Числени методи в анализа

Боянов - лекции по числени методи

Сборник задачи по числени методи - в сайта

$$\text{оц.} = \frac{2\cdot(\text{тек. контрол}) + 3(\text{финал. изпит})}{5} \qquad \text{ф.и} \geq 3$$

25.02.2014.

Част 1. Приближаване на функции

Осн. зад.: Приближаване на сложни функции с прости функции.

Сложни функции:

- сложни аналитични изрази
  → много изчислителна работа;
  → грешки от закръгляне;
- таблично зададени функции:
  → непълна инф.
  → необходима циф. инт.

x_0	....	x_n
y_0	....	y_n

Прости функции:

- прости като изрази;
- лесно да се пресмятат стойности;
- лесно да се диф. и интегрират;
- хубави свойства (гладкост, размер, производни);
- да могат да приближават широки класове;

пример:

$$\int_a^b f(x)\,dx = ?$$

1) $f(x) \approx \varphi_f(x)$ – проста ф-я;

2) $\int_a^b f(x)\,dx \approx \int_a^b \varphi_f(x)\,dx$

1) алгебрични полиноми:

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

$$p(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = (a_2 x + a_1) x + a_0$$

Хорнер: n умножения;

2) тригонометричните полиноми;

$$\tau(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos kx + b_k \sin kx$$

$$\tau(x + 2\pi) = \tau(x)$$

Приближаване на една функция с др. функция.

Два типа критерии:

1) интерполационни критерии:

избиране краен брой х-ки на функцията: $L_0(f) \ldots L_n(f)$

казваме, че $f \approx g$ ако $L_k(f) = L_k(g)$ $k = 0, \ldots, n$

примери:

а) $L_k(f) = f(x_k)$, $k = \overline{0,n}$ (в зад. точки)

б) $L_k(f) = \int_a^b f(x) x^k dx$, $k = \overline{0,n}$ (моменти)

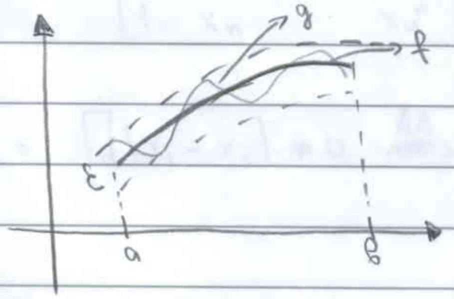
2) метрични критерии:
- в пространството от функции F се във метрика $\rho(f,g)$ със свойства: /разстояние/

1) $\rho(f,g) \geq 0 \quad = 0 \iff f = g$
2) $\rho(f,g) = \rho(g,f)$
3) $\rho(f,g) \leq \rho(f,h) + \rho(h,g)$

казваме, че $f \simeq g$ ако $\rho(f,g) = 0$

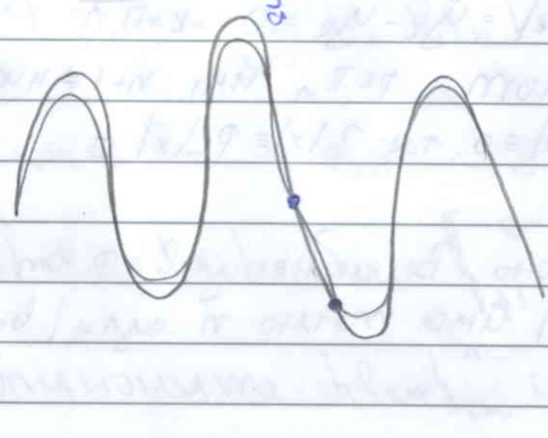
пример:

