$4-\frac{4}{3}+\frac{4}{5}-\frac{4}{7}+\frac{4}{9}-\frac{4}{11}$ $\quad \frac{4\cdot 15}{15}-\frac{4\cdot 5}{15}+\frac{4\cdot 3}{15}-\dots$

$4-1\frac{1}{3}+\frac{4}{5}-\dots$ $\quad \frac{4}{15}(15-5+3)=\frac{4\cdot 13}{15}=\frac{52}{15}=3,$

$a_n \leq a_{n+1}$

$a_{n+1}=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)+\dots+\frac{1}{(n-1)!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\dots$

$\dots\left(1-\frac{n-2}{n+1}\right)+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\dots\left(1-\frac{n-1}{n+1}\right)+\frac{1}{n!}\frac{1}{(n+1)^{n+1}}$

$a_n < a_{n+1}$ за $\forall n$

$2 \leq e \leq 3$

$e=2,7172\dots$

$a_n \leq b_n = 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\dots\frac{1}{n!} \leq 1+2\left(1-\frac{1}{2^n}\right) < 3$

$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\dots\frac{1}{2^{n-1}}=2\left(1-\frac{1}{2^n}\right)$

$\lim_{n\to\infty} a_n = e$

$b_{n+1}=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\dots\frac{1}{n!}+\frac{1}{(n+1)!}=b_n+\frac{1}{(n+1)!}\geq b_n$

$\left.\begin{array}{l}\{b_n\} \text{ — строго раст} \\ \text{огр отгоре}\end{array}\right\} \Rightarrow b_n$ — сходяща

$\lim_{n\to\infty} b_n = E$

$e \leq E$

a_n

$\boxed{11}$

$$\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)-\left(1-\frac{k-1}{n}\right)$$

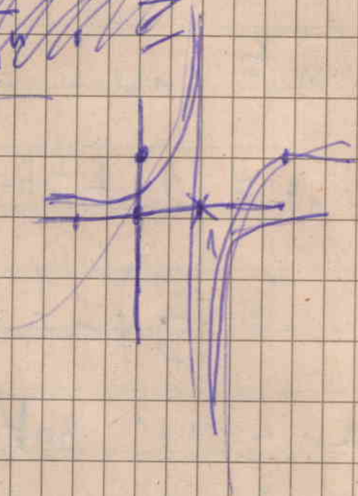
$\nearrow e$

$$a_n \geq 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\dots \cancel{\frac{1}{n^2}} \geq$$

$n > k$ $\quad 1 \quad 1 \quad \downarrow \frac{1}{2!} \quad \downarrow \frac{1}{3!} \quad \frac{1}{k!}$

k - фиксирано

$$1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\dots-\frac{1}{k!}=b_k$$



$n > k$

$a_n \geq b_k$

$e \geq b_k$

$e \geq E$

$e = E$

Оп Казваме, че редицата $\{a_n\}$ клони към ∞ и пишем $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\infty$ или $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$, ако $\forall A$ съществува ∂ такова, че при $n > \partial$ имаме $a_n < A$

(T) $\infty+\infty=\infty$ $\qquad a_n \to \infty,\ b_n \to \infty \qquad a_n+b_n \to \infty$

$(-\infty)+(-\infty)=-\infty$

$l \in R \quad l+\infty=\infty$

$l+(-\infty)=-\infty$

$\infty \cdot \infty=\infty$

$\infty \cdot (-\infty)=-\infty$

$(-\infty)(-\infty)=\infty$

$l > 0 \quad l \cdot \infty=\infty \qquad l\cdot(-\infty)=-\infty$

$l < 0 \quad l \cdot \infty=-\infty \qquad l\cdot(-\infty)=\infty$

$\frac{1}{\infty}=0$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{4}{2n+1} = \Pi$$

Т на Болцано Вайерщрас

{Т (Болцано Вайерщрас)

ако 1 редица е ~~сходяща~~ огр то тя ще притежава сходяща подредица

(T) ако 1 редица е сх то всяка нейна подредица е сходяща ~~ot~~ и то към същата граница

(T) (необходимо и дост усл на Коши за сход на редица)

ред $\{a_n\}$ е сх тогава и само тогава когато за $\forall \varepsilon > 0$ може да се нам ν такова, че ако $n > \nu$ $m > \nu$ то $|a_n - a_m| < \varepsilon$

