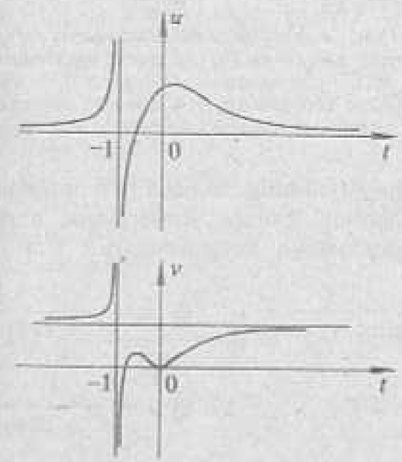
Решение. **а)** (декартов лист). Нека точката (x, y) лежи на кривата, т. е. $x^3 + y^3 = xy$. Ако $x = 0$, то $y = 0$. Ако $x \neq 0$, да положим $t = \dfrac{y}{x}$. Тогава $y = tx$, $x^3(1 + t^3) = x^2t$ и $x = \dfrac{t}{1+t^3}$, $y = \dfrac{t^2}{1+t^3}$ при $t \neq -1$. Ако $t = -1$, то $y = -x$, $x^3 - x^3 = -x^2$, $x = 0$, а имахме $x \neq 0$. От тези формули при $t = 0$ се получава и точката $(0, 0)$. Обратно, за всяко $t \neq -1$, ако определим по формулите x и y, ще е изпълнено $x^3 + y^3 = xy$. Представихме кривата параметрично. Продължете самостоятелно. Трансформацията $(x, y) \mapsto (y, x)$ не променя уравнението. Затова кривата е симетрична относно правата $y = x$.

б) Полагаме $y = tx$ и получаваме $x^3 = \dfrac{1}{t+t^2}$, $y^3 = \dfrac{t^3}{t+t^2}$. Интервалите на монотонност за x и y са същите, както и за $u = x^3$ и $v = y^3$. Затова е удобно да не коренуваме. И тази крива е симетрична относно правата $y = x$. Изследвайте я самостоятелно.

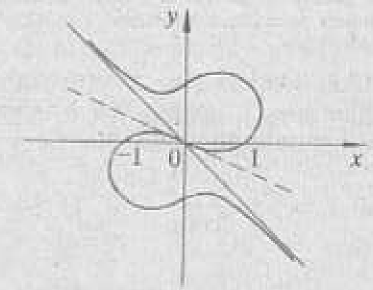
г) Уравнението не се променя, ако сменим: $(x, y) \mapsto (-y, -x)$, и затова кривата е симетрична относно правата $y = -x$. След полагането $y = tx$ получаваме $x = \dfrac{1}{t^2} - t$, $y = \dfrac{1}{t} - t^2$. Имаме $x = \dfrac{1}{t^2} + o(1)$, $y = \dfrac{1}{t} + o(t)$, $y^2 = x + o(1)$ при $t \to 0$, и $x = -t + o\left(\dfrac{1}{t}\right)$, $y = -t^2 + o(1)$, $y = -x^2 + o(1)$ при $t \to \infty$. Параболите $y^2 = x$ и $y = -x^2$ са асимптотични за кривата. Изследвайте я самостоятелно.

к) Кривата има една изолирана точка.

л) Кривата е симетрична относно началото, защото смяната $(x, y) \mapsto (-x, -y)$ не променя уравнението. След $y = tx$ получаваме $x^2 = \dfrac{1+2t}{1+t^3} = u$, $y^2 = \dfrac{t^2 + 2t^3}{1+t^3} = v$, като u и v са неотрицателни. Следователно $t \notin \left(-1, -\dfrac{1}{2}\right)$. Графиките на u и v имат вертикална асимптота $t = -1$ и хоризонтални асимптоти $u = 0$ и $v=2$. Освен това $v \sim t^2$ $(t \to 0)$, $u(0) = 1$, $u\left(-\dfrac{1}{2}\right) = v\left(-\dfrac{1}{2}\right) = 0$. На фиг. 23 максимумът на u е изразен вдясно от оста u, защото $u = 1 + 2t + o(t)$ $(t \to 0)$ и наклонът на допирателната при $t = 0$ е положителен. Първо да начертаем тази част на фиг. 24, която е



Фиг. 23



Фиг. 24

над оста x. Щом $y \geqq 0$, то y и v имат едни и същи интервали на монотонност. Поради $y = tx$ при $t > 0$ трябва $x \geqq 0$, а при $t < 0$ трябва $x \leqq 0$. Тогава $x = -\sqrt{u}$ намалява, когато u расте. При $t \to -1$ асимптота е правата $y = -x$, защото $\dfrac{y}{x} = t \to -1 = a$, $y - ax = y + x = \dfrac{y^2 - x^2}{y - x} \to \dfrac{2}{\infty} = 0 = b$. Накрая допълваме по симетрия фигурата и за $y < 0$. Извивката край точката $(0, \sqrt{2})$ влиза в противоречие с фиг. 23, но се налага поради това, че от $3x^2 + 3y^2y' = 1 + 2y'$, $y' = \dfrac{1 - 3x^2}{3y^2 - 2}$ (вж. зад. 1.21) в точката $(0, \sqrt{2})$ получаваме $y' = \dfrac{1}{4} > 0$. Освен това $y' = -\dfrac{1}{2}$ в точката $(0, 0)$. Направете по-подробно изследване, като коригирате фиг. 23 (v има още два локални екстремума).

м) Положете $y = tx^2$.

и) Кривата е инвариантна относно завъртане на 90°, защото смяната $(x, y) \mapsto (-y, x)$ не променя уравнението.

§ 15. Криви, зададени в полярни координати

В параметричното представяне $x = r(\varphi)\cos\varphi$, $y = r(\varphi)\sin\varphi$ нищо не пречи $r(\varphi)$ да е по-малко от нула. Въпреки това обикновено изискваме $r(\varphi)$ да е неотрицателно и го тълкуваме като разстояние от точката $M(x, y)$ до началото $O(0, 0)$, а φ — като ъгъл между лъча OM и оста x. В полярните координати r, φ кривата се задава всъщност чрез една функция: $r = r(\varphi)$. Асимптоти можем да имаме, ако $r(\varphi)$ е неограничена.

15.1. Определете коя от следните линии, зададени в полярни координати, е права, коя е окръжност, елипса, хипербола, парабола; напишете уравненията в декартови координати:

а) $r = \dfrac{1}{1 + 2\cos\varphi}$; **б)** $r = \dfrac{1}{\sin\varphi + \cos\varphi}$; **в)** $r = \dfrac{1}{1 + \cos\varphi}$;

г) $r = \dfrac{1}{\sin(\varphi + \alpha)}$; **д)** $r = \cos\varphi$; **е)** $r = \dfrac{1}{2 + \cos\varphi}$.

В точка г) α е константа.