1) равномерно разстояние:
$\rho(f,g) = \max\limits_{x \in [a,b]} |f(x) - g(x)|$



$\rho(f,g) < \varepsilon$

2) интегрално разстояние:
$\rho(f,g) = \int_a |f(x) - g(x)| dx$



Интерполационна формула на Лагранж

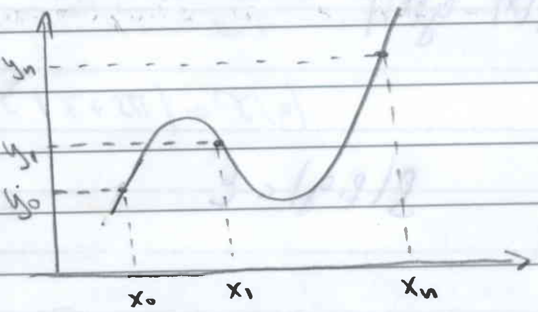
$\Pi_n = \{ \sum_{k=0}^{n} a_k x^k : a_k \in \mathbb{R},\ k=\overline{0,n} \}$

- алгебричен полином от степен $\le n$

задача: Дадени са
- точки $x_0, \dots, x_n$ ($x_i \ne x_j$ за $i \ne j$) - „интерп. възли"
- стойности $y_0, \dots, y_n$

Да се намери алгебричен полином $p \in \Pi$

(1) $p(x_k) = y_k$, $k = 0, \dots, n$



Единственост на решението:

да доп. че $\exists$ $p_1, p_2 \in \Pi$ решават зад (1)

Да разгледаме $p_1(x) - p_2(x) \in \Pi_n$ и

$p_+(x_k) = p_1(x_k) - p_2(x_k) = y_k - y_k = 0$ $k = \overline{0,n}$

и така полиномът $p \in \Pi_n$ има $n+1 \ne$ нули

$\Rightarrow$ (осн. Тh на алг.) $\Rightarrow$ $p(x) \equiv 0$, т.е $p_1(x) \equiv p_2(x)$ $\square$

Основна Тh на алгебрата: Всеки ненулев p от ст. точно n ($n \ge 1$) има точно n нули (вкл. компл., кратни)

Едновременно същ. и ! на реш. на зад (1) може да се док. по сл. начин:

търсим $p(x) = a_0 + a_1 x + \dots a_n x^n$

тогава:

$$\begin{cases} a_0 + a_1 x_0 + \dots + a_n x_0^n = y_0 \\ \vdots \\ a_0 + a_1 x_n + \dots + a_n x_n^n = y_n \end{cases}$$

– система $(n+1)$ ур-н. $(n+1)$ неизв: $a_0, \dots, a_n$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & \dots & x_0^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & & x_n^n \end{vmatrix} = \text{ - det на Вандермонд}$$

$$= \prod_{i>j} (x_i - x_j) \neq 0 \xRightarrow{AA} (1) \text{ има единств. решение;}$$

Построяване на решението на (1)

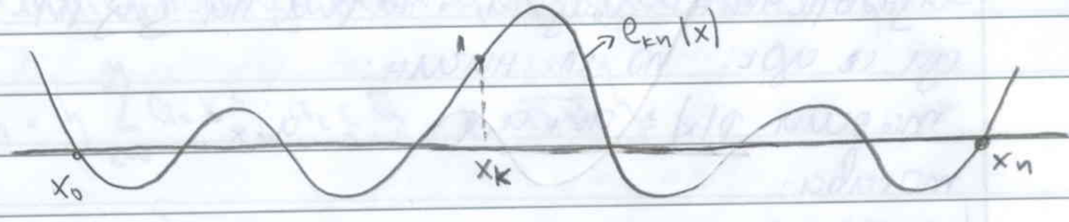
Търсим $p(x)$ във вида

$$(2)\quad p(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k \, l_{kn}(x), \text{ където}$$

$l_{k,n} \in \Pi_n$ и удовл. условията

$$(3)\quad l_{k,n}(x_i) = \delta_{ki} = \begin{cases} 0, & k \neq i \\ 1, & k = i \end{cases}$$

Полиномите $\{l_{kn}\}_{k=0}^{n}$ се наричат базисни п-ми на Лагранж.



Ако сме построили $\{\ell_{kn}\}_0^n$ то $p(x)$ (от (2)) е реш. на (1).

