От (23) се вижда, че (20) допуска интегриращ множител независещ от y, само ако дясната страна на (23) не съдържа тази променлива.

Пример 3. Да разгледаме уравнението

$$xdy - ydx = 0 \tag{24}$$

в $\mathbf{R}^2 \setminus \{0,\ 0\}$. В случая

$$\frac{P'_y - Q'_x}{Q} = -\frac{2}{x},$$

следователно съществува интегриращ множител $\mu = \mu(x)$. Решавайки уравнението

$$\frac{\mu'}{\mu} = -\frac{2}{x},$$

намираме $\mu = \frac{1}{x^2}$. След като умножим с μ, получаваме

$$\frac{xdy - ydx}{x^2} = -d\left(\frac{y}{x}\right).$$

Упражнения

1. Покажете, че уравнението (24) има и интегриращ множител $\mu = \mu(y)$. Намерете такова μ и решете уравнението с негова помощ.

2. Като представите уравнението $y' = f(x)g(y)$, $g \neq 0$, във вида $\frac{dy}{g(y)} - f(x)dx = 0$, изведете теорема 1 от § 3 като следствие от теорема 1 от този параграф.

3. Решете линейното уравнение $y' = a(x)y + b(x)$, като намерите интегриращ множител. След това сравнете вашия извод на формулата за общото решение с извода от § 5.

4. Покажете, че във всяка от областите $G_1\colon x > 0$ и $G_2\colon x < 0$ формата (19) от пример 2 е пълен диференциал и намерете съответното F, което е определено с точност до константа. Използвайте резултата, за да установите директно (без интегриране), че (19) не е пълен диференциал във венеца $1 < x^2 + y^2 < 4$.

§ 8. ТЕОРЕМА ЗА СЪЩЕСТВУВАНЕ (ТЕОРЕМА НА ПЕАНО)

Да разгледаме задачата на Коши

$$y' = f(x,\ y), \tag{1}$$

$$y(x_0) = y_0,$$

където f е дефинирана и непрекъсната в правоъгълника

$$D:\ |x - x_0| \leqq a, \qquad |y - y_0| \leqq b.$$

Следващият резултат на италианския математик Дж. Пеано (1858 – 1932) е основен.

Теорема 1. При направените предположения задачата (1), притежава поне едно решение, дефинирано в интервала на ... $|x - x_0| \leqq h$, където $h = \min\left(a,\ \frac{b}{M}\right)$, $M = \max_D |f|$.

Прости примери като задачата на Коши

$$y' = 3y^{2/3}, \qquad y(0) = 0,$$

която има четири решения (те се получават, като комбинираме ...те основни решения $y_1 \equiv 0$ и $y_2(x) = x^3$), показват, че само непрекъснатостта на f не е достатъчна, за да осигури единственост. Това обстоятелство прави теоремата за съществуване ... по-интересна.

Отлагайки обсъждането на единствеността за следващия параграф, ще започнем с доказателството за съществуване. То се опира на един важен принцип за компактност, известен като теорема на Арцела́ и А́сколи.

Дефиниция 1. Една безкрайна фамилия $\mathfrak{F} \subset C[p,\ q]$ от непрекъснати функции се нарича *равномерно ограничена в* $[p,\ q]$, ако съществува константа $M = M(\mathfrak{F})$, за която $|f(x)| \leqq M$, $p \leqq x \leqq q$, за всяко $f \in \mathfrak{F}$.

Дефиниция 2. Фамилията $\mathfrak{F}$ се нарича *равностепенно* (еднакво) *непрекъсната в* $[p,\ q]$, ако на всяко $\varepsilon > 0$ може да се съпостави $\delta = \delta(\varepsilon)$ такова, че от $|x' - x''| < \delta$ да следва $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$ за всяко $f \in \mathfrak{F}$.

Теорема на Арцела и Асколи. Всяка безкрайна, равномерно ограничена и равностепенно непрекъсната фамилия $\mathfrak{F} \subset C[p,\ q]$ съдържа редица, която е равномерно сходяща в интервала $[p,\ q]$.