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$

$\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$

$$(*) \begin{cases} S_1 = a_1 \\ S_2 = a_1 + a_2 \\ S_3 = a_1 + a_2 + a_3 \\ \vdots \\ S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n \\ \vdots \end{cases}$$

опр. ако редицата $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ опр чрез $(*)$ е сходяща казв, че безкр ред $a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$ $(**)$ е сходящ и $S = \lim_{n \to \infty} S_n$

нар сумата на безкр ред $(**)$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 2 \qquad \frac{1}{2^n} \quad n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

$$S_0 = \frac{1}{2^0} = 1$$

$$S_1 = 1 + \frac{1}{2}$$

$$S_2 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$$

$$S_{n-1} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}}$$

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^n} = \frac{1 - \frac{1}{2^{n+1}}}{1 - \frac{1}{2}} = 2\left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right)$$

$$S_n \xrightarrow{n \to \infty} 2$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^n \quad \text{разходящ}$$

$$S_0 = 1$$

$$S_1 = 1 + 2$$

$$S_2 = 1 + 2 + 2^2$$

$$S_n = 1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^n = \frac{2^{n+1} - 1}{2 - 1} = 2^{n+1} - 1 \to \infty$$

Св-ва: ако към безкр. ред и отнемем (добавим) краен брой от неговите чл. то сход. на реда не се променя

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$$

$$T_1 = \frac{1}{2}$$

$$T_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2}$$

$$T_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3}$$

$a \cdot 0 = 0$, $b \cdot 0 = 0$ $\Rightarrow a = b$

- ако редът $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ е сход то $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

- $\sum_{n=1}^{\infty} 1$ – разх

$\sum_{n=1}^{\infty} \left(2 + \frac{1}{n^3}\right)$ – разх

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots$ – разх

Хармоничен ред

Пр.

1

$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} > \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$

$\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} > \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{2}$

$\frac{1}{8} \dots \frac{1}{15} > 8 \cdot \frac{1}{16} = \frac{1}{2}$

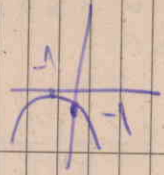
За вс A може да се нам k такова, че

$S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots \frac{1}{k} > A$

$S_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$

ако редовете $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ са сх със суми A, B

то $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ е сх и сумата е $A + B$



$3 \cdot -5^0$

$1-2=-1$
$3-4=-1$
$5-6=-1$

$\lambda \in \mathbb{R}$

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \lambda$ е сх към сума λA

Пр $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\dots+\frac{1}{n^2}+\dots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$

$S_n = 1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\dots+\frac{1}{n^2} \leq 1+\frac{1}{2\cdot 1}+\frac{1}{3\cdot 2}+\frac{1}{4\cdot 3}+\dots \frac{1}{n(n-1)} =$

$\frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}$

$= 1+\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\dots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right) =$

$= 2-\frac{1}{n} < 2$

$S_n < 2$ за всяко n

$\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ – огр отгоре

$S_{n+1} = 1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\dots\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2} = S_n+\frac{1}{(n+1)^2}$

$S_{n+1} > S_n$

$\Rightarrow \{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ е сх $\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$ е сход

$1 \leq S \leq 2$

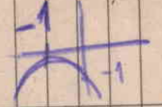
(T) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$

$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\dots+\frac{1}{n!}\right) =$

$= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}$ $\quad 0! = 1$

$-x^2 - 2x - 1$ $\quad \frac{2}{2^{-1}} \quad \frac{2}{2(-1)} = -1$ $\quad -1 + 2 - 1 = 0$

$\overset{-1}{\wedge}_{0}$



$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots = S$$

$S_1 = a_1$

$S_2 = a_1 + a_2$

$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$

$S_n = \sum a_n$

$S_n \to S$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} - \text{[illegible]} = \frac{\pi^2}{6}$$

$1 = 1$

$\frac{1}{1!} = 1$

$\frac{1}{2!} = 0,5$

$\frac{1}{3!} = 0,1(666)$ $\quad 2,(666)$

$\frac{1}{4!} = \frac{1}{24}$

$a = \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \dots$

$$\frac{1}{4!}\left(1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{5 \cdot 6} + \frac{1}{5 \cdot 6 \cdot 7} + \dots\right) < \frac{1}{4!}\left(1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{5^3} + \dots\right) =$$

$$= \frac{1}{4!} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{5}} = \frac{5}{4} \cdot \frac{1}{24} < \frac{5}{96}$$

