Дискретна

Математика

Доц. Христо Ганчев
Ас. Антон Зиновиев

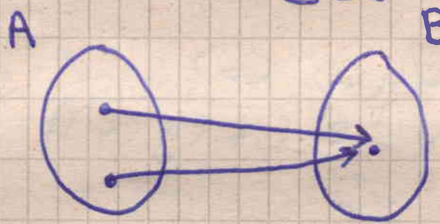
02.10.2013г.

Упражнение

Функции:

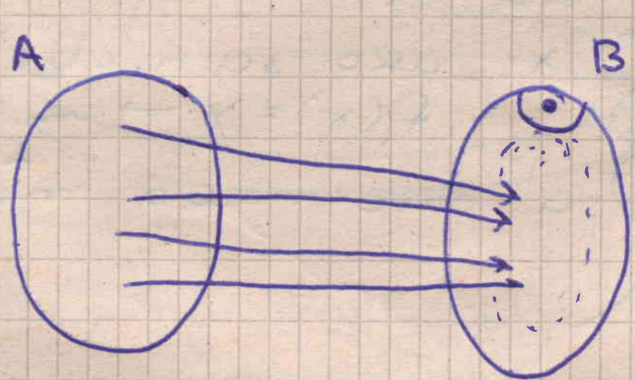
инекция ⤫ изображение в/у
сюрекция ⤫ изображение 1-1
биекция → взаимно-еднозначно изобр.

не е инекция



$$\forall x' \in A \quad \forall x'' \in A \qquad x' \neq x''$$
$$f(x') \neq f(x'')$$

не е сюрекция



$$\forall y \in B \ \exists x \in A \quad f(x) = y$$

Деф. f е биекция, ако е инекция и сюрекция

Th $f: A \to B$ е биекция $\Leftrightarrow \exists\, g: B \to A$ $(\forall x \in A\, (g(f(x)) = x)$ и $\forall y \in B$ $(f(g(y)) = y))$

g - обратна функция - g

Лема 1: $\sqrt{\overset{A \neq \emptyset}{}}$ $f: A \to B$ е инекция $\Leftrightarrow$
$\exists\, g: B \to A$ $(\forall x \in A\, (g(f(x)) = x))$

Лема 2 $f: A \to B$ е сюрекция $\Leftrightarrow$
$\exists\, g: B \to A$ $(\forall y \in B\, (f(g(y)) = y))$

От Лема 1 и 2 следва теоремата

Д-во Лема 1: $(\Rightarrow)$ Нека $f: A \to B$ е инекция. Търсим g.
Нека $a \in A$ е произволно избран елемент на A.

$$g(y) = \begin{cases} x, & \text{ако за някое } x \in A \\ & f(x) = y \to \text{има най-много } 1 \text{ такова } x \\ a, & \text{ако няма такова } x \end{cases}$$

инекция

$f(x') = f(x'') = y$
$\Rightarrow x' = x''$
(f е инекция)

От дефиницията се вижда, че

$$g(f(x)) = x$$

$$(\Leftarrow) \quad x' \neq x'' \Rightarrow f(x') \overset{?}{\neq} f(x'')$$

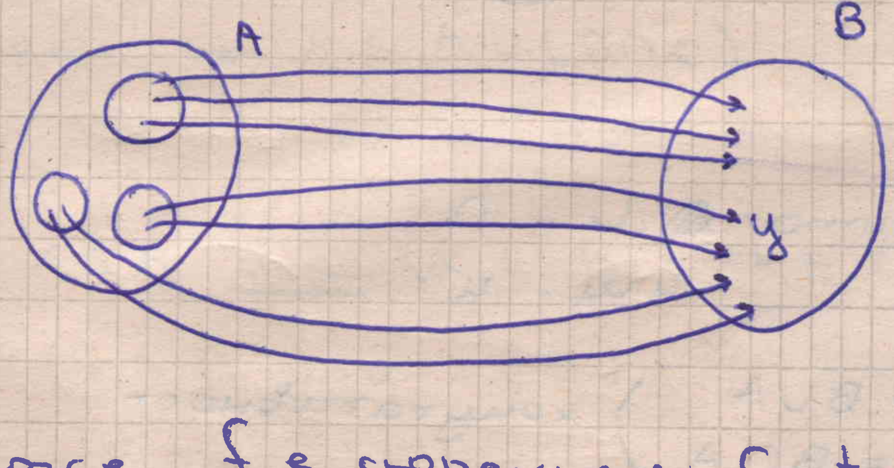
$$g(f(x')) = x'$$
$$g(f(x'')) = x''$$

$$x' \neq x'' \Rightarrow g(\underbrace{f(x')}) \neq g(\underbrace{f(x'')})$$

$$\Rightarrow f(x') \neq f(x'')$$

Д-во Лема 2 : Нека $f: A \to B$ е сюрекция за $\forall y \in B$ дефинираме множество C_y

$$C_y = \{ x \in A \mid f(x) = y \}$$



Понеже f е сюрекция, $C_y \neq \emptyset$ за $\forall y \in B$

Нека a_y е произволно избран ел-на C_y.
(Аксиома на избора)

Дефинираме $g: B \to A$ така:

$$g(y) = a_y$$

$$a_y \in C_y \Rightarrow g(y) \in C_y \Rightarrow f(g(y)) = y \ :))$$

$(\Leftarrow)$? $\forall y \in B \ \exists x \in A \ (f(x) = y)$

Да изберем произв. $y \in B$

Нека $x = g(y)$. Тогава

$$f(x) = f(g(y)) = y \ :))$$

Множества

$\emptyset$ $\{\emptyset\}$

$A \cup B$ $\Leftrightarrow \{x \mid x \in A$ или $x \in B\}$

обединение

$x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A$ или $x \in B$

$A \cap B$

сечение

Вместо $\cup$: $\cap$

или : и

$$\left.\begin{array}{l} A \cup B = B \cup A \\ A \cap B = B \cap A \end{array}\right\} \text{комутативност}$$

$$\left.\begin{array}{l} A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C \\ A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C \end{array}\right\} \text{асоциат.}$$

$$\left.\begin{array}{l} A \cup A = A \\ A \cap A = A \end{array}\right\}$$ идемпотентност

- $$\left.\begin{array}{l} A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \\ A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \end{array}\right\}$$ дистрибутивни

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

<u>Д-во</u>: $A = B \Leftrightarrow \forall x\ (x \in A \Leftrightarrow x \in B)$

$A = B \Leftrightarrow A \subseteq B$ <u>и</u> $B \subseteq A$

$A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x\ (x \in A \Rightarrow x \in B)$

$(\subseteq)$ $?\ \forall x \quad x \in A \cup (B \cap C) \Rightarrow x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$

Да изберем произволно x

$?\ x \in A \cup (B \cap C) \Rightarrow x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$

Да доп., че $x \in A \cup (B \cap C)$

$?\ x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$

$\Rightarrow x \in A$ <u>или</u> $(x \in B$ <u>и</u> $x \in C)$

$?\ (x \in A$ <u>или</u> $x \in B)$ <u>и</u> $?\ (x \in A$ или $x \in C)$

Да разгледаме случаи:

1 случай $x \in A$

$$\left.\begin{array}{l} x \in A \text{ или } x \in B \\ x \in A \text{ или } x \in C \end{array}\right\} \Rightarrow x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

II сл. $x \in B$ и $x \in C$

$$\left.\begin{array}{l} x \in A \text{ или } x \in B \\ x \in A \text{ или } x \in C \end{array}\right| \Rightarrow x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

и в двата случая доказахме

$$x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

$$A \cup (B \cap C) \subseteq (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

($\Leftarrow$) няма да го правим

$$\underset{\text{разлика}}{A \setminus B} = \{ x \mid x \in A \text{ и } x \notin B \}$$

В общия случай $A \setminus B \neq B \setminus A$

$$A \setminus B = B \setminus A \iff A = B$$

($\Leftarrow$) тривиално

($\Rightarrow$) Доп., че не са равни

$A \setminus B = B \setminus A$, но $A \neq B$

Нека напр. $x \in A$, но $x \notin B$

(др. възможност $x \in B$, но $x \notin A$ е аналогична)

Тогава

$x \in A \setminus B$, но $x \notin B \setminus A$

① $A \setminus (B \cup C)$ $\quad$ $(A \setminus B) \cup (A \setminus C)$

② $A \setminus (B \cap C)$ $\quad$ $(A \setminus B) \cap (A \setminus C)$

③ $(B \cup C) \setminus A \longleftrightarrow (B \setminus A) \cup (C \setminus A)$

④ $(B \cap C) \setminus A \longleftrightarrow (B \setminus A) \cap (C \setminus A)$

④ $x \in B$ и $x \in C$ и $x \notin A$ $\quad$ $(x \in B$ и $x \notin A)$ и $(x \in C$ и $x \notin A)$

③ $(x \in B$ или $x \in C)$ и $x \notin A$ $\quad$ $(x \in B$ и $x \notin A)$ или $(x \in C$ и $x \notin A)$

① $x \in A$ и $x \notin B \cup C \Rightarrow x \in A$ и $(x \notin B$ и $x \notin C)$

$(x \in A$ и $x \notin B)$ или $(x \in A$ и $x \notin C)$

за ② $(x \in A$ и $x \notin B)$ и $(x \in A$ и $x \notin C)$

$x \in A$ и $x \notin B \cap C$

$x \in A$ и $x \notin B$ или $x \notin C$

$$\bigcup_{i=1}^{n} B_i = B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_n$$

$$\bigcap_{i=1}^{n} B_i = B_1 \cap B_2 \cap \dots \cap B_n$$

задача $\quad A \setminus \bigcup_{i=1}^{n} B_i = \bigcap_{i=1}^{n} A \setminus B_i$

Д-во: с индукция по n

при $n=1$

$$A \setminus \bigcup_{i=1}^{1} B_i = A \setminus B_1 \qquad \bigcap_{i=1}^{1} A \setminus B_i = A \setminus B_1$$

Док., че е вярно за n

$$A \setminus \bigcup_{i=1}^{n} B_i = \bigcap_{i=1}^{n} (A \setminus B_i)$$

$$? \; A \setminus \bigcup_{i=1}^{n+1} B_i = \bigcap_{i=1}^{n+1} (A \setminus B_i)$$

$$\bigcup_{i=1}^{n+1} C_i = C_1 \cup C_2 \cup \ldots \cup C_n \cup C_{n+1}$$

$$\bigcup_{i=1}^{n} C_i = C_1 \cup C_2 \cup \ldots \cup C_n$$

$$\bigcup_{i=1}^{n+1} C_i = \left(\bigcup_{i=1}^{n} C_i\right) \cup C_{n+1}$$

$A \setminus (B \cup C) =$
$= (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$

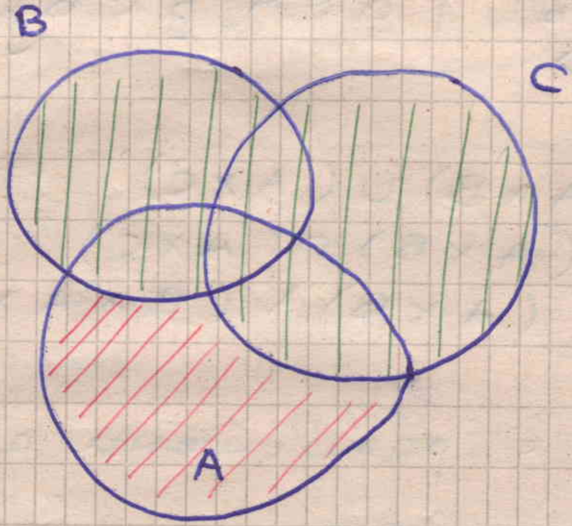
$$A \setminus \bigcup_{i=1}^{n+1} B_i = A \setminus \Big(\underbrace{\bigcup_{i=1}^{n} B_i}_{B} \cup \underbrace{B_{n+1}}_{C}\Big) =$$

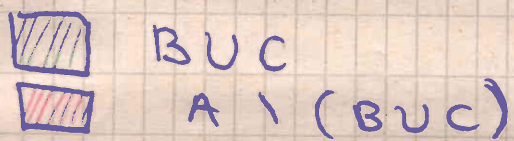
$$\bigcap_{i=1}^{n+1} (A \setminus B_i) = \left(\bigcap_{i=1}^{n} (A \setminus B_i)\right) \cap (A \setminus B_{n+1}) =$$

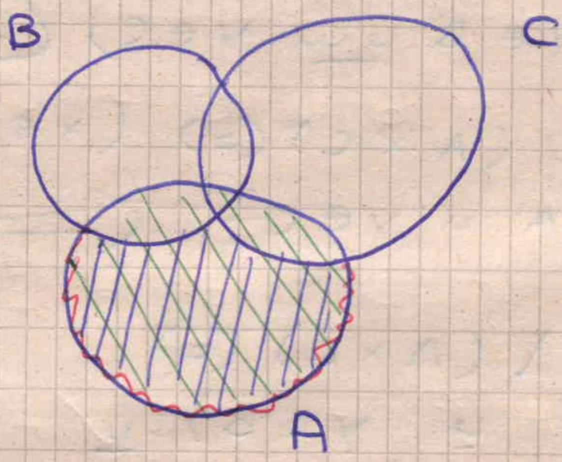
// по инд. предположение

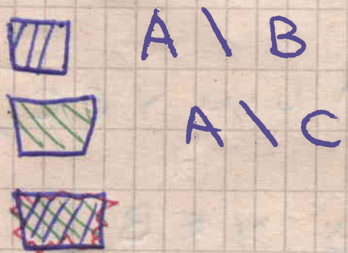
$$= \left(A \setminus \bigcup_{i=1}^{n} B_i\right) \cap A \setminus B_{n+1}$$

Диаграми на Вен









Декартово произведение

$$A \times B = \{ (a, b) \mid a \in A \text{ и } b \in B \}$$

$\langle \ \rangle$

$$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$$

$$A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$$

$$A \times (B \setminus C) = (A \times B) \setminus (A \times C)$$

Още 3 закона с разменени аргументи на $\times$ напр.

$(B \cup C) \times A$

$(x, y) \in A \times (B \cup C) \Leftrightarrow x \in A$ и $y \in B \cup C$

$\Leftrightarrow x \in A$ и $(y \in B$ или $y \in C)$

$(x, y) \in (A \times B) \cup (A \times C) \Leftrightarrow (x \in A$ и $y \in B)$ или $(x \in A$ и $y \in C)$

$(x, y) \in (A \times B) \setminus (A \times C) \Leftrightarrow$

$(x \in A$ и $y \in B)$ и

$x, y \notin A \times C$

$\Leftrightarrow (\underset{1}{x \in A}$ и $\underset{2}{y \in B})$ и $(\underset{3}{x \notin A}$ или $\underset{4}{y \notin C})$

$(x, y) \in A \times (B \setminus C) \Leftrightarrow x \in A$ и $y \in B$ и $y \notin C$

1 и 2 и 3 - невъзможно

Остава 1 и 2 и 4 :))

$$A \subseteq B \iff A \cup B = B \iff A \cap B = A$$

$$A \setminus B = A \iff A \cap B = \emptyset$$

$$A \setminus B = \emptyset \iff A \subseteq B$$

$$A \subseteq B \cup C \iff A \setminus B \subseteq C$$

$x \in A \Rightarrow x \in B$ <u>или</u> $x \in C$

$x \in A$ и $x \notin B \Rightarrow x \in C$

<u>03.10.2013г.</u>

четвъртък

Лекция

Сили

Символи:

$\exists$ - съществува, можем да намерим
$\forall$ - за всяко; каквото и .. да изберем
& - „конюнкция": и; верни са и двете
V - „дизюнкция": или; вярно е поне едно от двете
=> - „импликация": предпоставка => заключение
ако ..., то ...
A => B : ако е вярно A, то е вярно B
<=> - „еквивалентност": тогава и само тогава, когато;
A => B ~~само тогава, когато~~
B => A

№ 1

Множества и основни операции върху тях. Релации. Наредби и еквивалентности. Степени и обвивки.

$\boxed{\text{Множества}}$. Мн. е първично понятие и не се дефинира.

$$\{x^2 \mid x \in \mathbb{R}\}$$

$$\{p \in \mathbb{N} \mid p \text{ е просто}\}$$

$$R = \{x \mid x \text{ е мн. и } x \notin x\}$$

$\mathbb{R} \notin \mathbb{R}$ мн. от реалните не е реално
$\mathbb{N} \notin \mathbb{N}$

$\mathbb{R} \in R$
$\mathbb{N} \in R$
$\mathbb{Z} \in R$
$\mathbb{C} \in R$
...   ?

$R \in R$

$R \in R$: Сл. R е мн. и $R \notin R$ ✗

$R \notin R$ Но R е мн. Сл. $R \in R$

$\boxed{\text{Парадокс на Ръсел}}$ (парадокса за бръснаря)

Съвкупностите, които записваме чрез $\{x \mid \varphi(x)\}$, където φ е някакво свойство, се наричат класове.
Всяко множество е клас
$(A = \{x \mid x \in A\})$, но не всеки ~~клас~~ клас е множество

$(R = \{x \mid x$ е мн. ~~и~~ & $x \notin x\}$

Аксиоми: (1) $A = B \Leftrightarrow$ ~~$\forall x (x \in A)$~~
$\forall x\,(x \in A \Leftrightarrow x \in B)$

Аксиома за обемност

Пример: $\{1, 2, 5\} = \{5, 5, 2, 1, 2, 2, 2, 5\}$;

$$\mathbb{Z}_5 = \{a + (5) \mid a \in \mathbb{Z}\} = \{0 + (5), \pm 1 + (5), \pm 2 + (5), \dots\} =$$
$$= \{0 + (5), 1 + (5), 2 + (5), 3 + (5), 4 + (5)\}$$

② За всеки две мн. A и B съществува мн. C, такова че $A \in C$, $B \in C$

③ Ако A е мн, а $\varphi(x)$ е свойство (на x), то $\exists$ B, такова че $x \in B \Leftrightarrow x \in A$ я $\varphi(x)$, т.е. $B = \{x \in A \mid \varphi(x)\}$

④ Ако A е мн., то същ. мн. B, такова че ако $x \in y$ за някое $y \in A$, то $x \in B$.

⑤ Същ. множество

<u>Тв.</u>: Съществува при това единствено мн. X, такова че $\forall x\, (x \notin X)$

Д-во: Нека фиксираме едно мн. A. Нека $X = \{x \mid x \in A \,\&\, x \neq x\}$
Съгласно Аксиома ③ X е мн.
$\forall x\, (x \notin X)$: Нека фиксираме x и да доп., че $x \in X$. Тогава $x \neq x$, което е невъзможно. Сл. $x \notin X$
<u>Единственост</u>: Нека X' е мн., т.че $\forall x\, (x \notin X')$. От тук и $\forall x\, (x \notin X)$ имаме $\forall x\, (x \in X \Leftrightarrow x \in X')$ и сл. от ① $X = X'$

<u>Опр.</u>: Множеството, дефинирано в <u>Тв.</u> наричаме празно множество и бележим с $\varnothing$.

<u>Тв.</u> За всяко A, B същ. единствено мн. X, такова че
$x \in X \Leftrightarrow x = A \lor x = B$

Аксиома за ∞, за избора

Д-во: Нека C е такова, че $A \in C$ и $B \in C$. Такова има съгласно (4). (2). Нека $X = \{x \in C \mid x = A \vee x = B\}$
$x \in X \Leftrightarrow x = A \vee x = B$:

$\Rightarrow$) Нека $x \in X$. Тогава $x \in A \vee x \in B$.;
$\Leftarrow$) Нека $x = A \vee x = B$. Б.О.О. можем да считаме, че $x = A$. Тогава $x \in C$. Оттук и $x = A$ получаваме $x \in X$.

Единственост: Нека X' е такова, че $x \in X' \Leftrightarrow x = A \vee x = B$. Сл. за вс. x, $x \in X \Leftrightarrow x = A \vee x = B \Leftrightarrow x \in X'$ и значи $X = X'$ съгласно (1).

Мн., дефинирано в ТВ. се нарича чифт и се бележи с $\{A, B\}$. В случай, че $A = B$ получаваме $\{A\}$.

По аналогичен начин от (4) получаваме, че за вс. мн. A същ. при това единствено мн. $\cup A$, което се състои от вс. онези x, за които ~~Тогава~~

$$\cup A = \{x \mid \exists y (x \in y \wedge y \in A)\} = \bigcup_{y \in A} y$$

~~По същия начин~~

Опр. Ще казваме, че A е подмножество на B и ще пишем $A \subseteq B$, ако $\forall x (x \in A \Rightarrow x \in B)$

В случай, че $A \neq B$ и $A \subseteq B$ казваме, че A е собствено подмножество на B и пишем $A \subset B$ или $A \subsetneq B$.
Ясно е, че $A = B \Leftrightarrow A \subseteq B \;\&\; B \subseteq A$. Освен това за вс. A, $\emptyset \subseteq A$. Наистина, $\forall x$ $(x \in \emptyset \Rightarrow x \in A)$.
Елементите на $\emptyset$ имат $\forall$ възможни св-ва.

<u>Св-ва на включването</u>: ① $A \subseteq A$ (рефлексивност);
② $A \subseteq B \;\&\; B \subseteq A \Rightarrow A = B$ (антисиметричност);
③ $A \subseteq B \;\&\; B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C$ (транзитивност)

<u>Д-во</u> ③: Нека е вярна предпоставката.
$A \subseteq B \;\&\; B \subseteq C$ $\quad$ <u>$A \subseteq C$</u>:

Нека $x \in A$. Оттук и $A \subseteq B$ имаме, че $x \in B$, което заедно с $B \subseteq C$ ни дава $x \in C$.
Чрез една от аксиомите за мн. (не сме я писали :D) се гарантира, че за $\forall$ мн. A същ. при това единствено мн. X, такова че $X = \{x \mid x \subseteq A\}$. Мн. X се означава с $P(A)$ или 2^A.

<u>Опр.</u>: Нека A и B са мн. Множеството $\bigcup\{A, B\}$ наричаме обединение на A и B и бележим с $A \cup B$.

В сила е, че $A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$

Опр.: Сечение на A и B наричаме мн.
$A \cap B = \{x \in A \mid x \in B\} = \{x \mid x \in A \& x \in B\}$

Свойства: (1) $A \cup \emptyset = A \quad A \cap \emptyset = \emptyset$
(2) $A \cup A = A \quad A \cap A = A$
(3) $A \cup B = B \cup A \quad A \cap B = B \cap A$
(4) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
(5) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
(6) $\cancel{X \subseteq A \& X \subseteq B \Leftrightarrow}$
$A \subseteq X \& B \subseteq X \Rightarrow A \cup B \subseteq X$
$X \subseteq A \& X \subseteq B \Rightarrow X \subseteq A \cap B$
(7) $A \subseteq A \cup B \quad A \cap B \subseteq A$

Д-во: (5) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$:
1) $A \cup (B \cap C) \subseteq (A \cup B) \cap (A \cup C)$:
Нека $x \in A \cup (B \cap C)$
1сл.) $x \in A$. Тогава
$x \in A \cup B$ и $x \in A \cup C$, откъдето
$x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$
2сл.) $x \notin A$. От тук и $x \in A \cup (B \cap C)$
имаме $x \in B \cap C$, т. е. $x \in B$ и $x \in C$.
Оттук ~~$x \in B$~~ $x \in B \cup A$ и $x \in A \cup C$ и
значи принадлежи на сечението.
$x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$
2) $(A \cup B) \cap (A \cup C) \subseteq A \cup (B \cap C)$:
Нека $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$, т.е.

$x \in A \cup B$ и $x \in A \cup C$

1сл.) $x \in A$. Тогава $x \in A \cup (B \cap C)$

2сл.) $x \notin A$ Оттук $x \in A \cup B$ и $x \in A \cup C$
имаме $x \in B$ и $x \in C$, т.е. $x \in B \cap C$.

Сл. $x \in A \cup (B \cap C)$

<u>Опр.</u> Мн. $A \setminus B = \{x \in A \mid x \notin B\}$ се нарича разлика на A и B.
или $A - B$

<u>Свойства:</u>
1) $A \setminus B \subseteq A$
2) $A \setminus B = A \iff A \cap B = \emptyset$
3) $(A \setminus B) \cap B = \emptyset$
4) $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$
5) $(A \cap B) \setminus C = (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$

<u>Д-во:</u> 4) $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$:

1) $(A \cup B) \setminus C \subseteq (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$: Нека $x \in (A \cup B) \setminus C$, т.е.
$x \in A \cup B$ и $x \notin C$

1 сл. $x \in A$. Тогава $x \in A \setminus C$ и сл. $x \in (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$

2сл. $x \notin A$. Тогава $x \in B$ и от $x \notin C$ $\Rightarrow x \in B \setminus C$, откъдето $x \in (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$

2) $(A \setminus C) \cup (B \setminus C) \subseteq (A \cup B) \setminus C$
Аналогично.

6) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$

Д-во: <u>1) $A \setminus (B \cup C) \subseteq (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$:</u>

Нека $x \in A\setminus(B\cup C)$, т.е. $x \in A$ и $x \notin B\cup C$.
Оттук $x\notin B$ и $x\notin C$, които заедно с $x\in A$ ни дава $x\in A\setminus C$ и $x\in A\setminus B$, т.е. $x\in \cancel{A\setminus C}\,(A\setminus B)\cap(A\setminus C)$

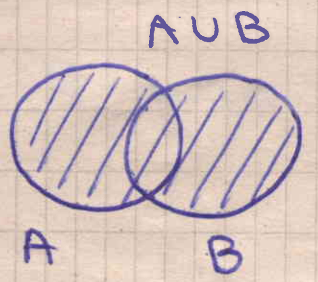
2) $(A\setminus B)\cap(A\setminus C)\subseteq A\setminus(B\cup C)$

Нека $x\in(A\setminus B)\cap(A\setminus C)$, т.е. $x\in A\setminus B$ и $x\in A\setminus C$. Оттук $x\in A$, $x\notin B$ и $x\notin C$. Сл. $x\notin B\cup C$ и значи $x\in A\setminus(B\cup C)$

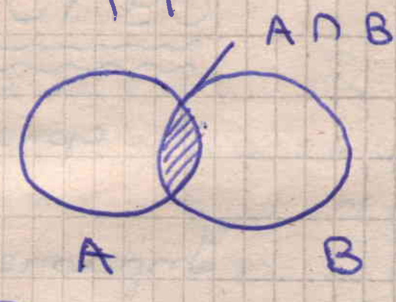
(7) $A\setminus(B\cap C)=(A\setminus B)\cup(A\setminus C)$

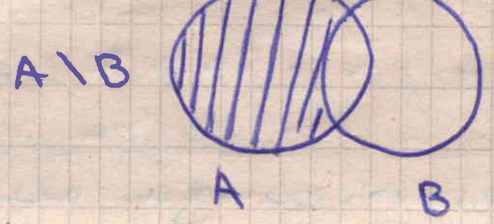
Схематично операциите $\cup$, $\cap$ и $\setminus$ се изобразяват по следния начин.

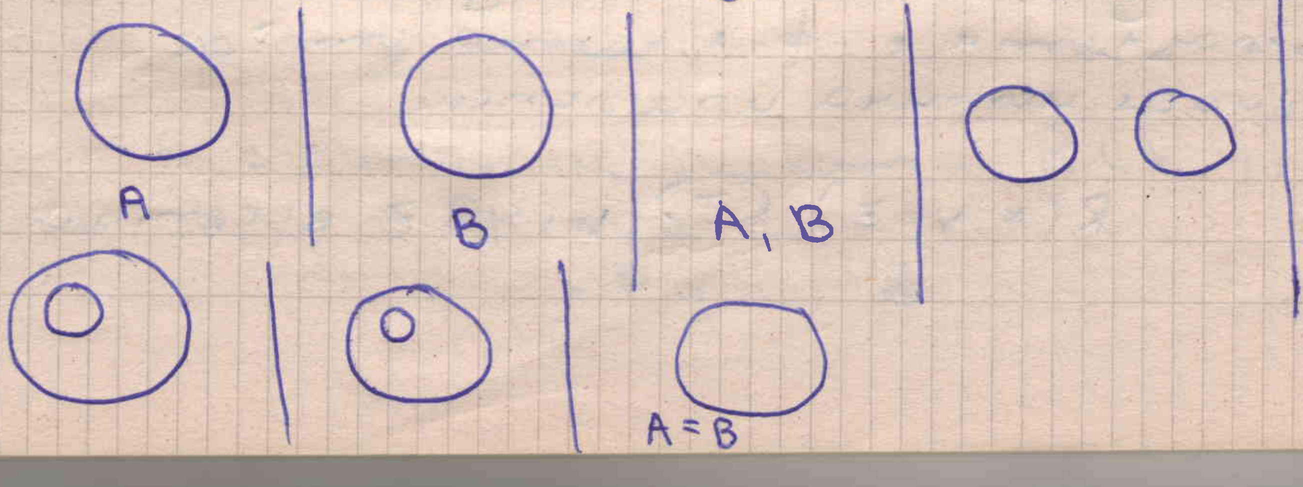
$\cup$



$\cap$







Релации

Опр.: Под наредена двойка (a, b) ще разбираме мн. $(a, b) =$

$$\{a\}, \{a, b\}$$

$$(a, b) = \cancel{\{\{a\}, \{\{a\}, \{a, b\}\}\}}$$

$$\{\{a\}, \{^{\{\{a\},}b, \{b\}\}\}$$

Опр.: Под декартово произведение на A и B ще разбираме множеството $A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \,\&\, b \in B\} \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{P}(A \cup B))$

Опр.:

09.10.2013г.

сряда

Упражнение

Релации

Интуитивно можем да мислим, че релацията е ф-я, чието ст-т е винаги истина или лъжа.

$R(x, y, z) \Leftrightarrow x + y + z$ е четно

$f(x, y, z) = x + y + z$

$x \in A \Leftrightarrow x \in \ldots \Leftrightarrow x \in \ldots$

$A = B = \ldots$

$f: \mathbb{N} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$

$f: \mathbb{N} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{C}$

$R \subseteq \underbrace{\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}}$ - $\forall$ тройки ест. числа

$(\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \times \mathbb{N}$

$\mathbb{N} \times (\mathbb{N} \times \mathbb{N})$

$\underset{\text{ф. я}}{R(x, y, z)} \Leftrightarrow (x, y, z) \in \underset{\text{множество}}{R}$

Ако R има един аргумент: R е <u>унарна</u> релация
2 аргумента - <u>бинарна</u> -"-
3 аргумента - <u>тернарна</u>

унарна релация → свойство

<u>Пример за унарна</u>

$R(x) \Leftrightarrow x$ е четно

$R \subseteq \mathbb{Z}$

Ако R е бинарна, вместо $R(x, y)$ или $(x, y) \in R$ пишем

xRy

Пример за бинарна:

$$x < y,\ x \geq y,\ x \parallel y$$

$$< = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x < y \}$$

Пример за тернарна:

x е между y и z

x, y, z - числа

или точки от права

Свойства бинарни

R е рефлексивна, ако $\forall x\, (xRx)$

от D.O.

R е симетрична, ако $\forall x \forall y\, (xRy \Rightarrow yRx)$

R е антисиметрична, ако $\forall x \forall y\, (xRy \text{ и } yRx \Rightarrow x = y)$

R е транзитивна, ако $\forall x \forall y \forall z\, (xRy \text{ и } yRz \Rightarrow xRz)$

R е частична наредба, ако R е рефлексивна, антисиметрична и транзитивна

R е линейна (нестрога) наредба, ако R е частична наредба и $\forall x \forall y\, (xRy \text{ или } yRx)$

R е релация на еквивалентност,

ако R е рефлексивна, симетрична и транзитивна

(1) $R \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

$xRy \iff x = y + 1$

$\forall x (xRx) \iff \overset{\forall x}{(x = x + 1)}$

$\Rightarrow$ не е рефлексивна

$\cancel{\forall x}(\forall x, y \ (xRy \Rightarrow yRx) \iff \forall x \forall y \ (x = y + 1 \Rightarrow y = x + 1)$

$\Rightarrow$ не е симетрична

правилно, но невярно

! напр. $x = 2$ $y = 1$

$\forall x \forall y \ (xRy$ и $yRx \Rightarrow x = y) \iff$

$\forall x \forall y \quad x = y + 1$ и $y = x + 1 \Rightarrow x = y$

$\Rightarrow$ ~~не е антисиметрична~~

$x = y + 1$ и $y = x + 1$ е винаги невярно

$\Rightarrow$ R е антисиметрична

$\forall x \forall y \forall z \ (xRy$ и $yRz \Rightarrow xRz) \iff$

$\forall x \forall y \forall z \quad x = y + 1, \ y = z + 1 \Rightarrow$

~~$x = z + 1$~~ не

~~$x \neq z + 1$~~

~~$y \neq 1$~~ ~~$x \neq 2$~~ ~~$z \neq 0$~~

$\Rightarrow$ не е транзит.

~~частична наредба~~

От невярно $\Rightarrow$ ВШИЧКО!

$\forall x$ (x се дели на 4 => x е четно)

3 ∧   3 ∧

2 ∧   И

2) $R \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

$xRy \iff x+y$ е четно

R е рефл.

$\forall x$ ($x+x$ е четно) да

R е симетр. :

$\forall x \forall y$ ($x+y$ - четно => $y+x$ - четно)

R е антисиметр. : не е

R е транз. : $\forall x \forall y \forall z$

(xRy и yRz => xRz)

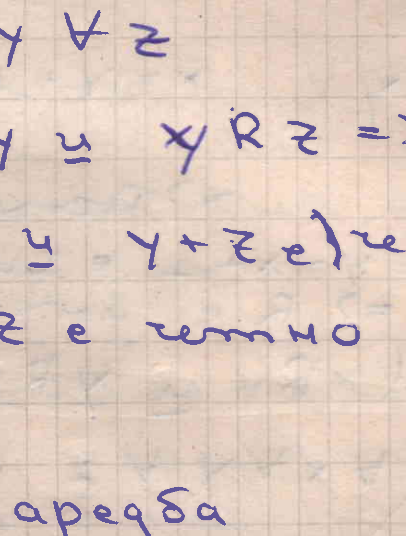
($x+y$ е четно и $y+z$ е четно) =>

$x+z$ е четно

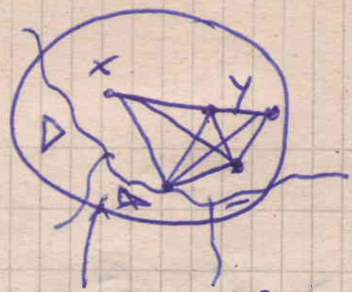
да

R не е частична наредба

R е релация на еквивалентност



xRy



xRy

класове на
еквивалентност

$xRy \Leftrightarrow x+y$ е четно
2 класа - четни и нечетни числа
на еквивалентност

Да доп., че R е едновременно
симетрична и антисиметрична

$$\forall x \forall y\ (xRy \Rightarrow yRx)$$

$$\forall x \forall y\ (xRy \text{ и } yRx \Rightarrow x=y)$$

$$\forall x \forall y\ (xRy \Rightarrow x=y)$$

Ако R е симетр. и антисиметр.,
то

$$\forall x \forall y\ (xRy \Rightarrow x=y)$$

Но и обратното е вярно

1. R е =
2. R е винаги невярна

$\Rightarrow$ R е рефлексивна, симетрична и
антисиметрична, когато R е =

---

③ $R \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

~~$xRx \Leftrightarrow$~~

$xRy \Leftrightarrow \sin x = \sin y$

<u>рефл.</u>

$\forall x \; (\sin x = \sin x)$ ✓ R е реф.

<u>симетр.</u>

$\forall x \forall y \; (\sin x = \sin y \Rightarrow \sin y = \sin x)$ да

<u>антисиметр.</u> $\forall x \forall y \; (\sin x = \sin y$ <u>и</u> $\sin y = \sin x \Rightarrow x = y)$

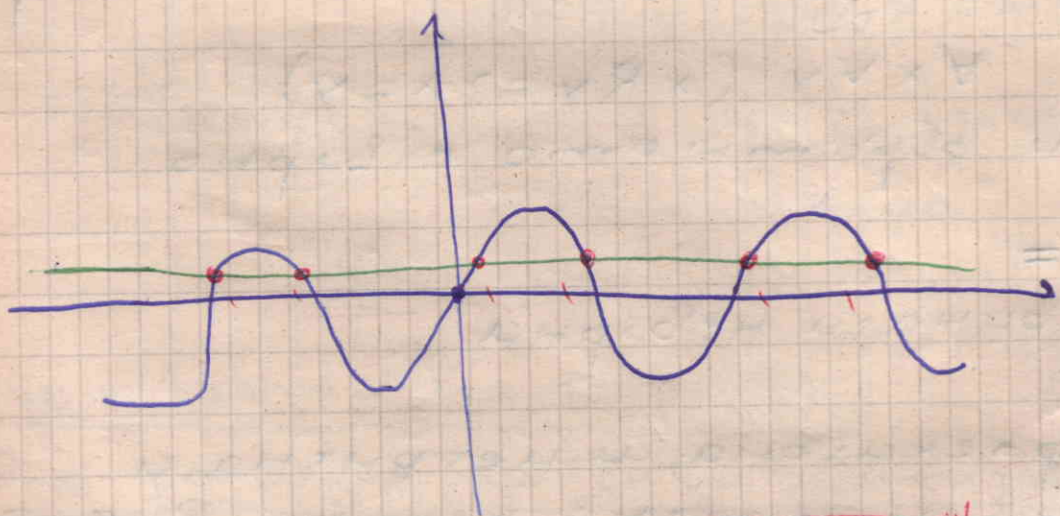
$x = \frac{\pi}{6}$ не

$y = \frac{5\pi}{6}$

<u>транз.</u> $\forall x \forall y \forall z$

$(\sin x = \sin y$ <u>и</u> $\sin y = \sin z \Rightarrow \sin x = \sin z)$ да

R е релация на екв.