Доказателството на този основен резултат може да се намери в [2], [27], както и в първото издание на тази книга.

Очевидно е, че теоремата на Арцела — Асколи е сродна с теоремата на Болцано — Вайерщрас, но в случая се разглеждат по-сложни обекти — функции, а не непременно константи, и само изискването за равномерна ограниченост не е достатъчно.

Различните критерии за компактност играят важна роля в съвременната математика.

Известни са няколко съществено различни доказателства на теоремата на Пеано. Доказателството, което следва, не е най-краткото, но е твърде естествено, защото апелира непосредствено към геометричния смисъл на уравнението. Идеята да се използват построените по-нататък начупени линии дължим на Ойлер (1707 - 1783).

Доказателство на теоремата на Пеано. Нека f е дефинирана и непрекъсната в правоъгълника D: $|x-x_0| \leqq a$, $|y-y_0| \leqq b$ и нека $M = \max_D |f|$, $h = \min\left(a, \frac{b}{M}\right)$.

За да построим решение на задачата на Коши

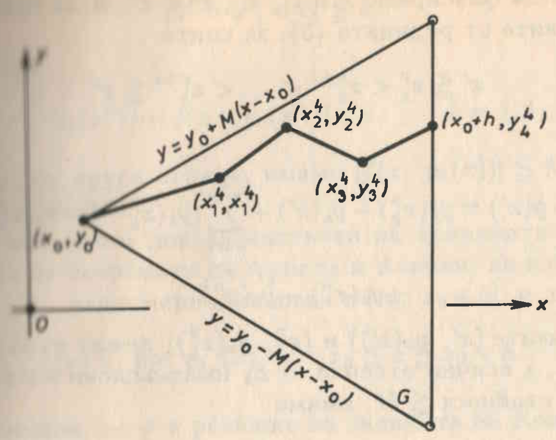
(1) $$y' = f(x, y),$$

(2) $$y(x_0) = y_0$$

в интервала $[x_0, x_0+h]$, да разделим $[x_0, x_0+h]$ на равни части с помощта на точките $x_k^\nu = x_0 + \frac{\nu h}{k}$, $0 \leqq \nu \leqq k$, където k е фиксирано естествено число. След това през точката (x_0, y_0) да прекараме правата с уравнение $l_{(x_0, y_0)}$: $y = y_0 + f(x_0, y_0)(x-x_0)$ (т.е. правата от полето, дефинирано от f) и върху $l_{(x_0, y_0)}$ да фиксираме точката (x_k^1, y_k^1), където $y_k^1 = y_0 + f(x_0, y_0)\frac{h}{k}$, и, разбира се, $x_k^1 = x_0 + \frac{h}{k}$. Продължавайки конструкцията, през (x_k^1, y_k^1) да построим правата $l_{(x_k^1, y_k^1)}$: $y = y_k^1 + f(x_k^1, y_k^1)(x-x_k^1)$ и върху нея да вземем точката (x_k^2, y_k^2), където $y_k^2 = y_k^1 + f(x_k^1, y_k^1)\frac{h}{k}$, $x_k^2 = x_0 + \frac{2h}{k}$. Като повторим тази процедура k пъти, стигаме до редицата

(3) $$(x_0, y_0), \qquad (x_k^1, y_k^1), \qquad (x_k^2, y_k^2), \ldots, (x_0+h, y_k^k).$$

Съединявайки последователно с отсечки съседните точки от (3), получаваме една от начупените линии на Ойлер, която ще означим с $\mathcal{E}_k$ (на фиг. 8 е изобразена кривата $\mathcal{E}_4$).



Фиг. 8

Ако $y = y_k(x)$, $x_0 \leqq x \leqq x_0+h$, е уравнението на $\mathcal{E}_k$, дефиницията ни дава

(4) $$y_k(x) = y_k^\nu + f(x_k^\nu, y_k^\nu)(x-x_k^\nu) \text{ за } x_k^\nu \leqq x \leqq x_k^{\nu+1}, \quad 0 \leqq \nu \leqq k-1.$$

(За единство в означенията сме положили $x_k^0 = x_0$, $y_k^0 = y_0$.)