Действително:

$$p(x_i) = \sum_{k=0}^{n} y_k \ell_{k,n}(x_i) \overset{(3)}{=} \sum_{k=0}^{n} y_k \delta_{ki}, \quad i = \overline{0,n}$$

Намиране на $\ell_{k,n}(x)$:

$\Pi_n \ni \ell_{k,n}$ има $n \neq$ нули: $x_0, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots x_n \Rightarrow$

$$\ell_{kn}(x) = A(x-x_0)\ldots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\ldots(x-x_n)$$

При $x = x_k$

$$1 = A(x_k-x_0)\ldots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\ldots(x_k-x_n)$$

$$\Rightarrow A = \frac{1}{\prod\limits_{\substack{i=0\\ i\neq k}}^{n}(x_k-x_i)}$$

Оттук:

$$(4)\quad \ell_{kn}(x) = \frac{(x-x_0)\ldots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\ldots(x-x_n)}{(x_k-x_0)\ldots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\ldots(x_k-x_n)} =$$

$$= \prod_{\substack{i=0\\ i\neq k}}^{n} \frac{x-x_i}{x_k-x_i}$$

Ако $y_k = f(x_k)$, $k=\overline{0,n}$, където f е дадена функция то реш. на (1) се бележи с $L_n(f,x)$ и се нарича интерполационен полином на Лагранж от Π_n за f с възли $x_0, \dots, x_n$

Казваме още, че $L_n(f,x)$ интерполира f в т. $x_0, \dots, x_n$

Досега доказахме:

Тм.1 Нека са дадени $x_0, \dots, x_n$ ($x_i \neq x_j$ то $i \neq j$) и функцията f, която е деф. върху точките.
Тогава $\exists!$ полином от степен $\leq n$ (бел. го с $L_n(f,x)$), който удовлетв. условията:

$L_n(f,x_k) = f(x_k)$, $k=0,\dots,n$.

При това е в сила интерполац. формула на Лагранж:

$$L_n(f;x) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k) l_{kn}(x), \text{ където}$$

$\{l_{kn}(x)\}_{k=0}^{n}$ се дават с формулите (4).

Бел: Едно друго предст. на баз. полиноми

$$l_{nk}(x) = \frac{w(x)}{(x-x_k)w'(x_k)}, \text{ където } w(x) = (x-x_0)\dots(x-x_n)$$

$\frac{w(x)}{x-x_k}$ е чис. на (4).

$w'(x) = (x-x_1)\dots(x-x_n) + \dots + (x-x_0)\dots(x-x_{n-1})$

при $x=x_k$:

$w'(x_k) =$ знам. в (4)

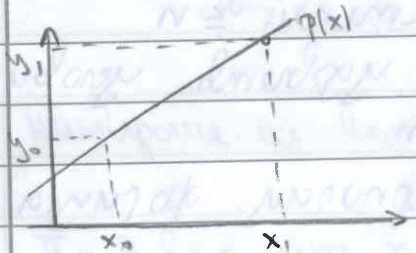
Сл: $f \in \Pi_n$ то $L_n(f,x) = f(x)$

Док: В двете страни са полиноми от Π_n и реш. една и съща зад.

x_0	...	x_n
$f(x_0)$		$f(x_n)$

от единств. в зад 1 => двата полинома съвпадат.

Частни случай:



$p \in \Pi_1 \quad p(x_0) = y_0, \quad p(x_1) = y_1$

$$p(x) = y_0 \, l_{0,1}(x) + y_1 \, l_{1,1}(x)$$

$$= y_0 \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} + y_1 \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$$

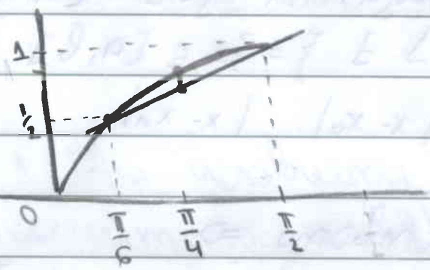
$$\begin{cases} l_{0,1}(x_1) = 0 \\ l_{0,1}(x_0) = 1 \end{cases}$$

За упражнения:
подробно напишете формулата на Лагранж $n=2$.