$\boxed{0 \in \mathbb{N}}$

④ $R \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

$xRy \iff x = y$ <u>или</u> $x > y + 1$

<u>R е рефл.</u>

$\forall x \, (x = x$ или $x > x + 1)$ да

<u>R е сим.</u>

$\forall x \forall y \, (x = y$ или $x > y + 1 \Rightarrow$ не

$y = x$ или $y > x + 1)$

<u>R е антисим.</u> :

$x = 2$

$y = 0$

$\forall x \forall y \, \big((x = y$ или $x > y + 1)$ <u>и</u>

$(y = x$ или $y > x + 1) \Rightarrow$

$x = y \big)$

да

$x = y$ и $y = x$, то $x = y$

$x = y$ и $y > x + 1$, то $x = y$

не е вярно

$x > y + 1$ и $y = x$, то $x = y$

$x > y + 1$ и $y > x + 1$, то $x = y$

<u>R е тр.</u>

$\forall x \forall y \forall z \, \big((x = y$ <u>или</u> $x > y + 1)$

<u>и</u> $(y = z$ <u>или</u> $y > z + 1)$

$\Rightarrow (x = z$ или $x > z + 1) \big)$

, то

$x = y$ и $y = z \Rightarrow x = z$, то
$x = y$ и $y > z + 1$, то $\Rightarrow x > z + 1$
$x > y + 1$ и $y = z \Rightarrow x > z + 1$, то
$x > y + 1$ и $y > z + 1 \Rightarrow x > z + 2 > z + 1$

$\Rightarrow$ R е частична наредба

$\forall x \forall y \; (x = y$ или $x > y + 1)$ или
не е $\qquad (y = x$ или $y > x + 1)$
линейна наредба

$x = 0$
$y = 1$

не е рел. еквив.

---

(5) $R \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$
$xRy \Leftrightarrow \exists z \in \mathbb{N} \; (xz = y)$

R е рефл. $\forall x \Leftrightarrow \exists z \; (xz = x)$
$z = 1 \Rightarrow$ да

- сим. $\forall x \forall y \; (\exists z_1 \; xz_1 = y \Rightarrow \exists z_2 \; yz_2 = x)$ - не
$x = 1$
$y = 3$

- антисим. $\forall x \forall y \; (\exists z_1 \; xz_1 = y$ и $\exists z_2 \; yz_2 = x \Rightarrow x = y)$

[redacted]

* $x = y z_2 = x z_1 z_2$

$$x(z_1 z_2) - x = 0$$

$$x(z_1 z_2 - 1) = 0 \qquad \text{да}$$

$x = 0 \Rightarrow y = 0$

$z_1 z_2 = 1 \Rightarrow z_1 = z_2 = 1 \Rightarrow x = y$ и $y = x \Rightarrow x = y$

-транз. $\forall x \forall y \forall z \left(\left(\exists p\,(xp = y) \vee \exists q\; yq = z \right) \Rightarrow \exists m : xm = z \right)$

$\cancel{z = xm = xpq}$

$\cancel{m = pq}$ да

$$z = yq = xpq$$

частична наредба ✓

мин. наредба

$\forall x \forall y \left(\exists z_1\; x z_1 = y \right.$ или $\exists z_2$ [redacted] $\left. y z_2 = x \right)$

Не

$x = 3$

$y = 7$

Примери за мин. наредби

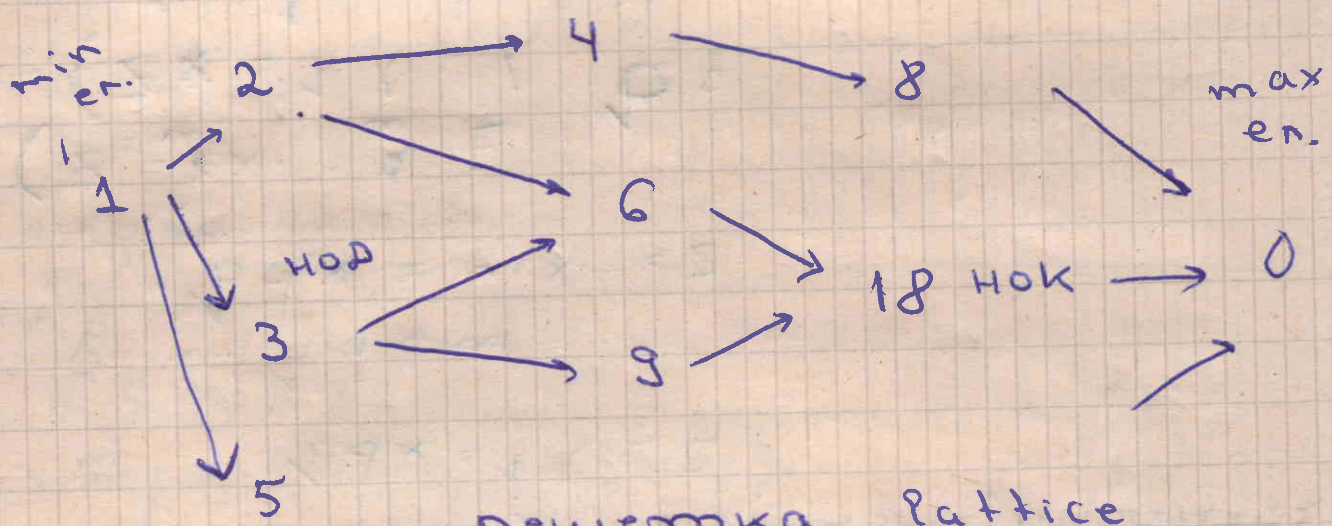
$\geq \qquad \leq$

Част. наредба, която не е лин.

„x дели y"

„A ⊆ B"

$-2 \to -1 \to 0 \to 1 \to 2 \to 3 \ldots$



решетка lattice

+

·

алгебрични структури

∧

∨

10.10.2013г.

четвъртък

Лекция

Опр.: Под наредена двойка (a,b) ще разбираме мн. $\{\{a\},\{a,b\}\}$

Св-во: $(a,b)=(a_1,b_1) \Leftrightarrow a=a_1$ и $b=b_1$

~~Опр~~ Д-во: $\Leftarrow$ Ясно; $\Rightarrow$ Нека $(a,b)=(a_1,b_1)$

$\boxed{1 сл.}$ $a=b$. Тогава $(a,b)=\{\{a\}\}$. Оттук и $(a,b)=(a_1,b_1)$ следва, че $(a_1,b_1)=\{\{a_1\},\{a_1,b_1\}\}$ е едноелементно, откъдето $\{a_1\}=\{a_1,b_1\}$ и значи $b_1=a_1$. Така $\{\{a\}\}=\{\{a_1\}\}$ и значи $\{a\}=\{a_1\}$ и сл. $a=a_1$.

Окончателно $a=b=a_1=b_1$.

$\boxed{2 сл.}$ $a\neq b$. Тогава мн. $\{a,b\}$ има два ел., а мн. $\{a\}$ един ел. и значи $\{a\}\neq\{a,b\}$. Оттук и $(a,b)=(a_1,b_1)$ следва, че $\{a_1\}\neq\{a_1,b_1\}$, т.е. $a_1\neq b_1$ и $\{a_1\}=\{a\}$, $\{a_1,b_1\}=\{a,b\}$.

Оттук $a=a_1$ и $b=b_1$.

Опр.: Нека A и B са мн. Под декартово произв. на A и B ще разбираме мн. $A\times B=\{(a,b)\mid a\in A, b\in B\}$

Опр.: Дефинираме наредена n-орка

$(n \geq 3)$ чрез следната индукция:

(1) Ако $(a_1, a_2, a_3) = ((a_1, a_2), a_3)$

(2) $(a_1, a_2, \dots, a_{n+1}) = ((a_1, a_2, \dots, a_n), a_{n+1})$ за $n > 3$.

Аналогично дефинираме и декартово произведение на повече от 2 мн.

(1) $A_1 \times A_2 \times A_3 = (A_1 \times A_2) \times A_3$

(2) $A_1 \times A_2 \times A_3 \dots \times A_{n+1} = (A_1 \times A_2 \dots \times A_n) \times A_{n+1}$ за $n > 3$.

При тези деф. $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n =$

$$= \{ (a_1, \dots, a_n) \mid a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, \dots a_n \in A_n \}$$

Релации

Опр.: Под релация (n-местна, $n \geq 1$) м/у множествата $A_1, A_2, \dots, A_n$ (в този ред) ще разбираме всяко подмножество R на $A_1 \times A_2 \dots \times A_n$. В случай, че $A_1 = A_2 = \dots = A_n = A$ ще казваме, че релацията R между $A_1, A_2, \dots, A_n$ е n-местна (n-арна) релация в A.
(R е n-мерна релация в A, ако $R \subseteq \underbrace{A \times A \times \dots \times A}_{n}$ $(= A^n)$).

При $n = 2$ ще казваме, че релацита е <u>бинарна</u>.

<u>Примери</u>: (1) $\emptyset$ – n-местна релация м/у $A_1, A_2, \ldots, A_n$ за вс. избор на n и мн. $A_1, A_2, \ldots, A_n$.

(2) $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ – n-местна м/у $A_1, \ldots, A_n$.

(3) $\{(x,x) \mid x \in A\}$ е бинарна релация в A

(4) $\{(x,y) \mid x, y \in \mathbb{N} \; x < y\}$ е бинарна в $\mathbb{N}$

(5) $\{(x, x^2) \mid x \in \mathbb{R}\}$ е бинарна в $\mathbb{R}$. Освен това е бинарна релация в $\mathbb{C}$, двуместна релация между $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$, а така също и между $\mathbb{C}$ и $\mathbb{R}$.

<u>Опр.</u>: Нека $\mathbb{R}$ е множество от наредени двойки. С <u>Dom (R)</u> означаваме множеството ~~от~~

$$Dom(R) = \{x \mid \exists y ((x,y) \in R)\}$$

а с <u>Range (R)</u>

$$Range(R) = \{y \mid \exists x ((x,y) \in R)\}$$

~~Частични наредби~~

<u>Означение</u>: Ако R е двуместна

релация, ще пишем aRb вместо $(a,b) \in R$ и съответно $a \not R b$ или $a\bar{R}b$ за $(a,b) \notin R$.

$\boxed{\text{Частични наредби}}$: Нека R е бинарна релация в A (т.е. $R \subseteq A \times A$). Ще казваме, че R е частична наредба, ако

(1) aRa за $\forall\, a \in A$ (рефлексивност)

(2) aRb и $bRa \Rightarrow a = b$ (антисиметричност)

(3) aRb & $bRc \Rightarrow aRc$ (транзитивност)

Примери: 1. Нека X е мн. и $A = \mathcal{P}(X)$. Тогава $\subseteq$ е ч.н. в A.

2. $\leq$ е ч.н. в $\mathbb{N}$ ($\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$)

По-точно $\leq = \{(a,b) \mid a,b \in \mathbb{N}$ & $\exists c \in \mathbb{N}\ (b = a + c)\}$

$a \leq b$

$(\mathbb{N} = 0, 1, 2 \ldots)$

3. $\{(a,b) \mid a,b \in \mathbb{N}$ и $a \mid b\}$ е ч.н. в $\mathbb{N}$. Ако R е ч.н. в A, ще казваме, че (A,R) е частично наредено мн.

Видове частични наредби:

1. Нека (A,R) е ч.н.м. Ако за вс. $a,b \in A$, aRb или bRa, ще казваме,

че наредбата е линейна.

Примери: 1) $(\mathbb{N}, \leq)$, $(\mathbb{Z}, \leq)$, $(\mathbb{Q}, \leq)$, $(\mathbb{R}, \leq)$ – лин. наредба

2) делимостта не е лин. наредба

② Нека (A, R) е ч.н.м. Ако за $\forall a, b \in A$, такива че aRb същ. ел. $c \in A$, за който aRc и cRb, ще казваме, че наредбата е гъста

Примери: 1) $(\mathbb{Q}, \leq)$, $(\mathbb{R}, \leq)$ – гъсти

2) $(\mathbb{N}, \leq)$, $(\mathbb{Z}, \leq)$ – не са гъсти

Опр.: Нека (A, R) е ч.н.м. и $X \subseteq A$. Ще казваме, че $x \in X$ е минимален (максимален) в X, ако $\forall a \in X$ $(aRx \Rightarrow a = x)$ (съответно $\forall a \in X$ $(xRa \Rightarrow a = x)$).

Примери: Да разгл. ч.н.м $(\mathbb{N}, /)$ и нека $X = \{2, 3, \cancel{5}, 6\}$. Тогава 2 и 3 са минимални елементи в X.

Опр.: Нека (A, R) е ч.н.м и $X \subseteq A$. Ще казваме, че $x \in X$ е най-малък (най-голям) в X, ако $\forall a \in X$ (xRa), (съответно $\forall a \in X$ (aRx)).

В предния пример 6 е най-голям, а най-малък елемент няма.
(Най-малкият е винаги единствен)

<u>Тв.</u> Нека (A, R) е ч.н.м. и $X \subseteq A$. Тогава, ако m_1, m_2 са най-малки в X, то $m_1 \equiv m_2$.

Д-во: Тъй като m_1 е най-малък в X и m_2 е елемент на X ($m_2 \in X$) $m_1 R m_2$. Т.к. m_2 е най-малък в X и $m_1 \in X$, $\Rightarrow m_2 R m_1$. Оттук и антисиметричността на $R \Rightarrow m_1 = m_2$.

③ Фундирана наредба: Нека (A, R) е ч.н.м. В случай, че ~~за~~ във $\forall$ непразно $X \subseteq A$ има мин. елемент казваме, че наредбата е фундирана.

Пример: $(\mathbb{N}, /)$

④ Нека (A, R) е ч.н.м. В случай, че във $\forall$ непразно $X \subseteq A$ има най-малък елемент, казваме, че наредбата е добра.

Пример: $(\mathbb{N}, \leq)$

Забележка: (1) Добра наредба = фундирана + линейна.

(2) Фундирана = не съществува безкрайно намаляваща редица

$\boxed{\text{Релация на еквивалентност}}$: Нека R е бинарна релация в A. R е рел. на екв., ако

① aRa $\forall a \in A$ (рефлексивна)

② $aRb \Rightarrow bRa$ (симетрична)

③ aRb & $bRc \Rightarrow aRc$ (транзитивност)

обобщени равенства

Примери: ① =

② за $n \geq 2$, $\equiv \pmod n$ е релация на еквивалентност в $\mathbb{Z}$

$(a \equiv b \pmod n) \Leftrightarrow n \mid a-b)$

③ Нека G е група и $H \leq G$. Тогава рел. R деф. с $g_1 R g_2 \Leftrightarrow g_1 H = g_2 H$ е рел. на екв.

④ „Равенството" между насочени отсечки

⑤ Релацията $(a,b) R (p,q) \Leftrightarrow aq = bp$ е релация на еквивалентност в мн. $\{(x,y) \mid x,y \in \mathbb{Z}, y \neq 0\}$

равенство на рац. числа

$$\frac{a}{b} = \frac{p}{q} \Leftrightarrow aq = pb$$

Опр.: Нека R е релация на еквивалентност в A и нека $x \in A$. Под клас на еквивалентност, породен от x по рел. R ще разбираме мн. $[x]_R$

$$[x]_R = \{y \in A \mid xRy\}$$

Мн. $A/_R = \{[x]_R \mid x \in A\}$ наричаме A факторизирано по R

Свойства:

Тв. Нека R е релация на екв. в A и $x, y \in A$. Тогава:

(а) $x \in [x]_R$

(б) $[x]_R = [y]_R \Leftrightarrow xRy$

(в) $[x]_R \cap [y]_R = \emptyset \Rightarrow [x]_R = [y]_R$

Д-во: (а) Т.к. xRx, $x \in [x]_R$

(б) $\Rightarrow$ Нека $[x]_R = [y]_R$. Тогава $y \in [x]$ и сл. xRy. $\Leftarrow$ Нека xRy. Тогава за $\forall z \in A$, $z \in [x]_R \Leftrightarrow xRz. \Leftrightarrow xRz$ и $xRy \Leftrightarrow yRx$ и $xRz \Leftrightarrow yRz \Leftrightarrow z \in [y]$

(в) Нека $[x]_R \cap [y]_R \neq \emptyset$. Нека $z \in [x]_R$ и $z \in [y]_R$. Тогава xRz и yRz, откъдето

xRy (използваме симетричност и транзитивност). От (б) $[x]_R = [y]_R$

$\boxed{\text{Степени и обвивки}}$: Нека R е бинарна рел. в A. Деф. R^n за $n>0$ чрез следната индукция

(1) $xR^0y \iff x=y$

(2) $xR^{n+1}y \overset{def}{\iff} \exists z\ (xR^nz\ \&\ zRy)$

<u>Тв.</u>: Нека R е бинарна рел. в A и $n \geq 0$. Тогава $xR^ny \iff$ точно тогава, когато същ. $x_0, x_1, .. x_n \in A$, такива че

$x_0 = x$, $x_n = y$ и за всяко

$0 \leq i < n$, $x_i R x_{i+1}$.

Д-во: Индукция по n.

(1) $n=0$. ~~Х~~ Имаме $xR^0y \iff$ $x=y \iff$ същ. $x_0 \in A$, такова че за вс. $\underbrace{0 \leq i < 0}$, $x_i R x_{i+1}$ и $x_0 = x$, $x_0 = \cancel{x}\, y$.

вярно, защото такива i няма

(2) Нека за вс. $x', y' \in A$, $x'R^ny' \iff$ съществуват $x_0', x_1', .., x_n' \in A$, такива че $x_0' = x'$, $y_0' = y'$ и за $\forall\ 0 \leq i < n$ $x_i' R x_{i+1}'$. Тогава за вс. $x, y \in A$

$xR^{n+1}y \iff xR^nz\ \&\ zRy$

за някое $z \in A$.

$\Leftrightarrow$ $\exists$ същ. $x_0, x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}$, такива че $x_0 = x$, $x_{n+1} = y$ и за вс.

$0 \le i < n+1$ $\quad$ $x_i R x_{i+1}$ $\left\{ \begin{array}{l} 0 \le i < n \\ x_i R x_{i+1} \text{ и освен това} \\ x_n R x_{n+1} \end{array} \right.$

<u>Следствие</u>: $x R^1 y \Leftrightarrow x R y$

<u>Опр.</u> Нека R е бинарна релация в A.

(1) Транзитивна затв. на R ще наричаме релацията $R^+ \underset{def}{=} \bigcup_{n \ge 1} R^n$, т.е.

$$x R^+ y \Leftrightarrow x R^n y \text{ за някое } n \ge 1$$

(2) Рефлексивно транзитивно затваряне (обвивка) на R ще наричаме рел.

$$R^* = \bigcup_{n \ge 0} R^n, \text{ т.е.}$$

$$x R^* y \Leftrightarrow x R^n y \text{ за някое } n \ge 0$$

От <u>Тв.</u> следва, че $x R^+ y \Leftrightarrow$ същ. $x_0, x_1, \ldots, x_{n+1} \in A$ $(n \ge 0)$, такива че (поне 2ел.)

$x_0 = x$

$x_{n+1} = y$ и за вс. $0 \le i \le n+1$,

$$x_i R x_{i+1}$$

$x R^* y \Leftrightarrow$ същ. $x_0, x_1, \ldots, x_n \in A$

$(n \ge 0)$,

такива че $x_0 = x$, $x_n = y$ и за вс.
$0 \le i < n$ $x_i R x_{i+1}$

Свойства: (1) за ∀ вс. R, R^+ е транзитивна
(2) за ∀ R, R^* е рефлексивна и транзитивна

№2 Функции.

Суперпозиция на функции. Инекция, сюрекция и биекция

Опр. Нека R е бинарна релация м/у A и B. Ще казваме, че R е функция, ако
(1) $\forall a \in A \; \exists b \in B \; (aRb)$ (тоталност)
(2) $\forall a \in A \; \forall b_1, b_2 \in B \; (aRb_1 \; \& \; aRb_2 \Rightarrow b_1 = b_2)$ (еднозначност)
В случай, че R е функция от A в B, ще пишем $R: A \to B$ и $R(a) = b$ вместо aRb. Мн. ~~A~~ ~~[illegible]~~
Мн. $A = Dom(R)$ наричаме дефиниционна област на R, а множеството B област от стойности

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ само в Анализа
↓
частично изображение, подмножество
Д.О.

(3)

Опр. Нека $f: A \to B$.

(1) Ако $X \subseteq A$ с $f(X)$ (или още $f[X]$) означаваме множеството $f(X) = \{f(x) \mid x \in X\}$

област на мн. X

(2) Ако $Y \subseteq B$ с $f(Y)$ (или още $f^{-1}[Y]$) означаваме мн.

$$f^{-1}(Y) = \{x \in A \mid f(x) \in Y\}$$

Ясно е, че $f(X) \subseteq B$, а $f^{-1}(Y) \subseteq A$.

Заб. Ако $X \subseteq A$ и $X \neq \emptyset$, то

$$f(X) \neq \emptyset.$$

Възможно е $Y \subseteq B$, $Y \neq \emptyset$, но

$$f^{-1}(Y) = \emptyset:$$

$\{f: \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ f(x) = x^2\}$. Нека $Y = \{5, 6, 7\}$. Тогава $f^{-1}(Y) = \emptyset\}$

Опр. Нека $f: A \to B$. Казваме, че

(1) f е инекция, ако за вс. $x, y \in A$, $x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$ (еквивалентно $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$)

(2) f е сюрекция, ако

$f(A) = B$, т.е. за вс. $b \in B$ същ. $a \in A$, такова че

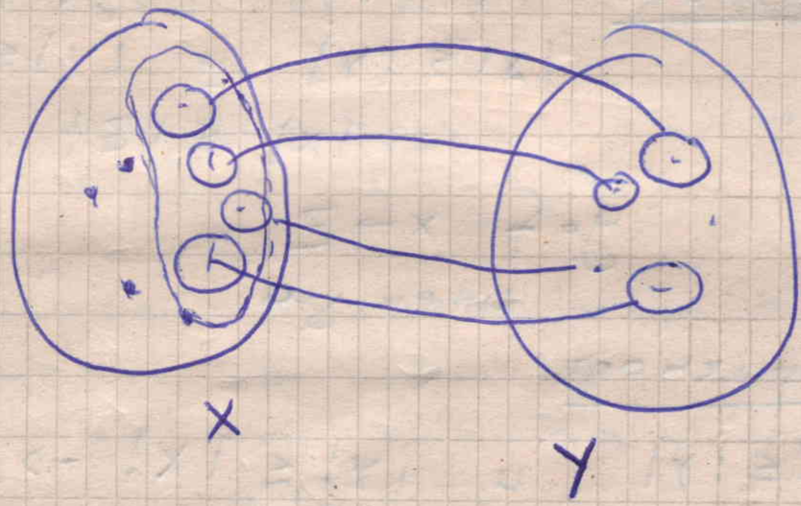
$$f(a) = b$$

(3) f е биекция, ако f е едновременно инекция и сюрекция

16.10.2013г.

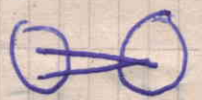
сряда

Упражнение

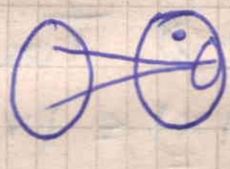


$f : Y \to X$

неинекция



несюрекция



не е сюрекция
инекция е

Деф. $\underbrace{|X| \leq |Y|}$ $\Leftrightarrow$ съществува инекция $f: X \to Y$

мощността на X е не по-голяма от мощността на Y

кардинал - за ∞ множества

<u>рефлексивност</u> $|X| \leq |X|$

$id: X \to X$

<u>транзитивност</u> $f: X \to Y$ $g: Y \to Z$

$|X| \leq |Y|$ и $|Y| \leq |Z|$

$\Rightarrow |X| \leq |Z|$

$g \circ f \quad X \to Z$

инекция

<u>антисиметричност</u>

$|X| \leq |Y|$ и $|Y| \leq |X| \Rightarrow |X| = |Y|$

теорема на Кантор-Бендиксон-Шайнер

Деф. $|X| = |Y|$, ако съществува биекция $f: X \to Y$

Th $|X| \leq |Y|$ или $|Y| \leq |X|$

Th Нека $X \neq \emptyset$. Тогава

$|X| \leq |Y| \Leftrightarrow$ съществува

сюрекция $g: Y \to X$

Д-во: $\Rightarrow$) знаем $|X| \leq Y$

$\Rightarrow$ има инекция $X \to Y$

значи $\exists\ g: Y \to X$

$\forall x \in X \quad g(f(x)) = x$

Да изберем произв. $x \in X$

$g(\boxed{f(x)}) = x$

$x \in Im\, g$

$\Rightarrow g$ е сюрекция

$(\Leftarrow)$ Знаем, че $g: Y \to X$ - сюрекция

Знаци съществува $f: X \to Y$
$\forall y \in Y \quad f(g(y)) = y$

Аксиома на избора

Да изберем произволни $x_1, x_2 \in X$, такива че $x_1 \neq x_2$

Съществуват такива y_1, y_2

$g(y_1) = x_1$

$g(y_2) = x_2$

защото g е сюрекция

$x_1 \neq x_2$

$\Rightarrow g(y_1) \neq g(y_2)$

$\Rightarrow y_1 \neq y_2$

$\Rightarrow f(g(y_1)) \neq f(g(y_2))$

$\Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

зад. $|\{1,2,3\}| < |\mathbb{N}|$

Деф. $|X| < |Y|$, ако $|X| \le |Y|$
и $|X| \neq |Y|$

$f: \{1,2,3\} \to \mathbb{N}$

$f(x) = x$

f-инекция

$|\{1,2,3\}| \le |\mathbb{N}|$

Да доп., че има биекция

$g: \{1,2,3\} \to \mathbb{N}$

Не съществува ест. число
различно от $g(1), g(2), g(3)$

$\Rightarrow g$ не е сюрекция

$|\mathbb{N}| > |\mathbb{N} \setminus \{0\}|$

$? =$

$f: \cancel{\mathbb{N} \to \mathbb{N}}\ \mathbb{N} \setminus \{0\} \to \mathbb{N}$

$f(x) = x$

f е инекция

$|\mathbb{N} \setminus \{0\}| \leq |\mathbb{N}|$

$g : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \setminus \{0\}$

$g(x) = x + 1$

g е биекция

$\Rightarrow |\mathbb{N}| = |\mathbb{N} \setminus \{0\}|$

? $|\mathbb{R}| = |\mathbb{R} \setminus \{0\}|$

$f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$

$f(x) = x$ $\quad f$ е инекция

$|\mathbb{R} \setminus \{0\}| \leq |\mathbb{R}|$

$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$g(x) = \begin{cases} x + 1, & \text{ако } x \in \mathbb{N} \\ x & \text{иначе} \end{cases}$$

g е биекция

$A = \{ n \in \mathbb{N} \mid n \text{ е четно} \}$

~~[illegible]~~ $\quad |A| \quad |\mathbb{N}|$

Очевидно, $|A| \leq |\mathbb{N}|$

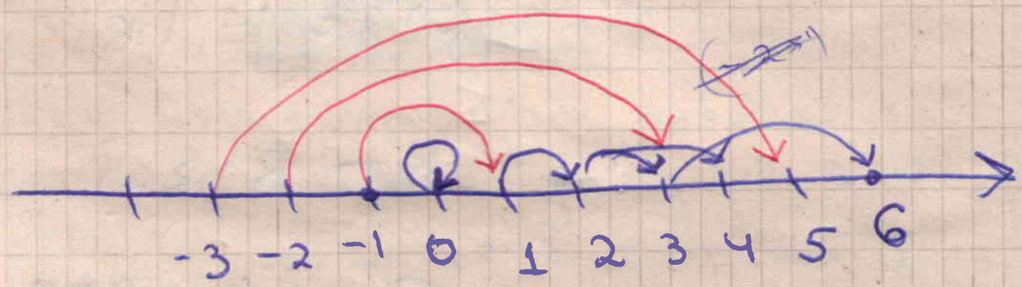
$$\left| \begin{array}{l} g : N \to A \\ g(x) = 2x \end{array} \right.$$

g е биекция

$|A| = |\mathbb{N}|$

$\mathbb{N}$ $\&$ $\mathbb{Z}$

$$\left| \begin{array}{l} g : \mathbb{Z} \to \mathbb{N} \\ g(x) = \begin{cases} 2x, \text{ако } x \geq 0 \\ -(2x+1) \text{ ако } x < 0 \end{cases} \end{array} \right.$$



или $-2x$, ако $x \leq 0$

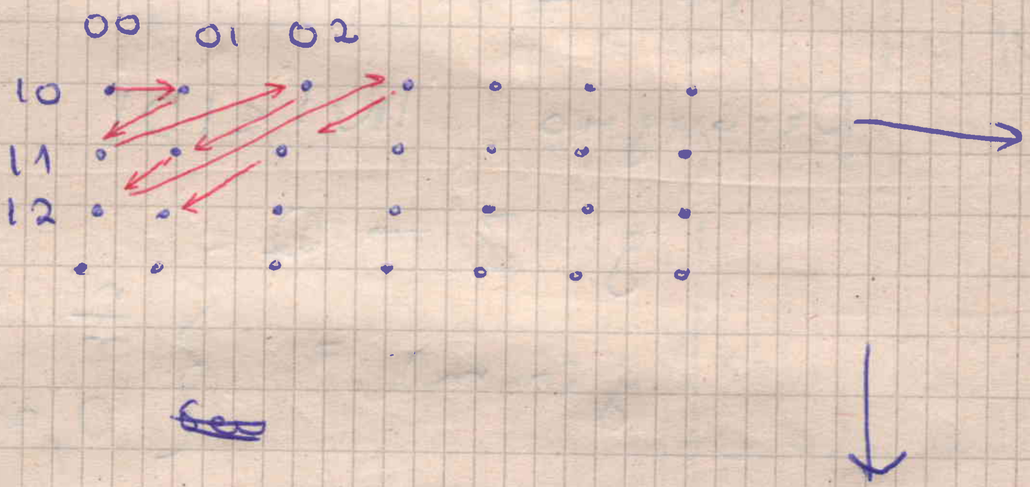
$2x - 1$, ако $x > 0$

$\Rightarrow |\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}|$

$$|\mathbb{N}| \stackrel{?}{=} |\mathbb{N}^2| = |\mathbb{N} \times \mathbb{N}|$$

$$f : |\mathbb{N}| \to |\mathbb{N}^2|$$
$$f(x) = (0, x)$$

$$|\mathbb{N}| \leq |\mathbb{N}^2|$$



биекция м/у $\mathbb{N}$ и $\mathbb{N}^2$

$$g : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$$
$$g(n, m) = 2^n(2m+1) - 1$$

g е биекция

$$|\mathbb{Z}| = |\mathbb{Z}^2|$$

Нека $g : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ е биекция и
$f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ е биекция

$$\mathbb{Z} \xrightarrow{f} \mathbb{N} \xrightarrow{g^{-1}} \mathbb{N}^2 \to \mathbb{Z}^2$$

$$h(n,m) = (f^{-1}(n), f^{-1}(m))$$

композиция на биекции

$$|\mathbb{N}| \underset{\text{или}}{\leq} |\mathbb{Q}|$$

Очевидно $|\mathbb{N}| \leq |\mathbb{Q}|$

$$g: \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Q}$$

$$g(n,m) = \begin{cases} \frac{n}{m}, & \text{ако } m \neq 0 \\ 0, & \text{ако } m = 0 \end{cases}$$

g е сюрекция

$$|\mathbb{Z}^2| \geq |\mathbb{Q}|$$

$$|\mathbb{N}| \leq |\mathbb{Q}| \leq |\mathbb{Z}|^2 = |\mathbb{N}|$$

$$\Rightarrow |\mathbb{Q}| = |\mathbb{N}|$$

$g: \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ биекция

$$g': \mathbb{N}^4 \to \mathbb{N}$$

$$g'(n_1, n_2, n_3, n_4) = g(g(n_1, n_2), g(n_3, n_4))$$

$g'' \, f : \mathbb{N}^8 \to \mathbb{N}$

$g''(n_1, n_2, \dots, n_8) = g(g'(n_1, n_2, n_3, n_4)$
$g'(n_5, n_6, n_7, n_8))$

$|\mathbb{N}| = |\mathbb{N}^{2^k}|$

$|\mathbb{N}| \leq |\mathbb{N}^m| \leq |\mathbb{N}^{2^k}| = \mathbb{N}$

$f(x) = (x, 0, 0, \dots 0)$:))

инекция

$f(x_1, \dots, x_m) = (x_1, \dots, x_n,$
$0, 0, \dots 0)$

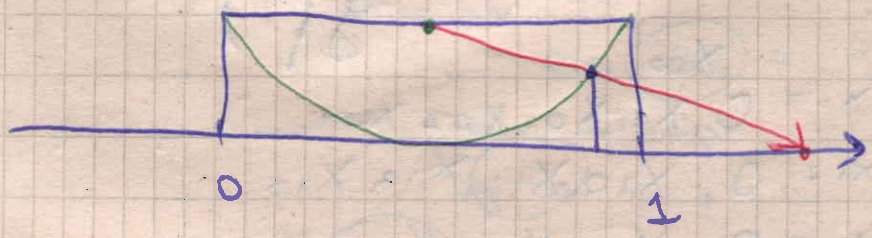
инекция

$|\mathbb{N}^k| = |\mathbb{N}|$

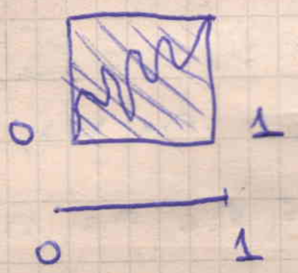
$|\mathbb{Z}^k| = |\mathbb{Z}|$

$|\mathbb{Q}^k| = |\mathbb{Q}|$

$\mathbb{R}$



$|\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 1\}| = |\mathbb{R}$



$f(0, x_1x_2x_3\ldots, 0, y_1y_2y_3\ldots)$
$\parallel$
$0, x_1y_1x_2y_2x_3y_3\ldots$

биекция

кривата на Пеано

$$|\mathbb{R}| = |\mathbb{R}^2| = |\mathbb{R}^k|$$

$$\underbrace{0,123999\ldots9 = 0,124}$$

най-малки безкрайни м-ва

изброими множества

$$|\mathbb{N}| = |\mathbb{N}^k| = |\mathbb{Z}| = |\mathbb{Z}^k| =$$
$$= |\mathbb{Q}| = |\mathbb{Q}^k| < |\mathbb{R}| = |\mathbb{R}^k|$$

$f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$
$f(x) = x$ инекция

$$|\mathbb{N}| < |\mathbb{R}|$$

$\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 1\}$

Да док., че $|\mathbb{N}| = |\mathbb{R}|$

$\Rightarrow$ има биекция $g: \mathbb{N} \to$

$$x_i = g(i)$$

$x_0 = 0, x_{00}x_{01}x_{02}x_{03}x_{04}\ldots$

$x_1 = 0, x_{10}x_{11}x_{12}x_{13}\ldots$

$x_2 = 0, x_{20}x_{21}x_{22}x_{23}\ldots$

$x_3 = 0, x_{30}x_{31}x_{32}x_{33}\ldots$

$$y_{ij} = \begin{cases} 2, \text{ ако } & x_{ij} \neq 2 \\ 3, \text{ ако } & x_{ij} = 2 \end{cases}$$ знач.

$x_{ij} \neq y_{ij}$

$y = 0, y_{00} y_{11} y_{22} y_{33} \dots$

$\underline{\underline{\forall i \; y \neq x_i}}$

т.е. g не е биекция

$\Rightarrow |\mathbb{N}| < |\mathbb{R}|$???

?

има ли междинни множества?

Ако A е безкрайно, то $|\mathbb{N}| \leq |A|$

$\exists \; \cancel{a_0}\, b_0 \in A$

Нека $A_1 = \{b_0\}$

A_1 - крайно

A - безкрайно

$\Rightarrow A \setminus A_1$ е безкрайно

$b_1 \in A \setminus A_1$

$A_2 = \{b_0, b_1\}$

A_2 е кр.

A е безкр.

$A \setminus A_2$ е безкр.

$b_2 \in A \setminus A_2$

$A_3 = \{ b_0, b_1, b_2 \}$

Нека $f : \mathbb{N} \to A$

$f(x) = b_x$

f е инекция

$|A| < |2^A|$

$2^A = \{ B \mid B \subseteq A \}$

$f : A \to 2^A$

$f(x) = \{ x \} \in 2^A$

f е инекция

$|A| \leq |2^A|$

Доп., че $|A| = |2^A|$

значи има биекция

$g : A \to 2^A$

$B = \{ x \in A \mid x \notin g(x) \}$

$a = g^{-1}(B)$, $B = g(a)$

? $a \in B \iff a \in g(a)$

=

$a \notin g(a) \iff a \notin B$

$|\mathbb{N}| = |\mathbb{N}^k| = |\mathbb{Z}| = |\mathbb{Z}^k| = |\mathbb{Q}| = |\mathbb{Q}^k| < |\mathbb{R}| =$

$= |\mathbb{R}^k| < |2^{\mathbb{R}}| < |2^{2^{\mathbb{R}}}| < \dots$

$|\{f \mid f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}| = |2^{\mathbb{R}}|$

$|\{f \mid f: A \to A\}| = |2^{A}|$

$|\{f: R \to R \mid f$ е непрекъсната$\}| = |\mathbb{R}|$

$2^{\mathbb{Q}}$

k_1, k_2 - контролни

29.11.

D_1, D_2, D_3, D_4 (0-10)

$k \leftarrow \frac{k_1 + k_2}{2}$

$D \leftarrow \sum_{i=1}^{4} D_i \cdot k$

if $k \le 3$ go to ПИ

if $k + D \le 4$ go to ПИ

k е т.се

ΣD

$k = \dfrac{\text{бр. пред. домашни}}{\text{точки } 2 \sum \forall \text{ дом.}}$

ПИ $\leftarrow k + D$

23.10.2013г.