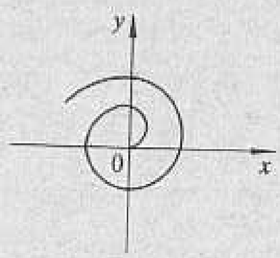
Решение. **б)** Имаме $r\sin\varphi + r\cos\varphi = 1$, т. е. $x + y = 1$ — права.

15.2. Начертайте спиралите:

а) архимедова $r = \varphi$; **б)** логаритмична $r = e^{\varphi}$;

в) хиперболична $r = \dfrac{1}{\varphi}$; **г)** жезъл $r = \dfrac{1}{\sqrt{\varphi}}$.

Решение. **а)** Чертежът се получава въз основа на геометричния смисъл, който имат r и φ (фиг. 25). За да намерим



Фиг. 25

допирателната при $\varphi = 0$, пресмятаме $y' = \dfrac{\dot y}{\dot x} = \dfrac{\dot r\sin\varphi + r\cos\varphi}{\dot r\cos\varphi - r\sin\varphi}$.

Тук $r = \varphi$, $\dot r = 1$, $y'|_{\varphi=0} = 0$, хоризонтална допирателна.

При начертана архимедова спирала се решава въпросът: да се раздели ъгъл на n равни части.

в) Тъй като $r \to \infty$ при $\varphi \to 0$, $\varphi>0$, да потърсим асимптота: $\dfrac{y}{x} = \operatorname{tg}\varphi \to \operatorname{tg}0 = 0 = a$, $y - ax = y = r\sin\varphi = \dfrac{\sin\varphi}{\varphi} \to 1 = b$.

Асимптота е правата $y = 1$.

Разгледайте тези спирали и без ограничението $r \geqq 0$.

15.3. Начертайте кривите:

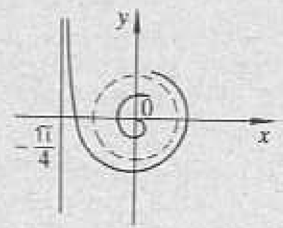
а) $r = \dfrac{\varphi}{2\varphi - \pi}$; **б)** $r = \dfrac{\varphi}{4\varphi - \pi}$; **в)** $r = \dfrac{\cos2\varphi}{\cos\varphi}$;

г) $r = \dfrac{1}{\cos\varphi\cos2\varphi}$; **д)** $r = \dfrac{1}{\sqrt{\cos3\varphi}}$; **е)** $r = \operatorname{tg}\varphi$;

ж) $r = \operatorname{tg}2\varphi$; **з)** $r = \dfrac{\cos^3\varphi}{\sin3\varphi}$; **и)** $r^2 + \varphi^2 = \pi^2$;

й) $\varphi = \pi\sin r$.

Решение. **а)** Първо скицираме графиката на функцията $r = \dfrac{\varphi}{2\varphi - \pi}$ в декартови координати r и φ, като от $r \geqq 0$ имаме $\varphi\in(-\infty, 0]$ или $\varphi\in\left(\dfrac{\pi}{2}, \infty\right)$. После въз основа на геометричния смисъл на полярните координати r и φ нахвърляме фиг. 26. Имаме



Фиг. 26

безброй намотки около окръжността $r = \frac{1}{2}$ (отвън и отвътре).

При $\varphi \to \frac{\pi}{2}$, $\varphi > \frac{\pi}{2}$ може би е налице вертикална асимптота $x = x_0$, защото $r \to \infty$. Да пресметнем

$$\lim_{\varphi \to \frac{\pi}{2}} x = \lim_{\varphi \to \frac{\pi}{2}} \frac{\varphi \cos\varphi}{2\varphi - \pi} = \frac{\pi}{2} \lim_{\varphi \to \frac{\pi}{2}} \frac{\cos\varphi}{2\varphi - \pi} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{-\sin\frac{\pi}{2}}{2} = -\frac{\pi}{4}.$$

Асимптота е правата $x = -\frac{\pi}{4}$. Допирателната при $\varphi = 0$ намираме както в зад. 15.2, а) — тя е хоризонтална.

д) Уравнението не се променя, ако сменим $\varphi \mapsto \varphi + \frac{2\pi}{3}$ или $\varphi \mapsto -\varphi$. Това означава, че кривата е инвариантна относно завъртане на 120° и е симетрична относно оста x. Чертаем графиката на $r = \frac{1}{\sqrt{\cos 3\varphi}}$ първо в декартови координати — например в $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, и т. н.

ж) Уравнението не се променя, ако сменим φ с $\varphi + \frac{\pi}{2}$.

15.4. Начертайте кривите:

а) $(x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2$ (лемниската на Бернули);

б) $(x^2 + y^2 - x)^2 = x^2 + y^2$ (кардиоида);

в) $(x^2 + y^2)^2 = 3x^2y - y^3$ (трилистник);

г) $4(x^2 + y^2 - x)^2 = x^2 + y^2$ (охлюв на Паскал);

д) $x^4 + y^4 = x^2 + y^2$; **е)** $(x^2 + y^2)x = y$;

ж) $(x^2 + y^2)^3 = 4x^2y^2$; **з)** $(x^2 + y^2)\ln(x^2 + y^2 + 1) = y^2$;

и) $x^2y^2(x^2 + y^2) = (x^2 - y^2)^2$; **й)** $(x^2 + y^2)^3 = x^4 + y^4$;

к) $(x^2 + y^2)^2 = f$, като $f = x^2,\ xy,\ x^3,\ x^2y$;

л) $\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)^2 = x^2 + y^2$, $a, b > 0$.

Решение. **а)** Кривата е симетрична относно осите x и y. При $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ получаваме $r^2 = \cos 2\varphi$, $r = \sqrt{\cos 2\varphi}$ и т. н.

15.5. Докажете, че кривата от зад. 13.6, е) е инвариантна относно завъртане на 120° около точката (0, 0).

Решение. $(x-1)[(x+2)^2-3y^2]=(x-1)(x+\sqrt{3}y+2)(x-\sqrt{3}y+2)$

$= \frac{1}{4}\ (r\cos\varphi - 1)[r\cos\left(\varphi + \frac{2\pi}{3}\right) - 1][r\cos\left(\varphi + \frac{4\pi}{3}\right) - 1]$.