пример: Да се намери $L_1(f,x)$ за $f(x)=\sin x$ при $x_0=\frac{\pi}{6}$, $x_1=\frac{\pi}{2}$

Да се използва $L_1(f,x)$ за приближено намиране на $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\approx 0{,}707$

решение:



$y_0=\frac{1}{2}$, $x_0=\frac{\pi}{6}$

$y_1=1$, $x_1=\frac{\pi}{2}$

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{x-\frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{2}}+1\cdot\frac{x-\frac{\pi}{6}}{\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}}=\frac{x-\frac{\pi}{2}}{-\frac{2\pi}{3}}+\frac{x-\frac{\pi}{6}}{\frac{\pi}{3}}=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{\frac{2x-\pi}{2}}{\frac{\pi}{6}-\frac{3\pi}{6}}+\frac{\frac{6x-\pi}{6}}{\frac{3\pi-\pi}{6}}=\frac{3}{2\pi}\left(\frac{2x-\pi}{2}\right)+\frac{3}{2\pi}\left(\frac{6x-\pi}{6}\right)=$$

$$=-\frac{3}{2\pi}\left(x-\frac{\pi}{2}+2x-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{3}{2\pi}x+\frac{1}{4}$$

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right)\approx L_1\left(f,\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\frac{3}{2\pi}\times\frac{\pi}{4}+\frac{1}{4}=\frac{3}{8}+\frac{2}{8}=\frac{5}{8}\approx 0{,}625$$

пр $\approx 0{,}08<0{,}1$

4.03.2014г.

Оценка на грешката при интерполация

$R_n(f;x) := f(x) - L_n(f;x)$ - гр. на интерполацията в т. x.

$C^m[a,b] = \{ f : f$ има непр. m-та производна в $[a,b] \}$

Th2 Нека са дадени точките $x_0 \dots x_n$ в $[a,b]$ ($x_i \neq x_j$ за $i \neq j$) и функцията $f \in C^{n+1}[a,b]$. Тогава за всяко $x \in [a,b]$ $\exists$ $\xi = \xi_x \in [a,b]$:

(5) $$f(x) - L_n(f;x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)\dots(x-x_n)$$

Бележка: От доказателството $\Rightarrow$

$\xi \in [\min\{x, x_0, \dots, x_n\}, \max\{x, x_0, \dots, x_n\}]$

Док: Фикс. т. $x \in [a,b]$. Разгл.

$F(t) = f(t) - L_n(f;t) - C.\omega(t)$,

$\omega(t) = (t-x_0)\dots(t-x_n)$

Имаме:

$F(x_k) = f(x_k) - f(x_k) - 0 = 0$, $k = \overline{0,n}$

Ще определим C: $F(x) = 0$. $\Rightarrow$

(6) $$C = \frac{f(x) - L_n(f;x)}{\omega(x)}$$

при това C, F има $n+2$ нули: $x_0, \dots, x_n$ и x.

$\overset{\text{Рол}}{\Longrightarrow}$ $F'(t)$ има поне $n+1$ нули в $[a,b]$

...

$F^{(n+1)}(t)$ има поне 1 нула в $[a,b]$: озн. с ξ.

$$0 = F^{(n+1)}(\xi) = f^{(n+1)}(\xi) - 0 - C(n+1)!$$

$$\omega(t) = t^{n+1} + \dots$$
$$\omega^{(n+1)}(t) = (n+1)!$$

$$\Rightarrow (7) \quad C = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

сравнявайки (6) и (7) $\Rightarrow$ (5) . □ Th2

Сл.1: При условията на Th2. Да предположим допълнително, че $|f^{(n+1)}(t)| \leq M_{n+1}, \ \forall t \in [a,b]$

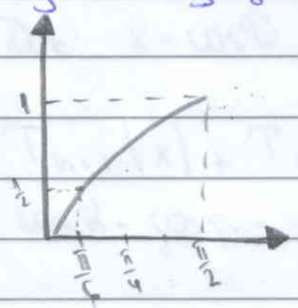
Тогава:

а) $|R_n(f;x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} |\omega(x)|; \ \forall x \in [a,b]$.