Упражнение

$\boxed{\text{Булеви функции}}$

$\mathbb{Z}_2^n \longrightarrow \mathbb{Z}_2$ поле

$\uparrow$

0; 1

елементи

л й

+	0	1
0	0	1
1	1	0

1-1

$1 + 1 = 1$ Полупръстен

$1 + (1 - 1) = (1 - 1) = 0$

$\Rightarrow 1 + 0 = 0$

$1 = 0$

−	0	1
0	0	
1	1	0

$$0 - 1 = x$$

$$x + 1 = 0$$

$x \neq 0$, защото иначе $1 = 0$

$$\boxed{x + y = x - y}$$

$$\underline{\underline{-x = x}}$$

$$X + X = 0$$

$\cdot$	0	1
0	0	0
1	0	1

:	0	1
0	$\wr$	0
1	$\wr$	1

$\frac{x}{x} = 1$, но $\cancel{x \cdot x = 1}$

x	$f(x)$			
	0	x	$\overline{x}$	1
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1

$\neg x$

$\sim x$

4 булеви ф-ции

$\overline{x}$ - логическо отрицание

черта на Шефер

стрелка на Пирс NOR

x	y	0	xy ($x \wedge y$, $x \& y$)	$x \not\to y$	x	$x < y$	y	$x + y$ ($x \oplus y$)	$x \vee y$	$x \downarrow y$	$x \equiv y$ ($x \Leftrightarrow y$, $x \leftrightarrow y$)	$\overline{y}$	$y \supset x$ ($y \Rightarrow x$, $y \to x$)	$\overline{x}$	$x \Rightarrow y$ ($x \supset y$, $x \to y$)	$x \mid y$	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	~~0~~ 1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

константа

и

конюнкция AND

проекция

изключващо или XOR

или

дизюнкция OR

еквиваленция

не

отрицание NOT

импликация (ако, то)

За запомняне :))

$$x \downarrow y = x \downarrow y \longrightarrow x \downarrow y \quad \overline{x \vee y}$$
$$x \mid y = \overline{xy}$$

Комутативност

$$x + y = y + x$$
$$xy = yx$$
$$x \vee y = \cancel{x}\, y \cup x$$
$$x \leftrightarrow y = y \leftrightarrow x$$
$$x \mid y = y \mid x$$
$$x \downarrow y = y \downarrow x$$

не $\cancel{\longrightarrow}$: $\longrightarrow$
$\leftarrow$
$<$
$>$

асоциативност:

$$x + (y + z) = (x + y) + z$$
$$x(yz) = (xy)z$$
$$x \cup (y \cup z) = (x \cup y) \cup z \qquad x \cup y \cup z$$
$$x \leftrightarrow (y \leftrightarrow z) = (x \leftrightarrow y) \leftrightarrow z$$

Дистрибутивност:

$$x(y + z) = xy + xz \qquad (y + z)x = yx + zx$$
$$x(y \cup z) = xy \cup xz \qquad (y \cup z)x = yx \cup zx$$
$$x \cup yz = (x \cup y)(x \cup z) \qquad yz \cup x = (y \cup x)(z \cup x)$$

$$x(y \cup z) = xy \cup xz$$

$$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \cup (x \wedge z)$$

$$x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$$

$$x \vee yz = (x \cup y)(x \cup z)$$

Идемпотентност:

$$x \cdot x = x$$

$$x \vee x = x$$

Закони на Деморган:

$$\overline{x \cdot y} = \overline{x} \cup \overline{y}$$

$$\overline{x \vee y} = \overline{x}\,\overline{y}$$

$$\overline{xy} \neq \overline{x} \cdot \overline{y}$$

Аритметични закони:

$$x + x = 0$$

$$\begin{cases} x^n = x, \text{ ако } n \neq 0 \\ x^0 = 1 \end{cases}$$

$$xy + xy = 0$$

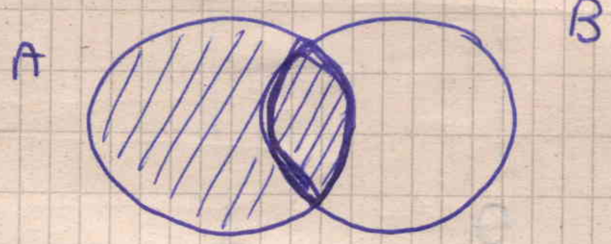
$$\begin{array}{ccccccc} (x+y)^2 & = & x^2 & + & 2xy & + & y^2 \\ \| & & \| & & \| & & \| \\ x+y & & x & + & 0 & + & y \end{array}$$

Закони за поглъщане

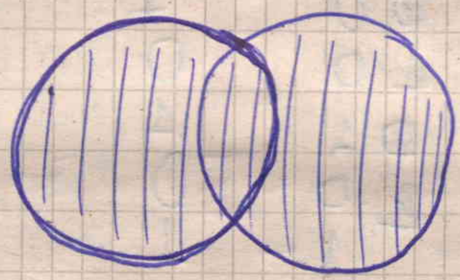
! $x \cup xy = x$

! $x(x \cup y) = x$

1) $A \cup (A \cap B) = A$



$A \cap (A \cup B) = A$



$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$

$A \cap (B \triangle C) = (A \cap B) \triangle (A \cap C)$

Д-во закон Деморган:

x	y	x	y	$x \vee y$	$\overline{x \vee y}$	$\overline{x} \cdot \overline{y}$	
0	0	0	0	0	1	0 1 1 0	1
0	1	0	1	1	0	0 1 0 1	0
1	0	1	1	0	0	1 0 1 0	0
1	1	1	1	1	0	1 0 0 1	0

зад.

$x \vee y \longrightarrow x . z = (x \to z)(y \to x)(y \to z)$

x	y
0	0

x	y	z	$x \vee y$		$x . z$	$x \to z$	$y \to x$	$y \to z$	
0	0	0	0	1	0	1	1	1	1
0	0	1	0	1	0	1	1	1	1
0	1	0	1	0	0	1	0	0	0
~~1~~	~~0~~	~~0~~			~~0~~	[illegible]			
0	1	1	1	0	~~0~~ 0	1	0	1	0
1	0	0	1	0	~~1~~ 0	0	1	1	0
1	0	1	1	1	~~0~~ 1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	~~1~~ 0	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

$A \to B = 0 \iff A = 1$, $B = 0$:))

зад.

$\left(x \to \left[(\bar{x} \leftrightarrow y) y \longleftrightarrow y(x \cup z (x \to y)(\bar{x} + 1))\right]\right.$

$(y \to x)(x + y) = 0$

z)

x	y	z
0	0	0
0	0	1
0	1	0
0	1	1
1	0	0
1	0	1
1	1	0
1	1	1

$\bar{x} \leftrightarrow y \cdot y \longleftrightarrow y \cdot (x \cup z \cdot (x \to y)(\bar{x}+1)]$

	$\bar{x}$	$\leftrightarrow$	y	$\cdot$	y														
0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	1
0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	1	0	1	0	1
0	1	1	1	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0	1
0	1	1	1	1	1	0	1	0	0	0	1	0	0	1	1	1	0	1
1	0	1	0	0	0	1	0	0	1	1	0	0	1	0	0	0	1	1
1	0	1	0	0	0	1	0	0	1	1	1	0	1	0	0	0	1	1
1	0	0	1	0	1	0	1	1	1	1	0	0	1	1	1	0	1	1
1	0	0	1	0	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1

$(y \to x) \cdot (x + y)$ и тршге.

y	$\to$	x	$\cdot$	$(x+y)$	и тршге
0	1	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0
1	0	0	0	1	0
1	0	0	0	1	0
0	1	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1
1	1	1	0	0	0
1	1	1	0	0	0

?

$\neq 0$:?

съвършена
дизюнктивна
нормална форма
(СДНФ)

x	y	z	xyz	$x\bar{y}z$	$\bar{x}\bar{y}z$	$xyz \cup x\bar{y}z \cup \bar{x}\bar{y}z$
0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	1	1
0	1	0	0	0	0	0
0	1	1	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	1	0	1
1	1	0	0	0	0	0
1	1	1	1	0	0	1

$$xz\underbrace{(y \cup \bar{y})}_{1} \cup \bar{x}\bar{y}z =$$

$$= xz \cup \bar{x}\bar{y}z$$

x	y	z	$x \cup y \cup z$	$x \cup \bar{y} \cup z$	$\bar{x} \cup \bar{y} \cup z$	$(x \cup y \cup z)(x \cup \bar{y} \cup z)(\bar{x} \cup \bar{y} \cup z)$
0	0	0	0	1	1	0
0	0	1	1	1	1	1
0	1	0	1	0	1	0
0	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	1	1
1	0	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	0	0
1	1	1	1	1	1	1

съвършена
конюнктивна
нормална
ф-ма
(СКНФ)

$x \cup \bar{x} = 1$

$x \cdot \bar{x} = 0$

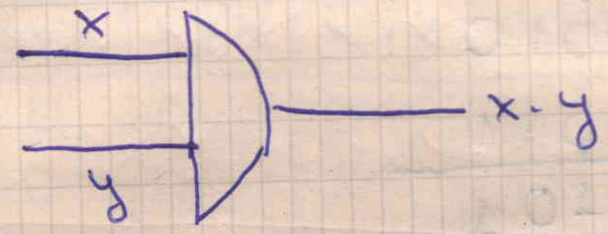
$$
\begin{array}{r}
{}^{1\,1}\quad\quad\ {}^{1}\quad \\
1011100010 \\
+\ 1011010111 \\
\hline
10110111101
\end{array}
$$

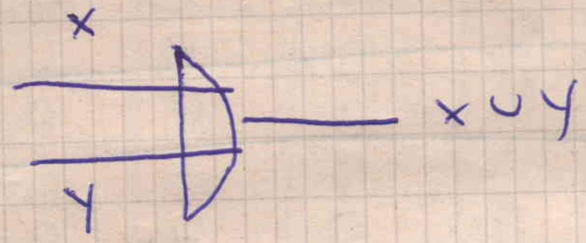
x y z	C	S
0 0 0	0	0
0 0 1	0	1
0 1 0	0	1
0 1 1	1	0
1 0 0	0	1
1 0 1	1	0
1 1 0	1	0
1 1 1	1	1

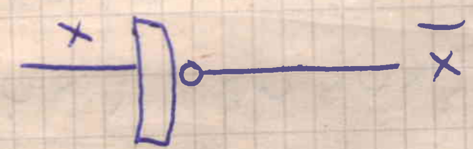
$C = \bar{x}yz \cup x\bar{y}z \cup xy\bar{z} \cup xyz$

$S = (x \cup y \cup z) \cdot (x \cup \bar{y} \cup \bar{z})$
$\cdot (\bar{x} \cup y \cup \bar{z}) (\bar{x} \cup \bar{y} \cup z)$

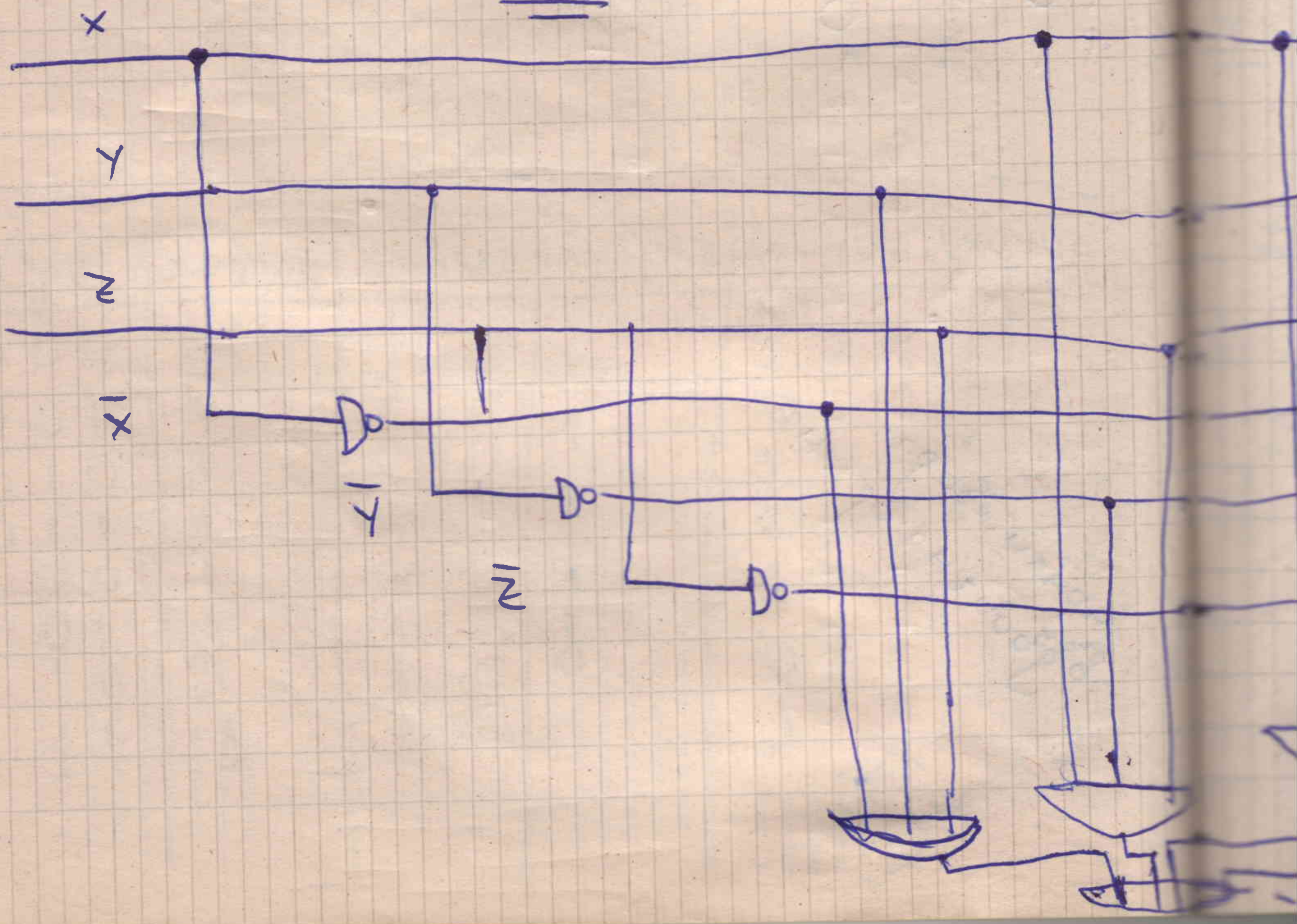
в аритм. сбор
двоична бр. с-ма

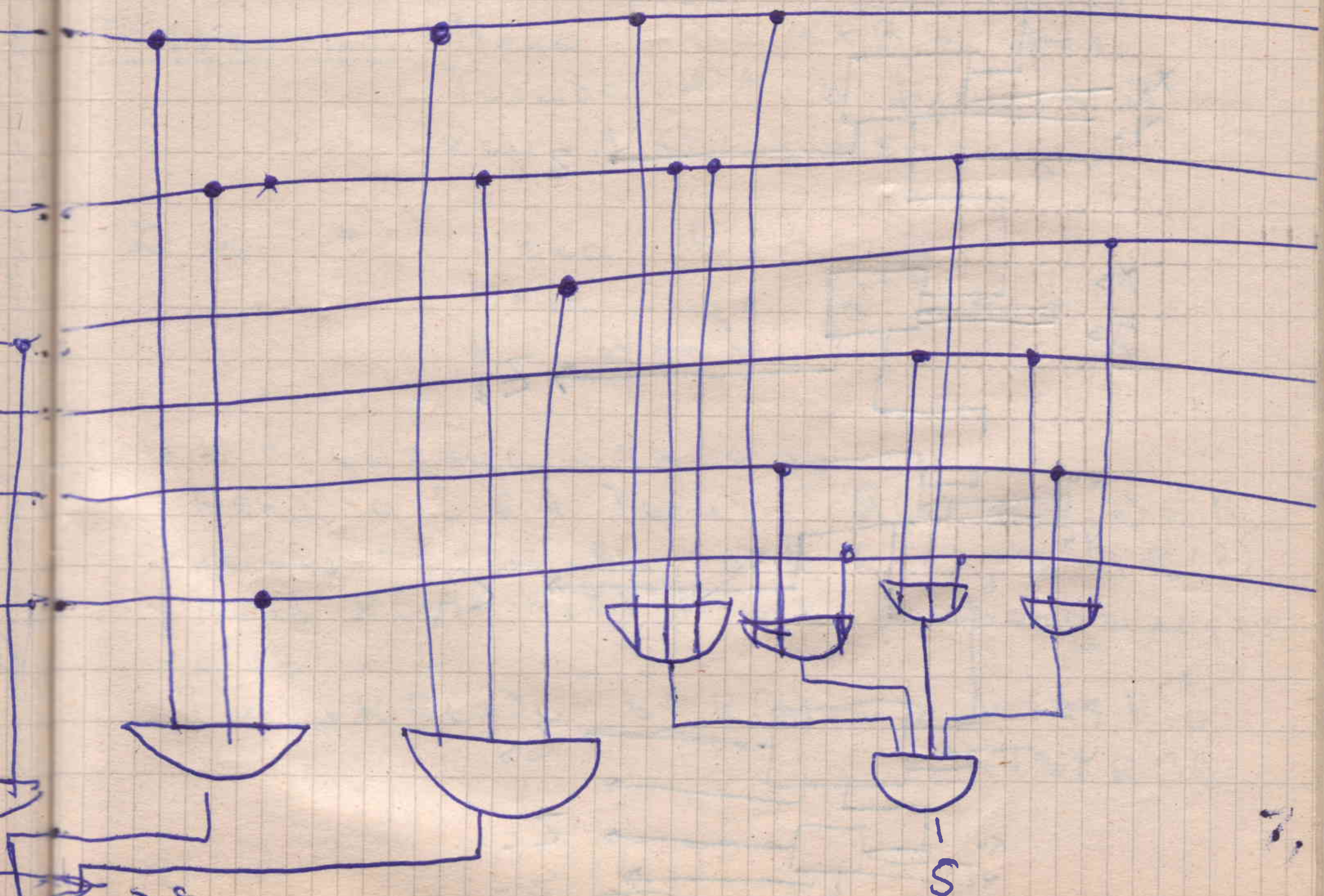




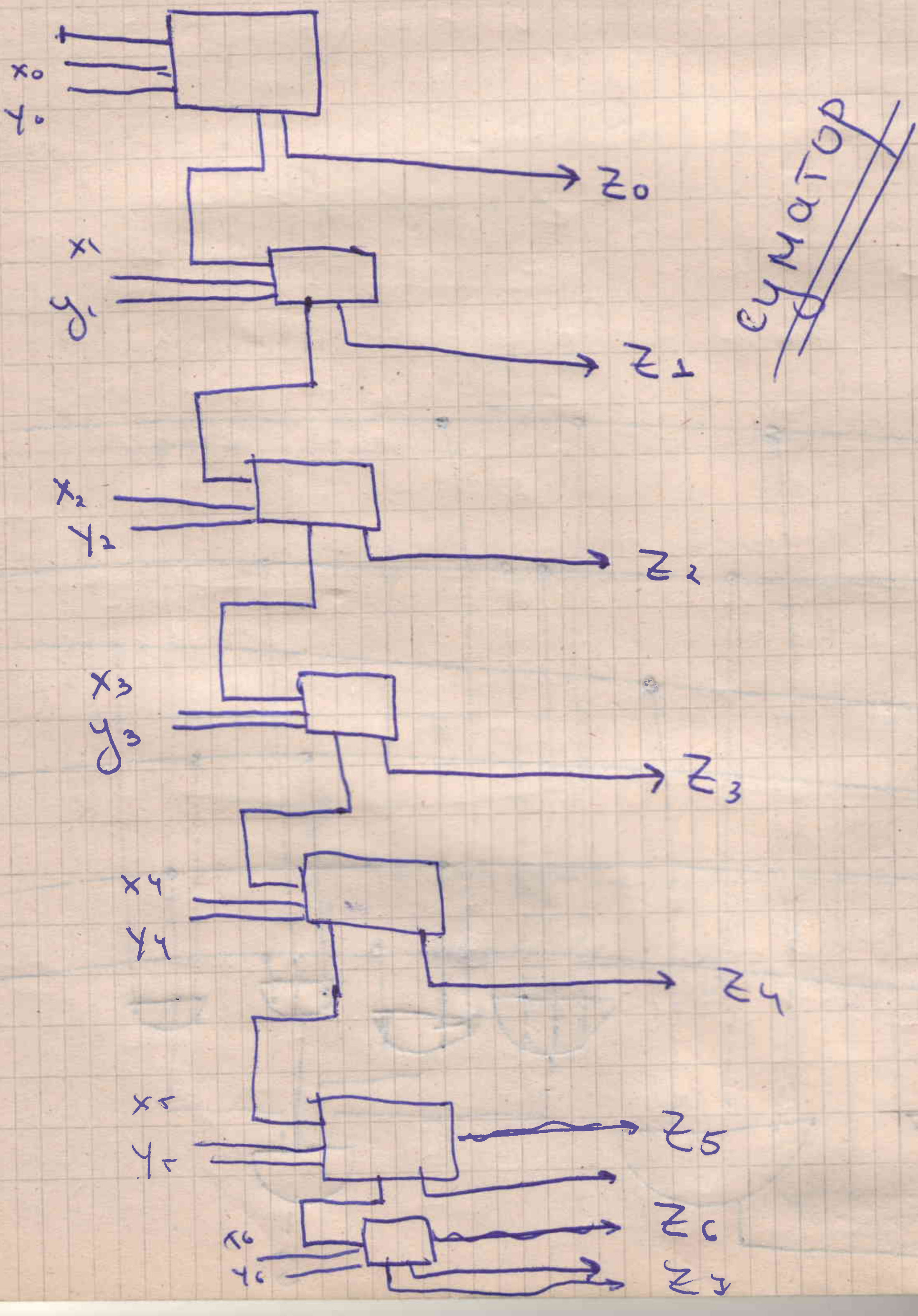


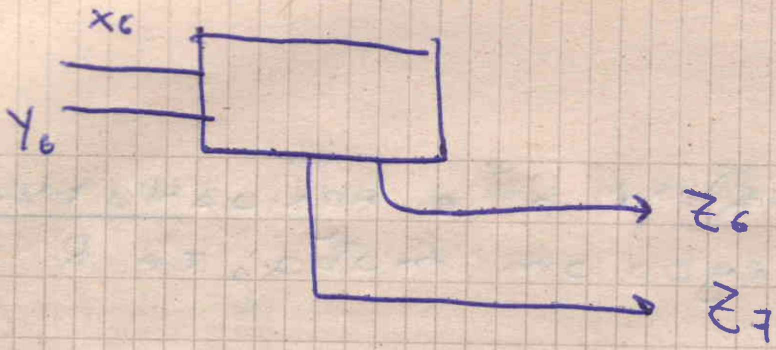
3a C




S

$$\begin{array}{r} X_6\,X_5\,X_4\,X_3\,X_2\,X_1\,X_0 \\ +\; Y_6\,Y_5\,Y_4\,Y_3\,Y_2\,Y_1\,Y_0 \\ \hline Z_7\,Z_6\,Z_5\,Z_4\,Z_3\,Z_2\,Z_1\,Z_0 \end{array}$$





17.10.2013г.

Лекция

Опр. Нека $R \subseteq A \times B$. С R^{-1} ще означаваме О-то:

$$R^{-1} = \{ (b,a) \mid (a,b) \in R \}$$

В частност, $R^{-1} \subseteq B \times A$.

Твърдение: Нека $R \subseteq A \times B$ е ф-я. Тогава R^{-1} е ф-я от B към A $\Leftrightarrow$ R е биекция

Д-во: $\Rightarrow$) Нека $R : A \to B$
Нека още R^{-1} е ф-я, $R^{-1} : B \to A$

1) R е инекция - да го докажем
Нека $a, b \in A$. Тогава $R(a)$ и $R(b) \in B$, като при това $a\,R\,R(a)$, $b\,R\,R(b)$
Нека $R(a) = R(b)$. Тогава твърдим, че $a = b$.
Т.к. $a\,R\,R(a)$ и $b\,R\,R(b)$, то $R(a)\,R^{-1}\,a$
$R(b)\,R^{-1}\,b$

и

Т.к. $R(a) = R(b)$ и R^{-1} е еднозначна релация (следва от това, че R^{-1} е ф-я) $\Rightarrow a = b$.

2) <u>R е сюрекция</u>: Нека $b \in B$. Т.к. R^{-1} е ф-я от B към A, то $\exists\, a \in A$, такова че $b R^{-1} a$. Съгласно def $\Rightarrow aRb$, т.е. $R(a) = b$

$(\Leftarrow)$ Нека R е биекция

1) <u>R^{-1} е тотална</u>: Нека $b \in B$

Нека $a \in A$ е такова, че aRb (такова a има, т.к. R е сюрекция)

$$\Rightarrow b R^{-1} a$$

2) <u>Еднозначност</u>: Нека a_1 и $a_2 \in A$ и $b \in B$ са такива, че

$b R^{-1} a_1$ и

$b R^{-1} a_2$

Тогава $a_1 R b$ и $a_2 R b \Rightarrow$ т.к. R е инекция $\Rightarrow a_1 = a_2$

<u>Опр.</u> Нека $f: A \to B$ и $g: B \to C$. Тогава с $g \circ f$ ще означаваме релацията $g \circ f \subseteq A \times C$, за която

$$f \circ g = \{a, g(f(a))\}$$

Твърдение: Нека $f: A \to B$ и $g: B \to C$.
Тогава:

(1) $g \circ f$ е ф-я

(2) ако f и g са инекции, то $g \circ f$ е инекция

(3) Ако f и g са сюрекции, то $g \circ f$ е сюрекция

(4) Ако f и g са биекции, то $g \circ f$ е биекция.

Д-во: Нека $f: A \to B$ и $g: B \to C$

(1) $g \circ f$ е тотална: Нека $a \in A$. Тогава $f(a) \in B \Rightarrow g(f(a)) \in C$
$\Rightarrow g \circ f(a) \in C$

$g \circ f$ е еднозначна: Нека $a \in A$ и $c_1, c_2 \in C$, са такива, че:

$$g \circ f(a) = c_1 \text{ и } g \circ f(a) = c_2$$

Тогава $g(f(a)) = c_1$ и $g(f(a)) = c_2$, т.к. f е еднозначна $\Rightarrow f(a)$ е еднозначно определено и от еднозначността на $g \Rightarrow c_1 = c_2$

(2) Нека f и g са инекции. Твърдим, че $g \circ f$ също е инекция.
Нека $a_1, a_2 \in A$ са такива, че
$g \circ f(a_1) = g \circ f(a_2)$, т.е.
$g(f(a_1)) = g(f(a_2))$

Т.к. g е инекция, $f(a_1) = f(a_2)$ и от инективността на $f \Rightarrow a_1 = a_2$.

(3) Нека f и g са сюрекции. Тогава

$$f(A) = B \text{ и } g(B) = C.$$

Тогава $g \circ f(A) = g(f(A)) = g(B) = C$

(4) Следва от (2) и (3)

Опр. Казваме, че мощността ~~н~~ $\overline{\overline{A}}$, $\|A\|$ е по-малка или равна от мощността ~~н~~ $\overline{\overline{B}}$ на B и бележим $\|A\| \leq \|B\|$, ако $\exists$ инекция $f: A \to B$. Ще казваме, че $\|A\| = \|B\|$, ако $\exists$ биекция $g: A \to B$.

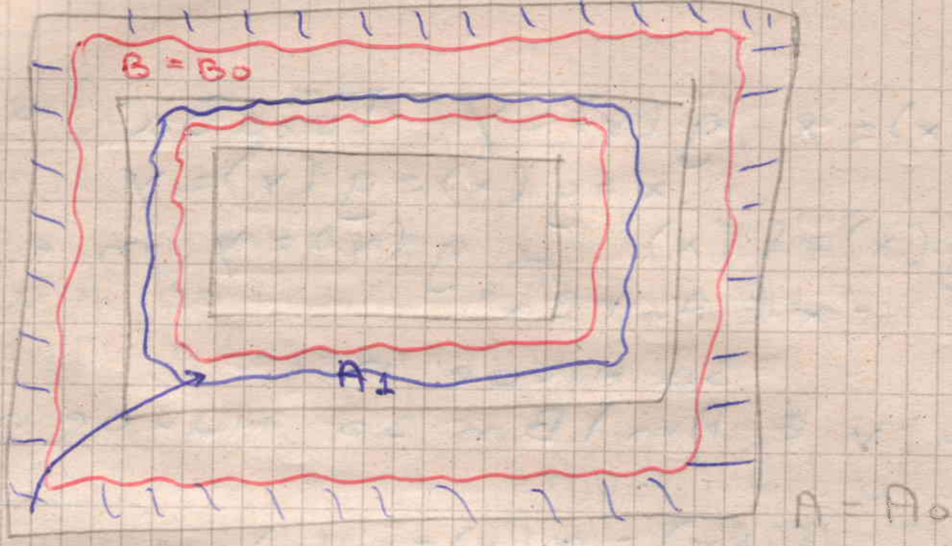
Th Кантор-Шрьодер-Бернщайн

Нека $A_1 \subseteq B \subseteq A$ и нека $\|A_1\| = \|A\|$. Тогава $\|B\| = \|A\|$

Д-во: Нека f е изображение. $f: A \to A_1$ и е биекция. Образуваме редиците $A_0, A_1, \ldots, A_n, \ldots$ и съответно $B_0, B_1, \ldots, B_n$. Полагайки $A_0 = A$, $B_0 = B$

$A_{n+1} = f(A_n)$ и за $n \geq 0$

$B_{n+1} = f(B_n)$ ~~за~~



Елементите на A, които $\notin B$ им прилагаме f.
Т.к. $A_1 \subseteq B \subseteq A$ имаме $A_{n+1} = f(A_n) \subseteq A_n$ и $B_{n+1} = f(B_n) \subseteq B_n$, т.е.

$$A_0 \supseteq A_1 \supseteq \ldots \supseteq A_n \supseteq \ldots \text{ и}$$

$$B_0 \supseteq \ldots \supseteq B_n \supseteq \ldots$$

Да разгледаме $g: A \to B$, дефинирана с

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & \text{ако } x \in A_n \setminus B_n \text{ за някое } n \\ x, & \text{иначе} \end{cases}$$

(1) <u>g е инекция</u>: Нека $x, y \in A$ и $g(x) = g(y)$

1 сл. $g(x) = f(x)$, $g(y) = f(y)$, т.е.

~~Тогава~~ $x \in A_n \setminus B_n$ и $y \in A_m \setminus B_m$ за някои m и n. Тогава $f(x) = g(x) = g(y) = f(y)$ и т.к. f е инекция $\Rightarrow x = y$

II сл. $g(x) = x$, $g(y) = y$. Тогава
$$x = g(x) = g(y) = y$$
III сл. $g(x) = f(x)$ и $g(y) = y$, т.е. $x \in A_n \setminus B_n$ за някое n и $y \notin A_m \setminus B_m$ за никое m.

Тогава $f(x) = g(x) = g(y) = y$, т.е. $f(x) = y$. Т.е. $x \in A_n \setminus B_n$, то тогава $x \in A_n$ и $x \notin B_n$. Оттук
$$y = f(x) \in \underset{\substack{\shortparallel \\ A_{n+1}}}{f(A_n)}$$
и $y = f(x) \notin f(B_n) = B_{n+1}$
$$\Rightarrow y \in A_{n+1} \setminus B_{n+1} \Rightarrow \text{Ж}$$

IV сл. $g(x) = x$, $g(y) = f(y)$ аналогично на III случай

(2) g е сюрекция. Нека $y \in B$.

I сл. $y \notin A_n \setminus B_n$ за никое n. Т.к. $y \in A$ $(B \subseteq A)$ $g(y) = y$

II сл. $y \in A_n \setminus B_n$ за някое n
Т.к. $A_0 = A$ и $B_0 = B$ от това, че $y \in B$
$\Rightarrow$ че няма как $y \in A \setminus B$,
т.е. $y \notin A_0 \setminus B_0 \Rightarrow n > 0$

т.ч. $y \in A_n$, $y = f(x)$ за някое
$x \in A_{n-1}$.

От друга страна $y \notin B_n = f(B_{n-1})$
$\Rightarrow x \notin B_{n-1} \Rightarrow x \in A_{n-1} \setminus B_{n-1}$

Тогава $g(x) = f(x) = y$

<u>Следствие</u>: Нека $\|A\| \leq \|C\|$ и
$\|C\| \leq \|A\|$. Тогава
$$\|A\| = \|C\|$$

Д-во: Нека $\|A\| \leq \|C\|$ и $\|A\| \geq \|C\|$, т.е.
$\exists$ инекции $h_1 : C \to A$ и
$h_2 : A \to C$

A $\quad h_2 \quad$ C

$H' = h_2(A)$

Тогава $h_2 : A \to A'$, като при това h_2 в този случай е сюрективно и значи $h_2 : A \to A'$ е биекция.

Нека $B = h_1(C)$ и $A_1 = h_1(A')$

Тогава $h_1 : C \to B$ е биекция и

$h_1 : A' \to A_1$ е биекция. При това
$A_1 \subseteq B \subseteq A$

Т.к. $h_2 : A \to A'$ и $h_1 : A' \to A_1$ са биекции,

$h_1 \circ h_2 : A \to A_1$ е биекция

$\Rightarrow$ от Th $\exists$ биекция $g : A \to B$.

Т.к. $h_1^{-1} : B \to C$ също е биекция,
то $h_1^{-1} \circ g : A \to C$ е биекция.

Опр. (1) Казваме, че A е крайно, ако $\exists\, n \in \mathbb{N}$ и биекция
$g : A \to \{ m \in \mathbb{N} \mid m < n \}$. Ако такива n и g няма, казваме, че о-вото A е безкрайно.

(2) Казваме, че A е изброимо, ако $\exists$ биекция $\mathbb{N} \to A$.

Примери: 1) $\{ \pi, \pi^2, \pi^5 \}$ е крайно
2) $\mathbb{N}$ е изброимо
3) $\mathbb{Z}$ е изброимо

$$h(x) = \begin{cases} x, & x = 0 \\ \frac{x}{2}, & 2 \mid x \\ -\frac{x+1}{2}, & 2 \nmid x \end{cases}$$

4) $P = \{ p \in \mathbb{N} \mid p \text{ е просто} \}$ е изброимо

5) $\mathbb{Q}$ е изброимо:

Идея: $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ дефинирано чрез $f(m,n) = 2^n(2m+1) - 1$ е биекция

Твърдение: Кантор
О-вото $A = \{ \{a_n\}_{n=0}^{\infty} \mid$

$a_i \in \{0,1\}$ за $\forall i\}$,
т.е. $A = \{f \mid f: \mathbb{N} \to \{0,1\}\}$ е неизброимо.

Д-во: Да допуснем, че $\exists$ биекция $f: \mathbb{N} \to A$ и нека

$$f(k) = \{a_{kn}\}_{n=0}^{\infty}$$

$$f(0) = a_{00}\ a_{01}\ a_{02} \dots a_{0n} \dots$$
$$f(1) = a_{10}\ a_{11}\ a_{12} \dots a_{1n} \dots$$
$$f(2) = a_{20}\ a_{21}\ a_{22} \dots a_{2n} \dots$$
$$\vdots$$
$$f(n) = a_{n0}\ a_{n1}\ a_{n2} \dots a_{nn}$$
$$\dots$$

Нека $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ е def чрез $b_n = 1 - a_{nn}$
Взимаме $a_{00}a_{11} \dots a_{nn} \dots$ и навсякъде, където $a_{ii} = 0$, $a_{ii} = 1$ и обратното. правим

Т.е. f е биекция, $\{b_n\}_{n=0}^{\infty} = f(k)$ за някое $k \in \mathbb{N}$, т.е.

$$\{b_n\}_{n=0}^{\infty} = \{a_{kn}\}_{n=0}^{\infty}$$

$\Rightarrow$ В частност $b_k = a_{kk}$

$\Rightarrow 1 - a_{kk} = a_{kk}$

$\Rightarrow$ X

с това, че $a_{kk} = 0$ или $a_{kk} = 1$

№ 3

Графи и дървета

Опр. (1) Прост неориентиран граф наричаме
$G = (V, E)$, където V е
о-во (от върховете), а
$E \subseteq \{\{v_1, v_2\} \mid v_1, v_2 \in V, v_1 \neq v_2\}$

ребра

(2) Ориентиран граф наричаме
$G = (V, E)$, където V е о-во,
а $E \subseteq V_1 \times V_2$. За $\forall\, e = (v_1, v_2) \in E$
казваме, че v_1 е начало на
реброто „е", а v_2 е край.

(3) Ориентиран мултиграф
наричаме наредена тройка
$G = (V, E, \gamma)$, където V и E са
о-во, а $\gamma : E \to V \times V$

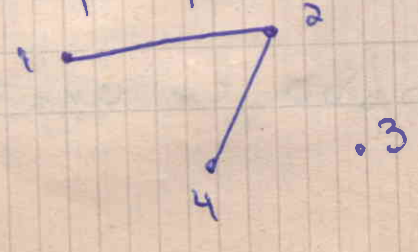
Ако $\gamma(e) = (v_1, v_2)$ казваме, че v_1 е
начало, а v_2 е край на реброто „е"

Забележка: Възможно е $\gamma(e_1) = \gamma(e_2)$
за $e_1 \neq e_2$.