$a_n > 0$ за $\forall n$

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

$S_1 = a_1$

$S_2 = a_1 + a_2$

$S_n = a_1 + a_2 + \dots a_n$

$S_{n+1} = S_n + a_{n+1}$

$S_n < S_{n+1}$

Св-во ако редицата от ∞ частични суми на

~~Св-во ако редицата~~ $\sum_{n=1}$ е огр отгоре и ако

$a_n > 0$ за $\forall n$ този ред е сход

Т нека са дад редовете $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ и ~~нек~~ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и

нека $0 < a_n \le C b_n$ където C ~~α~~ > 0 константа

тогава ако редът $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ е сход то редът $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

също е сход

$\sum \frac{1}{n^2}$ - сход   ако $\alpha \ge 2$ то $\sum \frac{1}{n^\alpha}$

$\frac{1}{n^\alpha} \le \frac{1}{n^2}$

$n^\alpha \ge n^2$

$\sum \frac{1}{n}$ - разход

$0 < \alpha \le 1 \Rightarrow \sum \frac{1}{n^\alpha}$ - разх

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^4+3n^2-1}$

2) $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a$

$b_n = \dfrac{a_1+a_2+\dots+a_n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} a$

(T) Нека са дадени редове с (+) членове $\sum a_n, \sum b_n$ ...
нека

$\dfrac{a_n}{b_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} l$ където $l \in \mathbb{R}$ $l \neq 0$ тогава ако ед. от

двата реда е сход. тогава и другия е сходящ

$\sum \underbrace{\dfrac{3n^2+n-2}{4n^3+\sqrt{n}-1}}_{a_n}$ разх.

$\sum \underbrace{\dfrac{1}{n}}_{b_n}$ - разх.

$\dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{3n^2+n-2}{4n^3+\sqrt{n}-1} \cdot n \to \dfrac{3}{4}$

$\sum \dfrac{2^n+n^2+1}{3^n+n^5-2} \Big\} a_n$

$\sum \underbrace{\left(\dfrac{2}{3}\right)^n}_{b_n}$ - сх.

$\dfrac{2^n+n^2+1}{3^n+n^5-2} \cdot \left(\dfrac{3}{2}\right)^n = \dfrac{2^n\left(1+\frac{n^2}{2^n}+\frac{1}{2^n}\right)}{3^n\left(1+\frac{n^5}{3^n}-\frac{2}{3^n}\right)}\left(\dfrac{3}{2}\right)^n$

$\to 1$

Т (критерий на Даламбер)

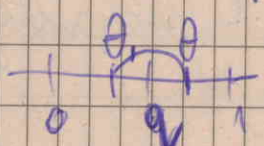
Нека е даден редът $\sum a_n$ като $a_n > 0$ за $\forall n$

нека $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$

ако $q < 1$ то редът е сход

ако $q > 1$ то редът е разх

док нека $q < 1$



вз $\theta \in (q, 1)$

$\theta_1 \leq \frac{a_{n+1}}{a_n} \to q < \theta$ за доста големи n

от $\frac{a_{n+1}}{a_n} \in (\theta_1, \theta)$ за $\forall n$

$a_2 < \theta a_1$

$a_3 < \theta a_2 < \theta^2 a_1$

$a_4 < \theta^3 a_1$

$\vdots$

$a_n < \theta^{n-1} a_1$

$n \geq 1$

$a_n \leq \theta^{n-1} a_1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \theta^{n-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \theta^{k} \text{ – сход}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ – сход}$$

Нека $q \geq 1$ $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$ за дост. големи n

* $0 < a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \dots a_n$ не клони към 0

$\Rightarrow \sum_{1}^{\infty} a_n$ – разх

Пр нека $x > 0$ разгл

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots \frac{x^n}{n!} + \dots$$

$$\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{x^n} = \frac{x}{n+1} \to 0$$

сход

Крит. на Коши

Док: Нека е безкр. ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n > 0$ за $\forall n$

Нека предп., че редицата $a_1, \sqrt{a_2}, \sqrt[3]{a_3} \dots \sqrt[n]{a_n}$

~~нека предп.~~ е сход. и $\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{a_n} = l$ тогава

I ако $l < 1$ то безкр. ред е сход

II ако $l > 1$ то същият безкр. ред е разх.