б) Ако $R_n(f) = \max\limits_{x \in [a,b]} |R_n(f;x)|$ то $R_n(f) \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \max\limits_{x \in [a,b]} |\omega(x)|$

пример: (от предната лекция)

да се даде оценка на грешката.



$f(x) = \sin x, \quad x_0 = \frac{\pi}{6}, \quad x_1 = \frac{\pi}{2}$

$L_1(f;x) = ?$

$f\left(\frac{\pi}{4}\right) - L_1\left(f;\frac{\pi}{4}\right) \approx 0.08$

$$\left|f\left(\frac{\pi}{4}\right)-L_1\left(f;\frac{\pi}{4}\right)\right| \le \frac{M_2}{2!}\left|\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{2}\right)\right| \le \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{12}\cdot\frac{\pi}{4} = \frac{\pi^2}{96} \approx 0{,}10\ldots$$

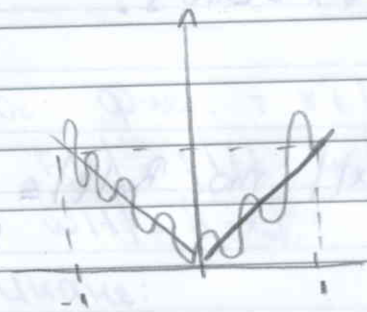
$[a,b]=[x_0,x_1]$

$M_2=\max\limits_{t\in[a,b]}|f''(t)|=1$

Зад. за упражнение: Нека $f(x)=\sin x$. Док. че за произволна $[a,b]$ и произв. избор на възлите $\{x_k^{(n)}\}_{k=0}^{n}$, $n=0,1,2,\ldots$ в $[a,b]$ е изп.

$\max\limits_{x\in[a,b]}|f(x)-L_n(f;x)|\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0$

($L_n(f;x)$ – инт. полином на Лагранж за f в т. $x_0^{(n)},\ldots,x_n^{(n)}$).



$f(x)=|x|$

$x_k^{(n)}=-1+\frac{2k}{n}$, $k=\overline{0,n}$

$L_n(f;x)\not\to f(x)$, $\forall x\neq 0,\pm1$;

Част 2. Полиноми на Чебишов

$$R_n(f) = \max_{x\in[a,b]} |f(x) - L_n(f;x)| \le \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \cdot \underbrace{\max_{x\in[a,b]} |(x-x_0)\dots(x-x_n)|}$$

Възниква следната задача: Да се намери

$$\min_{a\le x_0<\dots<x_n\le b} \{ \max |(x-x_0)\dots(x-x_n)| \}$$

и възлите $\{x_k^*\}_{k=0}^{n}$ за които се достига

Деф: $T_n(x) = \cos(n.\arccos x)$, $x\in[-1,1]$, $n=0,1,2,\dots$ полином на Чебишов от n-та степен.

$T_0(x) = 1$

$T_1(x) = x$

Тв: Всички полиноми на Чебишов удовл. следната тричленна рек. връзка:

$T_{n+1}(x) = 2x.T_n(x) - T_{n-1}(x)$, $n = 1,2,\dots$

Док: $x = \cos\theta$, $\theta = \arccos x$

$T_{n+1}(x) + T_{n-1}(x) = \cos(n+1)\theta + \cos(n-1)\theta =$

$\cos\alpha + \cos\beta = 2.\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$

$= 2.\underbrace{\cos\theta}_{x}.\underbrace{\cos n\theta}_{T_n(x)} = 2x.T_n(x)$ □.