Понеже в D имаме $|f| \leqq M$, индуктивно се проверява, че $|y_k^\nu - y_0| \leqq \frac{M\nu}{k}h$, $0 \leqq \nu \leqq k$, откъдето следва, че $\mathcal{E}_k$ лежи в триъгълника G: $x_0 \leqq x \leqq x_0+h$, $|y-y_0| \leqq Mh$. Най-сетне, като оставим k да се мени, получаваме редицата $\{\mathcal{E}_k\}_2^\infty$ от ойлерови начупени линии $\{y_k\}_2^\infty$. Ще докажем, че фамилията $\mathfrak{F} = \{y_k\}_2^\infty$ е равномерно ограничена и равностепенно непрекъсната в $[x_0, x_0+h]$.

Равномерната ограниченост на $\mathfrak{F}$ е очевидна. Наистина, понеже за всяко k кривата $\mathcal{E}_k$ лежи в триъгълника G, имаме $|y_k(x) - y_0| \leqq Mh$, т.е. $|y_k(x)| \leqq |y_0| + Mh$ за $x \in [x_0, x_0+h]$, което означава, че $\mathfrak{F}$ е равномерно ограничена.

За да установим равностепенната непрекъснатост, ще докажем оценката

(5) $$|y_k(x'') - y_k(x')| \leqq M|x''-x'|, \qquad k = 2, 3, \ldots,$$

за произволна двойка x', x'' от $[x_0, x_0+h]$.

И така да фиксираме k и x', x'', $x' < x''$, и да привлечем помощ точките от редицата (3), за които

$$x' \leqq x_k^p < x_k^{p+1} < \dots < x_k^{p+s} \leqq x''.$$

Очевидно

(6) $$y_k(x'') - y(x') = y_k(x_k^p) - y_k(x') + \sum_{\nu=1}^{s}\{y_k(x_k^{p+\nu}) - y_k(x_k^{p+\nu-1})\} + y_k(x'') - y_k(x_k^{p+\nu}).$$

Понеже точките $(x', y_k(x'))$ и $(x_k^p, y_k(x_k^p))$ лежат върху една отсечка от $\mathcal{E}_k$, а всички отсечки от $\mathcal{E}_k$ имат ъглови коефициенти с абсолютна стойност $\leqq M$, имаме

(7) $$|y_k(x_k^p) - y_k(x')| \leqq M(x_k^p - x').$$

Неравенствата

(8) $$|y_k(x_k^{p+\nu}) - y_k(x_k^{p+\nu-1})| \leqq M(x_k^{p+\nu} - x_k^{p+\nu-1}), \quad 1 \leqq \nu \leqq s,$$

и

(9) $$|y_k(x'') - y_k(x_k^{p+\nu})| \leqq M(x'' - x_k^{p+\nu})$$

се получават въз основа на същите съображения. Като съберем (7), (8) и (9) и се възползваме от неравенството на триъгълника, получаваме (5). Понеже k, x' и x'' бяха произволни, равностепенната непрекъснатост на $\mathfrak{F} = \{y_k\}_2^\infty$ е установена.

Следващата лема е очевидна и е формулирана само за да се фиксират означенията.

Лема 1. Фамилията $\{f(x, y_k(x))\}_2^\infty$ е равномерно ограничена и равностепенно непрекъсната в $[x_0, x_0 + h]$.