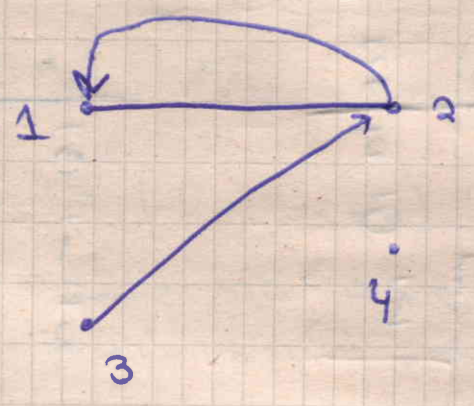
Примери: 1) неор. прост граф

$V = \{1, 2, 3, 4\}$

$E = \{\{1, 2\}, \{2, 4\}\}$



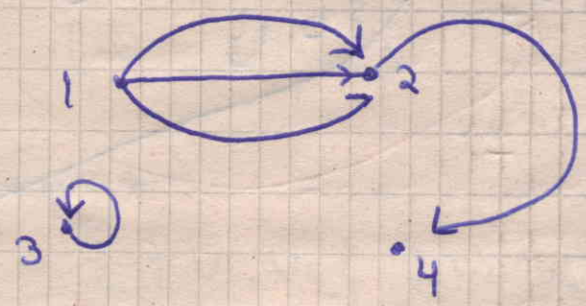
2) Ориентиран граф



$V = \{1, 2, 3, 4\}$

$E = \{(1,2), (2,1), (3,2)\}$

3) мултиграф



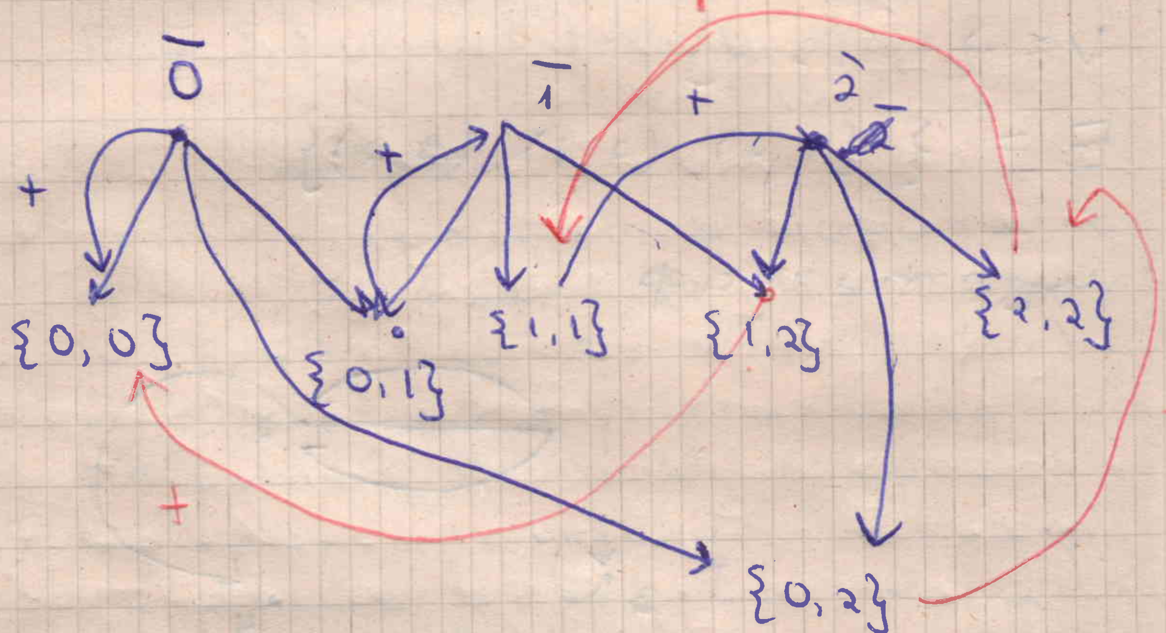
$E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$

$\vartheta(e_1) = (1,2)$
$\vartheta(e_2) = (1,2)$
$\vartheta(e_3) = (1,2)$
$\vartheta(e_4) = (2,4)$
$\vartheta(e_5) = (3,3)$

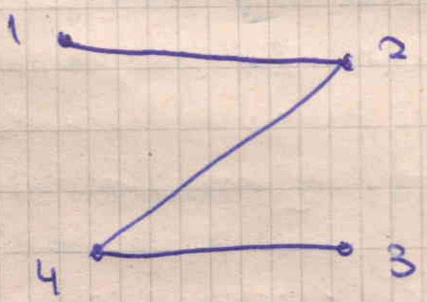
$\mathbb{Z}_3 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}\}$

$+$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$

$\cdot$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$



Опр. Път в граф



1) Мултиграф: Нека $G = (V, E, \vartheta)$
Път в G с дължина $n \geq 0$
ще наричаме всяка редица

$v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \dots, e_n, v_n$, където

$v_0, \dots, v_n \in V$, $e_1, \dots, e_n \in E$ и за $\forall\, i < n$,

$$\gamma(e_{i+1}) = (v_i, v_{i+1})$$

v_0 наричаме начало, а v_n край на пътя

2) ориентиран граф

Нека $G = (V, E)$, $E \subseteq V \times V$

Път в G с дължина $n \geq 0$ ще наричаме $\forall$ редица $v_0 e_1 v_1 \dots e_n v_n$, където

$v_0, \dots, v_n \in V$, $e_1, \dots, e_n \in E$ и

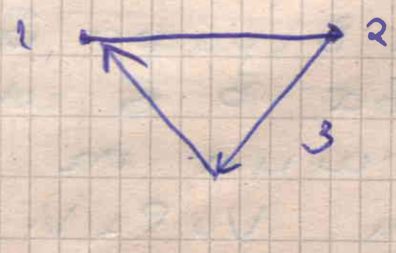
$$e_{i+1} = (v_i, v_{i+1})$$

3) (неориентиран)

— " — $E = \{\{v_1, v_2\} \mid v_1, v_2 \in V,\ v_1 \neq v_2\}$

— " — и $e_{i+1} = \{v_i, v_{i+1}\}$

В случай, че $n > 0$ и $v_0 = v_n$ пътят $v_0 e_1 v_1 \dots e_n v_n$ наричаме цикъл в G



24.10.2013г.

Лекция

Опр. Ще казваме, че цикълът $v_0 e_1 v_1 e_2 \dots e_k v_k$, $k>0$, $v_k = v_0$ е прост, ако за вс. $0 \le i < j < k$, $v_i \ne v_j$.

Лема 1: Нека в графа G има цикъл. Тогава в G има прост цикъл.

Д-во: Нека $v_0 e_1 v_1 \dots e_m v_m$, $m>0$, $v_m = v_0$ е цикъл в G. Нека
$s = \min\{j-i \mid 0 \le i < j \le m \ \& \ v_i = v_j\}$
(такова s има, т.к. $v_0 \equiv v_k$)
Нека $0 \le p < m$ е такова, че $v_p = v_{p+s}$. Да разгледаме пътя $v_p e_{p+1} v_{p+1} \dots e_{p+s} v_{p+s}$. Тогава $v_p = v_{p+s}$ и $s>0$ и значи пътят е цикъл. При това за вс. $p \le i < j < p+s$, то $j-i < s$ и следователно върховете $v_p, v_{p+1}, \dots, v_{p+s-1}$ са всичките различни. Сл. разглежданият път е прост цикъл.

Лема 2: Нека в графа G има цикъл. Тогава в G има път с дължина m за $\forall\, m \in \mathbb{N}$.

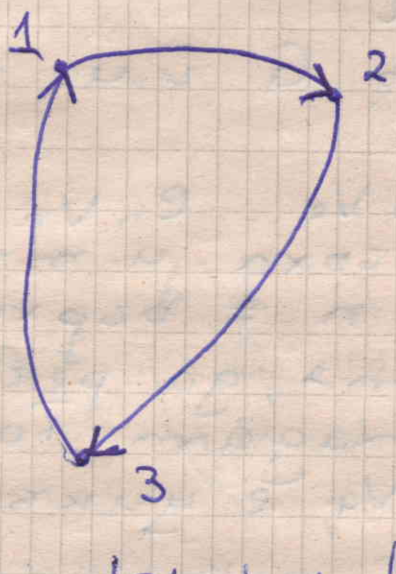
Д-во: Нека $v_0 e_1 v_1 \dots e_k v_k$ ~~е цикъл~~

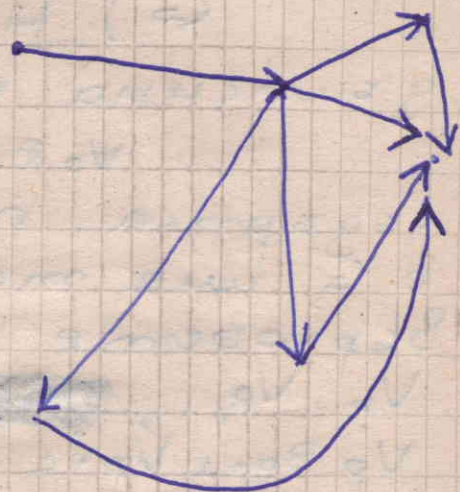
$k>0$, $v_0 = v_k$ е цикъл в G. Нека $m \in \mathbb{N}$
Нека $q, r \in \mathbb{N}$, такива че $m = qk + r$
и $0 \le r < k$. Тогава $v_0 e_1 v_1 \ldots e_k v_k e_1 v_1 \ldots e_k v_k e_1 v_1 \ldots e_k v_k \ldots$
(може да се повтори...)

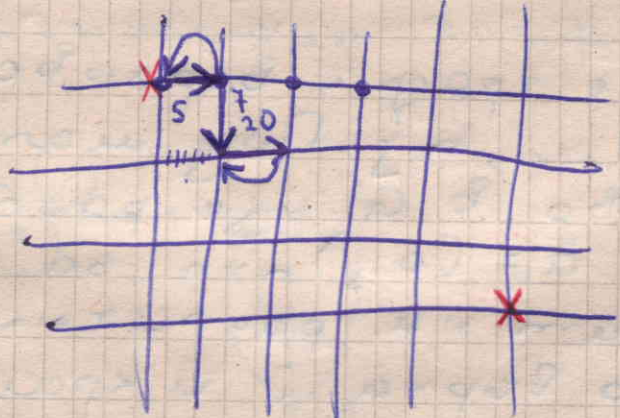
$$\underbrace{\underbrace{v_0 e_1 v_1 \ldots e_k v_k}\ \underbrace{e_1 v_1 \ldots e_k v_k} \ldots \underbrace{e_1 v_1 \ldots e_k v_k}}_{q \text{ пъти}}$$

$$e_1 v_1 e_2 v_2 \ldots e_r v_r$$

$\Rightarrow qk + r = m$ е път с дължина m.





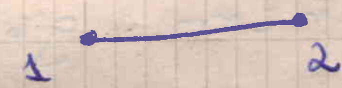


кръстовища - върхове на граф

сбор числа min

Тв.: Нека G е мултиграф (ориентиран граф) с n върха. Тогава в G има цикъл $\Leftrightarrow$ в G има път с дължина n.

Забележка: За неориентиран прост граф, твърдението е тривиално, т.к. ~~в неориентиран граф има цикъл~~ за да има цикъл в неориентиран граф е достатъчно той да съдържа поне едно ребро



12
21

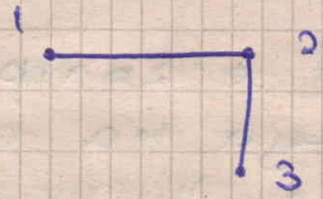
Д-во: $\Rightarrow$) Лема 2

$\Leftarrow$) Нека в G има път с дължина n.

$v_0 e_1 v_1 e_2 v_2 \dots e_n v_n$. Този път съдържа $n+1$ върха и тъй като в G има точно $n \neq$ върха, два от върховете в пътя, да речем v_p, v_q ($p<q$) съвпадат. Тогава $v_p e_{p+1} v_{p+1} \dots e_q v_q$ е цикъл :)) в G.

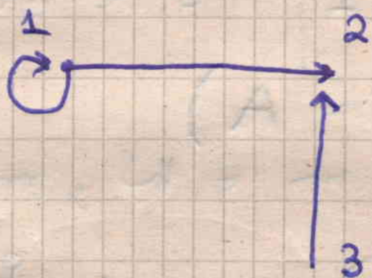
Опр. Нека G е граф с върхове $V = \{1, 2, \dots, n\}$. Под матр. на съседство в G ще разбираме матр. $A = (a_{ij})_{n \times n}$, за което a_{ij} е броят на различните ребра с начало върха i и край върха j.

Пример:



$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Заб. За неориентиран прост граф $a_{ij} \in \{0, 1\}$, $a_{ii} = 0$ и $a_{ij} = a_{ji}$, т.е. $A = A^t$.



$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

За ~~не~~ориентиран граф $a_{ij} \in \{0, 1\}$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Th Нека G е граф (краен) с матрица на съседство $A = (a_{ij})_{n\times n}$. Нека $m \in \mathbb{N}$ и $A^m = (b_{ij})_{n\times n}$. Тогава b_{ij} е броят на \# пътища с дължина m, начало върхът i и край върхът j.

Д-во. Индукция по m.

(1) За $m \leq 1$ Тв. е очевидно

$$(A^0 = E,\ A^1 = A)$$

(2) Нека $m \in \mathbb{N}$, такова че

$$A^m = (b_{ij})_{n\times n} \text{ и } b_{ij} \text{ е}$$

броят на пътищата с дължина m с начало върха i и край върха j.

Нека $A^{m+1} = (c_{ij})_{n\times n}$. Броят на различните пътища с начало върха i, край върха j, дължина $m+1$ и предпоследен връх върха k е точно b_{ik} (a_{kj} \# стъпки до j.)

Сл. броят на различните пътища от върха i до върха j с дължина $m+1$ е

$$b_{i1}a_{1j} + b_{i2}a_{2j} + \dots + b_{in} \cdot a_{nj} =$$

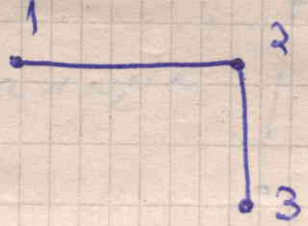
$$= \sum_{k=1}^{n} b_{ik}a_{kj} = c_{ij}, \text{ т.к.}$$

$$A^{m+1} = A^m \cdot A.$$

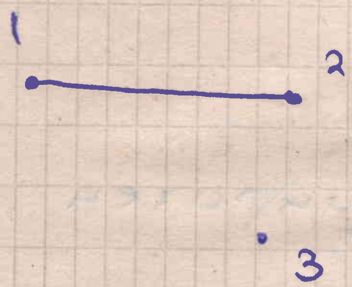
__Следствие__: Нека G е граф с n върха и матрица на съседство A. Тогава в G има цикъл $\Leftrightarrow A^n \neq 0$

__Опр.__ ~~Нека~~ Ще казваме, че графът G е свързан, ако за $\forall$ два върха V_1 и V_2 на G има път с начало V_1 и край V_2.

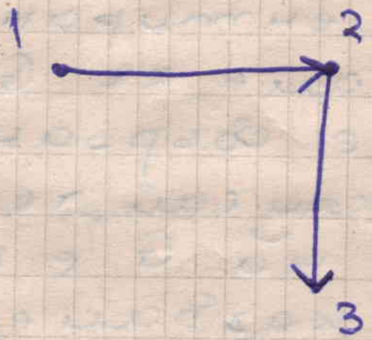
__Примери:__



- свързан



не е свързан

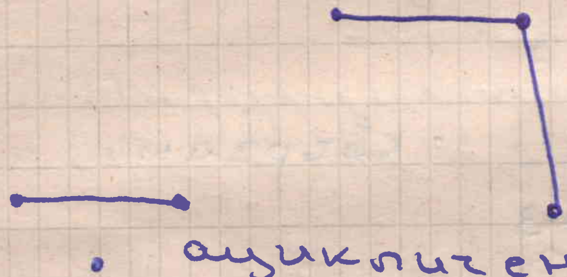


не е свързан

(свързан $\Leftrightarrow$ цикъл)

Дървета

Опр.: Нека G е неориентиран прост граф. Ще казваме, че G е ацикличен, ако в G няма прост цикъл с дължина поне 3.



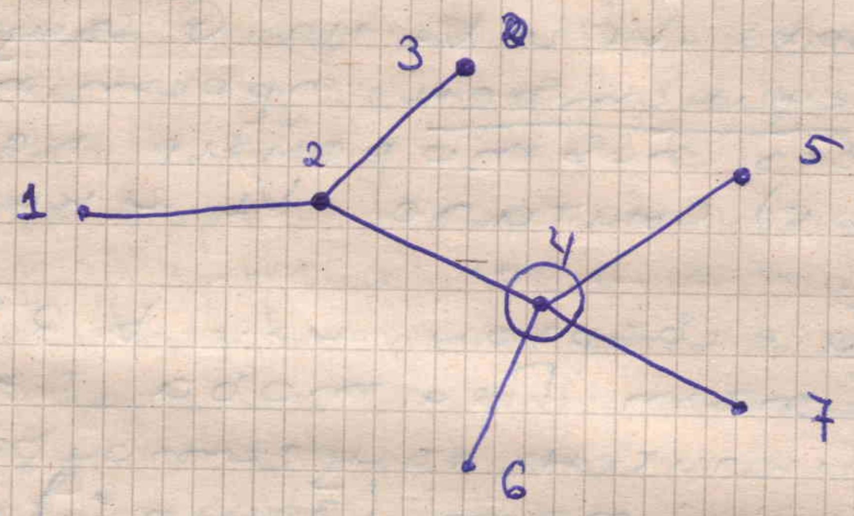
ацикличен

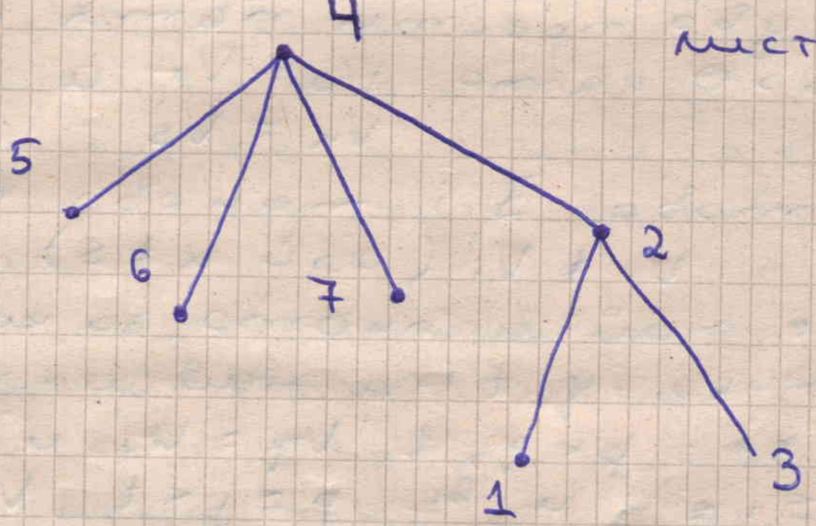
ацикличен

не е ацикличен

Опр. Нека G е неориентиран прост граф. Ще казваме, че G е дърво, ако G е свързан и ацикличен. В случай, че един от върховете на G е избран за „корен", ще казваме, че дървото е кореново. Ако G е кореново дърво, v е връх, различен от корена и от v излиза (е инцидентен) с точно едно ребро, ще казваме, че

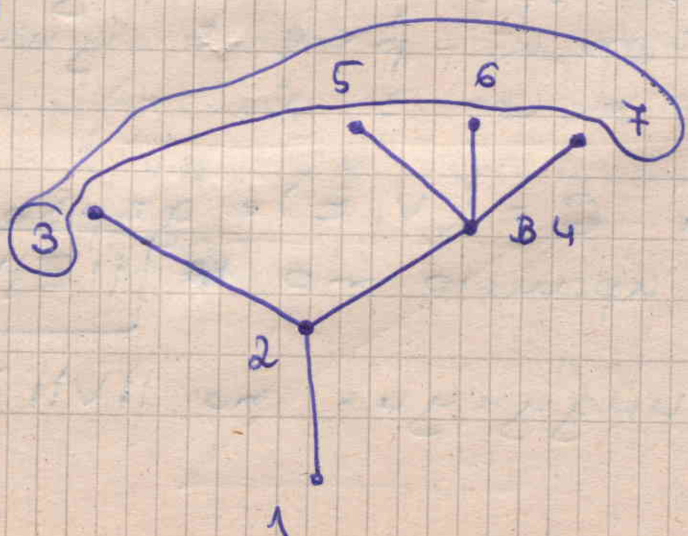
V е листо на G.





листа - 5, 6, 7, 1, 3

Ако 1 е корен



Тв. Нека G е дърво. Тогава за $\forall$ два върха V_1 и V_2 на G съществува <u>единствен</u> прост път (т.е. без повторение на върхове) с начало V_1 и край V_2.

Д-во: Т.к. G е свързан, м/у $\forall$ 2 върха има път. При това, т.к. G е ацикличен, съществува и прост път. (Защо?) Да допуснем, че

$$V_0 e_1 V_1 e_2 V_2 \dots e_k V_k$$
$$V_0' e_1' V_1' e_2' V_2' \dots e_s' V_s'$$

са два прости пътя, като $k, s > 0$ като $V_0 = V_0'$ и

$$V_k = V_s'$$

и освен това $\exists\, i$, такова че

$$V_i \neq V_i' \text{ (или } k \neq s)$$

Нека p е най-малкото, за което $V_p \neq V_p'$. Нека q, t (са най-малките), такива че $p < q, t$, $V_q = V_t'$ и за вс. $p \leq i \leq q$ и вс. $p \leq j < t$, $V_i \neq V_j'$.

Тогава $V_p e_p V_{p+1} \dots e_q V_q e_t' V_{t-1}' e_{t-2}' V_{t-2}' \dots e_{p+1}' V_p$ е прост цикъл.

При това, т.к. $p < q, t$, цикълът е с дължина поне 3. $\times$

Тв. Нека $G = (V, E)$ е дърво. Тогава ако $V \neq \emptyset$ е крайно, то $\boxed{\|E\| = \|V\| - 1.}$

Д-во: С индукция по $\|V\| > 0$

(1)

(2)

I сл.

II сл.

Нек

(1) $||V|| = 1$. Тъй като G е неориентиран прост граф, то $||E|| = 0 = ||V|| - 1$

(2) Нека твърдението е вярно за $||V|| = n$. Нека $G = (V', E')$ е дърво с $n+1$ върха. Нека фиксираме $v \in V'$ и нека $v' \in V'$ е такъв, че простият път от v до v' в G е с дължина m и не съществува връх $v'' \in V'$, за който простият път от v до v'' да бъде с дължина, по-голяма от m. Тогава v' е инцидентен точно с едно ребро.

Нека $v_0 e_1 v_1 e_2 v_2 \dots e_m v_m$, $v_m = v'$, $v_0 = v$ е простият път от v до v'. Да допуснем, че v' е инцидентен с ребро e', различно от реброто e_m. Тогава

I сл. e' е инциден~~тно~~ен с e_i за някое $0 \leq i \leq m$. Тогава $v_i e_{i+1} v_{i+1} \dots e_m v_m e' v_i$ е прост цикъл с дължина поне 3 $\times$.

II сл. e' ~~...~~ е инцидентен с v'', който е $\neq v_0, v_1, \dots, v_m$. Тогава $v_0 e_1 v_1 \dots e_m v_m e' v''$ е прост път, започващ от v с дължина $m+1$ $\times$.

Нека $G_1 = (V, E)$, където
$V = V' \setminus \{v'\}$, а $E = \{\{v_1, v_2\} \in E' \mid v_1, v_2 \in V\} =$

$= E'|_V$ рестрикция

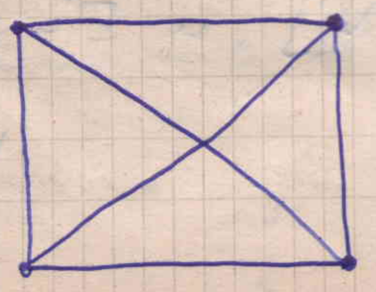
Тогава G е ацикличен (т.к. G' е ацикличен и $E \subseteq E'$). <u>G е свързан:</u> $E = E' \setminus \{e_m\}$ (e_m е единственото ребро, инцидентно с V') Нека V_1 и V_2 са от G. Тогава те са от G' и същ. прост път в G' от V_1 до V_2. При това този път не минава през V', тъй като V' е инциденген само с едно ребро. Сл. пътят м/у V_1 и V_2 е път в G. Сл. G е дърво и от индукционното предположение $\|E\| = \|V\| - 1$. От тук,

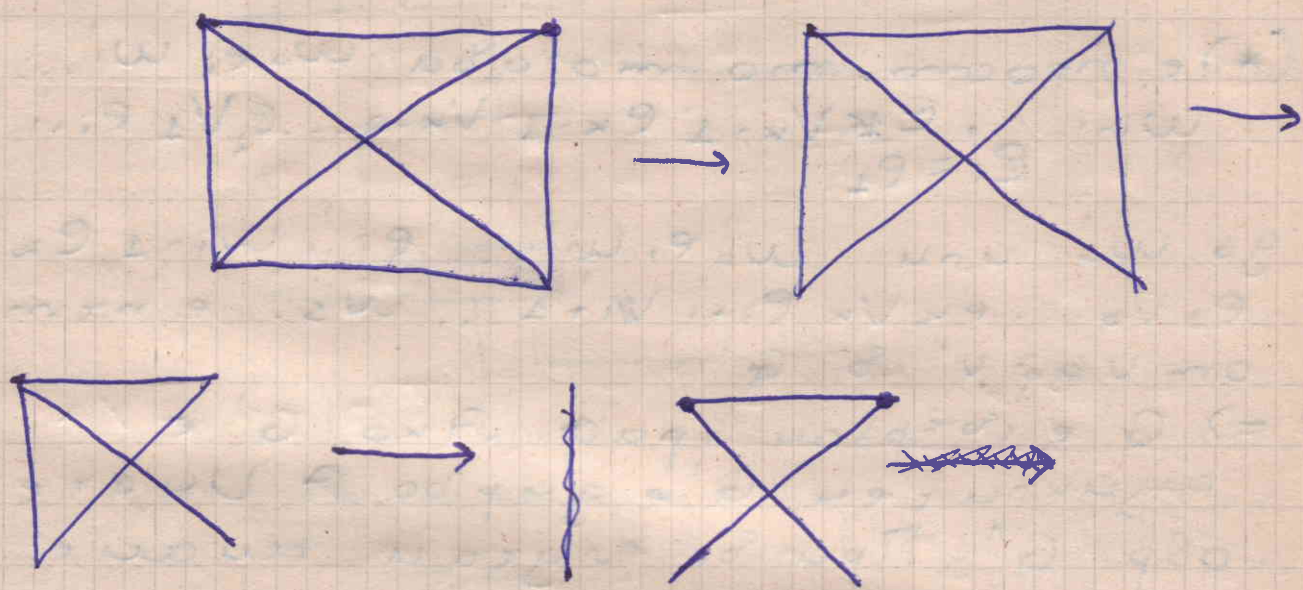
$$\|E'\| = \|E\| + 1 = \|V\| - 1 + 1 = \|V'\| - 1$$

Д-во

Опр. Нека $G_1 = (V_1, E_1)$, $G_2 = (V_2, E_2)$ са неориентирани графи.
Ще казваме, че G_1 е подграф на G_2, ако $V_1 \subseteq V_2$, (1) $E_1 \subseteq E_2$. (2)

Т8. Нека $G = (V, E)$ е свързан неориентиран граф. Тогава в G има подграф $G_1 = (V, E_1)$, който е дърво.
(<u>покриващо дърво</u>)





Д-во: Нека $G=(V,E)$ е свързан неориентиран граф. Ако G е ацикличен, то G е дърво. В противен случай в G има прост цикъл $v_0 e_1 v_1 e_2 v_2 \dots e_k v_k$, $v_0 = v_k$, $k \geq 2$. Нека $G' = (V, E')$, където $E' = E \setminus \{e_1\}$. Тогава G' е свързан граф:

(1) G' е граф: ясно.

(2) <u>G' е свързан</u>: Нека v и v' са два върха в G'. Тогава те са върхове в G и има път между тях. ~~Той е~~ $w_0 e'_1 w_1 \dots e'_s w_s$,

$$w_0 = v$$
$$w_s = v'.$$

Ако e_1 не участва в този път, то това е път в G'. Ако e_1 участва в този път нека за опр. $e_1 = e'_i$. Тогава Той като можем да считаме, че пътят

(*) е прост, то тогава $w_0' e_1' w_1' \dots e_{i-1}' w_{i-1}', e_k V_{k-1} e_{k-1} V_{k-2} \dots e_2 V_1 e_{i+1}' V_{i+1} \dots$
$e_i' = e_1$

до w_s' или $w_0' e_1 w_1' \dots e_{i-1}' w_{i-1} e_2 V_2 e_3 V_3 \dots e_k V_k e_{i+1}' V_{i+1}' \dots w_s'$. е път от V до V' в G'

$\Rightarrow$ G' е свързан граф. Ако G' е ацикличен, G' е дърво. ~~А~~ Иначе обр. G''. При вс. случаи имаме

$$|E'| < |E|, \ |E''| < |E'| \text{ и т.н.}$$

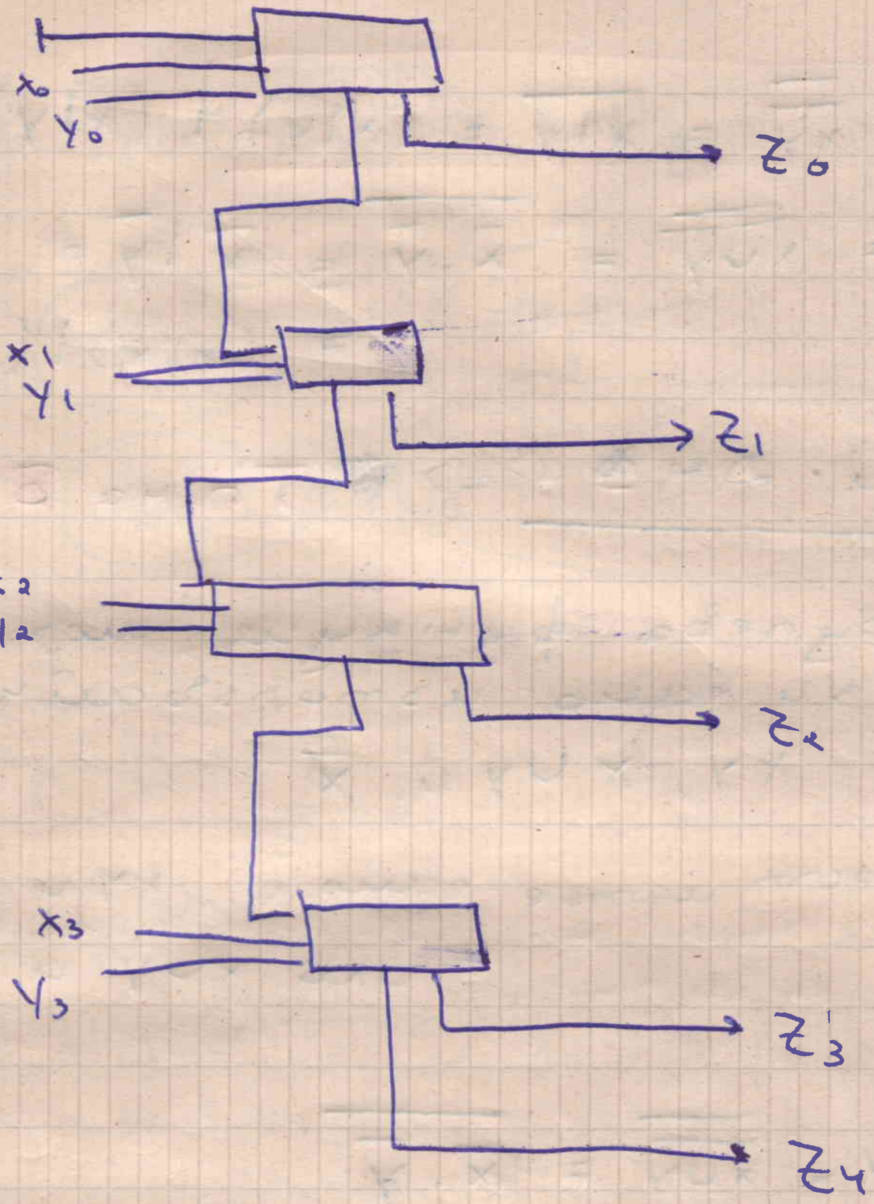
Ако доп., че ~~Иначе~~ нито един от графите G, G', G''.. не е ацикличен, то ще получим безкр. намал. редица от ест. числа, което е невъзможно

<u>Сл.</u> Нека G е свързан неориентиран граф. ~~Ск. G~~ с n върха. Тогава в G има поне $n-1$ ребра.

30.10.2013 г.

Упражнение

$$\begin{array}{r} x_3 x_2 x_1 x_0 \\ + \ y_3 y_2 y_1 y_0 \\ \hline z_4 z_3 z_2 z_1 z_0 \end{array}$$



 транзистор

смята $x|y$ може да се изрази с булева ф-я

$\overline{x} = \overline{xx} = x|x$

$x|y$ черта на Шефер $\quad x|y = \overline{xy}$

$x \downarrow y = \overline{x \cup y}$

стрелка на пирс

$$xy = \overline{\overline{xy}} = \overline{x|y} = (x|y)\,|\,(x|y)$$

$$x \cup y = \overline{\overline{x \cup y}} = \overline{\bar{x}.\bar{y}} = \bar{x}\,|\,\bar{y} =$$
$$= (x|x)\,|\,(y|y)$$

КНФ и ДНФ => $\forall$ Th на Бул

Всяка булева функция може да се изрази само използвайки
xy, $x \cup y$ и $\bar{x}$

Всъщност може само с xy и $\bar{x}$:
или $x \cup y$ и $\bar{x}$

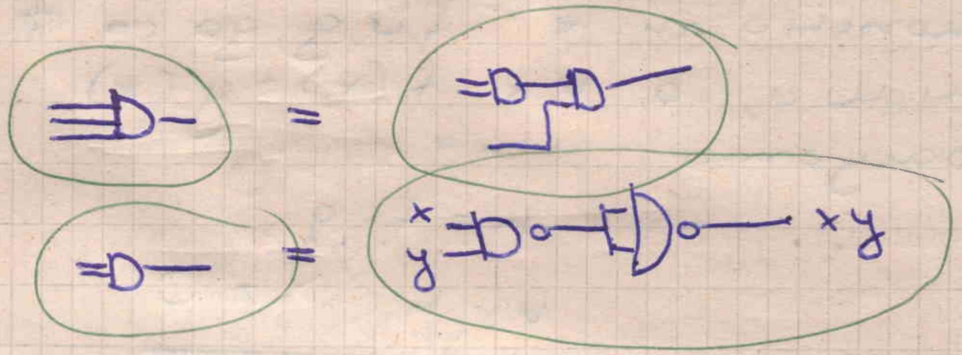
$$x \cup y = \overline{\overline{x \cup y}} = \overline{\bar{x}.\bar{y}}$$
$$xy = \overline{\overline{xy}} = \overline{x|y} = \overline{\bar{x} \cup \bar{y}}$$

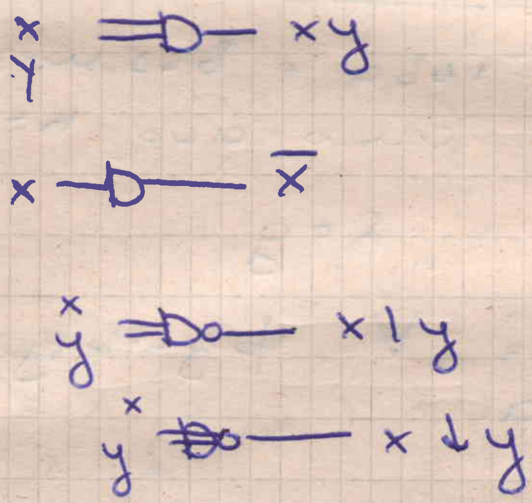
=> $\forall$ булева ф-я може да се изрази чрез стрелка на Шефер.
$x|y$

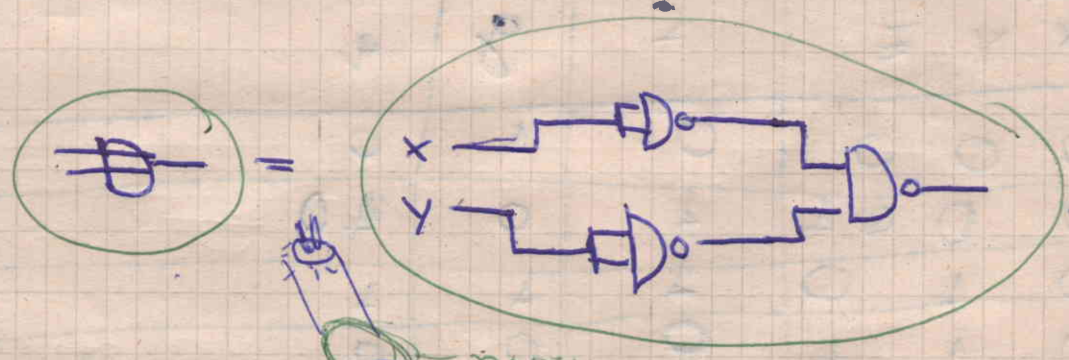
Функция от този вид: Шеферова
При ф-ции на 1 аргумент - няма
$x \downarrow y$ също е Шеферова

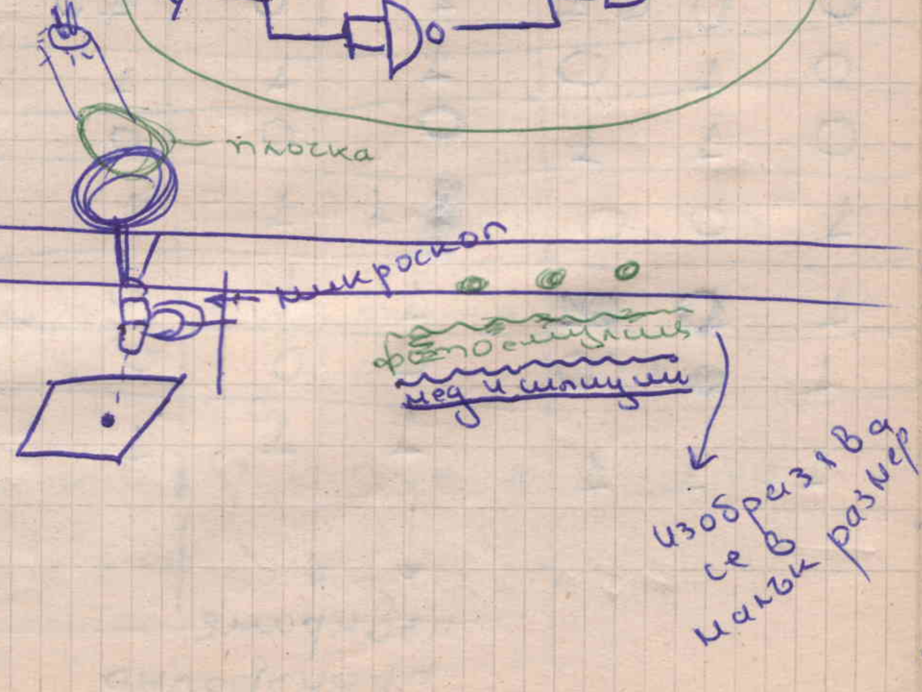
$$\bar{x} = \overline{x \cup x} = x \downarrow x$$
$$x \cup y = \overline{\overline{x \cup y}} = \overline{x \downarrow y} =$$
$$= (x \downarrow y) \downarrow (x \downarrow$$

$$xy = \overline{\overline{xy}} = \overline{\bar{x} \cup \bar{y}} = \bar{x} \downarrow \bar{y} = (x \downarrow x) \downarrow (y \downarrow y)$$









Полином на Жегалкин !