15.6 Нека u е неотрицателна функция, дефинирана в интервала $[\alpha, \beta)$ (или $(\beta, \alpha]$) и $u(\alpha) = 0$. Нека съществува и е различна от нула производната $u'(\alpha)$. Ако $f = \frac{1}{u}$, докажете, че кривата $r = f(\varphi)$ при $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ (k е цяло число) има асимптота с уравнение

$$y = x\,\mathrm{tg}\,\alpha + \frac{1}{u'(\alpha)\cos\alpha}$$

а например при $\alpha = \frac{\pi}{2}$ — с уравнение

$$x = \frac{-1}{u'\left(\frac{\pi}{2}\right)}.$$

Решение. Щом $u'(\alpha) \neq 0$, то $\frac{u(\varphi) - u(\alpha)}{\varphi - \alpha} = \frac{u(\varphi)}{\varphi - \alpha} \neq 0$ в достатъчно малка околност на α. Там при $\varphi \neq \alpha$ имаме $u(\varphi) \neq 0$ и $f = \frac{1}{u}$ е дефинирана. Крива с уравнение в полярни координати $r = f(\varphi)$ има в декартови координати параметричното представяне $x = f(\varphi)\cos\varphi$, $y = f(\varphi)\sin\varphi$. Тъй като $f(\varphi) \to \infty$ при $\varphi \to \alpha$, то $\cos\alpha \neq 0$ следва, че поне x е неограничено. Ако имаме асимптота при $\varphi \to \alpha$, тя не е вертикална. Пресмятаме

$$\lim_{\varphi\to\alpha} \frac{y}{x} = \operatorname{tg}\alpha = a, \quad \lim_{\varphi\to\alpha} (y - ax) = \lim_{\varphi\to\alpha} f(\varphi)[\sin\varphi - \operatorname{tg}\alpha \cos\varphi]$$

$$= \lim_{\varphi\to\alpha} \frac{\sin\varphi - \operatorname{tg}\alpha\cos\varphi}{u(\varphi)} = \frac{\cos\alpha + \operatorname{tg}\alpha\sin\alpha}{u'(\alpha)} = \frac{1}{u'(\alpha)\cos\alpha} = b.$$

Приложихме правилото на Лопитал от зад. 1.22, в). Ако $\alpha = \frac{\pi}{2}$,

при $\varphi \to \frac{\pi}{2}$ имаме $x = \frac{\cos\varphi}{u(\varphi)} \to \frac{-\sin\frac{\pi}{2}}{u'\left(\frac{\pi}{2}\right)}$.

15.7. Докажете, че ако $(\varphi - \alpha)r(\varphi) \to l$ при $\varphi \to \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, k — цяло число, то правата $y = x\operatorname{tg}\alpha + \frac{l}{\cos\alpha}$ е асимптота за кривата $r = r(\varphi)$.

Решение. $\frac{y}{x} = \operatorname{tg}\varphi \to \operatorname{tg}\alpha = a$, $\quad y - ax = r(\sin\varphi - \operatorname{tg}\alpha\cos\varphi)$

$$= r(\varphi - \alpha)\,\frac{\sin\varphi - \operatorname{tg}\alpha\cos\varphi}{\varphi - \alpha} \to l\,(\cos\alpha + \operatorname{tg}\alpha\sin\alpha) = \frac{l}{\cos\alpha}.$$

§ 16. Формула на Тейлор

Ако в интервала $[a, x]$ (или $[x, a]$) е дефинирана функция f, която има непрекъснати производни до n-ти ред и $f^{(n)}$ е диференцуема поне в (a, x), то съществува точка $\xi \in (a, x)$, за която е в сила формулата на Тейлор:

$$f(x) = f(a) + (x - a)f'(a) + \ldots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi).$$

При $a = 0$ тя се нарича още „формула на Маклорен". При $n = 0$ това е формулата за крайните нараствания. Като положим $h = x - a$, $\xi = a + \theta h$, получаваме

$$f(a + h) = f(a) + hf'(a) + \ldots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(a) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a + \theta h), \quad 0 < \theta < 1.$$

Докато в асимптотичните равенства на § 12 не можехме да дадем конкретна стойност на x (винаги x клонеше към a), то тук, обратно, равенствата се пишат именно за конкретни стойности на x.

16.1. Преценете каква точност осигуряват приблизителните формули:

а) $e^x \approx 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}$;

б) $\sin x \approx x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!}$;

в) $\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!}$;

г) $\ln(1 + x) \approx x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}$;

д) $\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16}$; е) $\operatorname{tg} x \approx x + \frac{x^3}{3}$.

Решение. а) Съществува такова число $\theta \in (0, 1)$, че

$$e^x - 1 - \frac{x}{1!} - \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} = \frac{x^4}{4!}\, e^{\theta x} = R,$$

$$|R| \leqq \frac{|x|^4 e}{4!} < \frac{3x^4}{4!} = \frac{x^4}{8}.$$

Естествено това не е най-добрата възможна оценка. За неравенството $e < 3$ вж. забележката след зад. 9.6. Например при $x = \frac{1}{2}$ имаме $0 < R < \frac{1}{128}$, цифрата на стотните е несигурна. Пресмятаме

$$\sqrt{e} \approx 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{48} \approx 1{,}5 + 0{,}125 + 0{,}021 = 1{,}646 \approx 1{,}65.$$

16.2.а) Докажете, че числото e е ирационално;
б) докажете, че $\sin 1$ и $\cos 1$ са ирационални;

в) пресметнете границите $\lim\limits_{n\to\infty} n\sin(2\pi n!e)$,

$\lim\limits_{n\to\infty} n\,\mathrm{tg}(\pi n!e)$ (фон Нойман);

г) пресметнете (с лист и молив) числото e с точност до 4 знака.

Решение. а) $e = 1 + \frac{1}{1!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \frac{e^{\theta}}{(n+1)!}$, $0 < \theta < 1$. Ако $e = \frac{p}{q}$, като p и q са цели положителни, и ако $n > q$, то числото $n!e = n! + n! + \ldots + \frac{n!}{n!} + \frac{e^{\theta}}{n+1}$ ще бъде цяло, а следователно и $\frac{e^{\theta}}{n+1}$ ще е цяло. Но $0 < \frac{e^{\theta}}{n+1} < \frac{e}{n+1} < 1$ при $e < n+1$. Това противоречие ще получим, ако изберем $n > q$ и $n > e$.

в) $n!e = n!\left(1 + \frac{1}{1!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \frac{1}{(n+1)!} + \frac{e^{\theta}}{(n+2)!}\right) =$
$= A + \frac{1}{n+1} + \frac{e^{\theta}}{(n+1)(n+2)}$, A е цяло число, $0 < \theta < 1$. Тогава

$$n\sin(2\pi n!e) = n\sin\left(\frac{2\pi}{n+1} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \sim n\,\frac{2\pi}{n+1} \to 2\pi.$$

г) „Точност до 4 знака" означава, че грешката не надминава по абсолютна стойност $\frac{1}{2}10^{-4}$. Пресмятаме последователно $1+1$, $\frac{1}{2!}$, $\frac{1}{3!}$ и т. н., закръгляйки до десетохилядните. Първо $1+1=2$. После имаме 0,5000. След това делим на 3: 0,1667. Делим на 4: 0,0417. Делим на 5: 0,0083. На 6: 0,0014. На 7: 0,0002. Сумата е 2,7183. Закръглихме пет събираеми, което може да доведе до грешка над две десетохилядни. Взехме $n = 7$ във формулата на Тейлор: $e = 1 + \frac{1}{1!} + \ldots + \frac{1}{7!} + \frac{e^{\theta}}{8!}$. За грешката имаме $0 < R = \frac{e^{\theta}}{8!} < \frac{3}{8!} = \frac{1}{13\,440}$. Това число е по-голямо от $\frac{1}{2}10^{-4}$.