Доказателство. Понеже f е равномерно непрекъсната в компакта G: $x_0 \leqq x \leqq x_0 + h$, $|y - y_0| \leqq Mh$, на всяко $\varepsilon > 0$ отговаря $\delta = \delta(\varepsilon)$ такова, че от $|x' - x''| < \delta$, $|y' - y''| < \delta$ следва $|f(x'', y'') - f(x', y')| < \varepsilon$, стига точките (x', y') и (x'', y'') да се съдържат в G. Да положим $\delta_1 = \dfrac{\delta}{M_1}$, $M_1 = \max(M, 1)$ и да вземем $x', x'' \in [x_0, x_0 + h]$, $|x'' - x'| < \delta_1$. Очевидно имаме

$$|y_k(x'') - y_k(x')| \leqq M|x'' - x'| < M\delta_1 \leqq \delta,$$

$$|x'' - x'| < \delta_1 \leqq \delta.$$

Следователно

$$|f(x'', y_k(x'')) - f(x', y_k(x'))| < \varepsilon, \qquad k = 2, 3, \dots$$

Понеже, от друга страна, имаме $|f(x, y_k(x))| \leqq M$ за всяко k, лема 1 е доказана.

За да завършим доказателството на теоремата на Пеано, съгласно теоремата на Арцела и Асколи, да изберем подредица $\{y_{k_\nu}\}_1^\infty$, равномерно сходяща в $[x_0, x_0 + h]$, и да положим

(10) $$\varphi(x) = \lim_{\nu \to \infty} y_{k_\nu}(x), \qquad x_0 \leqq x \leqq x_0 + h.$$

Ще покажем, че φ е решение на задачата на Коши (1), (2). Понеже $y_{k_\nu}(x_0) = y_0$ за всяко ν, равенството $\varphi(x_0) = y_0$ е налице. Остава да докажем, че φ удовлетворява диференциалното уравнение.

Да фиксираме $\varepsilon > 0$. Ще покажем, че за произволна двойка точки ξ и x, $\xi \neq x$, от интервала $[x_0, x_0 + h]$, за която $|x - \xi| < \delta_1$ ($\delta_1 = \delta_1(\varepsilon)$ е числото от лема 1), имаме

(11) $$f(x, \varphi(x)) - \varepsilon \leqq \frac{\varphi(x) - \varphi(\xi)}{x - \xi} \leqq f(x, \varphi(x)) + \varepsilon.$$

Нека най-напред $x > \xi$ и k е толкова голямо, че $\dfrac{h}{k} < \dfrac{\delta_1}{2}$. По-нататък нека редицата

(12) $$\xi < x_k^q < x_k^{q+1} < \dots < x_k^{q+m} < x$$

съдържа абсцисите на всички върхове на $\mathcal{E}_k$ с първи координати, лежащи в интервала $[\xi, x]$.

Понеже $|x - \xi| < \dfrac{\delta_1}{2}$, $\dfrac{h}{k} < \delta$, точките $(x_k^s, y_k(x_k^s))$, $s = q - 1$, $q, \dots, q + m$, от $\mathcal{E}_k$ са краища на отсечки с ъглови коефициенти от интервала $(f(x, y_k(x)) - \varepsilon, f(x, y_k(x)) + \varepsilon)$. Следователно

(13) $$f(x, y_k(x)) - \varepsilon < \frac{y_k(x_k^q) - y_k(\xi)}{x_k^q - \xi} < f(x, y_k(x)) + \varepsilon,$$

$$(14)\quad f(x,\ y_k(x)) - \varepsilon < \frac{y_k(x_k^{q+\nu}) - y_k(x_k^{q+\nu-1})}{x_k^{q+\nu} - x_k^{q+\nu-1}} < f(x,\ y_k(x)) + \varepsilon,$$

$$\nu = 1, 2, \ldots, m,$$

и

$$(15)\quad f(x,\ y_k(x)) - \varepsilon < \frac{y_k(x) - y_k(x_k^{q+m})}{x - x_k^{q+m}} < f(x,\ y_k(x)) + \varepsilon.$$

Като се освободим от знаменателите в (13) — (15) и съберем, получаваме

$$(16)\quad f(x,\ y_k(x)) - \varepsilon < \frac{y_k(x) - y_k(\xi)}{x - \xi} < f(x,\ y_k(x)) + \varepsilon.$$