$\Rightarrow T_2(x) = 2x.x - 1 = 2x^2 - 1$

$T_3(x) = 2x(2x^2-1) - x = 4x^3 - 3x$

$\ldots\ldots$

По индукция $\Rightarrow T_n \in \Pi_n$ и $T_n(x) = 2^{n-1}.x^n + \ldots \quad (n \geq 1)$

$(p(x) = cx^n + \bigodot^{\Pi_{n-1}}$

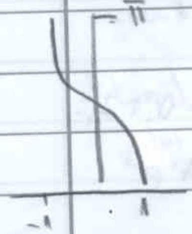
От деф. е очевидно че $|T_n(x)| \leq 1, \ \forall x \in [-1,1]$.

Достига ли се равенството? За кои x?

$|T_n(x)| = 1 \iff |\cos(n.\arccos x)| = 1$

$\iff n.\arccos x = k\pi$

$\arccos x = \frac{k\pi}{n} \Rightarrow k \in \{0, \ldots, n\}$

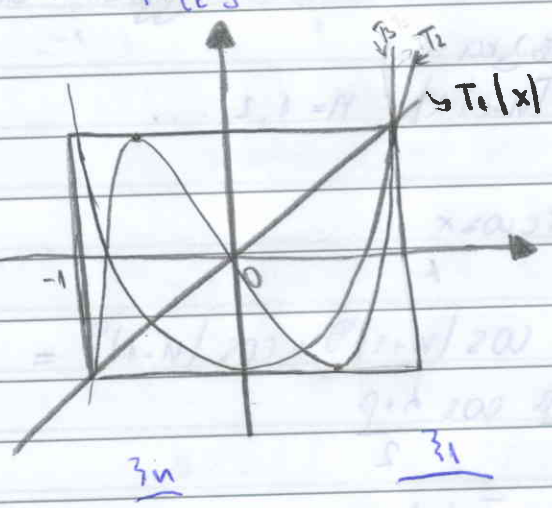


$\Rightarrow x = \cos\frac{k\pi}{n} =: \eta_k, \ k = \overline{0,n}$

- екстремални точки на полинома на $T_n(x)$

$T_n(\eta_k) = \cos k\pi = (-1)^k \ ; \ k = \overline{0,n}$

$\{\eta_k\}$ - точки на алтернанс на $T_n(x)$



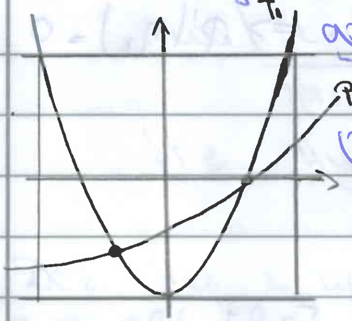
$-1 = \eta_n < \ldots < \eta_1 < \eta_0 = 1$

от горното $\Rightarrow T_n(x)$ има нула $\xi_k \in (\eta_k, \eta_{k-1})$
$k = \overline{1,n}$

за упражнение:
$\xi_k = \cos\frac{(2k-1)\pi}{2n}, k = \overline{1,n}$

Th 1. (основно екстр. св-во на $T_n(x)$)
$\exists P(x)$ е полином от n-та степен, с коеф. 2^{n-1} пред x^n.
Тогава
$$\max_{x\in[-1,1]} |P(x)| \geq \max_{x\in[-1,1]} |T_n(x)| = 1$$
Равенство е арстига $\Leftrightarrow P(x) \equiv T_n(x)$

Док. Идея $n=2$: $P(x) = 2x^2 + \dots$
T_n аоп. и $\max_{x\in[-1,1]} |P(x)| \leq 1$.



$Q(x) = T_2(x) - P(x)$
Q има 2 нули $\Rightarrow Q \equiv 0$

Да доп. че $\max_{x\in[-1,1]} |P(x)| \leq 1$ $(*)$

ще док. че $P(x) \equiv T_n(x)$, с което Th ще бъде док.
Пусл. $Q(x) := T_n(x) - P(x)$
по усл. на Th: $Q \in \Pi_{n-1}$
Ще покажем, че Q има поне n нули в $[-1,1]$, броейки крат. $\Rightarrow Q \equiv 0$, т.е. $P \equiv T_n$.