док. Нека $\lim \sqrt[n]{a_n} = l < 1$ и нека q е такова, че

$1 > q > l$

$l \quad q \quad 1$

$\sqrt[n]{a_n} < q$, от някъде нататък за дост. гол. n

$a_n < q^n$

$\sum_{n=1}^{\infty} q^n$ - сход при $|q|<1$ => безкр. ред обяо е сход

…лено $\lim \sqrt[n]{a_n} = l > 1$

=> $\sqrt[n]{a_n} > 1$ за дост. гол. n

$a_n > 1$

… това, че $a_n > 1$ => редът е разх

$\lim \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = 1$

$\lim \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = 1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$$

$\alpha > 0$

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^\alpha} \le \sum_{n=1}^{2^l} \frac{1}{n^\alpha} = 1 + \sum_{1<n\le 2} \frac{1}{n^\alpha} + \sum_{2<n\le 4} \frac{1}{n^\alpha} + \dots \sum_{2^{l-1}<n\le 2^l} \frac{1}{n^\alpha}$$

$$\sum_{M<n\le 2M} \frac{1}{n^\alpha} \le \sum_{M<n\le 2M} \frac{1}{M^\alpha} = \frac{1}{M^\alpha}\sum_{M<n\le 2M} 1 = \frac{M}{M^\alpha} = \frac{1}{M^{\alpha-1}}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \le 1 + \frac{1}{1^{\alpha-1}} + \frac{1}{2^{\alpha-1}} + \frac{1}{4^{\alpha-1}} + \frac{1}{(2^3)^{\alpha-1}} + \dots \frac{1}{(2^{l-1})^{\alpha-1}} =$$

$$= 1 + \frac{1}{1^{\alpha-1}} + \frac{1}{2^{\alpha-1}} + \frac{1}{(2^{\alpha-1})^2} + \frac{1}{(2^{\alpha-1})^3} + \dots \frac{1}{(2^{\alpha-1})^{l-1}} =$$

$\alpha\, q = \frac{1}{2^{\alpha-1}} < 1$

$= 1+q+q^2+q^3+ \dots q^{l-1} < 1+\frac{1}{1-\frac{1}{2^{\alpha-1}}}$

$\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ - сх $= \frac{1}{1-q}$

$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+ \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} + \dots$

$\sum \frac{(-1)^k}{k}$

$\sum \frac{(-1)^k}{k^2}$ - сход

опр. Казваме, че $\sum a_n$ е абс сход ако редът $\sum |a_n|$ е сход

$\sum \left|\frac{(-1)^k}{k^2}\right| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$

T) ако 1 ред е абс сход то той е сход

T) (критерий на Лайбниц)

нека $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \dots \geq a_n \geq a_{n+1} \geq \dots$

и $\lim a_n = 0$

тогава редът $\sum (-1)^{(n-1)} a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - a_6 + \dots$

е сход

Ex

уч

11

опр. мн. от ст. на x за които редът $\sum_{n=1} \frac{x^n}{3^n(n+1)}$ е сход.

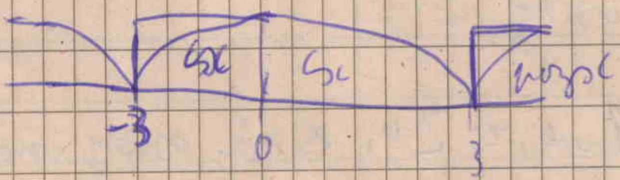
$$\sum_{0}^{\infty} a_n \cdot x^n$$

реш. 1) $x=0$ – сходящ

2) $x>0$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \quad \frac{x^{n+1}}{3^{n+1}(n+2)} \cdot \frac{3^n(n+1)}{x^n} = \frac{x(n+1)}{3(n+2)} = \frac{x \cdot n\left(1+\frac{1}{n}\right)}{3 \cdot n\left(1+\frac{2}{n}\right)} = \frac{x}{3}$$