С други думи, несигурен е не само четвъртият знак, но даже и третият (ако закръглим до три знака) и нашият опит се провали.

16.3. Нека функцията f е дефинирана и $n+2$ пъти диференцуема в някоя околност на точката a, $f^{(n+2)}$ е непрекъсната в a и $f^{(n+2)}(a) \neq 0$. Докажете, че:

а) ако $n = 0$ и представим $f(a+h) = f(a) + hf'(a+\theta h)$, $0 < \theta < 1$, то $\theta \to \frac{1}{2}$ при $h \to 0$;

б) ако $n=1$ и представим $f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2}f''(a+\theta h)$, $0 < \theta < 1$, то $\theta \to \frac{1}{3}$ при $h \to 0$.

Решение. б) От написаното представяне да извадим равенството $f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2!}f''(a) + \frac{h^3}{3!}f'''(a+\theta_1 h)$, $0 < \theta_1 < 1$.

Получаваме $\frac{f''(a+\theta h) - f''(a)}{\theta h}\,\theta - \frac{1}{3}f'''(a+\theta_1 h) = 0$. Тъй като $\frac{f''(a+\theta h) - f''(a)}{\theta h} \to f'''(a) \neq 0$ при $h \to 0$, дробта ще е различна от нула за достатъчно малко по абсолютна стойност $h \neq 0$. Тогава

$$\theta = \frac{1}{3}f'''(a+\theta_1 h) : \frac{f''(a+\theta h) - f''(a)}{\theta h} \to \frac{1}{3}\,\frac{f'''(a)}{f'''(a)} = \frac{1}{3} \text{ при } h \to 0.$$

Това е така, въпреки че е възможно изборът на θ да не е еднозначен. Каква е границата на θ в общия случай?

Например

$$\ln(n+1) - \ln n = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \ln 1 + \frac{1}{n}\,\frac{1}{1+\frac{\theta}{n}} = \frac{1}{n+\theta} \approx \frac{1}{n+\frac{1}{2}} = \frac{2}{2n+1}.$$

Според а) тази приблизителна формула става все по-добра с нарастването на n (евентуално немонотонно). Сравнете със зад. 16.8.

16.4. Направете оценка на грешката във формулата на Хюйгенс от зад. 12.12.

Решение. $\sin x = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!}\cos\theta_1 x$,

$\sin\dfrac{x}{2} = \dfrac{x}{2} - \dfrac{x^3}{3!2^3} + \dfrac{x^5}{5!2^5}\cos\theta_2 x$, $0 < \theta_1,\ \theta_2 < 1$. Грешката е

$\Delta = s - \dfrac{8\delta - d}{3} = \left(-\dfrac{2}{3}\,\dfrac{8\cos\theta_2 x}{5!2^5} + \dfrac{2}{3}\,\dfrac{\cos\theta_1 x}{5!}\right)x^5$, $\cos\theta_1 x>0$, $\cos\theta_2 x>0$,

защото x е малък ъгъл. От положително число, което е най-много $\dfrac{2}{3.5!} = \dfrac{1}{180}$, се изважда положително число, което е най-много $\dfrac{2.8}{3.5!2^5} = \dfrac{1}{720}$. Следователно абсолютната стойност на разликата е по-малка от $\dfrac{1}{180}$. Така $|\Delta| < \dfrac{|x|^5}{180}$, а при радиус на окръжността r имаме $|\Delta| < \dfrac{|x|^5}{180}r$.

16.5. Нека за уравнението $f(x) = 0$ вместо корена x_0 сме намерили приблизителна стойност a, а после по метода на Нютон (зад. 3.7) намерим нова стойност x. Направете оценка на $|x_0 - x|$ чрез $|x_0 - a|$.

Решение. $x = a - \dfrac{f(a)}{f'(a)}$, $0 = f(x_0) = f(a) + (x_0 - a)f'(a) + \dfrac{(x_0-a)^2}{2!}f''(\xi)$, ξ е между x_0 и a. Разделяме с $f'(a)$ и получаваме

$$x_0 - a = -\frac{f(a)}{f'(a)} - \frac{(x_0-a)^2}{2!}\,\frac{f''(\xi)}{f'(a)},$$

$x_0 - x = -\dfrac{(x_0-a)^2}{2!}\,\dfrac{f''(\xi)}{f'(a)}$. Ако трите точки x_0, a, x са в някой интервал $[p, q]$, f'' е непрекъсната в $[p, q]$ и $f'(x) \neq 0$, то съществуват $M = \max\limits_{[p,q]}|f''|$, $m = \min\limits_{[p,q]}|f'|$ и $m > 0$. Тогава $|x_0 - x| \leqq \dfrac{M}{2m}(x_0 - a)^2$.
Оценка за $|x_0 - a|$, без да знаем x_0, имаме от зад. 6.7. Тук получихме и оценка за $|x_0 - x|$, преди да сме пресметнали x. Такава оценка може да ни подскаже с каква точност да изчисляваме x.

16.6. Напишете формулата на Маклорен за функцията $y = \ln\dfrac{1+x}{1-x}$ при $n=4$ и направете оценка на остатъчния член, ако $0 < x \leqq \dfrac{1}{5}$. Послужете си с този резултат, за да пресметнете (с лист и молив) с точност до 2—3 знака логаритмите на целите числа от 2 до 10.

Решение. Функцията $y = \ln(1+x) - \ln(1-x)$ е нечетна, $y'(0)=2$, $y'''(0)=4$, $y^{V} = \dfrac{24}{(1+x)^5} + \dfrac{24}{(1-x)^5}$, $\ln\dfrac{1+x}{1-x} = 2x + \dfrac{2x^3}{3} + R$,

$$R = \left[\frac{24}{(1+\xi)^5} + \frac{24}{(1-\xi)^5}\right]\frac{x^5}{5!},\quad 0 < \xi < x \leqq \frac{1}{5},$$

$$0 < R < \frac{24}{5!5^5}\left[\frac{1}{1} + \frac{1}{\left(\frac{4}{5}\right)^5}\right] = \frac{1}{5}\left(\frac{1}{5^5} + \frac{1}{4^5}\right) < 0{,}00026.$$

Логаритмите на числата от 2 до 10 ще получим чрез серия от пресмятания, при които грешката ще се натрупва. Затова няма смисъл да работим с повече от три знака. Най-често оценките на грешки, ако въобще се правят, играят ролята на ориентир, а рядко се използват буквално. При $x = \dfrac{1}{5}, \dfrac{1}{6}, \dfrac{1}{7}$ и $\dfrac{1}{9}$ получаваме

$\ln\dfrac{3}{2} \approx 0{,}405$, $\ln\dfrac{7}{5} \approx 0{,}336$, $\ln\dfrac{4}{3} \approx 0{,}288$, $\ln\dfrac{5}{4} \approx 0{,}223$.