Да отбележим, че $Q(\eta_k) = T_n(\eta_k) - P(\eta_k) = (-1)^k - P(\eta_k)$
$(*) \Rightarrow$ или $\operatorname{sign} Q(\eta_k) = (-1)^k$ или $Q(\eta_k) = 0$

Две свойства на Q:

1) Ако $Q(\eta_k)Q(\eta_{k-1}) \neq 0$ то $Q(\eta_k)Q(\eta_{k-1}) < 0$

в този сл. имаме: $\operatorname{sign} Q(\eta_k) = (-1)^k$, $\operatorname{sing} Q(\eta_{k-1}) = (-1)^{k-1}$

2) $\exists$ $Q(\eta_k) = 0$ за някое $k \in \{1, \dots, n-1\}$ $(\Rightarrow \eta_k \in (-1,1))$

Тогава $Q'(\eta_k) = 0$

Док: $Q'(\eta_k) = T_n'(\eta_k) - P'(\eta_k) \overset{защ}{=} 0 - 0 = 0$

$|T_n(\eta_k)| = 1 = \max\limits_{x \in [-1,1]} |T_n(x)|$ и $\underbrace{\eta_k \in (-1,1)}_{\text{(вътрешна)}} \Rightarrow T_n'(\eta_k) = 0$

От $Q(\eta_k) = 0 \Rightarrow P(\eta_k) = T_n(\eta_k) \Rightarrow |P(\eta_k)| = 1$

От $(*) \Rightarrow \max\limits_{[-1,1]} |P(x)| = 1$ и се дост. във вътреш. $\eta_k \in (-1,1)$

$\Rightarrow P'(\eta_k) = 0$

η_{n+1} η_k η_{k-1}

озн $Z(Q; [a,b])$ - бр. нули Q в $[a,b]$ (вкл. крат.)

от св-ва 1), 2) $\overset{по\ инд.}{\Rightarrow} Z(Q; [\eta_k, \eta_0]) \geq k$, $\forall k = \overline{1,n}$

При $k = n$ $\Rightarrow$ твърдението в Th $\square$ Th1.

η_k η_k η_k η

Сл. 1: За всеки полином от вида $P(x) = x^n + \dots$ е изпълнено $\max_{x\in[-1,1]} |P(x)| \geq \frac{1}{2^{n-1}}$

равенство $\Leftrightarrow P(x) = \tilde{T}_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}} T_n(x)$.

Док. От Th 1 с разд. на 2^{n-1}.

Сл. 2: За произволни $x_n < \dots < x_0$ е изпълнено, че

$$\max_{x\in[-1,1]} |(x-x_0)\dots(x-x_n)| \geq \frac{1}{2^n}$$

равенство е усп. $\Leftrightarrow x_k = x_k^* = \xi_{k+1}^{(n+1)} =$

$$= \cos\frac{(2k+1)\pi}{2(n+1)}, \quad k = \overline{0,n}$$

(т.е. нулите на $T_{n+1}(x)$)

Док. Нер. е частен случай от Сл. 1

$(n \leftarrow n+1)$

рав. $\overset{\text{Сл.}}{\Leftrightarrow} \omega(x) = \tilde{T}_{n+1}(x) \Leftrightarrow \{x_k\}_0^n = \{\xi_k^{(n+1)}\}_{k=1}^{n+1}$ (нулите T_{n+1})

От наредбата $\Rightarrow x_k = \xi_k^{(n+1)}$ $\square$.

Извод: Нулите на $T_{n+1}(x)$ реш. поставената в нач. задача при $[a,b] = [-1,1]$

Ако инт в $\{x_k^*\}_{k=0}^n$ то е изпълнено.

$$R_n(f) \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{1}{2^n}$$