Възможно ли е f и g да са $\neq$ полиноми, а $\forall x \; f(x) = g(x)$
Не, защото нека

$$h = f - g$$

$$\forall x \; h(x) = 0$$

това е възможно само ако $h = 0$, т.е.

$$f = g$$

В полето $\mathbb{Z}_2$ $\forall$ функция е полиномиална.

x y z	f	g	q
0 0 0	0	1	0
0 0 1	1	0	0
0 1 0	1	1	1
0 1 1	0	0	0
1 0 0	1	1	1
1 0 1	1	1	0
1 1 0	0	0	0
1 1 1	1	1	1

↓
избиране произволно

$\underline{\underline{a}}x$

Ако $a=0$, няма смисъл от 0.+

Ако $a=1$, то x вместо ax

$$nx = \underbrace{x+x+\ldots+x}_{n \text{ пъти}}$$

$$x+x=0$$

$$x+x+x=x$$

$$x+x+x+x=0$$

$$nx = \begin{cases} 0, & \text{ако } n\text{-четно} \\ x, & \text{ако } n\text{-нечетно} \end{cases}$$

$$x.x=x$$

$x^n = x$, ако $n \neq 0$

$$x^0 = 1$$

0

1

x

$1+x$

$\forall$ с една променлива

xy - полином от 2-ра степен

$$f = a_0 + a_1x + a_2y + a_3z + a_4xy + a_5xz + a_6yz + a_7xyz$$

Д - На

$0 = f(0,0,0) = a_0 \Rightarrow a_0 = 0$

$1 = f(1,0,0) = a_1 + \underset{\shortparallel\, 0}{a_0} \Rightarrow a_1 = 1$

$1 = f(0,1,0) = a_2 + \underset{\shortparallel\, 0}{a_0} \Rightarrow a_2 = 1$

$1 = f(0,0,1) = a_0 + a_3 \Rightarrow a_3 = 1$

$0 = f(1,1,0) = \underset{\shortparallel\, 0}{a_0} + \underset{\shortparallel\, 1}{a_1} + \underset{\shortparallel\, 1}{a_2} + a_4$

$\Rightarrow a_4 = 0$

$1 = f(1,0,1) = \underset{\shortparallel\, 0}{a_0} + \underset{\shortparallel\, 1}{a_1} + \underset{\shortparallel\, 1}{a_3} + a_5$

$\Rightarrow a_5 = 1$

$0 = f(0,1,1) = \underset{\shortparallel\, 0}{a_0} + \underset{\shortparallel\, 1}{a_2} + \underset{\shortparallel\, 1}{a_3} + \underset{\shortparallel}{a_6}$

$\Rightarrow a_6 = 0$

$1 = f(1,1,1) = a_0 + \overset{1}{a_1} + \overset{1}{a_2} + \overset{1}{a_3} + \overset{0}{a_4}$

$\underset{\shortparallel\, 0}{} + \underset{\shortparallel\, 1}{a_5} + \underset{\shortparallel\, 0}{a_6} + a_7 \Rightarrow a_7 =$

$$\boxed{f = x + y + z + xz + xyz}$$

$$g = 1 + z + 0.y + 0.x + 0.y + 1xz$$
$$+ 1xy + 1.xyz$$

$$\Rightarrow g = 1 + z + xz + xy + xyz$$

$$q = y + x + yz + xz +$$
$$+ 0.xy + xyz$$

$$q = x + y + xz + yz +$$
$$+ xyz$$

$$\boxed{\begin{aligned} \bar{x} &= 1 + x \\ x \cup y &= x + y + xy \\ x \to y &= 1 + x + xy \\ x \leftrightarrow y &= 1 + x + y \end{aligned}}$$

!

x	y	$\cup$	$x \to y$	$x \leftrightarrow y$	
0	0	0	1	1	0
0	1	1	1	0	1
1	0	1	0	0	1
1	1	1	1	1	0

$$f = a_0 + a_1 x + a_2 y$$
$$+ a_3 xy$$

$$x \cup y = 0 + 1x + 1y +$$
$$+ xy$$

$$x \to y = 1 + 1x + 0y$$
$$+ xy$$

$$\overline{x + y} = 1 + x + y$$

$\bar{x} = x+1$

$$(x \to \bar{y})(y \to x \mid \bar{y}) \leftrightarrow (y \vee (x \downarrow \bar{y})) =$$

$$= (1 + x + x(1+y))(y \to 1 + x(1+y))$$

$$+ 1 + (y \vee (x + (1+y)) + x(1+y) + 1)$$

$$(1+xy)(1 + y + xy(1+y)) + 1 +$$

$$+ \cancel{x} + \cancel{xy} + \cancel{1} + \cancel{xy} + y(x+1+y) +$$

$$+ x + \cancel{xy} + \cancel{1} =$$

$$\cancel{xy} + \cancel{y} + \cancel{y}$$

$$(1+xy)(1+y+\ldots)$$

$$1 + y + xy + xy = 1 + y$$

$$\underline{\underline{x+y}}$$

$$x \downarrow (y \leftrightarrow (\bar{x} \mid y)) \vee (y \to x) =$$

$$= x \downarrow (y \leftrightarrow (1+x)y + 1) \vee (1 + y + x$$

$\bar{x} = 1 + x$
$x \cup y = x + y + xy$
$x \to y = 1 + x + xy$
$x \leftrightarrow y = 1 + x + y$

$y) = x \downarrow (1 + y + (\cancel{xx}\, y + xy + 1)\ \cup (1 + y + xy)) =$

$= \cancel{x}\ 1\cancel{y} \quad x \downarrow xy \cup$

$x \downarrow (y \to \bar{z}) \cup (z \to x) =$

$= (x \downarrow (1 + y + y + zy)) \cup (1 + z + xz) =$

$= (1 + x + 1 + \cancel{\ldots} + zy + x(1 + zy)) \cup (1 + z + xz)$

$\cancel{1} + \cancel{x} + zy + \cancel{x} + xyz + \cancel{1} + z + xz$

$+ (\cancel{1} + zy + xyz)(1 + z + xz) =$

$= zy + \underline{xyz} + z + \underline{xz} + 1 + z + + \underline{xz} + zy + zy + \underline{zyx} + \underline{xyz} + \underline{xyz} + xyz$

$1 + zy + xyz$

$1 + z + xz + yz + xyz$

06.11.2013г.

Упражнение

Деф.

Множество от булеви функции K е пълно, ако за $\forall$ булева ф-ия може да се направи израз, използвайки само функции от K

Деф.

K е базис, ако 1) K е пълно
2) $\forall K' (K' \subseteq K$ и $K' \neq K \Rightarrow K'$ не е пълно$)$

Примери: КНФ и ДНФ $\longrightarrow$ Th на Бул

$\{xy, x \cup y, \bar{x}\}$ е пълно, но не е базис

$\{xy, \bar{x}\}$ е пълно

$\{x \cup y, \bar{x}\}$ е пълно

$$x \cup y = \overline{\overline{x \cup y}} = \overline{\bar{x} \cdot \bar{y}}$$

$$xy = \overline{\overline{xy}} = \overline{\bar{x} \cup \bar{y}}$$

сложен израз само с отрицание

$$\overline{\overline{\overline{\overline{\overline{\overline{\overline{\overline{x}}}}}}}}$$

Значи $\{\bar{x}\}$ не е пълно.

$0.0=0 \Rightarrow$ Ако в израз има само умножения и дадем на променливите стойност 0, целият израз ще е 0.

А не $\forall$ булева $0 0$ връща 0

Значи $\{xy\}$ не е пълно.

$\Rightarrow \{xy, \bar{x}\}$ е пълно и базис

$0 \cup 0 = 0 \Rightarrow$ —— " —— $\Rightarrow \{x \cup y\}$ не е пълно

$\Rightarrow \{x \cup y, \bar{x}\}$ е пълно и базис

$\{x | y\}$ пълно и базис

$\{x \downarrow y\}$ пълно и базис

полиноми

$\{xy, x+y, 1\}$ е пълно

? базис

$0.0=0$

$0+0=0$ —— " —— $\Rightarrow \{xy, x+y\}$ не е пълно

$\{xy, 1\}$

$1.1=1$

1

$\Rightarrow$ Ако в израз, в който има само $\cdot$ и 1 дадем на $\forall$ променлива ст-т $\underline{1}$, целият израз ще стане 1

$\Rightarrow$ ~~$\{xy, 1\}$ не е пълно~~

$\{xy, 1\}$ не е пълно

$\{\cancel{xy}\ 1, x+y\}$

Ако в израз има само събиране и 1 и намерим полином, полиномът ще бъде линеен, т.е. без умножение.

$\Rightarrow \{x+y, 1\}$ не е пълно

$\Rightarrow \{xy, x+y, 1\}$ е пълно и базис

$\boxed{\text{Критерий на Пост-Яблонски}}$

K е пълно $\Leftrightarrow K \not\subseteq T_0$ <u>и</u> $K \not\subseteq T_1$ <u>и</u> $K \not\subseteq S$ <u>и</u> $K \not\subseteq M$ и $K \not\subseteq L$.

$A \not\subseteq B$ - поне един ел. на A не е ел. на B

$f \in T_0 \Leftrightarrow f(0, 0, \ldots 0) = 0$

T_0 - затворен клас (ф-я от $T_0 \rightarrow$ ф-я от T_0)

$f \in T_1 \iff f(1,1,\dots 1) = 1$

T_1 е затворен клас

$f \in L \iff$ полиномът на f е линеен

L е затворен клас

$f \in S \iff f$ е самодвойствена $\iff f = f^*$

f е самодвойствена $\iff$ f съвпада със своята двойствена ф-я f^*

f^* - двойствена на f

$$f^*(x_1, x_2, \dots, x_n) = \overline{f(\overline{x_1}, \dots, \overline{x_n})} \qquad f^{**} = f$$

1) отрицание в/у $\forall$ аргумент

2) отрицание в/у целия израз

$(f = f^*$ полиноми$)$ S е затв. клас

Проверка $f = f^*$ с полиноми за f и f^* или таблица

x	y	z	f	f^*	g
0	0	0	1	1	1
0	0	1	0	0	0
0	1	0	0	0	1
0	1	1	1	1	0
1	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	0
1	1	0	1	1	1
1	1	1	0	0	0

$\rightsquigarrow g \notin S$

$$f^*(0,0,0) = \overline{f(\overline{0},\overline{0},\overline{0})} = \overline{f(1,1,1)}$$

$$(x \cup y)^* = \overline{\bar{x} \cup \bar{y}} =$$
$$= \bar{\bar{x}} \cdot \bar{\bar{y}} = xy$$

$$f^{**} = f$$

$f = g^*$	$f^* = g$
$x \cup y$	xy
$x \downarrow y$	$x \mid y$
$x + y$	$x \leftrightarrow y$
$x \to y$	$x < y$
$x \leftarrow y$	$x > y$
$\boxed{\bar{x}}$	$\boxed{\bar{x}}$

S е затворен: Нека $f, g_1, \dots, g_n$ са самодвойствени.
Тогава

$$f(g_1(x_1, \dots, x_n)^*, g_2(\dots), \dots g_n(\dots))^* =$$
$$= \overline{f(\overline{g_1(\bar{x}_1, \dots,)}, \dots, \overline{g_n(\bar{x}_1, \dots)})} =$$
$$= \overline{f(\overline{\overline{g_1(\bar{x}_1, \dots)}}, \dots, \overline{\overline{g_n(\bar{x}_1, \dots)}})} =$$
$$= \overline{f(g_1(\bar{x}_1), \dots g_n(\bar{x}_1, \dots)}$$

$$(x \downarrow y)^* = (\overline{x \cup y})^* = \overline{\bar{x} \cup \bar{y}} = \bar{\bar{x}} \cup \bar{\bar{y}} = x\bar{y} =$$
$$= x \mid y$$

$$(x+y)^* = \overline{\bar{x} + \bar{y}} = 1+1+x+1+y = 1+x+y =$$
$$= x \leftrightarrow y$$

$$(x \to y)^* = \overline{\bar{x} \to \bar{y}} = \bar{x}\bar{\bar{y}} = \bar{x}y = x < y$$

$$\overline{\overline{\bar{x}}} = \bar{x}$$

$$(1^*) = \bar{1} = 0$$

$f = g^*$	$f^* = g$
$x \cup y$	xy
$x \downarrow y$	$x \mid y$
$x + y$	$x \leftrightarrow y$
$x \to y$	$x < y$
$x \leftarrow y$	$x > y$
$\bar{x}$	$\bar{x}$
1	0

~~[illegible]~~

$f \in M \iff f$ е монотонна
(нестрого растяща)

f е монотонна $\iff \forall x_1, \dots, x_n$
$\forall y_1 \dots y_n$

$(x_1 \le y_1$ и $\dots$ и $x_n \le y_n \Rightarrow$

$f(x_1, \dots, x_n) \le f(y_1, \dots, y_n))$

f не е монотонна $\iff \exists x_1, \dots, x_n$
$\exists y_1 \dots y_n$

2^{2n} проверки

$$\left| \begin{array}{l} x_1 \le y_1 \\ \dots \\ x_n \le y_n \end{array}\right.$$

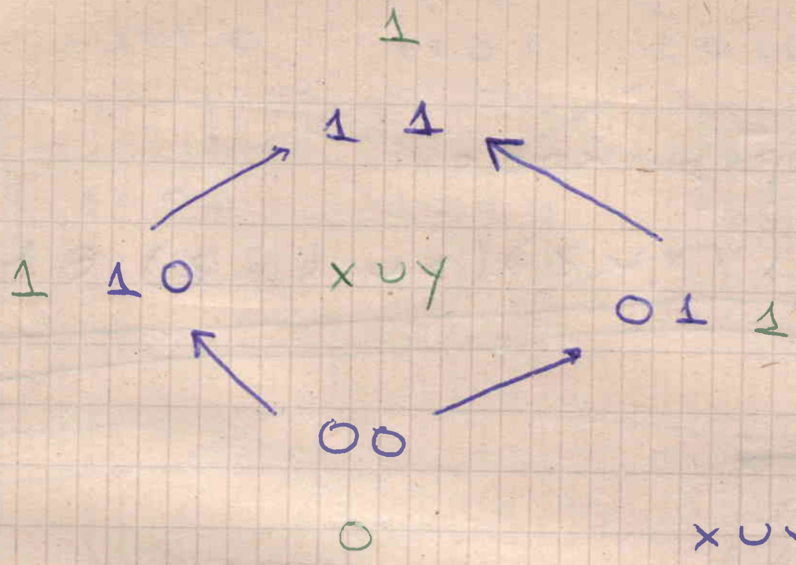
и $f(x_1 \dots x_n) = 1$ и $f(y_1 \dots y_n) = 0$

$\iff \exists j \ \exists x_1, \dots, x_n \ (f(x_1, \dots, x_{j-1}, 0, x_{j+1}, \dots, x_n) = 1$ и

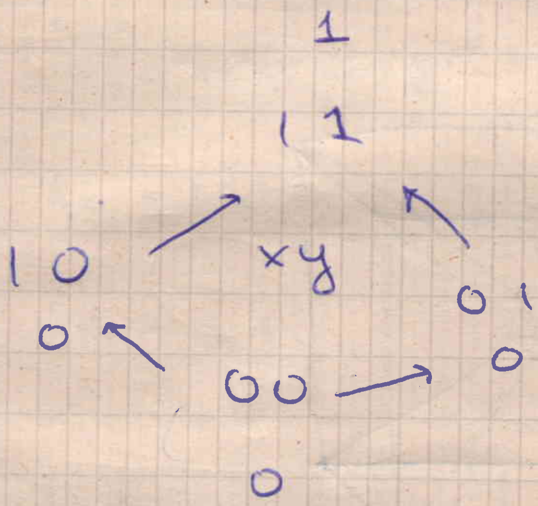
$f(x_1, \dots, x_{j-1}\, 1, x_{j+1}, 1, x_{j+1}, \dots x_n) = 0)$

$n \cdot 2^{n-1}$ проверки

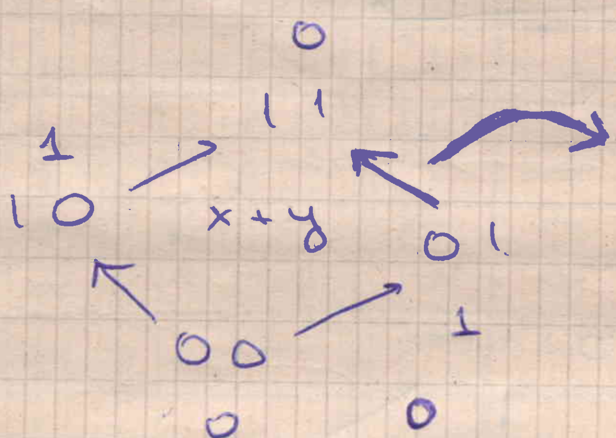
$n = 3$



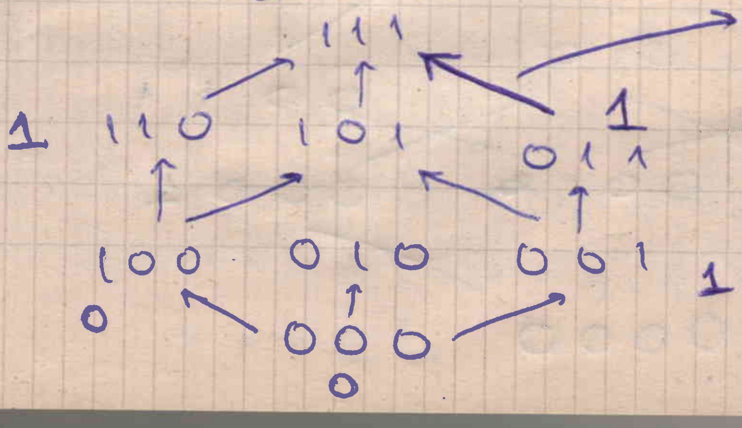
$x \cup y \in M$



$xy \in M$



$x + y \notin M$

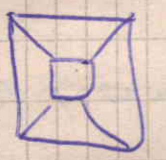


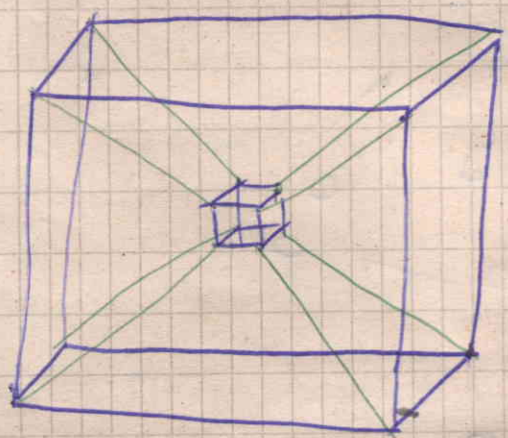
$xy + z \notin M$

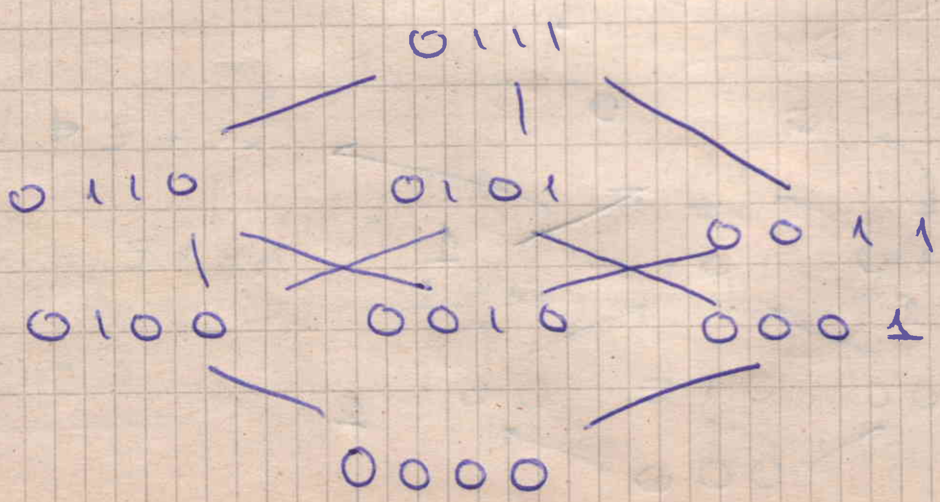
$xy + z$

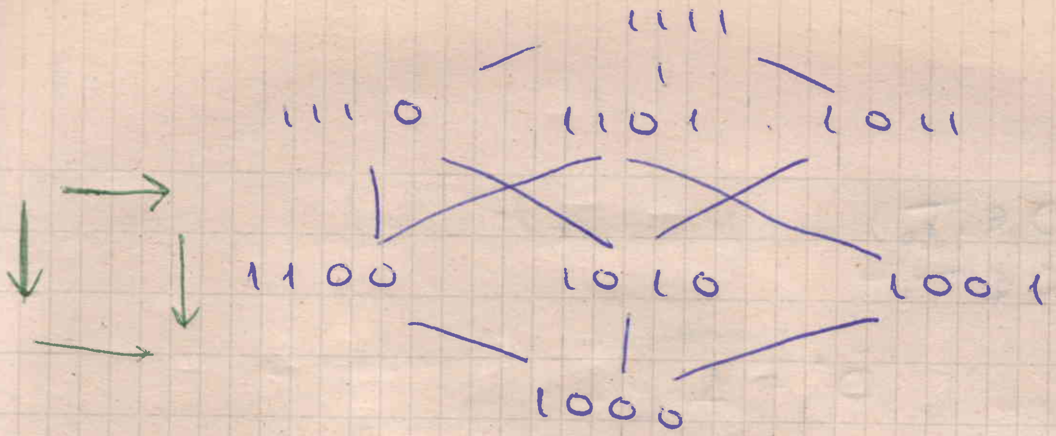
Не затворен клас

$(x \cup yz)(yx \cup z)(x \cup tyz) \in M$









$f_1 = x + y$

$f_2 = 0$

$f_3 = xy \to z$

$f_4 = (x \leftrightarrow y) + (\bar{y} \leftrightarrow y)$

$f_5 = x \mid y$

	T_0	T_1	S	M	L
f_1	+	−	−	−	+
f_2	+	−	−	+	+
f_3	−	+	−	−	−
f_4	−	+	−	−	+
f_5	−	−	−	−	−

f_1 : $0 + 0 = 0 \Rightarrow f_1 \in T_0$

$1 + 1 \neq 1 \Rightarrow f_1 \notin T_1$

$x + y \in L$

$(x+y)^* = x \leftrightarrow y$

$\Rightarrow x + y \notin S$

$x + y \notin M$

f_2: $0 \in T_0$

$0 \notin T_1$

$0^* = 1$

f_3: $0 \to 0 \Rightarrow \in T_0$

$1 \to 1 \Rightarrow \in T_1$

$$(xy \to z)^* = (\overline{\bar{x}\bar{y} \to \bar{z}}) =$$

$$= \overline{1 + \bar{x}\bar{y} + \bar{x}\bar{y}\bar{z}} =$$

$$= \bar{x}\bar{y} + \bar{x}\bar{y}\bar{z} =$$

$$= (x+1)(y+1) + (x+1)(y+1)(z+1) =$$

$$= xy + x + y + (xy + x + y)(z+1) =$$

$$= \cancel{xy} + \cancel{x} + \cancel{y} + xyz + \cancel{xy} + xz + \cancel{x} + yz + \cancel{y}$$

$$\| \quad 1 + xy + xyz$$

$xy \to z$

$$\left.\begin{array}{l} f(0,0,0) = 1 \\ f(1,1,0) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow f_3 \notin M$$

$$f_4 = (x \leftrightarrow y) + (\bar{y} \leftrightarrow y)$$

$$\cancel{1 \leftrightarrow 1}$$

$$0 \leftrightarrow 0 \quad + \quad 1 \leftrightarrow 0 =$$

$$= 1 + 0 = 1$$

$x + y + 1$ $\qquad 1 \leftrightarrow 1 \qquad 0 \leftrightarrow 1$

$$x + y + \cancel{1} + \cancel{1} + \cancel{y} + \cancel{y} + 1$$

$$\overline{\bar{x} \leftrightarrow \bar{y} + y \leftrightarrow \bar{y}}$$

$$\overline{\bar{x} + \bar{y} + 1} = 1 + x + \cancel{1} + y + \cancel{1} + 1$$

$f_4(0,0) = 1$

$f_4(0.1) = 0$ $\quad \Rightarrow f_4 \notin M$

$$x | y = \overline{xy} = xy + 1$$

$$\overline{\bar{x}\bar{y} + 1} =$$

$$= \overline{(x+1)(y+1) + 1} =$$

$f(0,0) = 1$

$$= \overline{xy + x + y + \cancel{1} + \cancel{1}} =$$

$xy + 1$

$f(1,1) = 0$ $\qquad = xy + x + y + 1$

$\{f_5\}$ е базис

$\{f_1, f_3\}$ $\{f_2, f_3\}$ - базиси

07.11.2013г.

Лекция

Нека $G = (V, E)$ е краен неориентиран прост граф ($E \subseteq \{\{v_1, v_2\} \mid v_1 \neq v_2;\ v_1, v_2 \in V\}$) в V въвеждаме рел. $\sim_G$ чрез: $v_1 \sim_G v_2 \overset{def}{\iff}$ същ. път с начало v_1 и край v_2. Ясно е, че:

(1) $v \sim_G v$ за вс. $v \in V$;

(2) $v_1 \sim_G v_2 \Rightarrow v_2 \sim_G v_1$ за вс. $v_1, v_2 \in V$ (G е неориентиран)

(3) $v_1 \sim_G v_2$ и $v_2 \sim_G v_3 \Rightarrow v_1 \sim_G v_3$ за вс. $v_1, v_2, v_3 \in V$. Сл. $\sim_G$ е рел. на еквив. в V.

Нека $V_1, V_2, \ldots, V_k$ ($k \in \mathbb{N}, k \geq 1$) са различни ~~класовете~~ на еквивалентност във V по рел. $\sim_G$. Тогава $V = V_1 \cup V_2 \ldots \cup V_k$ и $V_i \cap V_j = \emptyset$ за $1 \leq i < j \leq k$.

За $1 \leq i \leq k$ дефинираме E_i да бъде $E_i = \{e \in E \mid e \subseteq V_i\}$. В сила са следните две твърдения:

(a) $E_i \cap E_j = \emptyset$ $i \neq j$ за $1 \leq i < j < k$

Да допуснем, че $e \in E_i \cap E_j$ за някои $1 \leq i < j \leq k$

Тогава $e \neq \emptyset$ и $e \subseteq V_i$ и $e \subseteq V_j$, откъдето $V_i \cap V_j \neq \emptyset$ $\overset{\circ}{X}$.

(б) $E = E_1 \cup E_2 \cup \ldots \cup E_k$ Т.к. $E_i \subseteq E$, то $E_1 \cup E_2 \cup \ldots \cup E_k \subseteq E$. За обратното включване нека $e \in E$. Да допуснем, че $e \notin E_1 \cup E_2 \cup \ldots \cup E_k$. Тогава $\exists$ ~~i≠j~~ върхове ~~v~~ $v_i, v_j \in V$, ~~такива че~~ за някои $1 \leq i < j \leq k$, такива че $e = \{v_i, v_j\}$ и $v_i \in V_i$, а $v_j \in V_j$. Имаме, че $v_i e v_j$ е път в G и значи $v_i \sim_G v_j$. От тук $v_j \in V_i$ и сл. $V_i \cap V_j \neq \emptyset$ $\overset{\circ}{X}$. Сл. $e \in E_1 \cup E_2 \cup \ldots \cup E_k$. И така окончателно

$$E = E_1 \cup E_2 \ldots \cup E_k$$

(в) $G_i = (V_i, E_i)$ е граф за $i = 1, \ldots, k$ (очевидно). В частност G_i е подграф на G. При това G_i е свързан. Вс. един от графите $G_1, G_2, \ldots, G_k$ наричаме компонента на свързаност на G, а редицата $G_1, G_2, \ldots, G_k$ наричаме разлагане на G на компоненти на свързаност.

Th Нека G е краен ацикличен прост неориентиран граф, който се разпада на k компоненти на свързаност. Тогава ако в G има n върха, то в G има $n-k$ ребра.

Д-во: Нека $G = (V, E)$ и нека ~~G се разпада на компонен~~ G разпадането на

G на компоненти на свързаност е $G_1, G_2, \ldots, G_k$. Т.к. G е ацикличен, то ~~всеки~~ G_i е ацикличен за $1 \le i \le k$. и значи G_i е дърво за $\forall\ 1 \le i \le k$. ~~Тогава~~ Тогава

$$|E| = |E_1 \cup E_2 \cup \ldots \cup E_k| =$$
$$= |E_1| + |E_2| + \ldots + |E_k| =$$
$$= |V_1| - 1 + |V_2| - 1 + \ldots + |E_k| - 1 =$$
$$= |V_1 \cup V_2 \cup \ldots \cup V_k) - k =$$
$$= |V| - k = n - k$$

<u>Следствие:</u> Ако G е ацикличен прост неориентиран граф с n върха, то в G има най-много $n-1$ ребра.

№ 4

~~Двоични функции~~

<u>Булеви функции.</u>

<u>Теорема на Бул</u>

<u>Опр.</u>: Булева функция на n аргумента ще разбираме вс. изображение $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$

<u>Лема</u>: Нека A е множество с n елемента. Тогава мн. $P(A) = \{X \mid X \subseteq A\}$ има 2^n елемента.

Д-во: Вс. подмножество на A има 0, 1, 2, ..., n-1 или n елемента. При това в A има точно $\binom{n}{k}$ подмножества с k елемента. От тук

$$|P(A)| = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{n} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^{n-k} \cdot 1^{k} =$$

$$= (1+1)^n = 2^n$$

Опр. Нека A е мн. и $X \subseteq A$. Ф-ята $\chi : A \to \{0, 1\}$, действаща под правилото

$$\chi_X(x) = \begin{cases} 1, & \text{ако } x \in X \\ 0, & \text{ако } x \notin X \end{cases} \quad \text{за } x \in A$$

наричаме характеристична ф-я на X.

Наблюдение: Нека A е мн. и $f : A \to \{0, 1\}$. Нека $F = \{x \in A \mid f(x) = 1\}$. Тогава $F \subseteq A$ и $f = \chi_F$. В частност има биективно съответствие м/у множествата $P(A)$ и

$$\{0,1\}^A = \{f \mid f: A \to \{0,1\}\}$$

Th Нека $n \in \mathbb{N}$. Булевите ф-ции на n аргумента са точно 2^{2^n} на брой.

Д-во: Съгласно наблюдението в булеви ф-ции на n аргумен е хар. ф-я на подмн. на $\{0,1\}^n$. Сл. броят на булевите ф-ции на n аргумента е $2^{|\{0,1\}^n|}$. От др. страна

$$\{0,1\}^n = \{(a_1,\dots,a_n) \mid a_i \in \{0,1\}, i=1,\dots n\}$$

Всяка наредена n-орка $(a_1,\dots,a_n)$ от 0 и 1 съответства на точно една ф-я

$$g: \{1,2,\dots,n\} \to \{0,1\}.$$

$$\{g(i) = a_i \text{ за } i=1,\dots n\}$$ и

сл. броят на ел. в $\{0,1\}^n$ е точно толкова, колкото броят на хар. ф-ции на подмн. на $\{1,2,\dots,n\}$, което е точно толкова, колкото е бр. на подмн. на $\{1,2,\dots,n\}$. Сл.

$$|\{0,1\}^n| = |P(\{1,2\dots,n\})| = 2^n.$$

Така окончателно броят на булевите функции на n аргумента е

$$2^{|\{0,1\}^n|} = 2^{2^n}$$

Някои по-забележителни булеви функции

(0) На 0 аргумента: константите 0 и 1

(1) На 1 аргумент:

x	0_1	x	$\bar{x}$	1_1
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1

(2) На 2 аргумента:

x	y	xy	$x \vee y$	$x \to y$	$x \leftrightarrow y$	$x \downarrow y$	$x \mid y$	$x+y$
0	0	0	0	1	1	1	1	0
0	1	0	1	1	0	0	1	1
1	0	0	1	0	0	0	1	1
1	1	1	1	1	1	0	0	0

xy - конюнкция

и се бележи с $x \& y$ и $x \wedge y$

$x \vee y$ - дизюнкция

$x \to y$ - импликация

$x \leftrightarrow y$ - еквиваленция Пише се още $x \equiv y$

$x \downarrow y$ - стрелка на Пирс

$x \mid y$ - черта на Шефер

(3) **на n-аргумента**: За вс. $n \geq 1$ и $1 \leq k \leq n$ с I_n^k ще бележим функцията $I_n^k : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$, действаща по правилото

$$I_n^k(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_k$$

I_n^k се нарича (проектираща ф-я)

Множеството от $\forall$ булеви ф-ции ще бележим с P_2.

Опр. Ще казваме, че мн. $F \subseteq P_2$ е затворено (относно суперпозиции), ако за вс. $f, g_1, \dots, g_k \in F$, такива че f е на k аргумента, а $g_1, \dots, g_k$ са на n аргумента, функцията $h \in P_2$ на n аргумента, действаща по правилото

$$h(x_1, \dots, x_n) = f(g_1(x_1, \dots, x_n), g_2(x_1, \dots, x_n), \dots, g_k(x_1, \dots, x_n))$$

е елемент на F $(h \in F)$

Опр.: Нека $F \subseteq P_2$. С $[F]$ ще бележим най-малкото (по отношение на $\subseteq$ рел.) $M \subseteq P_2$, за което

$F \subseteq M$, $I_n^k \in M$ за $\forall$ $n \geq 1$, $1 \leq k \leq n$ и такова че M е затворено. Т.е.

$$[F] = \bigcap_{\substack{X \subseteq P_2 \\ F \subseteq X \\ I_n^k \in X \\ X \text{ е затворено}}} X$$

Ако $g \in [F]$, ще казваме, че g е суперпозиция на функции от F.

Свойства: (1) $F_1 \subseteq F_2 \Rightarrow [F_1] \subseteq [F_2]$

Нека $F_1 \subseteq F_2$. Тогава, т.к. $F_2 \subseteq [F_2]$, то $F_1 \subseteq [F_2]$. При това $[F_2]$ съдържа I_n^k за вс. n и $1 \leq k \leq n$ и е затворено. Сл. $[F_1] \subseteq [F_2]$

(2) $[[F]] = [F]$

Опр. Казваме, че мн. $F \subseteq P_2$ е пълно, ако $[F] = P_2$.

Th на Бул: Мн. $\{\bar{x}, xy, x \vee y\}$ е пълно.

Д-во: Нека $a \in \{0,1\}$. С x^a ще означаваме $f_a : \{0,1\} \to \{0,1\}$, за която $f_a(x) = x$ ако $a = 1$
$f_a(x) = \bar{x}$, ако $a = 0$.
Нека $a, x \in \{0,1\}$. Тогава

$$x^a = 1 \iff x = a :$$

Имаме следните възможности за x, a и x^a

a	x	x^a
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

$$x^0 = \overline{x}$$

$$x^1 = x$$

Тогава, ако $a_1, \dots, a_n \in \{0,1\}$ е в сила че $x_1^{a_1}, x_2^{a_2}, \dots, x_n^{a_n} = 1 \Leftrightarrow x_1^{a_1} = 1$

$$x_2^{a_2} = 1$$

$$\vdots$$

$$x_n^{a_n} = 1$$

$$\Leftrightarrow x_1 = a_1$$

$$x_2 = a_2$$

$$\vdots$$

$$x_n = a_n$$

Нека ~~h = V дизюнкция~~ $f \in P_2$ е ф-я на n аргумента.

Нека $h : \{0,1\}^n$, действаща по правилото

$$h(x_1, \dots, x_n) = \bigvee x_1^{a_1} x_2^{a_2} \dots x_n^{a_n}$$

$\downarrow$

дизюнкция

$f(a_1, \dots, a_n) = 1$

Тогава $h(x_1, \ldots, x_n) = 1 \iff$ някой от дизюнктивните членове $\{x_1^{a_1}, x_2^{a_2}, \ldots, x_n^{a_n}$ ~~за~~ $| \; f(a_1, \ldots, a_n) = 1\}$ е равен на 1

$\iff$ $x_1 = a_1$
$x_2 = a_2$ за някои $a_1, \ldots, a_n$, т.че
$\vdots$ $f(a_1, \ldots, a_n) = 1$. $\iff$
$x_n = a_n$

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 1$$

Сл. $h \equiv f$. При това $h \in [\{\bar{x}, xy, x \vee y\}]$ и сл. $f \in [\{\bar{x}, xy, x \vee y\}]$.
Т.к. f е произволно $P_2 \subseteq [\{\bar{x}, xy, x \vee y\}]$ и сл. $\{\bar{x}, xy, x \vee y\}$ е пълно.
Представянето $f(x_1, \ldots, x_n)$ ~~като~~

$$= \bigvee_{f(a_1, \ldots a_n)} x_1^{a_1} \ldots x_n^{a_n}$$ се

нарича съвършена дизюнктивна нормална форма.

Твърдение
~~Следствие~~: Нека $F \subseteq P_2$ е пълно и $G \subseteq P_2$. Тогава G е пълно $\iff F \subseteq [G]$

$\Rightarrow$) Очевидно
$\Leftarrow$) Нека $F \subseteq [G]$. Тогава $P_2 = [F] \subseteq [[G]] = [G]$,

т.е. $P_2 \subseteq [G]$
$\Rightarrow G$ е пълно

Следствие: (1) $\{\bar{x}, xy\}$ е пълно:

В сила е $\boxed{x \vee y = \overline{\bar{x} . \bar{y}}}$. Наистина

x	y	$\bar{x}$	$\bar{y}$	$\bar{x} . \bar{y}$	$\overline{\bar{x} . \bar{y}}$	$x \vee y$
0	0	1	1	1	0	0
0	1	1	0	0	1	1
1	0	0	1	0	1	1
1	1	0	0	0	1	1

Сл. $\{x \vee y, xy, \bar{x}\} \subseteq [\{\bar{x}, xy\}]$

Сл.

$\{\bar{x}, xy\}$ е пълно

(2) $\{\bar{x}, x \vee y\}$ е пълно: В

сила е $\boxed{xy = \overline{\bar{x} \vee \bar{y}}}$

$$\boxed{\begin{aligned} x \vee y &= \overline{\bar{x} . \bar{y}} \\ xy &= \overline{\bar{x} \vee \bar{y}} \end{aligned}}$$

закони на де Морган

$$\overline{x \vee y} = \bar{x} . \bar{y}$$
$$\overline{xy} = \bar{x} \vee \bar{y}$$

(3) $\{x \downarrow y\}$ е пълно. В сила е

$x \downarrow y = \overline{x \vee y}$. Тогава $x \downarrow x = \overline{x \vee x} = \bar{x}$

$x \downarrow x = \overline{x \vee x} = \overline{x}$

Сл. $(x \downarrow y) \downarrow (x \downarrow y) = \overline{x \downarrow y} = x \vee y$

Сл. $\overline{x}, x \vee y \in [\{x \downarrow y\}]$ и сл. $\{x \downarrow y\}$ е пълно

(4) $\{xy, x+y, 1\}$ е пълно

$(x+y)(x+y)+1$ полиноми над $\mathbb{Z}_2$

$xx+1 = x+1 = \overline{x}$. Оттук $\{xy, x+1, 1\}$ е пълно.

№ 5

Класовете T_0, T_1 и S

Опр. Нека $f \in P_2$ на n аргумента. Казваме, че f запазва 0 (запазва 1), ако
$f(0,0,\dots,0) = 0$ (съответно $f(1,1,1,\dots,1) = 1$)

Опр. $T_0 = \{ f \in P_2 \mid f \text{ запазва } 0 \}$
$T_1 = \{ f \in P_2 \mid f \text{ запазва } 1 \}$

Лема: ~~T_0 и T_1 са затворени~~
$T_0 = [T_0]$ и $T_1 = [T_1]$

Д-во: Достатъчно е да покажем, че T_0 и T_1 съдържат I_n^k и са затворени.