С аналогични разсъждения се убеждаваме, че (16) остава в сила и за $\xi > x$. Полагайки $k = k_\nu$ в (16), след граничния преход $\nu \longrightarrow \infty$ намираме

$$(17)\quad f(x,\ \varphi(x)) - \varepsilon \leqq \frac{\varphi(x) - \varphi(\xi)}{x - \xi} \leqq f(x,\ \varphi(x)) + \varepsilon$$

за $0 < |x - \xi| < \frac{\delta_1}{2}$. Понеже $\varepsilon > 0$ беше произволно, (17) показва, че $\varphi'(x)$ съществува и е равно на $f(x,\ \varphi(x))$. С други думи, установихме, че φ е решение на (1) в интервала $[x_0,\ x_0+h]$, защото точката x беше произволна. В интервала $[x_0 - h,\ x_0]$ решение ψ се построява по същия начин, а функцията

$$y(x) = \begin{cases} \psi(x) & \text{за } x_0 - h \leqq x \leqq x_0, \\ \varphi(x) & \text{за } x_0 \leqq x \leqq x_0 + h \end{cases}$$

удовлетворява (1), (2) в целия интервал $|x - x_0| \leqq h$. (Имаме $\psi'(x_0) = f(x_0,\ y_0) = \varphi'(x_0)$, т.е. $y \in C^1[x_0 - h,\ x_0 + h]$.)

С това теоремата на Пеано е доказана. Друго доказателство е скицирано в упражненията.

Следващият пример е мирогледен и между другото показва, че понякога редицата $\{y_k\}$ е сходяща в интервал с произволна дължина.

Пример 1. Да разгледаме задачата на Коши

$$(18)\quad y' = y, \qquad y(0) = y_0 > 0$$

[illegible] $|x| \leqq a$, $|y - y_0| \leqq b$. В случая $M = y_0 + b$, [illegible]. Оказва се обаче, че редицата от ойлеровите линии е сходяща в целия интервал $|x| \leqq a$.

[illegible] да разделим $[0,\ a]$ на равни части с помощта на точките $x_\nu = \frac{\nu a}{k}$, $\nu = 0, 1, 2, \ldots, k$. От дефиницията моментално получаваме

$$(19)\quad y_k^\nu = y_0\left(1 + \frac{a}{k}\right)^\nu, \qquad y_k(x) = y_k^\nu + y_k^\nu\left(x + \frac{\nu a}{k}\right),$$

за $\frac{\nu a}{k} \leqq x \leqq \frac{\nu a}{k} + \frac{a}{k}$, $\nu = 0, 1, \ldots, k$.

Нека сега точката $x \in (0,\ a]$ е фиксирана и нека $x_k^{\nu(x)} \leqq x <$ [illegible], т.е. $\nu(x)$ е най-голямото ν, за което $x_k^\nu \leqq x$. Лесно се съобразява, че $\nu(x)$ е цялата част $\left[\frac{kx}{a}\right]$ на числото $\frac{kx}{a}$. Понеже според (19) функцията $y_k(x)$ е монотонно растяща, имаме

$$(20)\quad y_0\left(1 + \frac{a}{k}\right)^{\nu(x)} \leqq y_k(x) \leqq y_0\left(1 + \frac{a}{k}\right)^{\nu(x)+1}.$$

Почти очевидно е, че $\lim\limits_{k\to\infty}\left(1 + \frac{a}{k}\right)^{\nu(x)} = \lim\limits_{k\to\infty}\left(1 + \frac{a}{k}\right)^{\nu(x)+1} = e^x$.

Наистина, тъй като $\nu(x) = \frac{kx}{a} - \varepsilon_k$, $0 \leqq \varepsilon_k \leqq 1$, получаваме

$$\lim_{k\to\infty}\left(1 + \frac{a}{k}\right)^{\nu(x)} = \lim_{k\to\infty}\left(1 + \frac{a}{k}\right)^{-\varepsilon_k} \lim_{k\to\infty}\left(1 + \frac{a}{k}\right)^{\frac{x}{a}k} = e^x.$$

Следователно, като извършим граничния преход в (20), намираме $y(x) = y_0 e^x$.

