Име: Пламена Галинова Петрова   Фак. номер: 80888   Специалност: Компютърни науки
поток: 1   група: 2

Курсова задача №3 / като използвате развитият степенен ред пресметнете с точност $\varepsilon = 10^{-4}$ стойността на определения интеграл $\int_0^{1/2} \frac{\ln(1-x)}{x}\,dx$

$$\ln(1-x) = \int \frac{1}{1-x}\,dx = \int \sum_{n=0}^{\infty} x^n\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int x^n\,dx = C + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

$$\frac{1}{x}\ln(1-x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} \cdot x^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+1}$$

$$\int_0^{1/2} \frac{\ln(1-x)}{x}\,dx = \int_0^{1/2} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+1} \right) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} \int_0^{1/2} x^n\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{(n+1)^2}$$

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1/2)^{n+1}}{(n+1)^2} \qquad S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(1/2)^{k+1}}{(k+1)^2}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n - \sum_{k=0}^{n} u_k < u_{n+1}, \text{ където } u_n = \frac{(1/2)^{n+1}}{(n+1)^2} \text{ и } u_k = \frac{(1/2)^{k+1}}{(k+1)^2}$$

$$S - S_n < \frac{(1/2)^{n+2}}{(n+2)^2} < \frac{1}{10\,000} \qquad \frac{(n+2)^2}{(1/2)^{n+2}} > 10\,000$$

$$\Rightarrow \int_0^{1/2} \frac{\ln(1-x)}{x}\,dx \approx \sum_{k=0}^{6} \frac{(1/2)^{k+1}}{(k+1)^2}$$

при $n = 6$ получаваме 6272

при $n = 7$ получаваме 16384

Име: Пламена Галинова Петрова Фак.номер: 80888 Специалност: Компютърни науки
поток: 1 група: 2

Курсова задача №4 / Намерете общото решение във вид на степенен ред около т.0 на даденото линейно диф. уравнение от втори ред и определете R

$$(8x+3)y''+y'=0$$

Търсим $y(x)$ така, че да ~~(удовлетвора)~~ удовлетворява това уравнение. Търсим $y(x)$ във вид на степенен ред (около т.0)

$$y'(x)=\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}n.a_nx^{n-1},\ |x|<r$$

$$y''(x)=\left(\sum_{n=1}^{\infty}n.a_nx^{n-1}\right)'=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2},\ |x|<r$$

Ще определим коефициентите $a_0,a_1,\dots$ по такъв начин, че степенният ред $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ да удовлетвори даденото дифер. уравнение

$$(8x+3)y''+y'=(8x+3)\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}+\sum_{n=1}^{\infty}n.a_nx^{n-1}=$$

$$=8x\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}+3\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}+\sum_{n=1}^{\infty}n.a_nx^{n-1}=$$

$$=8\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-1}+3\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}+\sum_{n=1}^{\infty}n.a_nx^{n-1}=$$

$$=8\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)(n)a_{n+1}x^n+3\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n+\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n=$$

$$=6a_2+a_1+\sum_{n=1}^{\infty}[8(n+1)na_{n+1}+3(n+2)(n+1)a_{n+2}+(n+1)a_{n+1}]x^n$$

Тъй като развитието в степенен ред е единствено, то за да бъде степенният ред $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ решение на диф. уравнение е необходимо и достатъчно всички коефициенти вдясно на последното равенство да бъдат 0, т.е

$$(2)\begin{cases}6a_2+a_1=0\\ 8(n+1)na_{n+1}+3(n+2)(n+1)a_{n+2}+(n+1)a_{n+1}=0 \Leftrightarrow (n+1)(8n+1)a_{n+1}+3(n+2)(n+1)a_{n+2}=0\end{cases}$$

$$\Rightarrow a_1=-6a_2$$

$$(2)\ a_{n+2}=\frac{\cancel{(n+1)}(8n+1)}{3\cancel{(n+1)}(n+2)}a_{n+1}=\frac{8n+1}{3(n+2)}a_{n+1},\ n\geq 1$$

Заместваме в (2) с $n=1,2,3\dots$ и получаваме следните резултати

$$n=1\Rightarrow a_3=\frac{9a_2}{3.3}$$

$$n=2\Rightarrow a_4=\frac{17a_3}{12}$$

$$n=3\Rightarrow a_5=\frac{25a_4}{15}$$

Тогава $a_n=\prod_{i=1}^{n-3}\frac{8i+1}{3(i+2)}a_{n+1}$ $n\geq 3$ тъй като $a_2=\frac{-a_1}{6}\Rightarrow a_n=\frac{-a_1}{6}\prod_{i=1}^{n-3}\frac{8i+1}{3(i+2)}$

$$y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\dots=a_0.1+a_1.x-\frac{a_1}{6}x^2+a_3.x^3=a_0y_1(x)+a_1.y_2(x)$$

$y_1(x)=1$

$y_2(x) = x - \frac{x^2}{6} - \frac{1}{6}\sum_{n=3}^{\infty}\prod_{i=1}^{n-3}\frac{8i+1}{3(i+2)}x^n$

Тези разсъждения показват, че функциите $y_1(x)$ и $y_2(x)$ удовлетворяват диф. уравнение. Следователно всяка тяхна линейна комбинация също го удовлетворява. Следователно всяка функция $y(x)$, $y(x)=a_0y_1(x)+a_1y_2(x)$ $a_0, a_1 \in \mathbb{R}$ удовлетворява диф. уравнение в интервала $(-\varepsilon,\varepsilon)$. Остава да определим дали съществува $\varepsilon>0$ и колко най-много може да бъде то така, че редовете, деф. функциите y_1 и y_2 да са сходящи при $|x|<\varepsilon$.