$0<x<3$ – сход



$x>3$ – разх

$x<0$

$$\sum \frac{|x|^n}{3^n(n+1)}$$ сход ако $|x|<3$

$$\sum \frac{(-1)^n}{n+1} = -\sum \frac{(-1)^{n-1}}{n+1}$$

$\downarrow$

сх

$x<-3$

$$\sum \frac{|x|^n}{3^n(n+1)} \quad \cancel{\frac{|x|^{n+1}}{3^{n+1}(n+2)} \cdot \frac{3^n(n+1)}{|x|^n}} = \frac{|x|}{3} \cdot \frac{n}{n} \cdot \frac{1}{1} =$$

$$= \frac{|x|}{3}$$

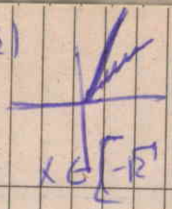
$3^{\frac{1}{4}} > 3^{-\frac{1}{2}}$

$3 > 1 \Rightarrow$

$x(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})$

$- \quad + \quad - \quad +$

$-\sqrt{2} \quad 0 \quad \sqrt{2}$



$x \in [-\sqrt{2}; 0) \cup [\sqrt{2}; \infty)$

$\sqrt{n^4+3n^2-1}$

$a_n = \sqrt[n]{n^4+3n^2-1} \geq 1$

$\varepsilon > 0$

$a_n < (1+\varepsilon)$

за доста голямо n

$n^4+3n^2-1 < (1+\varepsilon)^n$

$(1+\varepsilon)^n = 1 + \binom{n}{1}\varepsilon + \binom{n}{2}\varepsilon^2 + \dots \varepsilon^n > \binom{n}{5}\varepsilon^5 = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{120}\varepsilon$

$(1+\varepsilon)^n \geq \binom{n}{5}\varepsilon^5 > n^4+3n^2-1$

$$\left.\begin{aligned} &a_n \to a \\ &b_n = \frac{a_1+a_2+\dots+a_n}{n} \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &b_n \to a \\ &\cancel{\to a} \end{aligned}$$

$|b_n - a| = \left|\frac{(a_1-a)+(a_2-a)+\dots+(a_n-a)}{n}\right| \leq \frac{|a_1-a|+|a_2-a|+\dots+|a_n-a|}{n} \leq$

$\exists k \quad n > k \Rightarrow |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$

$\leq \frac{|a_1-a|+\dots+|a_k-a|}{n} + \frac{(n-k)\frac{\varepsilon}{2}}{n} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{|a_1-a|+\dots+|a_k-a|}{n} <$

$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

$(a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \dots)(b_0 + b_1 + b_2 + b_3 + \dots) =$

$= a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0) + (a_0 b_3 + a_1 b_2 +$
$a_2 b_1 + a_3 b_0)$

...равило на Коши за умн. на безкр. редове

Опр: ако са дад. редовете $\sum_0^\infty a_n$ $\sum_0^\infty b_n$ ще наречем

$\sum_0^\infty c_n$ където $c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \dots a_n b_0 = \sum_{\substack{k+l=n \\ k,l\ge 0}} a_k b_l$

се нар. произв. в смисъл на Коши на $\sum a_n$ и $\sum b_n$

Т) ако редовете $\sum_0^\infty a_n$, $\sum_0^\infty b_n$ са |абс. сход.| то

редът $\sum c_n$ където $c_n = \sum_{\substack{k+l=n \\ k,l\ge 0}} a_k b_l$ е абс. сход. и

сумата му е равна на $A.B$

I) нека $a_n \ge 0$ $b_n \ge 0$ $\forall n$

тогава $c_n \ge 0$ $\forall n$

Взимаме $\sum_0^N c_n = \sum_0^N \sum_{\substack{k+l=n \\ k,l\ge 0}} a_k b_l = \sum_{\substack{k,l\ge 0 \\ k+l\le N}} a_k b_l \le$

$\le \sum_{\substack{0\le k\le N \\ k+l\le n}} \sum_{0\le l\le N} a_k b_l = \left(\sum_{k=0}^N a_k\right)\left(\sum_{l=0}^N b_l\right) \le AB$

Щогово $\sum\limits_{0}^{\infty} c_n$ е сход

ако $C = \sum\limits_{0}^{\infty} c_n \xrightarrow{N\to\infty} \Rightarrow C \leq AB$

$$\sum_{0}^{2N} c_n = \sum_{n=0}^{2N} \sum_{\substack{k,l\geq 0\\ k+l=n}} a_k b_l = \sum_{\substack{k,l\geq 0\\ k+l\leq 2N}} a_k b_l = \sum_{\substack{0\leq k\leq 2N\\ 0\leq l\leq 2N\\ k+l\leq 2N}} a_k b_l \leq \sum_{k\geq 0}^{2N} \sum_{l\geq 0}^{2N} a_k b_l =$$