По-нататък: $\ln 2 = \ln\left(\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{4}{3}\right) = \ln\dfrac{3}{2} + \ln\dfrac{4}{3} \approx 0{,}693$,

$\ln 3 = \ln 2 + \ln\dfrac{3}{2} \approx 1{,}098$, $\ln 4 = 2\ln 2 \approx 1{,}386$, $\ln 5 = \ln 4 + \ln\dfrac{5}{4} \approx 1{,}609$,

$\ln 6 = \ln 2 + \ln 3 \approx 1{,}791$, $\ln 7 = \ln 5 + \ln\dfrac{7}{5} \approx 1{,}945$, $\ln 8 = 3\ln 2 \approx 2{,}079$,

$\ln 9 = 2\ln 3 \approx 2{,}196$, $\ln 10 = \ln 2 + \ln 5 \approx 2{,}302$. В третия знак не сме сигурни. Всъщност резултатите имат по 3 верни в широк смисъл десетични знаци (т.е. грешката е по-малка от 10^{-3}), освен за $\ln 9 = 2{,}1972\ldots$ Например $M = \dfrac{1}{\ln 10} \approx 0{,}434$, $\lg 2 = \dfrac{\ln 2}{\ln 10} \approx 0{,}3010$.

Ерата на компютрите оказа влияние върху нашите сметки: тук буквално следвахме Ойлер, но той е извършил пресмятанията в този учебен пример с точност до 25 знака (отивайки по-далеч във формулата на Маклорен).

16.7. В четиризначната логаритмична таблица са дадени с 4 знака мантисите (т.е. дробните части) на десетичните логаритми на целите числа от 100 до 1000. Отдясно допълнителни колонки помагат за бърза линейна интерполация. Можем ли да разчитаме, че линейната интерполация в интервала $[n, n+1]$ ($n \geqq 100$) няма да ни подведе?

Решение. При интерполиране за $h \in (0,1)$ вместо $\lg(n+h)$ взимаме $\lg n + h[\lg(n+1) - \lg n]$. Грешката е $\Delta = \lg n + h\lg\frac{n+1}{n} - \lg(n+h) = h\lg\left(1+\frac{1}{n}\right) - \lg\left(1+\frac{h}{n}\right) = Mh\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - M\ln\left(1+\frac{h}{n}\right)$, защото $\lg x = \frac{\ln x}{\ln 10} = M\ln x$. Прилагаме формулата на Маклорен при $m = 1$ към функцията $y = \ln(1+x)$. Пресмятаме $y' = \frac{1}{1+x}$, $y'' = \frac{-1}{(1+x)^2}$, $\ln(1+x) = x + \frac{x^2}{2}\,\frac{-1}{(1+\xi)^2} = x+R$. Ако $x>0$, то $0 < \xi < x$. От $0 < h < 1$ и $n \geqq 100$ имаме: $0 < \frac{h}{n} < 10^{-2}$, $0 < \frac{1}{n} \leqq 10^{-2}$. Така $\Delta = Mh\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2}\,\frac{-1}{(1+\xi_1)^2}\right) - M\left(\frac{h}{n} + \frac{h^2}{2n^2}\,\frac{-1}{(1+\xi_2)^2}\right) = \frac{M}{2}\,\frac{h}{n}\,\frac{1}{n}\,\frac{-1}{(1+\xi_1)^2} - \frac{M}{2}\left(\frac{h}{n}\right)^2\frac{-1}{(1+\xi_2)^2}$. От едно положително число (второто), което е по-малко от $\frac{M}{2}10^{-4}$, се изважда друго положително число, което е по-малко от $\frac{M}{2}10^{-4}$. За разликата Δ имаме $|\Delta| < \frac{M}{2}10^{-4} < \frac{1}{4}10^{-4}$ (за M вж. зад. 6).

Линейната интерполация е оправдана. Въпреки това понякога полученият по този начин (от таблицата) четвърти знак не е верен поради грешки от закръглянето и при интерполирането с помощните колонки.

16.8. Ако $y = \ln\frac{1+x}{1-x}$, то $y\left(\frac{1}{2n+1}\right) = \ln(n+1) - \ln n$.

При $n \geqq 100$ имаме $x = \frac{1}{2n+1} < \frac{1}{200} = 5.10^{-3}$. Развийте y по формулата на Маклорен при $m = 2$ и оценете остатъка за $0 < x < 5.10^{-3}$. Получете формула, с която един след друг могат да се пресмятат (ако е известно M) десетичните логаритми на целите числа от 100 до 1000 с точност до 4 знака (т. е. да се състави четиризначна логаритмична таблица).

Решение. $y = \ln(1+x) - \ln(1-x)$, $y(0) = y''(0) = 0$, $y'(0) = 2$, $y''' = 2(1+x)^{-3} + 2(1+x)^{-3}$. Така $\ln\frac{1+x}{1-x} = 2x + \frac{x^3}{3}\left[\frac{1}{(1+\xi)^3} + \frac{1}{(1-\xi)^3}\right] = 2x + R$, $0 < \xi < x$. Ако $x < \varepsilon$, то $\frac{1}{(1+\xi)^3} + \frac{1}{(1-\xi)^3} < 1 + \frac{1}{(1-\varepsilon)^3} < \frac{5}{2}$, например за $\varepsilon < 0{,}1$. При нас $\varepsilon = 5.10^{-3}$, $0 < R < \frac{x^3}{3}\,\frac{5}{2} < \frac{625}{6}10^{-9} < 1{,}1.10^{-7}$. Като положим $x = \frac{1}{2n+1}$, получаваме $\ln\frac{n+1}{n} = \frac{2}{2n+1} + R$, $\lg(n+1) - \lg n = \frac{2M}{2n+1} + MR$ (от $\lg x = \frac{\ln x}{\ln 10} = M\ln x$), $|MR| < \frac{1{,}1}{2{,}2}10^{-7} = \frac{1}{2}10^{-7}$, защото $\ln 10 \approx 2{,}30 > 2{,}2$ (зад. 16.6).

Като започнем от $\lg 100 = 2{,}0000$ (мантиса ,0000), по формулата $\lg(n+1) \approx \lg n + \frac{2M}{2n+1}$ последователно намираме $\lg 101$, $\lg 102$, …, до $\lg 1000 = 3{,}0000$. Сумата от всички грешки е по-малка от $10^3 . \frac{10^{-7}}{2} = \frac{1}{2}10^{-4}$. За да не се трупа и грешка от закръгляването, работим с повече от 4 знака. Опорни стойности като $\lg 1000 = 3$ и други, сметнати независимо, могат да служат за контрол. Имаме $M \approx 0{,}43429448$. Все пак с колко знака трябва да работим, за да сме сигурни в цифрата на десетохилядните?