Случая $x \in [-a,\ 0]$ предоставяме на читателя.

Упражнения

1. Разгледайте задачата на Коши

$$y' = x^2 + y^2, \qquad y(0) = 0$$

$$y_1(x) = \begin{cases} y_0 & \text{за } x_0 - \varepsilon \leqq x \leqq x_0, \\ y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(t,\ y_0)\,dt & \text{за } x_0 \leqq x \leqq x_0 + \varepsilon, \end{cases}$$

$$y_2(x) = \begin{cases} y_0 & \text{за } x_0 - \varepsilon \leqq x \leqq x_0, \\ y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(t,\ y_1(t-\varepsilon))\,dt & \text{за } x_0 \leqq x \leqq x_0 + 2\varepsilon, \end{cases}$$

[illegible] е добре дефинирана и нещо повече, че y_1 и y_2 са непре-[illegible] $\nu \leqq k$ продължете индуктивно, като положите

$$y_\nu(x) = \begin{cases} y_0 & \text{за } x_0 - \varepsilon \leqq x \leqq x_0, \\ y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(t,\ y_{\nu-1}(t-\varepsilon))\,dt & \text{за } x_0 \leqq x \leqq x_0 + \nu\varepsilon. \end{cases}$$

[illegible], че функциите $\{y_\nu\}$, $\nu \leqq k$, са коректно дефинирани и непре-[illegible] $y_\nu = y_{\nu+1}$ в общия им дефиниционен интервал. Накрая забе-[illegible] равенство $y_k(x) = y_{k-1}(x)$, $x_0 \leqq x \leqq x_0 + (k-1)\varepsilon$, [illegible] y_k е решение на (21) за $\varepsilon = \frac{h}{k}$. Като дадем на k стойности [illegible] получаваме равномерно ограничена и равностепенно непрекъсна-[illegible] редица от решения на (12) с $\varepsilon_k = \frac{h}{k} \longrightarrow 0$.

§ 9. ТЕОРЕМА ЗА ЕДИНСТВЕНОСТ

Както вече се убедихме, ако f е само непрекъсната, задачата на Коши

$$y' = f(x,\ y), \qquad y(x_0) = y_0$$

може да притежава повече от едно решение. Най-често използваното допълнително изискване, което осигурява единственост, е условието на Липшиц.

Дефиниция 1. Казваме, че *функцията f удовлетворява условието на Липшиц* (спрямо y) *в правоъгълника D*: $|x - x_0| \leqq a$, $|y - y_0| \leqq b$, ако съществува константа K такава, че за произволна двойка от точки $(x,\ y_1) \in D$, $(x,\ y_2) \in D$ да имаме

$$|f(x,\ y_2) - f(x,\ y_1)| \leqq K|y_1 - y_2|. \tag{1}$$

Условието на Липшиц е по-слабо от изискването f да има ограничена частна производна спрямо y. Наистина, ако $\frac{\partial f}{\partial y}$ съществува и е ограничена в D, теоремата за крайните нара[...]ния ни дава

$$|f(x,\ y_2) - f(x,\ y_1)| = \left|\frac{\partial f}{\partial y}(x,\ \xi)(y_2 - y_1)\right| \leqq K|y_2 - y_1|,$$

където $K = \sup\limits_D \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|$.

От друга страна, функцията $f(x,\ y) = |y|$, разглежда[...] правоъгълника $|x| \leqq a$, $|y| \leqq b$, не притежава частна произво[...] спрямо y, когато $y = 0$, но удовлетворява условието на Липш[...] с константа единица, защото от неравенството на триъгълни[...] следва $||y_2| - |y_1|| \leqq |y_2 - y_1|$, т.е. съществуват функции, които [...] са диференцируеми, но удовлетворяват условието на Липши[...]

След тези елементарни разисквания ще докажем една те[...]рема за единственост, в която условието на Липшиц е замен[...] с малко по-слабо.