(1) $I_n^k \in T_0$, $I_n^k \in T_1$:

$$I_n^k(0,0,\underset{\substack{\uparrow \\ k}}{0},0) = 0$$

$$I_n^k(1,1,\ldots,\underset{\substack{\downarrow \\ k}}{1},\ldots 1) = 1$$

(2) T_0 е затворено:

$f, g_1, \ldots, g_k \in T_0$ и f е k-местна, а $g_1, \ldots, g_k$ - n-местни

Нека $h(x_1, \ldots, x_n) = f(g_1(x_1 \ldots x_n), \ldots, g_k(x_1 \ldots x_n))$

Тогава

$$h(0,0,\ldots,0) = f(g_1(0,0,\ldots,0), \ldots \ldots g_k(0,0,\ldots 0)) =$$

$$= f(0,\ldots,0) = 0$$

$g_i \in T_0$ $\qquad$ $f \in T_0$

(3) T_1 е затворено - аналогично

13.11.2013 г.

Упражнение

	T_0	T_1	T_2	S	M	L
f_0	+	–	–		+	–
f_1	+	+	–		+	–
f_2	–	–	+		–	+
f_3	+	+	+		–	–
f_4	–	–	–		–	–

K от булеви функции е пълно (=)

$$K \not\subseteq T_0, \not\subseteq T_1, \not\subseteq S, \not\subseteq M, \not\subseteq L$$

K е базис - минимално пълно множество

$\{f_0, f_1, f_2, f_3, f_4\}$ е пълно

$\{f_0, f_2\}$ е базис

$\{f_4\}$ е базис

T_0 f_2

T_1 f_2

S

$f_0 f_2$ $f_1 f_2$

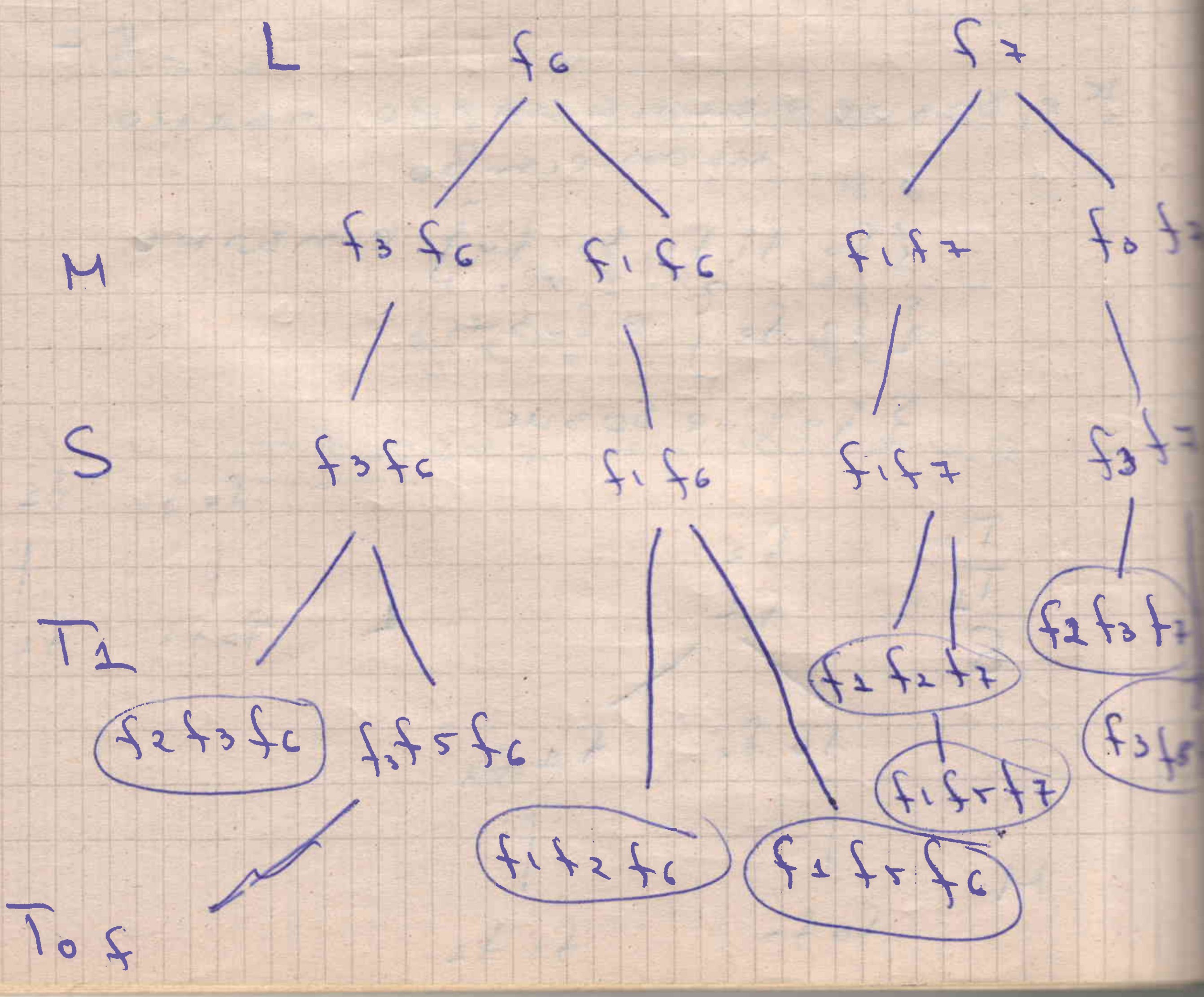
M $f_0 f_2$ $f_1 f_2$

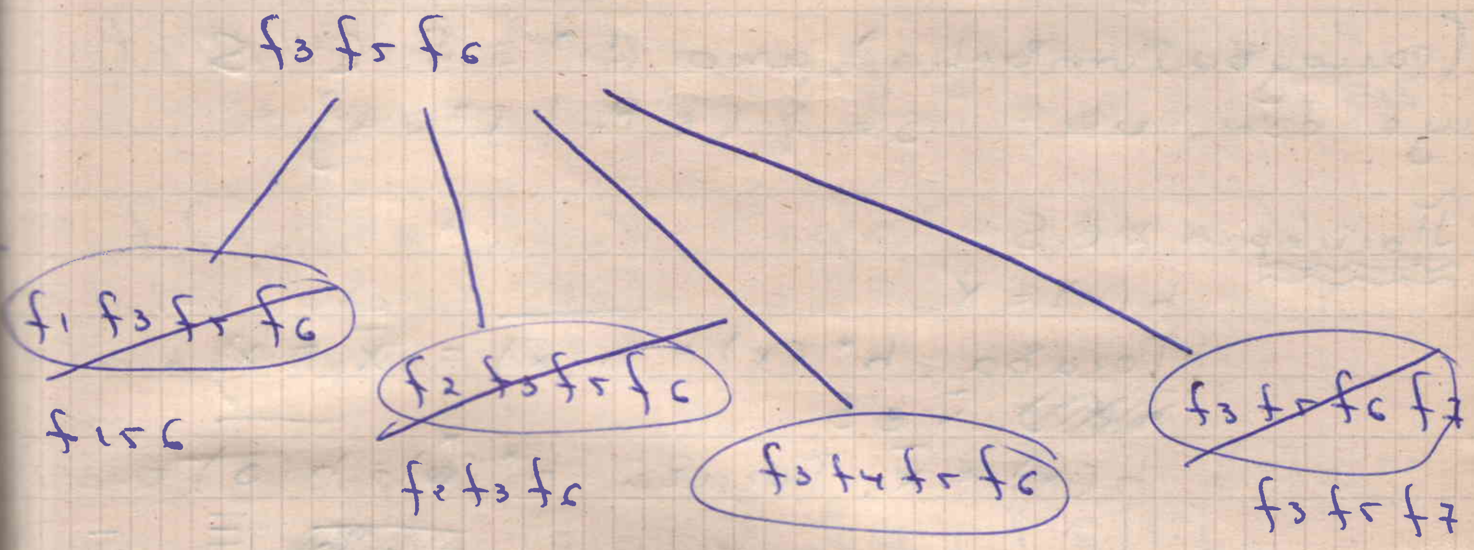
$f_0 f_2$ $f_1 f_2$

L $f_0 f_2$ $f_1 f_2$

$\Rightarrow \{f_4\}\ \{f_0, f_2\}\ u\ \{f_1, f_2\}$

	T_0	T_1	S	M	L
f[illegible]	−	+	+	−	+
f_2	−	[illegible]	−	+	+
f_3	+	+	+	−	+
f_4	−	+	−	+	+
f_5	+	[illegible]	−	+	−
f_6	+	+	−	+	−
f_7	−	+	−	+	−





14.11.2013 г.

~~Лема~~ Лекция

Лема: Нека $F \subseteq P_2$ ~~и~~ , $F \not\subseteq T_0$, $F \not\subseteq T_1$.
Тогава $\{0,1\} \subseteq [F]$ или $\{\bar{x}\} \subseteq [F]$

Д-во: Нека $F \subseteq P_2$ и $F \not\subseteq T_0$, $F \not\subseteq T_1$.
Нека $g_0 \in F$ е к-местна и т.че $g_0 \notin T_0$. Деф. $h_0 \in P_2$ едноместна чрез $h_0(x, x, .. x)$. Тогава $h_0 \in [F]$ и $h_0(0) = g_0(0, 0, \dots, 0) = 1$. Нека $g_1 \in F$ е n-местна ф-я и т.че $f_1 \notin T_1$. Деф. $h_1 \in P_2$ едноместна чрез $h_1(x) = f_1(x, x, .. x)$ Тогава $h_1 \in [F]$ и (*)
$h_1(1) = g_1(1, .. 1) = 0$. Така имаме, че $h_i(i) = 1-i$

Опр. Нека $f \in P_2$ е n-местна. Дефинираме n-местна $f^* \in P_2$ чрез $f^*(x_1, \dots, x_n) = f(\bar{x}_1, x_2, \dots, x_n)$. Ще казваме, че f е самоспрегната

(*) $i = 0, 1$. От тук $h_i(x) = \bar{x}$ или $h_i(x) = 1-i$ $\forall x \in \{0, 1\}$ и $\forall i = 0, 1$.

(самодвойствена), ако $f^* \equiv f$. С S ще озн. мн. $S = \{ f \in P_2 \mid f^* \equiv f \}$

Пример: $x \in S$

$h(x) = x$

Тогава $h^*(x) = \overline{h(\bar{x})} = \bar{\bar{x}} = x$

$\bar{x} \in S$

$h(x) = \bar{x}$. Тогава $h^*(x) = \overline{h(\bar{x})} =$

$= \bar{\bar{x}} = \bar{x}$

$0 \notin S$:

$0^*(1) = \overline{0(\bar{1})} = \bar{0} = 1 \neq 0 = 0(1)$

Лема: S е затворен

Д-во: (1) $I_n^k \in S$ за $n \geq 1$ и $1 \leq k \leq n$

Наистина $I_n^{k*}(x_1, x_2, \dots, x_n) =$
$= \overline{I_n^k(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)} = \bar{\bar{x}}_k = x_k = I_n^k$

(2) Нека $f \in S$ е k-местна $(x_1, x_2, \dots$
$g_1, \dots, g_k \in S$ са n-местни и
$h \in P_2$ е n-местна, ~~деф~~ действаща по правилото

$$h(x_1, \dots, x_n) = f(g_1(x_1, \dots, x_n), \dots g_k(x_1, \dots x_n))$$

Тогава

$$h^*(x_1, \dots x_n) = \overline{f(g_1(\bar{x}_1, \dots \bar{x}_n), \dots g_k(\bar{x}_1, \dots \bar{x}_n))}$$

$g_1, \dots, g_k \in S$

$$f(\overline{\overline{g_1(x_1,\dots,x_n)},\dots,\overline{g_k(x_1,\dots x_n)}}) \underset{f\in S}{=}$$

$= f(g_1(x_1,\dots,x_n),\dots, g_k(x_1,\dots,x_n)) =$
$= h(x_1, x_2,\dots,x_n)$
$\Rightarrow h\in S$

Лема: Нека $F\subseteq P_2$ и $F\not\subseteq T_0$, $F\not\subseteq T_1$, $F\not\subseteq S$. Тогава $\{0,1\}\subseteq[F]$.

Д-во: Да доп., че $\{0,1\}\not\subseteq[F]$. Тогава от $F\not\subseteq T_0$ и $F\not\subseteq T_1$ имаме $\overline{x}\in[F]$. Нека $g\in F$ к-местна функция, такава че $g\notin S$. Тогава $g(a_1,a_2,\dots,a_k)\neq g(\overline{a_1},\overline{a_2},\dots,\overline{a_k})$, т.е. $g(a_1,\dots,a_k) = g(\overline{a_1},\overline{a_2},\dots,\overline{a_k})$ за някое $a_1,\dots,a_k\in S$. Т.к. функцията $\overline{x}\in F$ $x_i^{a_i}\in F$

$\left(x_i^{a_i} = \begin{cases} x_i, & a_i=1\\ \overline{x_i}, & a_i=0\end{cases}\right)$, като при

това 0^{a_i}

$$0^{a_i} = \begin{cases} 0, & a_i=1\\ \overline{0}=1, & a_i=0\end{cases} = \overline{a_i}$$

$$a_i = 1^{a_i} = \begin{cases} 1, & a_i=1\\ \overline{1}=0, & a_i=0\end{cases}$$

$0^{a_i} = \overline{a_i}$

$1^{a_i} = a_i$

Нека $h \in P_2$ е деф. с правилото

$h(x) = g(x^{a_1}, x^{a_2}, \dots, x^{a_k})$.

Тогава $h \in [F]$ и $h(0) = g(0^{a_1}, 0^{a_2}, \dots, 0^{a_k}) =$

$= g(\overline{a_1}, \overline{a_2}, \dots, \overline{a_k}) =$

$= g(a_1, \dots, a_k) =$

$= g(1^{a_1}, 1^{a_2}, \dots, 1^{a_k}) =$

$= h(1)$

Сл. $h \equiv 0$ или $h \equiv 1$. Б.О.О. $h \equiv 0$

Тогава $0 \in [F]$ и $1 = \overline{0} \in [F]$ ✗

Сл. $\{0, 1\} \in [F]$.

№ 6

Класовете M и L. Критерий на Пост

Опр. Нека $n \geq 1$ и $(a_1, \dots, a_n)$, $(b_1, \dots, b_n) \in \{0,1\}^n$. Ще казваме, че $(a_1, a_2, \dots, a_n) \preceq (b_1, \dots, b_n)$, ако $a_i \leq b_i$ за $1 \leq i \leq n$. Ясно е, че $\preceq$ е частична наредба в $\{0,1\}^n$ (за $\forall\, n \geq 1$)

Означение: При фиксирано $n \geq 1$, с $\vec{a}$ ще означаваме $(a_1, a_2, \dots, a_n)$

Опр. Нека $f \in P_2$ е n-местна.
Ще казваме, че f е монотонна, ако за вс. $\vec{a}, \vec{b} \in \{0,1\}^n$, ако $\vec{a} < \vec{b}$, то

$$f(\vec{a}) \leq f(\vec{b})$$

Множеството от $\forall$ монотонни функции ще озн. с M.

Лема: M е затворено

Д-во: (1) $I_n^k \in M$ за $n \geq 1$ $1 \leq k \leq n$.
Нека $n \geq 1$ и $1 \leq k \leq n$ и нека $\vec{a}, \vec{b} \in \{0,1\}$ са такива, че $\vec{a} \leq \vec{b}$. Тогава

$$I_n^k(\vec{a}) = a_k \leq b_k = I_n^k(\vec{b}) \quad :))$$

(2) Нека $f \in M$ е k-местна, $g_1, \dots, g_k \in M$ са n-местни, $h \in P_2$ действа по правилото

$$h(\vec{a}) = f(g_1(\vec{a}), \dots, g_k(\vec{a}))$$

за $\vec{a} \in \{0,1\}^n$. Нека $\vec{a}, \vec{b} \in \{0,1\}^n$ и $\vec{a} \leq \vec{b}$. Тогава $h(\vec{a}) = f(g_1(\vec{a}), \dots$
$\dots g_k(\vec{a})) \underset{f, g_1, \dots g_k \in M}{\leq} f(g_1(\vec{b}), g_2(\vec{b}), \dots, g_k(\vec{b})) = h(\vec{b})$

Лема: Нека $F \subseteq P_2$ и $F \not\subseteq T_0$, $F \not\subseteq T_1$, $F \not\subseteq S$ и $F \not\subseteq M$. Тогава $\{\overline{x}\} \subseteq [F$

Д-во: Нека $F \subseteq P_2$ и $F \not\subseteq T_0$, $F \not\subseteq T_1$, $F \not\subseteq S$, $F \not\subseteq M$. От $F \not\subseteq T_0$, $F \not\subseteq T_1$, $F \not\subseteq S$ имаме $\{0, 1\} \subseteq [F]$.

Нека $g \in F$ и $g \notin M$. g е n-местна за някое $n \geq 1$.

Щом $g \notin M$, $g(\vec{a}) > g(\vec{b})$, т.е

$g(\vec{a}) = 1$, $g(\vec{b}) = 0$ за

някои $\vec{a}, \vec{b} \in \{0, 1\}$, такива че

$\vec{a} \leq \vec{b}$

Нека $\vec{a_1}, \vec{a_2}, \dots, \vec{a_k} \in \{0, 1\}^n$ са такива, че $\vec{a} = \vec{a_1} \leq \vec{a_2} \leq \dots \leq \vec{a_k} = \vec{b}$

и за вс. $1 \leq i < k-1$, $\vec{a_i}$ и $\vec{a_{i+1}}$ се различават точно в една координата. ($k-1$ е точно броят на различните координати в $\vec{a}$ и $\vec{b}$)

$\vec{a} = (1, 0, 0) = \vec{a_1}$ $\quad (1, 1, 0) = \vec{a_2}$

$\vec{b} = (1, 1, 1)$ $\quad (1, 1, 1) = \vec{a_2}$

може да се направи.

Т.к. $g(\vec{a}) \neq g(\vec{b})$:

$g(\vec{a_i}) \neq g(\vec{a_{i+1}})$ за

някое ~~xxxxxx~~ $1 \leq i \leq k-1$

Нека $\vec{a_i}$ и $\vec{a_{i+1}}$ се различава в s-тата си координата. Дефинираме $h \in P_2$ да бъде едноместната ф-я, действаща по правилото

$$h(x) = g(a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_{s-1}}, x, a_{i_{s+1}}, \dots, a_{i_n})$$

Т.к. $\{0, 1\} \subseteq [F]$, $h \in [F]$ (h е суперпозиция)

При това т.к. $h(0) = g(a_{i_1}, a_{i_2}, \dots a_{i_{s-1}}, 0, a_{s+1}, \dots, a_{i_n}) =$
$= g(\overrightarrow{a_i}) > g(\overrightarrow{a_{i+1}}) = g(a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_{s-1}}, 1, a_{i_{s+1}}, \dots, a_{i_n}) = h(1)$.

~~[illegible]~~ Сл. $h(0) = 1$, $h(1) = 0$, т.е.

$$h(x) = \overline{x}.$$

Опр. Полином на Жегалкин наричаме $\forall$ полином f над Z_2 с n-променливи $(n \geq 1)$, за който всеки ненулев едночлен е от вида

$$x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k} \text{ за някои}$$

$$1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n.$$

Т.к. $\{1, +, \cdot\}$ е пълно, то всяка $f \in P_2$ може да се представи (f n-местна) като полином над $\mathbb{Z}_2$ с n променливи. От друга страна, за вс. $x \in \{0,1\}$, $x^2 = x$, откъдето $x^n = x$ за вс. $n \geq 1$ и сл. всяка n-местна $f \in P_2$ се представя като полином на Жегалкин на n-променливи. Общият вид

$$f = a_{123\ldots n}\, x_1 x_2 \ldots x_n +$$

$$+ \sum_{1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \ldots \leq n} a_{i_1, i_2, \ldots i_{n-1}}\, x_{i} \ldots x_{i_{n-1}}$$

$$+ \sum_{1 \leq i_1 < \ldots \leq i_{n-1} \leq n} a_{i_1, \ldots i_{n-2}}\, x_{i_1} \ldots x_{n-2} +$$

$$+ \sum_{1 \leq i \leq n} a_{i_1} x_{i_1} + a_0$$ за някои числа

$a_{1,\ldots,n}$

$1 \leq i_1 \leq i_{n-1} \leq n$ $\quad a_{i_1, \ldots i_{n-1}}$ $\quad a_{i_1 \ldots i_{n-1}}$

$\vdots$

$a_{i_1}, \ldots \; a_n, a_0 \in \{0,1\}$

Броят на различните полиноми на Жегалкин е 2^{2^n}, т.к. коефициентите в един такъв полином са

$$1 + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n-2} + \binom{n}{1} + 1 = 2^n,$$ а

всеки коефициент има точно 2 възможни стойности. Т.к. $\forall$ възможни n-местни булеви функции са 2^{2^n} на брой, вс. n-местна булева ф-я се представя по единствен начин като полином на Жегалкин на n пром.

Опр. Ще казваме, че n-местната $f \in P_2$ е линейна, ако полиномът ѝ на Жегалкин не съдържа едночлени от степен ≥ 2, т.е.

$$f = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n + a_0$$

за някои $a_0, \dots, a_n \in \{0,1\}$ с L ще означаваме мн-от $\forall$ линейни булеви функции

Примери: $\bar{x} \in L$ $\quad \bar{x} = x + 1$

$$x_1 \vee x_2 \notin L$$

$$x_1 \vee x_2 = \overline{\bar{x}_1 . \bar{x}_2} = (x_1 + 1)(x_2 + 1) + 1 =$$
$$= x_1 x_2 + x_1 + x_2 + 1$$

$$x_1 \vee x_2 = x_1 x_2 + x_1 + x_2$$

Лема: L е затворен

$\boxed{\text{Д-во: домашно!}}$

Лема: Нека $F \subseteq P_2$ и $F \not\subseteq T_0$, $F \not\subseteq T_1$, $F \not\subseteq S$, $F \not\subseteq M$, $F \not\subseteq L$. Тогава $\{x_1 \vee x_2\} \subseteq [F]$

Д-во. Нека $F \subseteq P_2$ и $F \not\subseteq T_0$, $F \not\subseteq T_1$, $F \not\subseteq S$, $F \not\subseteq M$, $F \not\subseteq L$.

От $F \not\subseteq T_0$, $F \not\subseteq T_1$, $F \not\subseteq S$, $F \not\subseteq M$ имаме $\{0, 1, \overline{x}\} \subseteq [F]$. Нека $f \in F$ и $f \notin L$. Нека f е n-местна.

Тогава $f(x_1, .. x_n) = a_{12..n} x_1 .. . x_n +$

$$+ \sum_{1 \le i_1 < .. < i_{n-1} \le n} a_{i_1 .. i_{n-1}} x_{i_1} .. x_{i_{n-1}} + .. + \sum_{1 \le i_1 \le n} a_{i_1} x_{i_1} + a_0$$

и $a_{i_1 .. i_s} \neq 0$ за някое $s \ge 2$

и $1 \le i_1 < i_2 < .. < i_s \le n$.

Нека k, $k \le i_1 \le .. \le i_k \le n$ са такива, че

$a_{i_1 i_2 .. i_k} \neq 0$ и за вс.

$2 \le p < k$ и $\forall$ избор

на числа $1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_p \leq n$

$$a_{j_1 j_2 \dots j_p} = 0$$

Нека дефинираме $h \in P_2$ чрез

$$h(x_1, x_2) = f(\underset{\substack{\uparrow \\ i_1}}{0, 0, \dots, x_1}, 0, \dots 0, \underset{\substack{\uparrow \\ i_2}}{x}, 0$$

$$0, \dots \cancel{x_3}\ \underset{\substack{\uparrow \\ i_3}}{1}\ 0, 0, \underset{\substack{\uparrow \\ i_4}}{1}, \dots\dots, \underset{i_k}{1}, 0, \dots 0)$$

$h \in [F]$ $(0, 1 \in [F])$ и при това

$$h(x_1, x_2) = \cancel{}$$
$$x_1 x_2 + a_{i_1} x + a_{i_2} x_2 + a,$$

където $a = a_0 + a_{i_3} + a_{i_4} + \dots + a_{i_k}$

Нека $g \in P_2$ е дефинирана с

$g(x_1, x_2) = h(x_1^{a_{i_2}}, x_2^{a_{i_1}})$. Тъй като

$$x_1^a = \begin{cases} x & a = 1 \\ x + 1 & a = 0 \end{cases}$$

$x^a = x + a + 1$, то

$$g(x_1, x_2) = h(x_1 + a_{i_2} + 1, x_2 + a_{i_1} + 1) =$$

$$= (x_1 + a_{i_2} + 1)(x_2 + a_{i_1} + 1) + a_{i_1}(x_1 + a_{i_2} + 1) + a_{i_2}(x_2 + a_{i_1} + 1) + a =$$

$$\cancel{a_{i1}x_1} + a_{i2}x_2 + x_1 + x_2$$

$$= x_1x_2 + \cancel{a_{i2}x_1 + a_{i1}x_2} + a_{i1}a_{i2} + a_{i1} + a_{i2} \neq 1$$

$$+ \cancel{a_{i1}x_1} + \underline{a_{i1}a_{i2}} + a_{i1} + a_{i2}x_2 + \underline{a_{i2}a_{i1}} + a_{i2} + a$$

$$= x_1x_2 + x_1 + x_2 + c, \text{ където}$$

$$c = a_{i1}a_{i2} + a_2 + 1 \in \{0$$

Ако $c = 0$, то

$$g(x_1, x_2) = x_1 \vee x_2 .$$

Ако $c = 1$, то

$$g'(x_1, x_2) = \overline{g(x_1, x_2)} = x_1 \vee x_2$$

Т.к. $g \in [F]$ и $g' \in [F]$ и сл. $x_1 \vee x_2 \in [F]$.

Th (Критерий на Пост)

Нека $F \subseteq P_2$. Тогава F е пълно (т.е. $[F] = P_2$) $\Leftrightarrow$

$$F \not\subseteq T_0,\ F \not\subseteq T_1,\ F \not\subseteq S,\ F \not\subseteq M,\ F \not\subseteq L$$

Д-во: ($\Leftarrow$) Нека $F \not\subseteq T_0$, $F \not\subseteq T_1$, $F \not\subseteq S$, $F \not\subseteq M$, $F \not\subseteq L$. Тогава

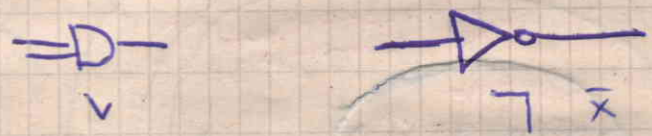
$\{0, 1, \bar{x}, x_1 \vee x_2\} \subseteq [F]$. Т.к.
$\{\bar{x}, x_1 \vee x_2\}$ са пълно мн., $[F] = P_2$

$\Leftarrow$) ~~Доп~~. Т.к. $\bar{x} \notin T_0$, $\bar{x} \notin T_1$, $0 \notin S$,
$\bar{x} \notin M$, $x_1 \vee x_2 \notin L$ и

$T_0, T_1, \dots, S, M, L$ са затворени, нито един от тях не е пълен!
~~Дадох, че F е пълно~~ Да забележим, че ако F е пълно и $F \subseteq F'$, то F' също е пълно. ($P_2 = [F] \subseteq [F']$). ~~F~~.
Оттук и непълнотата на T_0, T_1, S, M, L => че ако F е пълно, то

$$F \notin T_0,\ F \notin T_1,\ F \notin S,\ F \notin M,\ F \notin L$$

(иначе са пълни)



20. 11. 2013г.

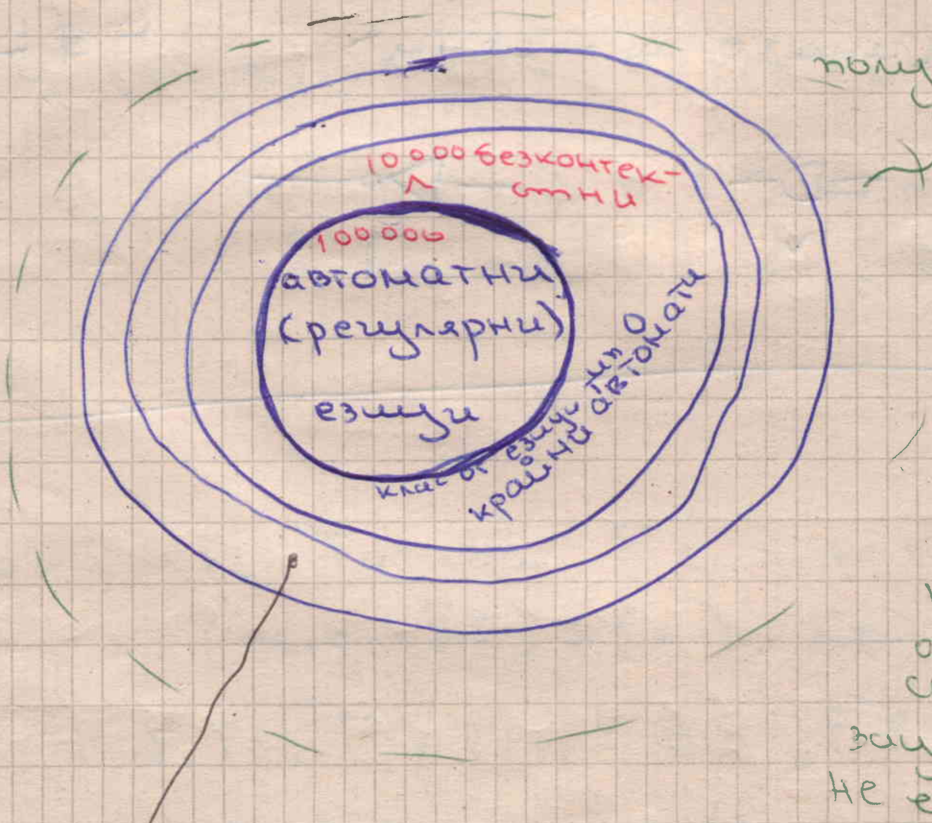
Упражнение

Азбука - произволно множество Σ
буква - елемент на Азбуката
(символ)

дума - крайна редица от букви
(низ, string)

' ' , " " > ε - празната дума

Език - множество от думи



полуразреши-
ми езици

има
алгори[illegible]
който
позна[illegible]
ако
дума е
в езика
но в
общия
случай се
зацикля, ако
не е от език[illegible]

Рекурсивни езици - познава дали ду[illegible] е от ез[illegible]
има алгоритъм и не се
зацикля

Операции върху езици

$A \cup B,\ A \cap B,\ A \setminus B$

($A \times B$ - не е операция в/у езици)

Допълнение : $\overline{A} = \underbrace{\Sigma^*}_{\text{множеството от } \forall \text{ думи}} \setminus A$

$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ булеви операции

Конкатенация : $A . B$ (AB)

$AB = \{ \alpha\beta \mid \alpha \in A \text{ и } \beta \in B \}$

сравнете с

$A \times B = \{ (\alpha, \beta) \mid \alpha \in A \text{ и } \beta \in B \}$

Пример: $\{a, ба\}\{a, ab\} =$

$= \{aa, aab, баa, баab\}$

$\{a\}\{b\} = \{ab\} \neq \{ba\} = \{b\}\{a\}$

$A^n = \underbrace{A . A . A \dots A}_{n \text{ пъти}}$

за $\forall A$

$O . A = O$ $\quad O = ?$

Ако има такова O, то при $A = \emptyset$ получаваме

$$O . \emptyset = O$$
$$\parallel$$
$$\emptyset$$

$\Rightarrow O = \emptyset$

$\emptyset . A = A . \emptyset = \emptyset$ и други O няма

$E = ?$

$\forall A \, (E . A = A)$

~~[illegible]~~ $E = \{\varepsilon\}$

$\varepsilon . \alpha = \alpha . \varepsilon = \alpha$ - конкатенация на думи

$\{\varepsilon\} A = A \{\varepsilon\} = A$ - конкатенация на езици

---

① $A (B \cup C) = (AB) \cup (AC)$

② $(B \cup C) A = (AU) \cup (CA)$

за ① $\quad w \in A (B \cup C) \Leftrightarrow \exists w' w''$ $(w = w' w''$ и $w' \in A$ и $w'' \in B \cup C))$

$\Leftrightarrow \exists\, \omega'\omega''(\omega=\omega'\omega''$ <u>и</u> $\omega'\in A$ <u>и</u> $\omega''\in B)$

или $\exists\, \omega'\omega''(\omega=\omega'\omega''$ <u>и</u>

$\omega'\in A$ <u>и</u> $\omega''\in C)$

<u>или</u>

$\Leftrightarrow \omega\in AB$ <u>или</u> $\omega\in AC \Leftrightarrow \omega\in AB\cup AC$

$$\emptyset\cup A = A\cup\emptyset = A$$

<u>Полупръстен</u>

(3) $A(B\cap C)\subseteq AB\cap AC$

(4) $(B\cap C)A \subseteq BA\cap CA$

$B=\{b\}\quad C=\{bb\}$

$\Rightarrow$ ~~BC~~ $B\cap C=\emptyset\Rightarrow$

$A(B\cap C)=\emptyset$

Нека $A=\{a, ab\}$

$AB=\{ab, abb\}$

$AC=\{abb, abbb\}$

$AB\cap AC=\{abb\}\neq\emptyset$

При езици

$(A^{-1}B)C = A^{-1}(BC)$ няма такава асоциат.