16.9. Нека $\alpha = \operatorname{arctg}\frac{1}{5}$. Тогава $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{5}$, $\operatorname{tg}2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{5}{12}$, $\operatorname{tg}4\alpha = \frac{120}{119} \approx 1$, следователно $4\alpha \approx \frac{\pi}{4}$. Нека $\beta = 4\alpha - \frac{\pi}{4}$, $\operatorname{tg}\beta = \frac{\operatorname{tg}4\alpha - \operatorname{tg}\pi/4}{1+\operatorname{tg}4\alpha\,\operatorname{tg}\pi/4} = \frac{1}{239}$. Тъй като $0 < \alpha < \operatorname{arctg}1 = \frac{\pi}{4}$, то $0 < 4\alpha < \pi$. Дори $0 < 4\alpha < \frac{\pi}{2}$, защото $\operatorname{tg}4\alpha > 0$. Оттук $-\frac{\pi}{4} < \beta < \frac{\pi}{4}$ и следователно $\beta = \operatorname{arctg}\frac{1}{239}$. Така $\frac{\pi}{4} = 4\alpha - \beta = 4\operatorname{arctg}\frac{1}{5} - \operatorname{arctg}\frac{1}{239}$. Пресметнете (с лист и молив) числото π с точност до 5 знака.

Решение. $\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + R$ (вж. при решението на зад. 12.1, м). Ако вземем $n + 1$ члена от формулата на Маклорен, остатъкът е (зад. 2.4, с)

$$R_n = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \frac{(-1)^n n!}{(\xi^2+1)^{\frac{n+1}{2}}} \sin[(n+1)\operatorname{arcctg}\xi].$$ При

$|x| \leqq \frac{1}{5}$ и $n = 8$ имаме $|R_8| \leqq \frac{1}{9.5^9} = \frac{1}{9}\left(\frac{2}{10}\right)^9 = \frac{512}{9} 10^{-9}$. За $16\,\alpha$ оценката е $\frac{8.1024}{9} 10^{-9} < 1000 \,.\, 10^{-9} = 10^{-6}$. При $|x| \leqq \frac{1}{239}$ и $n = 2$ пресмятаме

$$|R_2| \leqq \frac{1}{3.239^3} = \frac{1}{3}(0{,}00418\ldots)^3 < \frac{1}{3}(0{,}005)^3 = \frac{125}{3} 10^{-9}.$$

За $4\,\beta$ оценката е $\frac{500}{3} 10^{-9} < 2.10^{-7}$. Пресмятаме

$$4\alpha = 4\operatorname{arctg}\frac{1}{5} \approx 4\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{3.5^3} + \frac{1}{5^6} - \frac{1}{7.5^7}\right) = \frac{4}{5}\left(1 - \frac{4}{300}\right)$$

$$+ \frac{4}{(125)^2} - \frac{4}{(125)^2.35} = 0{,}8(1-0{,}013333\ldots) + 4.(0{,}008)^2$$

$$- \frac{1}{4}(0{,}008)^2 . \frac{16}{35} = 0{,}8 - 0{,}010666\ldots + 4.0{,}000064 - \frac{1}{4} 0{,}000064$$

$$. \frac{16}{35} \approx 0{,}789333 + 0{,}000256 - \frac{1}{4} \cdot 0{,}00003 = 0{,}789589 - \frac{1}{4} 0{,}00003.$$

Като извадим $\beta \approx \frac{1}{239} \approx 0{,}004184$, получаваме $\frac{\pi}{4} = 4\alpha - \beta \approx 0{,}785405 - \frac{1}{4} 0{,}00003$. Окончателно $\pi \approx 3{,}14162 - 0{,}00003 = 3{,}14159$.

16.10. Нека f е функция, дефинирана и диференцуема в интервала (a, ∞), $f(a) > 0$, $f'(a) < 0$, f'' е непрекъсната в a и има

неположителна производна в (a, ∞). Докажете, че уравнението $f(x) = 0$ има точно едно решение в интервала (a, ∞).

Решение. За $x > a$ съществува такава точка $\xi \in (a,x)$, че е в сила равенството $f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + f''(\xi)\frac{(x-a)^2}{2!}$. Тогава $f(x) \leqq f(a) + f'(a)(x-a) \to -\infty$ при $x \to \infty$ ($f'' \leqq 0$, $f'(a) < 0$). Тъй като $f(a) > 0$, а f е непрекъсната, уравнението $f(x) = 0$ има решение в (a, ∞). Но f' намалява (евентуално нестрого). Следователно за $x \geqq a$ имаме $f'(x) \leqq f'(a) < 0$, f намалява. Затова решението е единствено.

16.11. Ако f е два пъти диференцуема в $\mathbf{R}$ функция и $f(x)$ и $f''(x) \to 0$ при $x \to \infty$, докажете, че и $f'(x) \to 0$ при $x \to \infty$.

Решение. $f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2} f''(x + \theta h)$, $0 < \theta < 1$,

$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - \frac{h}{2} f''(x+\theta h) \to 0$ при $x \to \infty$ и фиксирано h, защото тогава $x+h$ и $x+\theta h \to \infty$.

16.12. Нека функцията f е дефинирана и диференцуема в интервала $[a, b]$ f' е непрекъсната в краищата a и b и диференцуема във вътрешните точки. $M_0 = \max\limits_{[a,b]} |f|$, $M_1 = \max\limits_{[a,b]} |f'|$, а $|f''| \leqq M_2$ в (a, b). Докажете:

а) ако $f'(a) = f'(b) = 0$, то $M_2 \geqq \frac{4}{(b-a)^2} |f(b) - f(a)|$;

б) ако $f(a) = f(b) = 0$, то $M_2 \geqq \frac{8}{(b-a)^2} M_0$;

в) ако $f(a) = f(b)$, то $M_1 \leqq \frac{(b-a)}{2} M_2$, $a<b$.