За тази цел ще използваме критерият на Даламбер. Разглеждаме реда

$x-\frac{x^2}{6}-\frac{1}{6}\sum_{n=3}^{\infty}\prod_{i=1}^{n-3}\frac{8i+1}{3(i+2)}|x|^n \qquad x\neq 0$

Полагаме $u_n=\prod_{i=1}^{n-3}\frac{8i+1}{3(i+2)}|x|^n$

Разглеждаме $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\prod_{i=1}^{n-2}\frac{8i+1}{3(i+2)}|x|^{n+1}}{\prod_{i=1}^{n-3}\frac{8i+1}{3(i+2)}|x|^n} = \frac{8(n-2)+1}{3[(n-2)+2]}|x| = \frac{8n-15}{3n}|x| \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{8}{3}|x|$

За да бъде сходящ реда $\frac{8}{3}|x|$ трябва да бъде <1 => $x\in\left(-\frac{3}{8};\frac{3}{8}\right)$

От критерият на Даламбер => $\sum_{n=3}^{\infty}\prod_{i=1}^{n-3}\frac{8i+1}{3(i+2)}x^n$ е сходящ

=> $y_2(x)$ е добре дефинирана за $x\in\left(-\frac{3}{8},\frac{3}{8}\right)$

=> $y(x) = a_0 y_1(x) + a_1 y_2(x)$ е решение на ДУ върху $x\in\left(-\frac{3}{8},\frac{3}{8}\right)$

Име: Пламена Галинова Петрова Фак.номер: 80888 Специалност: Компютърни науки
поток: 1 група: 2

Курсова задача 2 / Изследвайте функцията $f(x)=\dfrac{\sqrt{1+|x-2|}}{1+|x|}$

За да изследваме функцията ще я разгледаме в три различни интервала:

1) $x\in(-\infty,0]$ 2) $x\in[0,2]$ 3) $x\in[2,+\infty)$

1) ~~Идея~~ $f(x)=\dfrac{\sqrt{3-x}}{1-x}$ 1) дефиниционна област $\boxed{x\neq 1 \quad x\in(-\infty,3]}$ $\Rightarrow x\in(-\infty,0]$

2) четност / нечетност $f(-x)=\dfrac{\sqrt{3+x}}{1+x}\neq\pm f(x)\Rightarrow f(x)$ не е нито четна, нито нечетна.

3) Поведението в дефиниционните ѝ области

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{3-x}}{1-x}\overset{\text{Л}}{=}\lim_{x\to-\infty}\frac{(\sqrt{3-x})'}{(1-x)'}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-\frac{1}{2\sqrt{3-x}}}{-1}=\frac{1}{2\sqrt{3-x}}=\frac{1}{2\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{3-x})}=\frac{1}{2.\infty}=0$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{3-x}}{1-x}=\frac{\sqrt{3-\lim\limits_{x\to0}(x)}}{1-\lim\limits_{x\to0}(x)}=\frac{\sqrt3}{1}=\sqrt3$$

Няма наклонена асимптота

пресичаме точките с координатните оси: с Ox $f(x)=0\Rightarrow\sqrt{3-x}=0\Rightarrow x=3\notin(-\infty,0]$

с Oy $f(0)=\dfrac{\sqrt3}{1}=\sqrt3$

Изследваме за ↗ и за ↘ / $f'(x)=\left(\dfrac{\sqrt{3-x}}{1-x}\right)'=\dfrac{(1-x)(\sqrt{3-x})'-(1-x)'\sqrt{3-x}}{(1-x)^2}=\dfrac{\frac{1}{2\sqrt{3-x}}(3-x)'(1-x)-(-1)\sqrt{3-x}}{(1-x)^2}=$

$=\dfrac{\sqrt{3-x}-\frac{1.(1-x)}{2\sqrt{3-x}}}{(1-x)^2}=\dfrac{\frac{5-x}{2\sqrt{3-x}}}{(1-x)^2}$