деление

При матрици

AB^{-1} или $B^{-1}A$

$A/B = AB^{-1}$

$B^{-1}=E/B$

$$A(BC^{-1}) \neq (AB)C^{-1}$$

Деф.

$$AB^{-1} = \{ w \mid \exists u \in B \, (wu \in A) \}$$

$$AB$$

$$B^{-1}A = \{ w \mid \exists u \in B \, (uw \in B) \}$$

Пример: $\{a\}^{-1} \{аб, ав, ва\} =$

$= \{б, в,$ [redacted] $\}$

$$\{ \varepsilon, a, aa, aaa \ldots \}^{-1} \{аб, ав, ва\} =$$

$$= \{аб, б, ав, в, ва\}$$

Уговорка Ще пишем aB вместо $\{a\}B$

$a^{-1}B$ вместо $\{a\}^{-1}B$

точнит случай на $A^{-1}B$, който ще използваме

Итерация

Думи

$$A^* = \{ w_1 w_2 \ldots w_n \mid w_1, w_2, \ldots, w_n \in A, \; n \geq 0 \}$$

позволяваме $n = 0$

$$A^* = \{\varepsilon\} \cup A \cup AA \cup AAA \ldots =$$

$$\{\varepsilon\} = A^0$$

$$= A^0 \cup A^1 \cup A^2 \cup \ldots$$

безкрайно обединение

Положителна итерация

$$A^+ = \{\omega_1 \omega_2 \ldots \omega_n \mid \omega_1, \ldots, \omega_n \in A, \; n \geq 1\}$$

$\varepsilon \in A^*$ - винаги

$$\varepsilon \in A^+ \Leftrightarrow \varepsilon \in A$$

$$A^+ = A \cup A^2 \cup A^3 \cup \ldots$$

$$A^* = A^+ \cup \{\varepsilon\}$$

$$A^* = A^+ \Leftrightarrow \varepsilon \in A$$

$\cup \quad \cdot \quad * \quad \subseteq$

$+$

алгебра на Клини

$$A^* = \{\varepsilon\} \cup AA^* = \{\varepsilon\} \cup A^*A$$

Алгебрично д-во $A^* = A^0 \cup A \cup A^2 \cup A^3 \cup \ldots =$

$$= \{\varepsilon\} \cup A.A^0 \cup A.A^1 \ldots =$$

$= \{\varepsilon\} \cup A(A^0 \cup A^1 \cup A^2 \cup \ldots) =$

$= \{\varepsilon\} \cup AA^*$

II Д-во: $A^* \subseteq \{\varepsilon\} \cup A.A^*$

Да изберем $w \in A^*$

$w = w_1 w_2 \ldots w_n$, $w_i \in A$

I сл. $n = 0$

$w = \{\varepsilon\} \Rightarrow w \in \{\varepsilon\} \cup A.A^*$

II сл. $n \neq 0$

Нека

$w' = w_2 w_3 \ldots w_n \in A^*$

$\Rightarrow w = w_1 w'$

$w_1 \in A$
$w' \in A^*$ $\Rightarrow \in A.A^*$:))

Обратно,

$\{\varepsilon\} \cup AA^* \subseteq A^*$

Да изберем $w \in \{\varepsilon\} \cup AA^*$

I сл. ~~$\varepsilon \in \varepsilon$~~ $w \in \{\varepsilon\}$

$\Rightarrow w = \varepsilon \in A^*$

II сл. $w \in A \cdot A^*$

$w = w'w''$, $w' \in A$, $w'' \in A^*$

$w'' \in A^* \Rightarrow w'' = w_1 w_2 w_3 \dots w_n$,

$w_i \in A$

$w = w' w_1 w_2 \dots w_n \in A^*$:))

$$\underset{A}{\underset{\in}{w'}}\ \underset{A}{\underset{\in}{w_1}}\ \underset{A}{\underset{\in}{w_2}} \dots \underset{A}{\underset{\in}{w_n}}$$

Σ^* - множеството от $\forall$ думи

$L_1 = \{ w \in \{a, b\}^* \mid w$ завършва с $a \}$

$a^{-1} L_1 = L_1 \cup \{\varepsilon\} = L_2$

$b^{-1} L_1 = L_1$

$a^{-1} L_2 = L_2 \cup \emptyset = L_2$

$b^{-1} L_2 = L_1 \cup \emptyset = L_1$

$\varepsilon \notin L_1$

$\varepsilon \in L_2$

$L_1 = a . (a^{-1} L_1) \cup b (b^{-1} L_1) =$

$= a L_2 \cup b L_1$

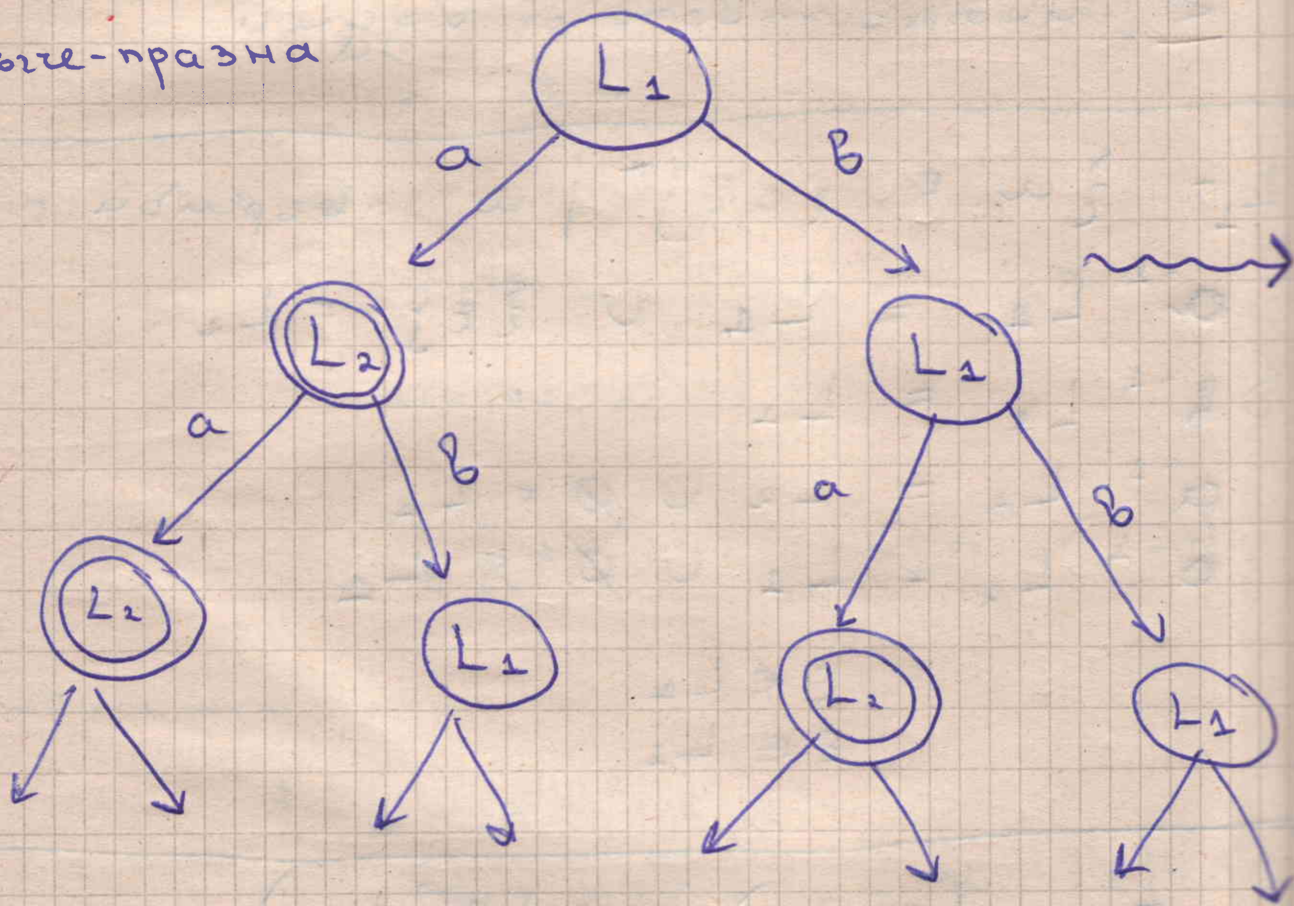
$L_2 = \{\varepsilon\} \cup a . (a^{-1} L_2) \cup b . (b^{-1} L_2) =$

$= \{\varepsilon\} \cup a L_2 \cup b L_1$

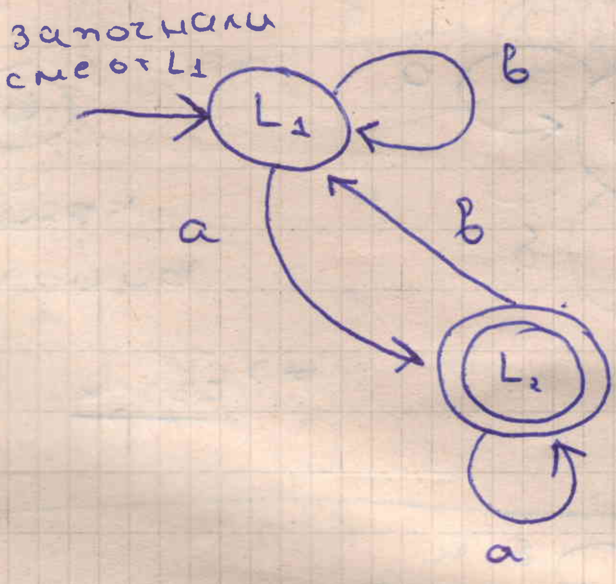
$$\boxed{\begin{aligned} L_1 &= aL_2 \cup bL_1 \\ L_2 &= \{\varepsilon\} \cup aL_2 \cup bL_1 \end{aligned}}$$

не дават нови езици
=> ∃ краен автомат, който познава дали една дума е от тях

кръгче-празна



○ и ◎ - състояния на автомата

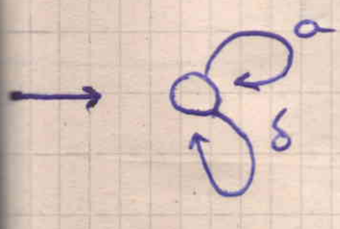


прост вид на краен автомат (детерминиран и тотален)

Ако след прочитането на дума даден автомат се намира в ◎ (заключителни или крайни), казваме че автоматът разпознава думата. Множеството от ∀ ~~думи~~ разпознавани думи от автоман - език на автомата

→ ○ - начално състояние

→ ◎ - едновременно начално и крайно

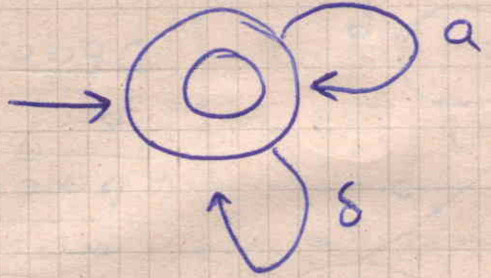


или съкратено

Азбука: {а, б}

винаги не-състояние, което не е крайно

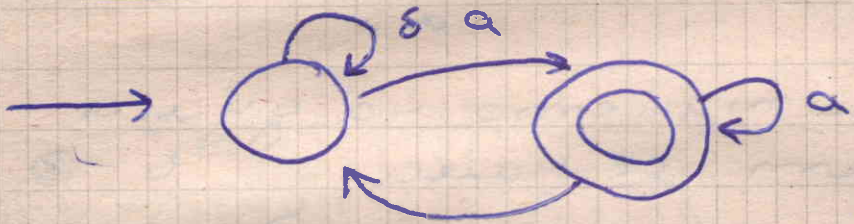
Език: ∅



крайно

винаги → да

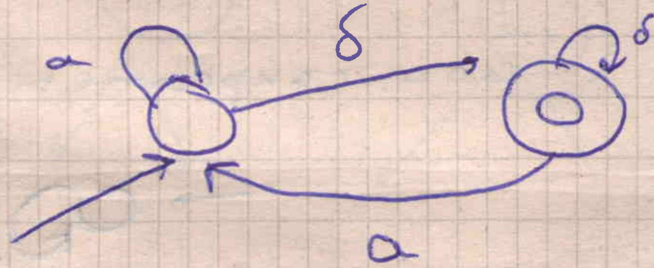
=> Език: Σ^* (∀дум



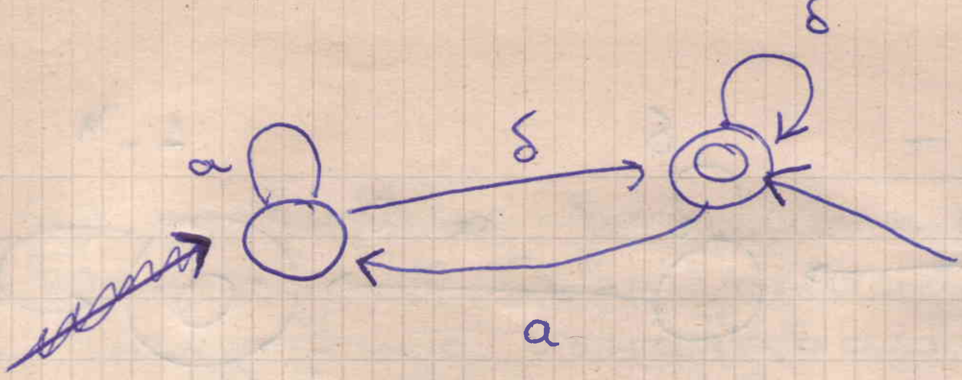
Език:

$\{ \omega \in \{a, b\}^* \mid \omega$ завър-шва на а$\}$

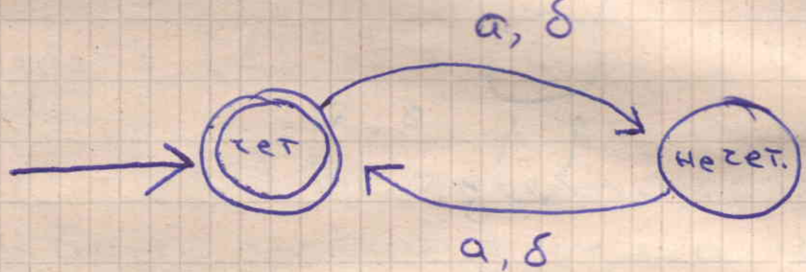
$\{ \omega \in \{a, б\}^* \mid \omega$ завършва на б$\}$



$\{ \omega \in \{a, b\}^* \mid \omega$ не завършва са$\}$

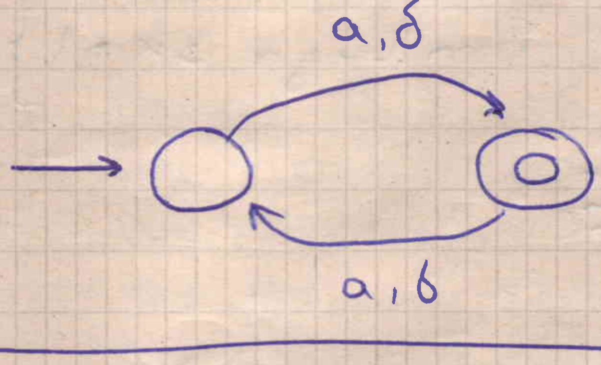


$\{\omega \in \{а, б\}^* \mid \omega$ има четен брой букви$\}$

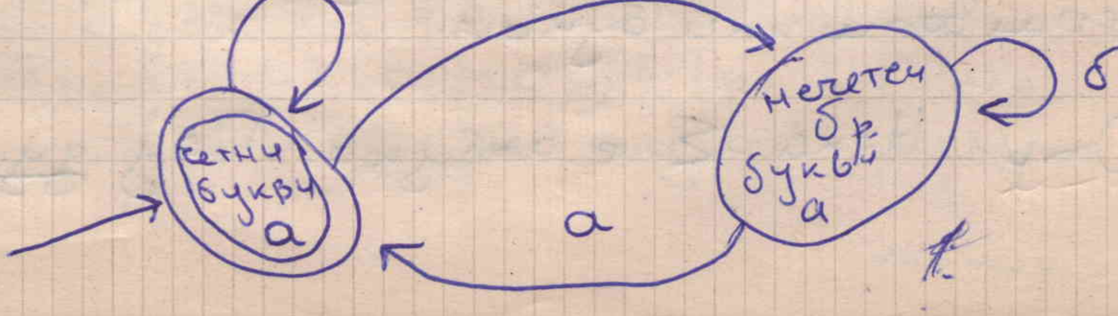


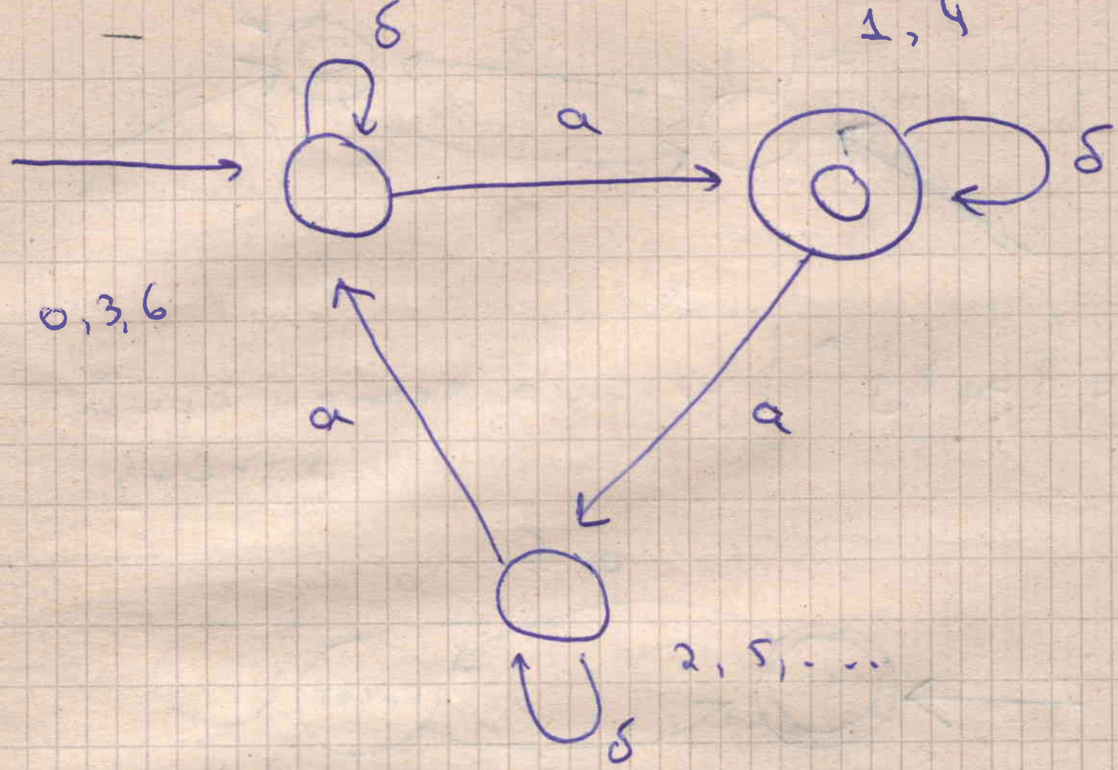
до момента прочетените букви

$\{\omega \in \{а, б\}^* \mid \omega$ има нечетен брой$\}$



$\{\omega \in \{а, б\}^* \mid$ в ω има четен брой букви а$\}$





$\{ w \in \{a, б\}^* \mid$ брой на буквите а в w е от вида $3k+1 \}$

21.11.2013 г.

Лекция

№ 7 Азбуки, думи, езици

Под азбука ще разбираме вс. множест[во]. Елементите на азбуката наричаме символи или букви.

Опр. Нека Σ е азбука. Под дума

над Σ ще разбираме вс. крайна редица от символи от Σ. Съвкупността от вс. думи над Σ ще означаваме със Σ^*. Под дължина на $|w|$ на $w \in \Sigma$ ще разбираме броя на символите, участващи в w (по-точно дължината на редицата w).

Примери: (1) $\Sigma = \{0, 1\}$; 0101, 10111, 0, 1, ... са думи над Σ.

(2) Вс. десетичен запис на естествено число е дума над $\Sigma = \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$. Редицата, несъдържаща нито един символ наричаме празна дума и бележим с ε. Ясно е, че ако $w \in \Sigma^*$, то

$$|w| = 0 \iff w = \varepsilon$$

Опр. Нека Σ е азбука. $w_1, w_2 \in \Sigma^*$ и

$w_1 = a_1 a_2 \ldots a_m$

$w_2 = b_1 b_2 \ldots b_k$, където $k, m \geq 0$, а $a_1, a_2, \ldots, a_m, b_1, b_2, \ldots, b_k$ са символи. Под конкатенация на w_1 с w_2 ще разбираме думата $w_1 w_2 = a_1 \ldots a_m b_1 \ldots b_k$

Ясно е, че $|w_1 w_2| = |w_1| + |w_2|$

Свойства: (1) $w\varepsilon = \varepsilon w = w$ за вс. $w \in \Sigma^*$

(2) $w_1(w_2 w_3) = (w_1 w_2) w_3$

(3) В общия случай $w_1 w_2 \neq w_2 w_1$

Например при $\omega_1 = 10$, а $\omega_2 = 11$
$\omega_1\omega_2 = 1011 \neq 1110 = \omega_2\omega_1$

Ще считаме, че $\Sigma \subseteq \Sigma^*$, т.е. че $\forall$ буква е дума.

<u>Т8. (индукция по думите над Σ)</u>:
Нека $A \subseteq \Sigma^*$ е такова, че:
(i) $\varepsilon \in A$
(ii) $\omega \in A$, $a \in \Sigma$, то $\Rightarrow \omega a \in A$. Тогава
$A = \Sigma^*$

Д-во: Да допуснем, че $\Sigma^* \not\subseteq A$.
Тогава има дума от $\Sigma^* \setminus A \neq \emptyset$.
Нека $\omega \in \Sigma^* \setminus A$ е такава, че за $\forall\ \omega' \in \Sigma^*$, ако $|\omega'| < |\omega|$, то $\omega' \in A$., т.е.
ω' е дума с най-малка дължина в $\Sigma^* \setminus A$. Т.к. $\varepsilon \in A$, $\omega' \neq \varepsilon$ и сл. $\omega' = \omega'' a$ за някоя $\omega'' \in \Sigma^*$ и $a \in \Sigma$. Тогава

$$|\omega''| = |\omega'| - |a| = |\omega'| - 1 < |\omega'|$$

От тук $\omega'' \notin \Sigma^* \setminus A \Rightarrow \omega'' \in A$.
Но $\omega' = \omega'' a$ и значи $\omega' \in A$ съгласно (ii) $\mathring{X}$.
$\Rightarrow \Sigma^* \subseteq A$ и значи
$\Sigma^* = A$.

Опр.: Нека Σ е азбука. Под език над Σ ще разбираме вс. $L \subseteq \Sigma^*$.

Пример: (1) $\emptyset$, Σ^* и $\{\varepsilon\} \neq \emptyset$ са езици над Σ.

(2) $\Sigma = \{0,1\}$: $L = \{01, 00\}$ е език, $L = \{\underbrace{11\ldots1}_{n}\underbrace{00\ldots0}_{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ също е език

$L = \{w \in \{0,1\}^* \mid w$ е двоичен запис на просто ест. число$\}$ са езици.

<u>Основни операции в/у езици:</u>

1) Теоретико-множествените операции - $\cup, \cap, \setminus$ и операцията допълнение до Σ^*: ако $L \subseteq \Sigma^*$, дефинираме $\bar{L} = \Sigma^* \setminus L$.

2) Конкатенация на два езика: ако $L_1, L_2 \subseteq \Sigma^*$, дефинираме

$$L_1L_2 = \{w_1w_2 \mid w_1 \in L_1, w_2 \in L_2\}$$

перацията на конкатенация на уми и езици ни позволяват да ефинираме операции степенуване рез:

$\boxed{\text{за думи}}$

(i) $w^0 = \varepsilon$

(ii) $w^{n+1} = w^n \cdot w$

$\boxed{\text{за езици}}$

(i) $L^0 = \varepsilon$

(ii) $L^{n+1} = L^n . L$

Тв. : Нека $L \subseteq \Sigma^*$ и $n \in \mathbb{N}$. Тогава

$$L^n = \{w_1 w_2 \dots w_n \mid w_1, w_2, \dots, w_n \in L\}$$

Д-во: Индукция по n.

(i) $n = 0$ имаме $L^n = L^0 = \{\varepsilon\}$, а от друга страна конкатенация на 0 на брой думи е ε.

(ii) Нека $L^n = \{w_1 w_2 \dots w_n \mid w_1, \dots, w_n \in L\}$.

Тогава $w \in L^{n+1} \underset{\text{деф}}{\Leftrightarrow} w \in L^n . L \Leftrightarrow$

$w = w' w_{n+1}$ за някои $w' \in L^n$ и $w_{n+1} \in L \underset{\text{и.п.}}{\Leftrightarrow} w = \underbrace{w_1 w_2 \dots w_n}_{w'} w_{n+1}$

за някои $w_1, w_2, \dots, w_n, w_{n+1} \in L$.

$\Rightarrow L^{n+1} = \{w_1 w_2 \dots w_n w_{n+1} \mid w_1, \dots, w_{n+1} \in L\}$

Следствие: Нека Σ е азбука. Тогава $\Sigma^n = \{w \in \Sigma^* \mid |w| = n\}$

Д-во: Съгласно **Тв.** имаме

$$\Sigma^n = \{a_1 a_2 \dots a_n \mid a_1, \dots, a_n \in \Sigma\} =$$

$$= \{w \in \Sigma^* \mid |w| = n\}$$

Опр. Нека $L \subseteq \Sigma^*$. С L^* (звезда на Клини на L) ще отбелязваме езика $L^* = \bigcup_{n \geq 0} L^n = L^0 \cup L^1 \cup \ldots \cup L^n \ldots$

Тв. Нека $L \subseteq \Sigma^*$. Тогава $\omega \in L^* \Leftrightarrow$ за някое $n \geq 0$ $\omega = \omega_1 \omega_2 \ldots \omega_n$ за някои $\omega_1, \ldots, \omega_n \in L$.

Д-во: Използвайки дефиницията на L^* и предното Тв. имаме $\omega \in L^* \overset{\text{деф.}}{\Leftrightarrow} \omega \in L^n$ за някое $n \geq 0 \overset{\text{Тв}}{\Leftrightarrow}$ за някое $n \geq 0$ $\omega = \omega_1 \omega_2 \ldots \omega_n$ за някои $\omega_1 \omega_2 \ldots \omega_n \in L$

Забележка 1: 1) Тъй като $L^0 = \{\varepsilon\}$ и $L^0 \subseteq L^*$, $\varepsilon \in L^*$. (дори при $L = \emptyset$)

2) При $L = \Sigma$, $L^* = \Sigma^*$. По-точно

$$\Sigma^* = \Sigma^0 \cup \Sigma^1 \cup \Sigma^2 \ldots \cup \Sigma^n \cup \ldots$$

№ 8 Крайни автомати.

Детерминирани крайни автомати

Оттук до края на курса вс. азбуки, които разглеждаме, са крайни.

Опр.: Нека Σ е азбука. Под краен автомат над Σ ще разбираме вс. наредена четворка (Q, q_0, δ, F), където Q е крайно множество, $q_0 \in Q$ (в частност $Q \neq \emptyset$),

$$\delta : Q \times \Sigma \longrightarrow \underbrace{P(Q)}_{\text{подмн. на } Q}$$

$$F \subseteq Q$$

Пример: $\Sigma = \{0, 1\}$,

$Q = \{a, b\}$

$q_0 = a$

δ	0	1
a	$\{a\}$	$\{a, b\}$
b	$\emptyset$	$\{a\}$

ребро с етикет 0 или 1

от a към a → 0

към a → ре...

с етик...

и т.н...

$F = \{b\}$

Вс. краен автомат A е еквивалентен на мултиграф $G_A = (V, E, \gamma_1, \gamma_2)$

снабден с три етикетиращи функции.

$$L : E \to \Sigma, \ \mathcal{F} : V \to \{0, 1\} \text{ и}$$

$$I : V \to \{0, 1\}.$$ По-точно на вс. автомат $A = (Q, q_0, \delta, F)$ можем да съпоставим етикетиран мулти-граф $G_A = (Q, E_A, \gamma_{1A}, \gamma_{2A}; L_A, \mathcal{F}_A, I_A)$, където

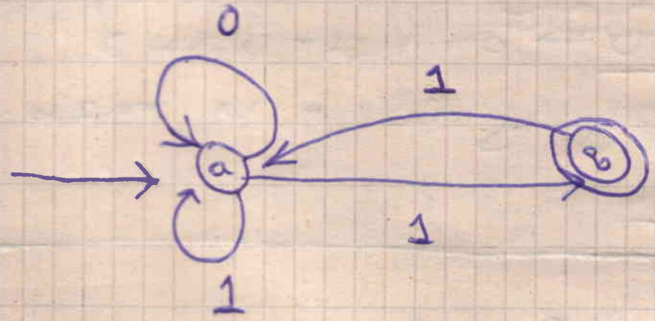
$$E_A = \{(q, a, q') \mid q' \in \delta(q, a)\},$$

$\gamma_{1A}(q, a, q_1) = q$, $\gamma_{2A}(q, a, q') = q'$,

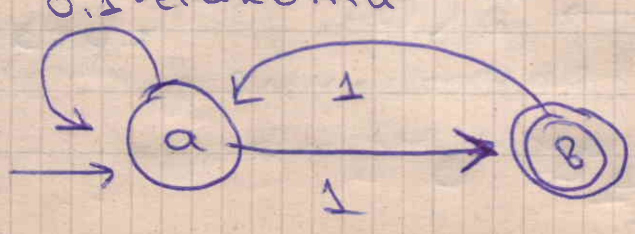
$$L_A(q, a, q') = a, \quad \mathcal{F}_A(q) = \begin{cases} 1 & q \in F \\ 0 & q \notin F \end{cases} = \chi_F,$$

$$I_A(q) = \begin{cases} 1 & , q = q_0 \\ 0 & , q \neq q_0 \end{cases} = \chi_{\{q_0\}}$$

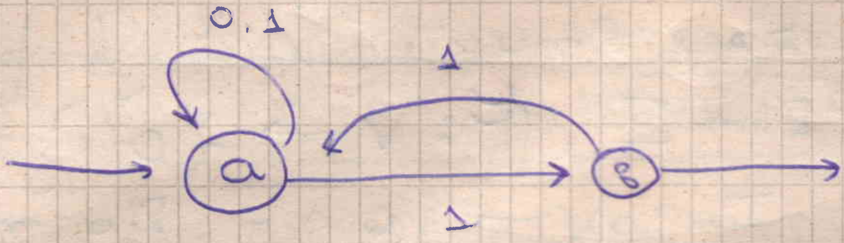
начално състояние



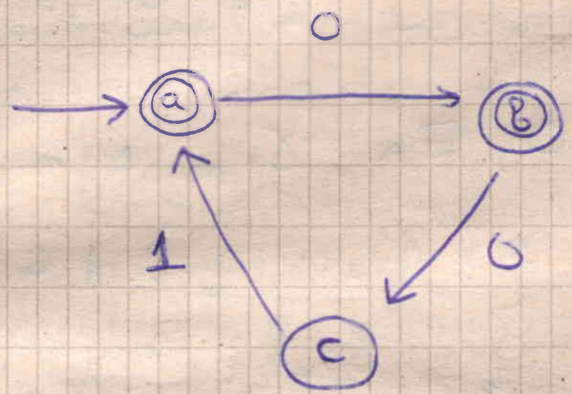
F-заключителни състояние



$\underline{0}\,\underline{1}1$ — 2 неусп.
— 1 усп.



Обратно:



$\Sigma = \{0.1\}$

	δ	0	1
→	*a	{b}	$\emptyset$
	*b	{c}	$\emptyset$
	c	$\emptyset$	{a}

*- заключително състояние

изпълн. е успешно → от начално, свършват инструкциите и как в ~~начално~~ заключително

001

Опр. Нека $A = (Q, q_0, \delta, F)$ е краен автомат. Деф. функцията $\delta^* : Q \times \Sigma^* \longrightarrow \mathcal{P}(Q)$ чрез
състояние
следната индукция по думите в Σ:

(i) $\delta^*(q, \varepsilon) = \{q\}$ за $\forall\ q \in Q$

(ii) $\delta^*(q, wa) = \bigcup\limits_{q' \in \delta^*(q, w)} \delta(q', a)$ за вс. $w \in \Sigma^*$, $a \in \Sigma$, $q \in Q$

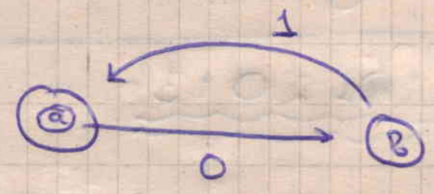
q · състояние

Нека $A = (Q, q_0, \delta, F)$ е кр. автомат и G_A е етикетираният мултиграф, съответстващ на A. Тогава за вс. $q_1, q_2 \in Q$ и вс. $w \in \Sigma^*$, $q_2 \in \delta^*(q_1, w) \Leftrightarrow$ съществува път $q_1 = v_0 e_1 v_1 e_2 v_2 \dots e_n v_n = q_2$ в G_A, такъв че $w = L(e_1)L(e_2)\dots L(e_n)$

Опр.: Нека $A = (Q, q_0, \delta, F)$ е краен автомат над Σ. Под език на A ще разбираме

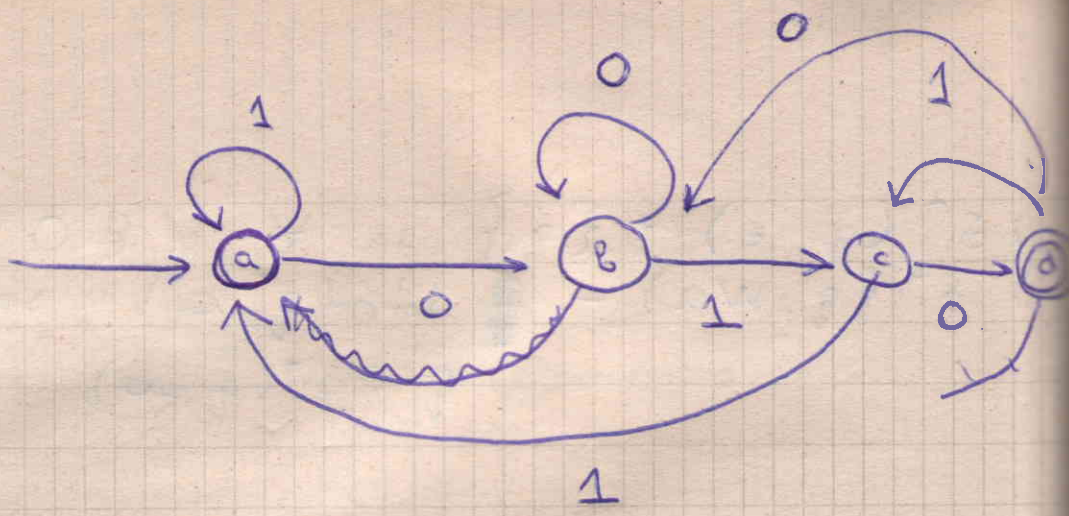
$$L(A) = \{w \in \Sigma^* \mid \delta^*(q_0, w) \cap F \neq 0\}$$

Пример: A



$$L(A) = \{\varepsilon, 01, 0101, 010101, \dots\} = \{(01)^n \mid n \geq 0\}$$

Пример: $L = \{w \in \{0,1\}^* \mid w$ завършва на $010\}$



A

$L(A) = L$

няма неопределеност
еднозначно ∀ инструкция

∀ срещане на 010

	0	1	1	0	1	1	0	1	0	1	1	0	1	0	1	0	1
a	~~φ~~ в	c	a	в	c	a	в	c	d	c	a	в	c	d	c	d	c

∀ път в d → 010
Търсене на подниз в низ.

27.10.2013г.

Упражнение

$L = \{\omega \in \{a, б, в\}^* \mid \omega$ завършва на аб $\}$

$L = \{\omega \in \{a, б\}^* \mid \omega$ завършва на 010 $\}$

$\varepsilon \notin L$

$0^{-1}L = L \cup \{10\} = L_1$

отпред 0 -> дума от L

$\varepsilon \notin L_1$

$1^{-1} L = L$

$0^{-1} L_1 = 0^{-1} L \cup 0^{-1} \{10\} = L_1$

$1^{-1} L_1 = 1^{-1} L \cup 1^{-1} \{10\} = \underbrace{L \cup \{0\}}_{= L_2}$

$\varepsilon \notin L_2$

$0^{-1} L_2 = 0^{-1} L \cup 0^{-1} \{0\} = L_1 \cup \{\varepsilon\} = L_3$

$\varepsilon \in L_3$

$1^{-1} L_2 = 1^{-1} L \cup 1^{-1} \{0\} = L$

$0^{-1} L_3 = 0^{-1} L_1 \cup 0^{-1} \{\varepsilon\} = L_1$

$1^{-1} L_3 = 1^{-1} L_1 \cup 1^{-1} \{\varepsilon\} = L_2$

$\varepsilon \in L_3$

$\varepsilon \notin L, L_1, L_2$

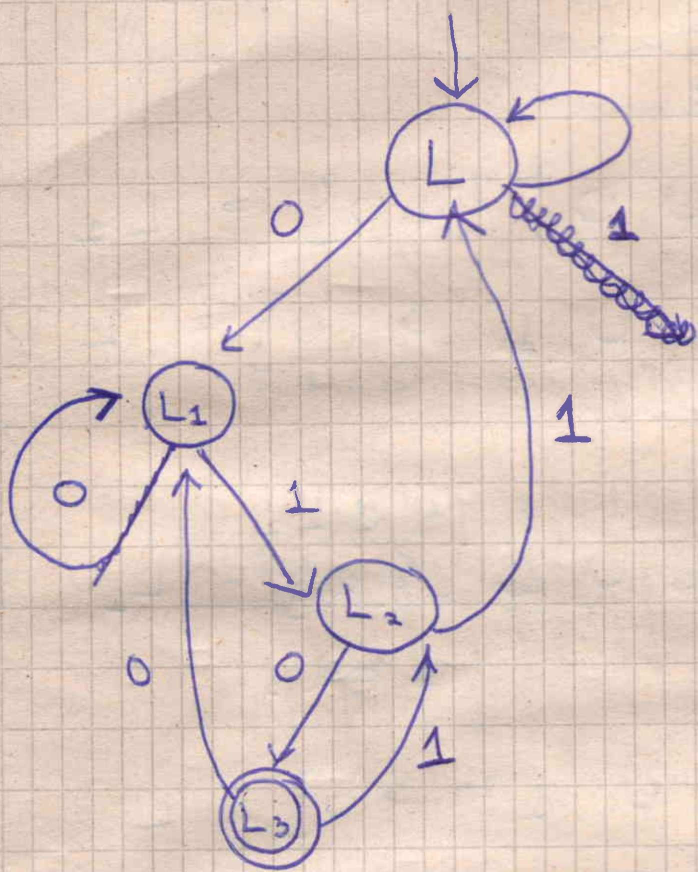
$\downarrow$

L

$\varepsilon \notin L \Rightarrow$

$L = 0(0^{-1} L) \cup 1(1^{-1} L)$

$L = 0L_1 \cup 1L$



$\varepsilon \in L_3 \Rightarrow L_3 = \{\varepsilon\} \cup (0(0^{-1})L_3$

$\cup (1(1^{-1}L_3) =$

$= \{\varepsilon\} \cup 0L_1 \cup 1L_2$.