Решение. а) Да означим с c средата на отсечката $[a, b]$ и да напишем тейлоровото развитие на $f(x)$ при $x=c$ и $n=1$ около точката a и около точката b:

$$f(c) = f(a) + \frac{(c-a)^2}{2!} f''(\xi) = f(b) + \frac{(c-b)^2}{2!} f''(\eta).$$

Тогава

$$|f(b) - f(a)| \leqq |f(b) - f(c)| + |f(c) - f(a)| = \frac{(c-b)^2}{2}|f''(\eta)|$$

$$+ \frac{(c-a)^2}{2} |f''(\xi)| = \frac{(b-a)^2}{8}(|f''(\xi)| + |f''(\eta)|) \leqq \frac{(b-a)^2}{4} M_2.$$

б) Ако $f \not\equiv 0$, то M_0 се достига в (a, b). Това е така и при $f \equiv 0$. Нека $|f(c)| = M_0$, $c \in (a, b)$. Тогава f има в c локален екстремум и $f'(c) = 0$. Да развием $f(x)$ при $x = a$ и при $x = b$ около точката c за $n = 1$: $0 = f(a) = f(c) + \dfrac{(a-c)^2}{2} f''(\xi)$, $0 = f(b) = f(c) + \dfrac{(b-c)^2}{2} f''(\eta)$. Оттук намираме $|f''(\xi)| = \dfrac{2|f(c)|}{(a-c)^2}$, $|f''(\eta)| = \dfrac{2|f(c)|}{(b-c)^2}$. Някое от числата $c-a$, $b-c$ не надминава $\dfrac{b-a}{2}$ и следователно за $|f''(\xi)|$ или за $|f''(\eta)|$ получаваме оценка отдолу: $\dfrac{2M_0}{(b-a)^2} \cdot 4$. Доказахме, че $M_2 \geqq \dfrac{8}{(b-a)^2} M_0$.

в) Развиваме f около точката $x \in [a, b]$: $f(a) = f(x) + (a-x)f'(x) + \dfrac{(a-x)^2}{2} f''(\xi)$, $f(b) = f(x) + (b-x)f'(x) + \dfrac{(b-x)^2}{2} f''(\eta)$. Но $f(a) = f(b)$ и $(b-a)f'(x) = \dfrac{(a-x)^2}{2} f''(\xi) - \dfrac{(b-x)^2}{2} f''(\eta)$, $(b-a)\,|f'(x)| \leqq \dfrac{M_2}{2}[(a-x)^2 + (b-x)^2] = \dfrac{M_2}{2} u(x)$. В интервала $[a, b]$ функцията u намалява до средата $\dfrac{a+b}{2}$, а после расте $(u' = 2(x-a) + 2(x-b))$, като достига най-голяма стойност $(b-a)^2$. Така $(b-a) \times |f'(x)| \leqq \dfrac{M_2}{2}(b-a)^2$, $|f'(x)| \leqq \dfrac{M_2}{2}(b-a)$, $M_1 \leqq \dfrac{M_2}{2}(b-a)$.

16.13. В решението на зад. 10.1, в) е доказано неравенството на Йенсен. Предложете друго доказателство за функция с положителна втора производна.

Решение. Нека $n=2$, а x и y са различни точки от Δ, α и β са положителни числа със сума 1 и $c = \alpha x + \beta y$. Тогава

$$f(x) = f(c) + (x-c)f'(c) + \frac{(x-c)^2}{2} f''(\xi),$$

$$f(y) = f(c) + (y-c)f'(c) + \frac{(y-c)^2}{2} f''(\eta),$$

$$\alpha f(x) + \beta f(y) = f(c) + [\alpha x + \beta y - c]f'(c) + \alpha \frac{(x-c)^2}{2} f''(\xi)$$

$$+ \beta \frac{(y-c)^2}{2} f''(\eta) > f(c) = f(\alpha x + \beta y),$$

защото $\alpha + \beta = 1$, $\alpha x + \beta y - c = 0$, $c \neq x, y$. При $x = y$ имаме равенство. Случаят на n точки се разглежда по същия начин (а не по индукция както в зад. 10.1, в).

16.14. Ако в $y^{(n)} = 0$ в интервал, докажете, че y е полином от степен, която не надминава $n-1$.

Решение. $y(x) = y(a) + \dfrac{y'(a)}{1!}(x-a) + \ldots + \dfrac{y^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1} + R$, като $R = \dfrac{y^{(n)}(\xi)}{n!}(x-a)^n = 0$.

§ 17. Изследване на стационарни точки с помощта на производни от по-висок ред

Точка, в която производната се анулира, наричаме стационарна. Ако n е наймалкият номер на производна, различна от нула в точката a, то при нечетно n нямаме, а при четно n имаме локален екстремум в стационарната точка a и той е максимум при $f^{(n)}(a) < 0$ и минимум при $f^{(n)}(a) > 0$ (при условие, че $f^{(n)}$ съществува в някоя околност на a и е непрекъсната в a). Примерите от този параграф лесно могат да се третират и както в § 8.

17.1. Нека между величините x и y съществува зависимост $y = kx$ и сме направили n измервания, които за стойностите $x_1, x_2, \ldots, x_n$ са дали резултати $y_1, y_2, \ldots, y_n$. Разбира се, отношенията $\dfrac{y_i}{x_i}$ не са едни и същи при $i=1,2,\ldots,n$. За да намерите приблизително k, приложете метода на най-малките квадрати, т.е. потърсете точка, в която функцията $\varphi(k) = \sum_{i=1}^{n} (y_i - kx_i)^2$ достига най-малка стойност.

Решение. $\varphi'(k) = \sum_{i=1}^{n} 2(y_i - kx_i)(-x_i) = 2k\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2\sum_{i=1}^{n} x_i y_i = 0$

за $k_0 = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$, като $\varphi''(k) = 2\sum_{i=1}^{n} x_i^2 > 0$ за всяко k.

Следователно в точката k_0 функцията φ има локален минимум. Това е и най-малка стойност на φ, например защото $\varphi(k) \to \infty$ при $k \to \infty$ и при $k \to -\infty$ или защото всъщност φ е квадратен тричлен с положителен коефициент пред k^2.

17.2. Намерете локалните екстремуми на следните функции:

а) $\sin(\pi\cos x)$; **б)** $\alpha e^x + \beta e^{-x}, \alpha > 0, \beta > 0$; **в)** $\cos x + \frac{1}{2}\cos 2x$;

г) $\sin x + \frac{1}{3}\sin^3 x$; **д)** $\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln(1 + x^2)$; **е)** $(1 + \cos x)\sin x$;

ж) $3x^5 - 5x^3$; **з)** $x^4 - x^3$; **и)** $\frac{\ln^2 x}{x}$; **й)** $\sin^3 x + \cos^3 x$;

к) $\frac{x^3}{2} - \operatorname{tg} x + \sin x$ (само $x = 0$); **л)** $x\sqrt[3]{x - 1}$.

Решение. **ж)** $y=3x^5-5x^3$, $y'=15(x^4-x^2)=15x^2(x^2-1)=0$, $x_1 = 0$, $x_2=1$, $x_3=-1$. Освен това $y'' = 60x^3-30x = 30x(2x^2-1)$, $y''(0) = 0$, $y''(1) > 0$, $y''(-1) < 0$; $y''' = 30(6x^2 - 1)$, $y'''(0) \neq 0$. Следователно y има локален максимум $y(-1) = 2$ и локален минимум $y(1) = -2$. В точката 0 функцията y няма локален екстремум.