$x=5\notin ДО$
$x=3\in ДО$
$x=1\notin ДО$

$0 \quad 1 \quad 3 \quad 5$; $+ \nearrow \quad + \nearrow \quad - \quad +$

$\Rightarrow x=0$ точка на локален max в интервала $(-\infty,0]$ $f(x)=\sqrt3$

$$f''(x)=\frac{\left(2(1-x)\sqrt{3-x}+\frac{(1-x)^2}{2\sqrt{3-x}}\right).(5-x)-(1-x)^2\sqrt{3-x}}{2.(1-x)^4.(3-x)}=\cancel{\frac{\frac{4(1-x)(3-x)+(1-x)^2}{2\sqrt{3-x}}.(5-x)-(1-x)^2.\sqrt{3-x}}{2(1-x)^4(3-x)}}=$$

$$=-\frac{3x^2-30x+59}{4(3-x)^{3/2}(x-1)^3}.$$

$x=1$
$x=3$
$x=5\pm\frac{4}{3}\sqrt3\notin ДО$

$\cup \; + \quad 1 \quad \cap \; - \quad 3$

2) $x\in[0,2] \Rightarrow f(x)=\dfrac{\sqrt{3-x}}{1+x}$ 1) дефинициона област $x\in(-\infty;3]\cup x\neq -1 \Rightarrow x\in[0,2]$

2) четност/нечетност $f(-x)=\dfrac{\sqrt{3+x}}{1-x}\neq\pm f(x) \Rightarrow f(x)$ не е нито четна нито нечетна

3) поведението в краищата на деф. ѝ област.

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{3-x}}{1+x}=\sqrt{3}$ $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{3-x}}{1+x}=\dfrac{\sqrt{3-\lim\limits_{x\to 2}x}}{1+\lim\limits_{x\to 2}x}=\dfrac{\sqrt{3-2}}{1+3}=\dfrac{1}{3}$

Пресечни точките с координатните оси: с Ox $f(x)=0 \Rightarrow \sqrt{3-x}=0 \Rightarrow x=3$

с Oy $f(0)=\dfrac{\sqrt{3}}{1}=\sqrt{3}$

4) Изследване за $\nearrow$ и $\searrow$.

$f'(x)=\dfrac{(x+1)(\sqrt{3-x})'-(x+1)'(\sqrt{3-x})}{(x+1)^2}=\dfrac{\frac{1}{2\sqrt{3-x}}(3-x)'\cdot(x+1)-1\cdot\sqrt{3-x}}{(x+1)^2}=\dfrac{\frac{-(x+1)}{2\sqrt{3-x}}-\sqrt{3-x}}{(x+1)^2}=$

$=\dfrac{\frac{-x-1}{2\sqrt{3-x}}-\sqrt{3-x}}{(x+1)^2}=\dfrac{\frac{-(x+1)-2(3-x)}{2\sqrt{3-x}}}{(x+1)^2}=\dfrac{\frac{-x-1-6+2x}{2\sqrt{3-x}}}{(x+1)^2}=\dfrac{\frac{-7+x}{2\sqrt{3-x}}}{(x+1)^2}$ $x\in 7$ $x=3$ $x=-1$

$f''(x)=\ldots=-\dfrac{-3x^2+42x-83}{4(x+1)^3(3-x)^{3/2}}$ $x=-1 \notin ДО$ $x=+3$ $x=7\pm\dfrac{8}{3}\sqrt{3}\notin ДО$

$0 \quad 2 \quad 3$

$-1 \quad 0 \quad 2 \quad 3 \quad 7$

3) $x\in[2;+\infty) \Rightarrow f(x)=\dfrac{\sqrt{x-1}}{1+x}$ 1) дефинициона област $x\in[1,+\infty)$ и $x\neq-1 \Rightarrow x\in[2;+\infty)$

2) четност/нечетност $f(-x)=\dfrac{\sqrt{-x-1}}{1-x}\neq\mp f(x) \Rightarrow f(x)$ не е нито четна, нито нечетна.

3) поведението в краищата на дефиниционната ѝ област.

$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x-1}}{1+x}=\dfrac{1}{3}$ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x-1}}{1+x}=0$ Пресечни точките с координатните оси: с Ox $f(x)=0 \Rightarrow$ $x-1=0$ $x=1$

с Oy $f(0)$ = няма

4) Изследване за $\nearrow$ и за $\searrow$

$f'(x)=\dfrac{(x+1)(\sqrt{x-1})'-(x+1)'\cdot\sqrt{x-1}}{(x+1)^2}=\dfrac{\frac{(x+1)}{2\sqrt{x-1}}-\sqrt{x-1}}{(x+1)^2}=\dfrac{\frac{x+1-2x+2}{2\sqrt{x-1}}}{(x+1)^2}=\dfrac{\frac{3-x}{2\sqrt{x-1}}}{(x+1)^2}$

$2 \quad 3$

$f''(x)=\ldots=\dfrac{3x^2-18x+11}{4(x-1)^{3/2}(x+1)^3}$ $x=1$ $x=-1\notin ДО$ $x=3\pm\dfrac{4}{3}\sqrt{3}$ $x=3-\dfrac{4}{3}\sqrt{3}$

$1 \quad 2 \quad 3-\dfrac{4}{3}\sqrt{3} \quad 3+\dfrac{4}{3}\sqrt{3}$

Таблица

x	$-\infty$	0		2	$+3$, $3-\frac{4}{3}\sqrt{3}$		$3+\frac{4}{3}\sqrt{3}$	$+\infty$
f	↗	$\sqrt{3}$	↘	$\frac{1}{3}$	↗	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	↘	
f'	+		−		+		−	
f''	+		−		+	−	+