L_3 - крайно $\varepsilon \in L_3$

<u>Минимален автомат</u>

- няма по-мал...
- ∀ ост. са изоморф... на не...

$$L = \{ \omega \in \{а, б, в\}^* \mid \omega \text{ завършва на аб} \}$$

$$\varepsilon \notin L$$

$$а^{-1} L = L \cup \{б\} = L_1$$

$$б^{-1} L = L$$

$$в^{-1} L = L$$

$$а^{-1} L_1 = а^{-1} L \cup а^{-1}\{б\} = L_1$$

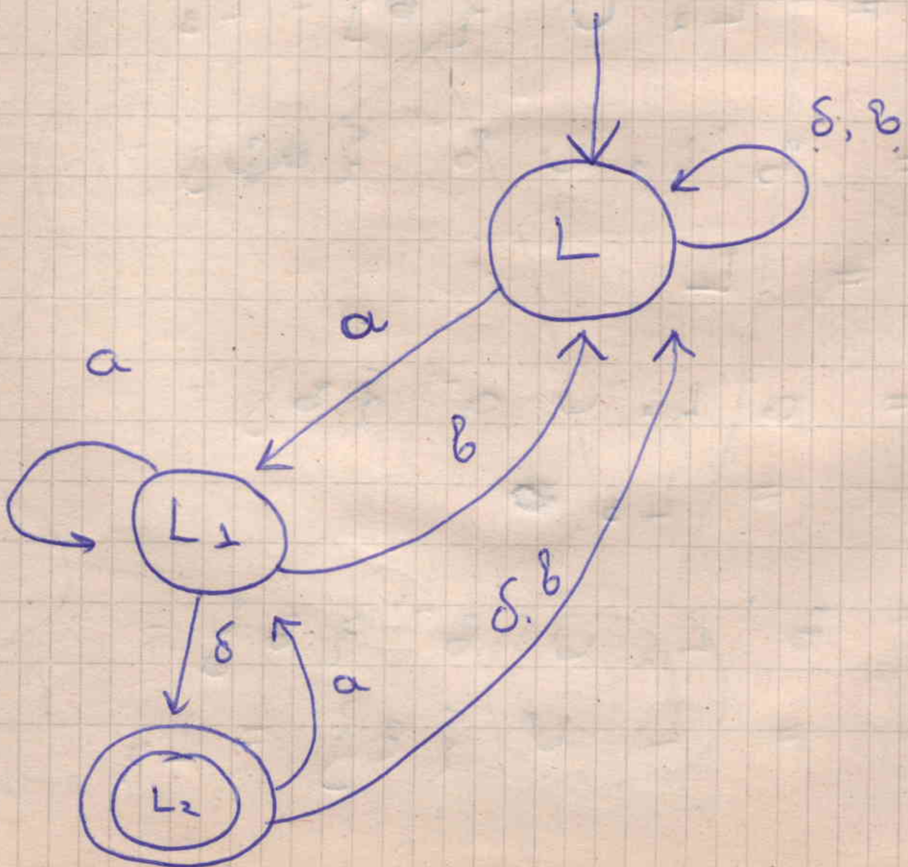
$$б^{-1} L_1 = б^{-1} L \cup б^{-1}\{б\} = L \cup \{\varepsilon\} = L_2$$

$$в^{-1} L_1 = в^{-1} L \cup в^{-1}\{б\} = L \qquad \varepsilon \in L_2$$

$$а^{-1} L_2 = а^{-1} L \cup а^{-1}\{\varepsilon\} = L_1$$

$$б^{-1} L_2 = б^{-1} L \cup б^{-1}\{\varepsilon\} = L$$

$$в^{-1} L_2 = в^{-1} L \cup в^{-1}\{\varepsilon\} = L$$



$L = \{ \omega \in \{a, b\}^* \mid \omega$ завършва на aab и ω съдържа четен брой b$\}$

Ш $a^{-1}L = \cancel{L \cup \{aab\}}\ L$

$b^{-1}L = \cancel{\{aab\}}\ \cancel{L_1} \{ \cancel{L_1}$ завършва на aab има нечет. бр. b$\} = L_1$

$a^{-1}L_1 = L_1 \cup \{ab\} = L_2$

$b^{-1}L_1 = L$

$a^{-1}L_2 = a^{-1}L_1 \cup a^{-1}\{ab\} =$

$= L_2 \cup \{b\} = L_3$

$b^{-1}L_2 = b^{-1}L_1 \cup b^{-1}\{ab\} =$

$= L$

$a^{-1}L_3 = a^{-1}L_2 \cup a^{-1}\{b\} =$

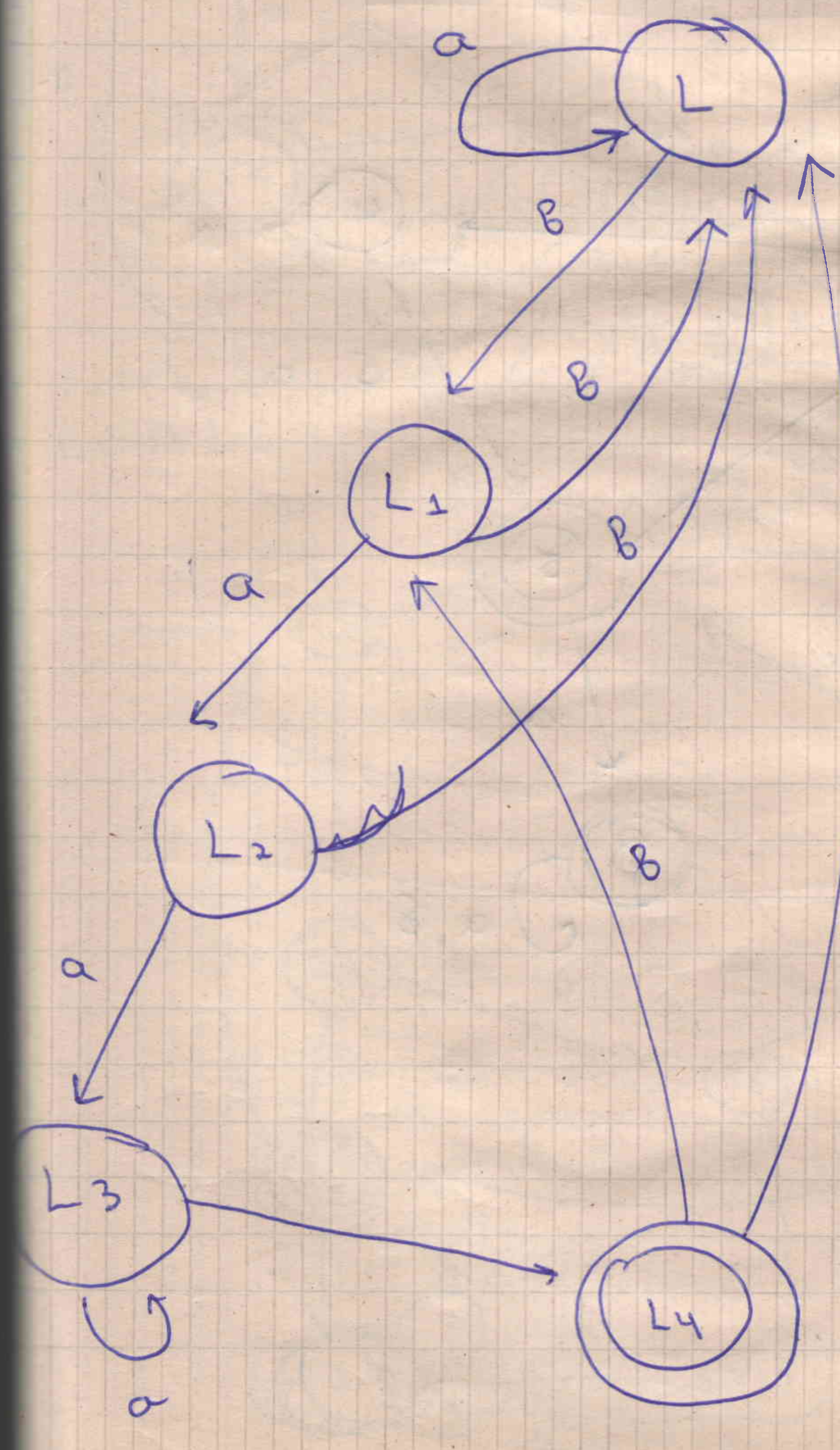
$= L_3$

$b^{-1}L_3 = b^{-1}L_2 \cup b^{-1}\{b\} =$

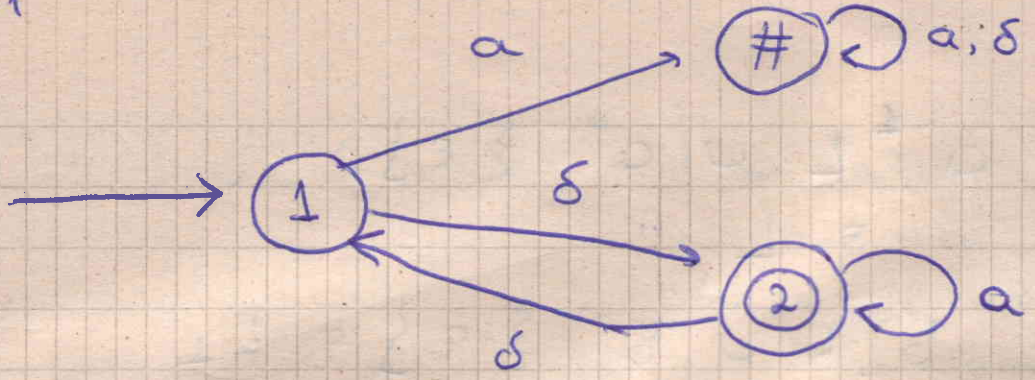
$= L \cup \{\varepsilon\} = L_4$

$$a^{-1}L_4 = a^{-1}L \cup a^{-1}\{\varepsilon\} =$$
$$= L$$

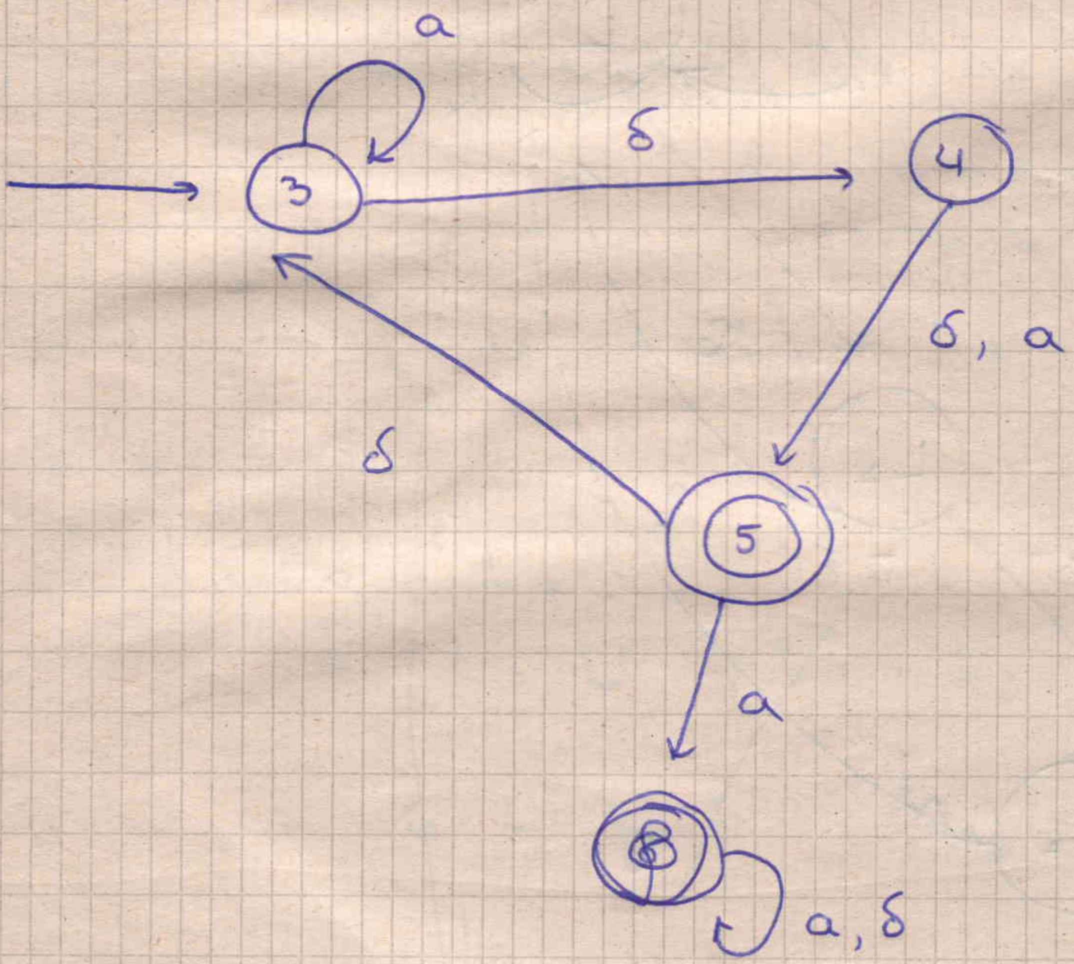
$$b^{-1}L_4 = b^{-1}L \cup b^{-1}\{\varepsilon\} = L_1$$



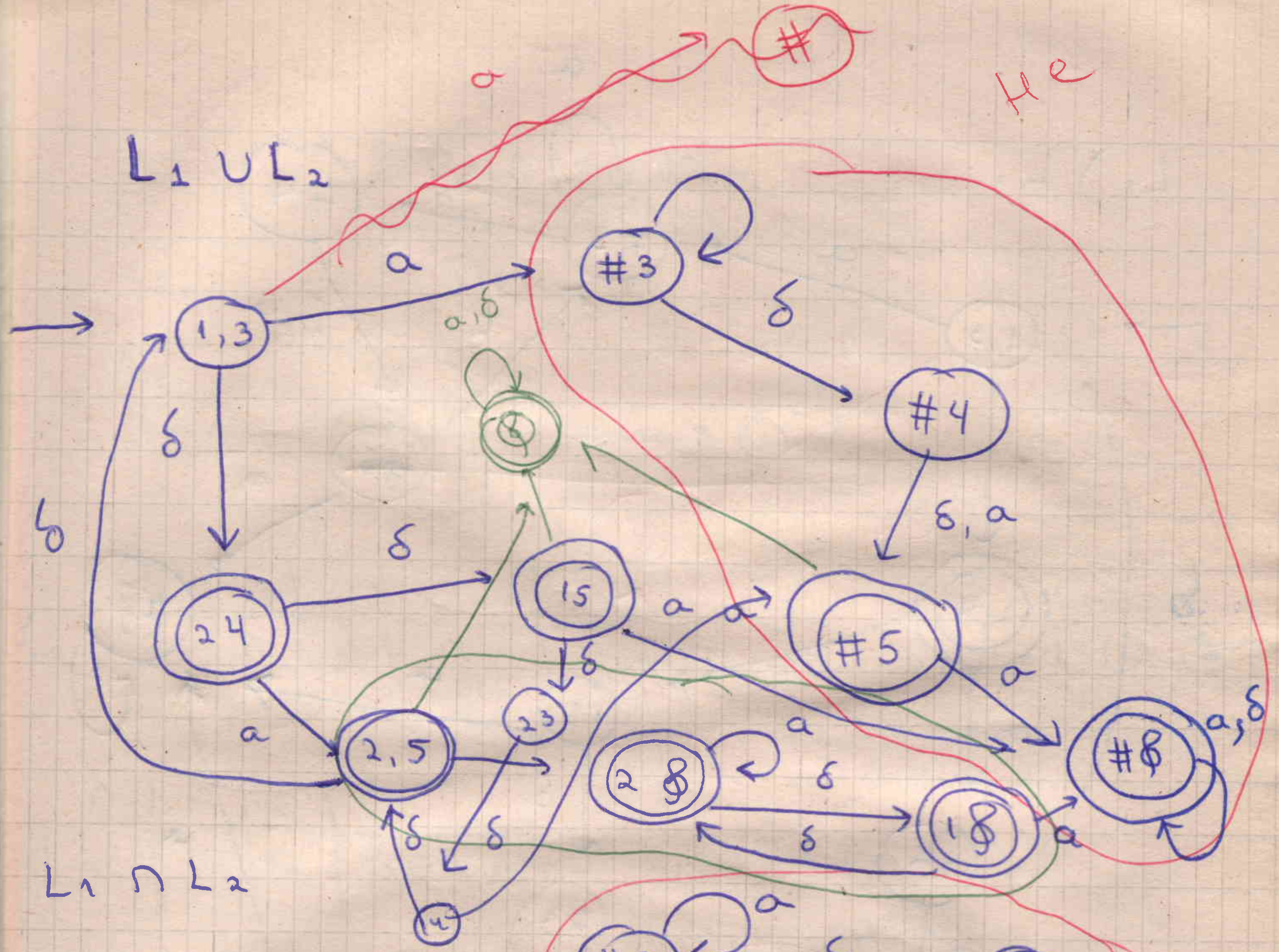
L_1



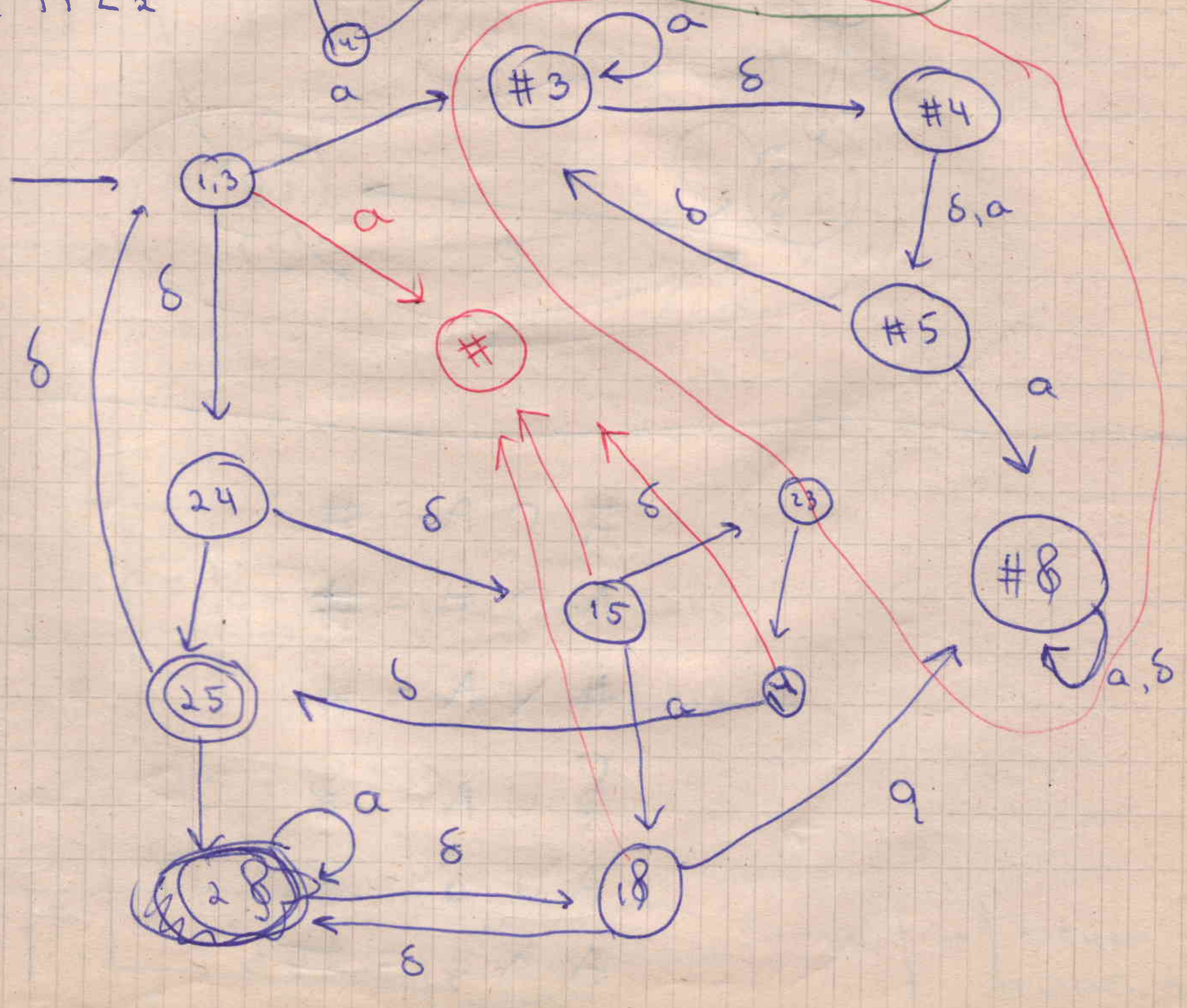
L_2



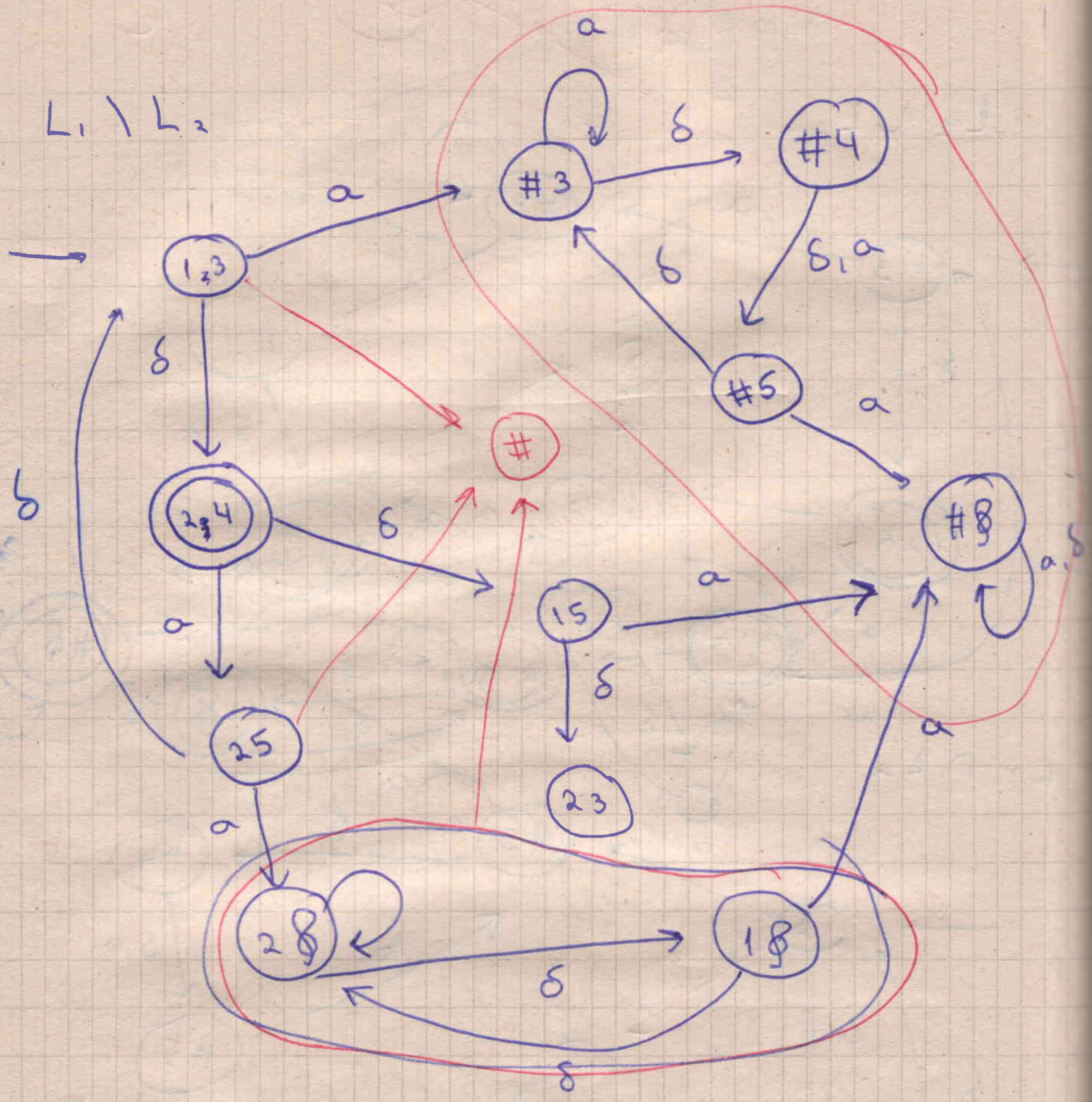
$L_1 \cup L_2$



$L_1 \cap L_2$



$L_1 \setminus L_2$



$\# \cap A = \#$

$A \cap \# = \#$

$\# \setminus A = \#$

$§ \cup A = §$

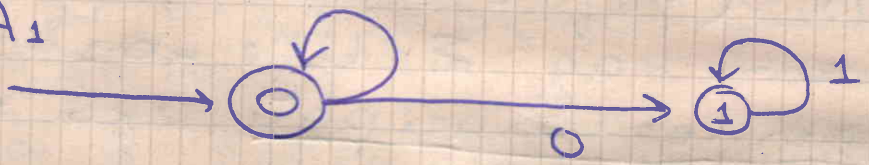
$A \cup § = §$

$A \setminus § = \#$

28.11.2013 г.

Лекция

A_1



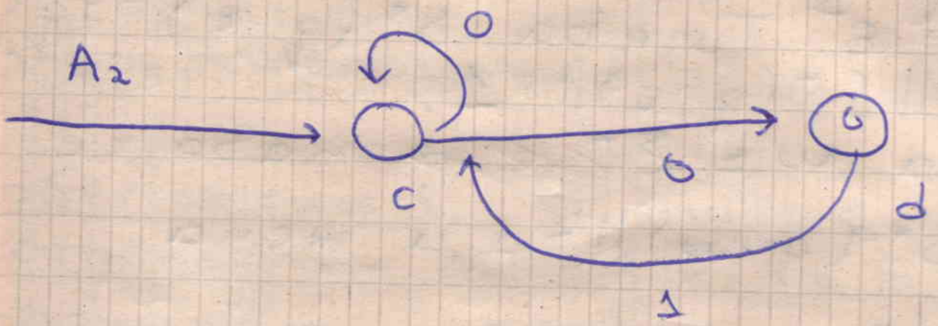
A_1'	0	0	1
a	в	a	a $\cap$ $*A_1$

успешно $001 \in L(A_1)$

A_1	0	0	0
a	в	a	$в \notin L\ A_1$

$000 \notin L(A_1)$
неуспешно

A_2



линейни

A_2	0	0	1	
c	c	c	—	неуспешно
		d	$c \in F_{A_2}$	неуспешно
d	d	—		неуспешно

$001 \notin L(A_2)$

A_2	0	0	0	
c	c	c	$c \notin F_1$	неусп.
			$d \in F_1$	успешно
		d	—	неусп.

d	—	неусп.

$000 \in L(A_2)$

I тип - детерминиран
II тип - нетедетриминиран

Опр. Нека $A = (Q, q, \delta, F)$ е кр. автомат над Σ. Ще казваме, че A е детерминиран, ако за вс. $q \in Q$ и $a \in \Sigma$
$\|\delta(q, a)\| \leq 1$.

Тв. Нека $A = (Q, q_0, \delta, F)$ е детерминиран автомат над Σ. Тогава за вс. $q \in Q$ и вс. $\omega \in \Sigma^*$

$$\|\delta^*(q, \omega)\| \leq 1$$

Д-во: Индукция по $\omega \in \Sigma^*$:
(1) $\omega \equiv \varepsilon$. Тогава $\delta^*(q, \varepsilon) = \{q\}$ и сл. $\|\delta^*(q, \varepsilon)\| = 1$.
(2) Нека $\omega \in \Sigma^*$ е такава, че

$\|\delta^*(q, \omega)\| \leq 1$ и нека

$a \in \Sigma$. Имаме

$$\delta^*(q, \omega a) = \bigcup_{q' \in \delta^*(q, \omega)} \delta(q', a)$$

1сл.) $\|\delta^*(q, \omega)\| = 0$, т.е.

$$\delta^*(q, \omega) = \emptyset.$$

Тогава $\delta^*(q, \omega a) = \emptyset$. Тогава $\delta^*(q, \omega, a) = \bigcup_{q \in \emptyset} \delta(q', a) = \emptyset$ и сл.

$\|\delta^*(q,wa)\| = 0$

2сл.) $\|\delta^*(q,w)\| = 1$. Нека $\delta^*(q,w) = \{s\}$ за някое $s \in Q$. Тогава $\delta^*(q,wa) =$
$= \bigcup_{q' \in \delta^*(q,w)} \delta(q',a) = \delta(s,a)$. От детерминираността на A $\|\delta^*(q,wa)\| = \|\delta(s,a)\| \leq 1$.

<u>Опр</u>. Нека $A = (Q, q_0, \delta, F)$ е кр. автомат над Σ. Ще казваме, че A е <u>тотален</u>, ако за вс. $q \in Q$ и $a \in \Sigma$, $\|\delta(q,a)\| \geq 1$.

<u>ТВ</u>. Нека $A = (Q, q_0, \delta, F)$ е тотален автомат над Σ. Тогава за вс. $q \in Q$ и $w \in \Sigma^*$, $\|\delta^*(q,w)\| \geq 1$

Д-во: Аналогично на предното <u>ТВ</u>.

<u>Забележка 1</u>: В случай, че крайният автомат $A = (Q, q_0, \delta, F)$ над Σ е тотален и детерминиран, то за $\forall$ $q \in Q$ и $a \in \Sigma$, $\|\delta(q,a)\| = 1$ и за вс. $q \in Q$ и вс. $w \in \Sigma^*$, $\|\delta^*(q,w)\| = 1$.
В този случай можем да считаме, че $\delta : Q \times \Sigma \longrightarrow Q$

<u>Забележка 2</u>: В случай, че крайният автомат $A = (Q, q_0, \delta, F)$ над Σ е тотален и детерминиран, на всяка дума $w \in \Sigma^*$ и на вс. $q \in Q$

съответства един единствен път $q e_1 q_1 \dots e_m q_m$ в графа G_A.

Th Нека $A = (Q, q_0, \delta, F)$ е краен автомат над Σ. Нека $A' = (Q', q_0', \delta', F')$, където $Q' = \mathcal{P}(Q)$, $q_0' = \{q_0\}$, $\delta' : Q' \times \Sigma \to Q'$, деф. с $\delta'(S, a) = \bigcup_{q \in S} \delta(q, a)$, а

$F' = \{ S \in Q' \mid S \cap F \neq \emptyset \}$. Тогава A' е тотален и детерминиран и $L(A) = L(A')$

Д-во: Очевидно A' е тотален и детерминиран краен автомат. Ще док., че за вс. $w \in \Sigma^*$ ~~...~~ ~~...~~ е в сила

$$\delta'^*(\{q_0\}, w) = \delta^*(q_0, w).$$

Инд. по w.

(1) $w = \varepsilon$. Тогава $\delta'^*(\{q_0\}, \varepsilon) = \{q_0\} = \delta^*(q_0, \varepsilon)$

(2) Нека $w \in \Sigma^*$ е такава, че $\delta'^*(\{q_0\}, w) = \delta^*(q_0, w)$ и нека $a \in \Sigma$. Тогава $\delta'^*(\{q_0\}, wa) = \delta'(\delta'^*(\{q_0\}, w), a) =$

$= \delta'(\delta^*(q, w), a) = \bigcup_{q \in \delta^*(q_0, w)} \delta(q, a) =$

$= \delta^*(q_0, wa)$. Тогава

$$L(A') \underset{def}{=} \{w \in \Sigma^* \mid \delta'^*(\{q_0, w\} \in F\} =$$

$$= \{w \in \Sigma^* \mid \delta'^*\{q_0\}; w) \cap F \neq \emptyset\} =$$

$$= \{w \in \Sigma^* \mid \delta^*(q_0, w) \cap F \neq 0\} \underset{def}{=} L(A).$$

№ 9 Лема за разрастването на автоматните езици. Езици, които не са автоматни.

Опр. Ще казваме, че езикът $L \subseteq \Sigma^*$ е автоматен, ако същ. краен автомат A над Σ, такъв че $L = L(A)$.

Лема. Нека $A = (Q, q_0, \delta, F)$ е краен автомат над Σ. Тогава за вс. $q \in Q$ и $u, v \in \Sigma^*$,

$$\delta^*(q, uv) = \bigcup_{q' \in \delta^*(q, u)} \delta^*(q', v).$$

В частност, ако A е тотално дет. и $\delta : Q \times \Sigma \to Q$, то

$$\delta^*(q, uv) = \delta^*(\delta^*(q, u), v).$$

Д-во: Индукция по v: (1) $v = \varepsilon$. Тогава

$$\delta^*(q, uv) = \delta^*(q, u) = \bigcup_{q' \in \delta^*(q, u)} \{q'\} =$$

$$= \bigcup_{q' \in \delta^*(q,u)} \delta^*(q',\varepsilon) = \bigcup_{q' \in \delta^*(q,u)} \delta^*(q',v)$$

(2) Нека $v \in \Sigma^*$ е такава, че $\delta^*(q,uv) = \bigcup_{q' \in \delta^*(q,u)} \delta^*(q',v)$ и нека $a \in \Sigma$. Тогава

$$\delta^*(q,u(va)) = \delta^*(q,(uv)a) = \bigcup_{q'' \in \delta^*(q,uv)} \delta(q'',a) =$$

$$= \bigcup_{q'' \in \bigcup_{q' \in \delta^*(q,u)} \delta^*(q',v)} \delta(q'',a) = \bigcup_{q' \in \delta^*(q,u)} \left(\bigcup_{q'' \in \delta^*(q',v)} \delta(q'',a) \right) =$$

$$= \bigcup_{q' \in \delta^*(q,u)} \delta^*(q',va)$$

:))

Лема

Th (Лема за разрастването, Pumping Lemma)

Нека L е автоматен език. Тогава същ. ест. число n, такова че за вс. $w \in L$, ако $|w| \geq n$, то тогава същ. думи x, y и z, т.че

$w = xyz$, $|xy| \leq n$
$|y| \geq 1$ и за $\forall i \in \mathbb{N}$
$xy^iz \in L$.

$$xy^iz = x\underbrace{yyy\dots y}_{i}z$$

Д-во: Нека L е автоматен и нека $A = (Q, q_0, \delta, F)$ е краен тотален и детерминиран автомат ($\delta: Q \times \Sigma \longrightarrow Q$), такъв че $L(A) = L$. Нека $n = \|Q\|$. Нека $w \in L$ и $|w| > n$. Нека w задава пътя $q_0 e_1 q_1 e_2 q_2 \dots e_m q_m$ в G_A (разбира се, т.к. $w \in L$ и A е детерминиран, $q_m \in F$).
Тъй като $m = |w| > n = \|Q\|$, $q_k = q_s$ за някои $0 \leq k < s \leq m$.
Нека ~~$x \neq \delta^*$~~ (x, y, z) са такива, че $\delta^*(q_0, x) = q_k$; $\delta^*(q_k, y) = q_s$, $\delta^*(q_s, z) = q_m$ и $xyz = w$.
Тогава за вс. $i \in \mathbb{N}$ $\delta^*(xy^iz) =$
$= \delta^*(\delta^*(q_0, x), y^iz) = \delta^*(q_k, y^iz) =$
$= \delta^*(\delta^*(q_k, y), y^{i-1}z) =$
$= \delta^*(q_s, y^{i-1}z) \underset{q_k = q_s}{=} \delta^*(q_k, y^{i-1}z) =$

$= \delta^*(q_k, y^{i-2}z) = \ldots = \delta^*(q_k, y^0 z) =$
$= \delta^*(q_k, z) = q_m \in F$ и $xy^i z \in L(A)$

<u>Т8.</u> Езикът $L = \{0^m 1^m \mid m \geq 0\}$ не е автоматен.

<u>Заб.</u> $L = \{\varepsilon, 01, 0011, 000111, \ldots, \underbrace{000\ldots0}_{m}\underbrace{11\ldots1}_{m}, \ldots\}$

Д-во: Да доп., че L е автоматен и нека n е числото от лемата. Нека $w = 0^{n+1}1^{n+1}$. Тогава $w \in L$ и $|w| = 2n+2 > n$, откъдето $w = xyz$ за някои $x, y, z \in \{0,1\}^*$, такива че

$$|xy| \leq n, \ |y| \geq 1 \text{ и }$$

$$xy^i z \in L \text{ за вс. } i \in \mathbb{N}.$$

Тъй като $xyz = 0^{n+1}1^{n+1}$ и

$$|xy| \leq n$$

$$\underbrace{0\ldots0}_{n+1}\underbrace{11\ldots1}_{n+1}$$

$xy = 0^k$ за някое $k \in \mathbb{N}$, откъдето $y = 0^s$ за някое $s \in \mathbb{N}$. При това $0 < s$, т.к. $|y| \geq 1$.

Тогава $xz = xy^0 z \in L$, но

$xz = 0^{n+1-s} 1^{n+1} \notin L$, т.к. $n+1-s < n+1$

$\Rightarrow L$ не е автоматен.

№10

Затвореност на автоматните езици относно ~~...~~ $\cup$, $\circ$, $*$, $\cap$

Тв. 1: Нека $A_1 = (Q_1, q_{01}, \delta_1, F_1)$ и $A_2 = (Q_2, q_{02}, \delta_2, F_2)$ са кр. автомати над Σ. Нека $A = (Q, q_0, \delta, F)$ е кр. автомат, за който $Q = Q_1 \cup Q_2 \cup \{q_0\}$, $q_0 \notin Q_0 \cup Q_1$, $F = F_1 \cup F_2$, а

$$\delta(q,a) = \begin{cases} \delta_1(q,a), & q \in Q_1 \\ \delta_2(q,a), & q \in Q_2 \\ \delta_1(q_{01},a) \cup \delta_2(q_{02},a), & q = q_0 \end{cases}$$

за вс. $q \in Q$ и $a \in \Sigma$. Тогава $L(A) = L(A_1) \cup L(A_2)$.

Д-во: Ще док., че за $\forall \omega \in \Sigma^*$, $\omega \neq \varepsilon$

$$\boxed{\delta^*(q_0, \omega) = \delta_1^*(q_{01}, \omega) \cup \delta_2^*(q_{02}, \omega)}$$

Инд. по $\omega \in \Sigma^*$, $\omega \neq \varepsilon$:

(1) $\omega = a$ за някое $a \in \Sigma$. Тогава

$$\delta^*(q_0, a) \underset{def}{=} \delta(q_0, a) \underset{def}{=} \delta_1(q_{01}, a) \cup \delta_2(q_{02}, a)$$

(2) Нека $\omega \in \Sigma^*$, $\omega \neq \varepsilon$ е т., че

$\delta^*(q_0, w) = \delta_1^*(q_{01}, w) \cup \delta_2^*(q_{02}, w)$.

Тогава нека $a \in \Sigma$. Тогава

$$\delta^*(q_0, wa) = \bigcup_{q' \in \delta^*(q, w)} \delta(q', a) =$$

$$= \bigcup_{q' \in \delta_1^*(q_{01}, w) \cup \delta_2(q_{02}, w)} \delta(q', a) =$$

$$= \Big(\bigcup_{\substack{q' \in \delta_1^*(q_{01}, w) \\ \cap \\ Q_1}} \delta(q', a) \Big) \cup \Big(\bigcup_{\substack{q' \in \delta_2^*(q_{02}, w) \\ \cap \\ Q_2}} \delta(q', a) \Big) =$$

$$= \Big(\bigcup_{q' \in \delta_1^*(q_{01}, w)} \delta_1(q', a) \Big) \cup \Big(\bigcup_{q' \in \delta_2^*(q_{02}, w)} \delta_2(q', a) \Big) =$$

$$= \delta_1^*(q_{01}, wa) \cup \delta_2^*(q_{02}, wa)$$

Оттук, $L(A) = \{ w \in \Sigma^* \mid \delta^*(q_0, w) \cap F \neq \varnothing \}$

$$= \{ w \in \Sigma^* \mid [\delta_1^*(q_{01}, w) \cup \delta_2^*(q_{02}, w)] \cap (F_1 \cup F_2) \neq \varnothing \} =$$

$$\{ w \in \Sigma^* \mid \delta_1^*(q_{01}, w) \cap F_1 \neq \varnothing \text{ или } \delta_2^*(q_{02}, w) \cap F_2 \neq \varnothing \} =$$

$\delta_1(q_1, w) \subseteq Q_1$

$F_1 \subseteq Q_1$

$\delta_2^*(q_2, w) \subseteq Q_2$

$F_2 \subseteq Q$

$Q_1 \cap Q_2 = \varnothing$

$$= \{\omega \in \Sigma^* \mid \delta_1^*(q_{01}, \omega) \cap F_1 \neq \emptyset\} \cup$$

$$\cup \{\omega \in \Sigma^* \mid \delta_2^*(q_{02}, \omega) \cap F_2 \neq \emptyset\} =$$

$$= L(A_1) \cup L(A_2)$$

$$J = \int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\, dx \qquad x\sqrt{1-x^2}\Big|_{-1}^{1} - x\, d$$

$x = \sin t$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \sqrt{\cos^2 t} = \int_{-1}^{1} -\cos^2 t\, dt =$$

$$\begin{pmatrix} \lambda & \lambda^2 & 0 & 0 & - & 0 \\ 1 & 2\lambda+1 & (\lambda+1)^2 & - & - & 0 \\ 0 & 1 & 2\lambda+3 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & 0 & 1 & & \\ 0 & 0 & \dots & & 1 & 2\lambda+2n-3 \end{pmatrix}$$

$-\frac{1}{2\lambda+1}$ $\quad -\frac{1}{2\lambda+3}$

$$= \begin{pmatrix} \cancel{\lambda+1} & \cancel{(\lambda+1)^2} & \cancel{(\lambda+1)^2} & \cancel{0} & - & - & 0 \\ \cancel{1} & \cancel{\lambda+2} & \cancel{(\lambda+2)^2} & & & & \end{pmatrix}$$

$$= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{-1+\cos 2t}{2} = +\frac{1}{2}\left(\frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\right) \quad \frac{\pi}{4} \quad \frac{\pi}{4}$$

1) $(a+b)+c = a+(b+c)$
2) $a+b = b+a$
3) $a+0 = a$
4) $1 \cdot a = a$
5) $\lambda(\mu a) = (\lambda\mu)a$
6) $\lambda(a+b) = \lambda a + \lambda b$
7) $(\lambda+\mu)a = \lambda a + \mu a$
8) $a + (-a) = 0$

$$\int \cos^2 t\, dt = \int \frac{1+\cos 2t}{2}\, dt =$$

$$\boxed{1-\sin^2 t} \quad \cos t\, dt$$

$$\cos^2 t\, dt = \cos^2 t\, dt =$$

$dx = \cos t\, dt$