17.3. Изследвайте за локални екстремуми разстоянието $r(x)$ от точката $(-1, 2)$ до точката (x, x^2) от параболата $y = x^2$.

Решение. $r^2(x) = (x + 1)^2 + (x^2 - 2)^2 = y$. Функциите y и r имат локални екстремуми в едни и същи точки и от един и същ вид. За $y' = 4x^3 - 6x + 2 = 0$, $2x^3 - 3x + 1 = 0$ очевиден корен е $x_1 = 1$.

Ако едно уравнение с цели коефициенти $a_0x^n + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0$ има цял корен $x \neq 0$, той дели a_n, защото $a_0x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} + \frac{a_n}{x} = 0$.

Разделяме полинома $2x^3 - 3x + 1$ на $x - 1$ и получаваме $2x^2 + 2x - 1$. Нови два корена са $x_2 = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$, $x_3 = \frac{-\sqrt{3}-1}{2}$. Фактически задачата е вече решена (финалът е както в § 8). Но в този параграф ще изберем по-тромав вариант: $y'' = 12x^2 - 6 = 6(2x^2 - 1)$, $y''(x_1) = 6 > 0$, y (и r) има локален минимум в $x_1 = 1$. От $\frac{1}{6}y''(x_2) = 2\frac{(\sqrt{3}-1)^2}{4} - 1 = 1 - \sqrt{3} < 0$ получаваме, че y (и r) има локален максимум в x_2, а от $\frac{1}{6}y''(x_3) = 2\frac{(\sqrt{3}+1)^2}{4} - 1 = 1 + \sqrt{3} > 0$, че y (и r) има локален минимум в x_3. Накрая можем геометрично да осмислим получените резултати.

17.4. Намерете полином $P(x)$ от възможно по-ниска степен, който при $x = -1$ има стационарна точка, но няма локален екстремум, а при $x = 2$ има локален минимум. Освен това $P(-1) = 28$, $P(2) = 1$.

§ 18. Задачи за числено пресмятане

Тук предлагаме задачи за пресмятаме с джобен калкулатор или с компютър. Метода на Нютон за приблизително решаване на уравнения вижте в зад. 3.7. В по-прости случаи опитайте за сравнение формулата от зад. 12.9. Имайте предвид зад. 10.4. Може да прегледате и зад. 4.9, 6.7, 16.5. Стойности на полиноми пресмятаме по схемата:

$$(\ldots((a_0x + a_1)x + a_2)x + \ldots + a_{n-1})x + a_n.$$

18.1. Решете с точност до 5 знака уравненията:

а) $4x^3 + 3x^2 - 2 = 0$ (зад. 14.3, л);

б) $x^3 - 6x - 2 = 0$ (зад. 14.3, л);

в) $x^4 - 8x^3 + 21x^2 - 20x - 1 = 0$ (зад. 2.17);

г) $x^4 - 10x^3 + 18x^2 + 2x - 5 = 0$ (зад. 13.4, о);

д) $4(1 + 4x^2)(1 - x^2)^2 = 9x^3$ в $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$;

е) $\ln\left(-1 - \frac{1}{x}\right) = \frac{1}{1+x}$;

ж) $\sin x = \frac{1}{(1+x)^2}$ в $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$;

з) $\cos x = \frac{1}{1+x}$ в $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ (зад. 9.6).

18.2. Решете с точност до 5 знака уравнението $8\sin x = x$. Колко са корените?

Решение. $|x| \leqq 8 < 3\pi$. При $x = \frac{5\pi}{2}$ получаваме $\frac{x}{8} = \frac{5\pi}{16} < 1$, защото $\pi < \frac{16}{5} = 3{,}2$. Следователно уравнението има седем корена.

18.3. Уравнението

$$x^7 - \frac{7}{2}x^6 + \frac{63}{13}x^5 - \frac{175}{52}x^4 + \frac{175}{143}x^3 - \frac{63}{286}x^2 + \frac{7}{429}x - \frac{1}{3432} = 0$$

има 7 реални корена. Намерете ги с точност до 5 знака. А защо не с точност до 16 знака? (Заедно с Гаус.)

18.4. (Енке). Разложете на реални множители полинома $x^7 - 2x^5 - 3x^3 + 4x^2 - 5x + 6$. Той има 3 реални и 4 комплексни нули. Как ще смятате с комплексни числа? (Точност до 7 знака).

18.5. (Ойлер). **а)** Решете уравнението $x = \cos x$ в $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$;

б) Намерете централния ъгъл на кръгов сектор, който се дели от хордата на две равнолицеви части;

в) Намерете централния ъгъл на кръгов сектор с лице, равно на половината от лицето на правоъгълен триъгълник с катет единия радиус и хипотенуза по другия радиус на сектора;

г) Пресметнете първите 9 положителни корена на уравнението $x = \operatorname{tg} x$. (Точност до 1″.)

18.6. (Ойлер). Намерете централния ъгъл с принадлежаща хорда, която има свойството:

а) разделя кръга на две части с отношение на лицата 1 : 3;

б) разделя кръга на две части с отношение на лицата 1 : 2;

в) ако построим правоъгълен триъгълник с хипотенуза хордата и катет, лежащ на диаметъра през единия ѝ край, то сумата от катетите е равна на дължината на малката дъга;

г) ако продължим хордата (от едната страна) до отсечка, дълга колкото малката дъга, и съединим краищата на отсечката с центъра на окръжността, ще се получи правоъгълен триъгълник. (Точност до 1″!)

18.7. Извършете (заедно с Ойлер) пресмятанията в зад. 16.6. с точност до 25 знака. Колко члена от развитието на $\ln \frac{1+x}{1-x}$ по формулата на Тейлор трябва да вземете?

18.8. Съставете четиризначна логаритмична таблица по начина, описан в зад. 16.8, и сверете (чрез изваждане) с таблицата, която компютърът би предложил независимо.

18.9. Потърсете границата $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{\sqrt{\cos x}}{\sqrt{1+\operatorname{tg} x^2}}\right)^{\frac{1}{x^2}}$, като давате малки стойности на x. На кой от резултатите се спирате?

Опитайте и за $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg}(\sin x)-\sin(\operatorname{tg} x)}{x^7}$.

18.10. От зад. 6.19 знаем, че $1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln n \to C$,

и следователно $C \approx 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln n$ за големи стойности на n. Направете опит с компютър да получите C по този неудобен начин, като пробвате $n = 10, 100, 1000, \ldots$ Излиза ли $C = 0{,}57721\ 56649\ 0\ldots$?

18.11. **а)** Пресметнете с точност до 3 знака положителния корен на уравнението $2\operatorname{arctg} x = \pi x^2$;

б) с точност до 5 знака решете уравнението $8x^3 + 36x^2 + 54x - 773 = 0$.