Теорема на Осгуд. Нека f е дефинирана в правоъгълн[...] D и удовлетворява условието

$$|f(x,\ y_2) - f(x,\ y_1)| \leqq \Phi(|y_2 - y_1|), \tag{3}$$

където $\Phi \in C(0,\ +\infty)$ и е положителна. Ако интегралът $\int_0^1 \frac{du}{\Phi(u)}$ е разходящ, задачата (1) има най-много едно решение.

Д о к а з а т е л с т в о. Да допуснем, че y_1 и y_2 са дв[...] решения на (1) с дефиниционни интервали Δ_1 и Δ_2 съответно. Трябва да докажем, че $y_1 \equiv y_2$ в $\Delta = \Delta_1 \cap \Delta_2$. Да допуснем, че съществува точка $\eta \in \Delta$ такава, че $y_1(\eta) \neq y_2(\eta)$. Без ограничение на общността можем да предположим, че $\eta > x_0$ и $y_1(\eta) > y_2(\eta)$. (Останалите случаи се разглеждат по същия начин.) Нека $\alpha \in [x_0,\ \eta)$ е най-близката до η нула на функцията $\sigma(x) = |y_1(x) - y_2(x)|$. В такъв случай $\sigma(x) = y_1(x) - y_2(x) > 0$ за $\alpha < x \leqq \eta$, $\sigma(\alpha) = 0$. Понеже y_1 и y_2 са решения на уравнението, получаваме

$$\begin{aligned} y_1'(x) - y_2'(x) &\leqq |y_1'(x) - y_2'(x)| = |f(x,\ y_1(x)) - f(x,\ y_2(x))| \\ &\leqq \Phi(|y_1(x) - y_2(x)|), \end{aligned}$$

т.е.

$$\sigma'(x) \leqq \Phi(\sigma(x)), \qquad \alpha < x \leqq \eta, \quad \text{или} \tag{4}$$

$$\frac{\sigma'(x)}{\Phi(\sigma(x))} \leqq 1, \qquad \alpha < x \leqq \eta,$$

[...] функцията Φ е положителна. Като интегрираме (5) в [...] $[\alpha + \varepsilon,\ \eta]$, $\varepsilon > 0$, получаваме

$$\int_{\sigma(\alpha+\varepsilon)}^{\sigma(\eta)} \frac{du}{\Phi(u)} = \eta - \alpha - \varepsilon < \eta - \alpha.$$

[...] преход $\varepsilon \longrightarrow 0$ в това неравенство ни дава

$$\int_0^{\sigma(\eta)} \frac{du}{\Phi(u)} \leqq \eta - \alpha,$$

[...] на предположението, че интегралът е разходящ.

[...]ното противоречие доказва теоремата на Осгуд. Ка[...] [...] $\Phi(u) = u$, се убеждаваме, че условието на Липшиц [...] ни гарантира единственост. Полагайки $\Phi(u) = u|\ln u|$, [...]ваме малко по-силен резултат.

Упражнения

1. Нека $k(x)$ е положителна функция в интервала $|x - x_0| \leqq a$ и

$$\int_{x_0-a}^{x_0+a} k(x)dx < \infty.$$

Убедете се, че ако f е непрекъсната и удовлетворява условието

$$|f(x,\ y_1) - f(x,\ y_2)| \leqq k(x)|y_1 - y_2|$$

в правоъгълника D, задачата (1) има точно едно решение.

2. За какви α можем да използваме функцията $\Phi(u) = u|\ln u|^\alpha$ в теоре[...] на Осгуд?

§ 10. НЕПРОДЪЛЖИМИ РЕШЕНИЯ

Дефиниция 1. Нека D е област в $\mathbf{R}^2$ и $f \in C(D)$*. Ще [...]казваме, че D е *област на единственост за уравнението*

$$y' = f(x,\ y), \tag{1}$$

*С $C(D)$ означаваме множеството на функциите, дефинирани и непре[...]къснати в D.