$$= \left(\sum_{0}^{2N} a_k\right)\left(\sum_{0}^{2N} b_l\right) \leq \sum_{0}^{2N} c_n$$

$$\downarrow$$

$C \geq AB$

$\Rightarrow C = A.B$

$A = \sum a_n \qquad B = \sum b_n$

II $a_n = a_n' - a_n''$

$a_n' = \dfrac{|a_n| + a_n}{2}$

$a_n'' = \dfrac{|a_n| - a_n}{2}$

$\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n' = A'$ - сход

A'' - сход

$\to a \to b$

$A \to B$

$c_n = \sum a_k b_l = \sum (a_k' - a_k'')(b_l' - b_l'') =$

$= \sum (a_k' b_k' - a_k' b_k'' - a_k'' b_k' + a_k'' b_k'') =$

$$= \underbrace{\boxed{\sum a_k' b_k'}}_{\alpha_n} - \underbrace{\sum a_k' b_k''}_{\beta_n} - \underbrace{\sum a_k'' b_k'}_{\gamma_n} + \underbrace{\sum a_k'' b_k''}_{\delta_n}$$

$_n = \sum_{\substack{k,l \ge 0 \\ k+l=n}} a_k' b_l'$

$\alpha_n = A'B'$

$\beta_n = A'B''$

$\gamma_n = A''B'$

$\delta_n = A''B''$

$c_n = A'B' - A'B'' - A''B' + A''B'' = \cancel{A'(B'-B'')}$

$(A' - A'')(B' - B'')$

експ ф-я

[redacted] ~~за реално~~ $x \in \mathbb{R}$

x

$E(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$

$E(0) = 1$

$E(1) = e$

$E(x+y) = E(x)E(y)$

пр. ще док., че $E(x+y) = E(x) \cdot E(y)$

$E(y) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{y^l}{l!}$ $\qquad c_n = \sum_{\substack{k,l \ge 0 \\ k+l=n}} \frac{x^k}{k!} \cdot \frac{y^l}{l!} = (1)$

$\sum c_n = E(x)\,E(y)$

$(1) = \frac{n!}{k!\,l!} x^k y^l = \frac{1}{n!} \sum \frac{n!}{k!(n-k)!} x^k y^l = \frac{1}{n!} \sum \binom{n}{k} x^k y^{n-k} =$

$= \frac{(x+y)^n}{n!} = \sum \frac{(x+y)^n}{n!} = E(x+y)$

$E(0) = 1$

$E(1) = e$

$E(2) = E(1+1) = E(1)\,E(1) = e \cdot e = e^2$

$E(3) = E(2+1) = E(2)\,E(1) = e^2 \cdot e = e^3$

$E(4) = \text{— — — —}\ e^4$

$E(n) = \text{— — — —}\ e^n$

$E(0) = E(x + (-x)) = E(x)\,E(-x) =$

$E(x)$ - расте функція

$x > 0 \quad E(x) > 0$

$x_1 < x_2 \Rightarrow E(x_1) < E(x_2)$

$x < 0 \quad E(x) = \frac{1}{E(-x)} > 0$

$E(-n) = \frac{1}{E(n)} = \frac{1}{e^n} = e^{-n}$

$E\left(\frac{1}{2}\right)^2 = e \Rightarrow E\left(\frac{1}{2}\right) = e^{\frac{1}{2}}$

$E\left(\frac{1}{k}\right) = e^{\frac{1}{k}}$

$e^x = E(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

let the multiverse вити

29.11

опр
нека $M \subset \mathbb{R}$ $M \neq \emptyset$

казв., че x_0 е т.сг. на M ако във всяка околност на x_0 има т. от $M \neq x_0$

опр 1 Нека е дадена функцията $f: M \to \mathbb{R}$ *

където $M \subset \mathbb{R}, M \neq \emptyset$ и нека x_0 е т.сг. на M

казв., че $f(x) \to l$ когато $x \to x_0$ със ст-ти различни от x_0

ако за $\forall$ редица $\{x_n\}$ $x_n \in M$ $x_n \neq x_0$ ~~такава~~, че за която $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x_0$

е вярно $f(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} l$

пишем $\lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ x\neq x_0}} f(x) = l$

опр 2 * ако за $\forall \varepsilon > 0$ може да се нам. $\delta > 0$ такова, че ако $x \in M$ $x \neq x_0$ $|x - x_0| < \delta$ то

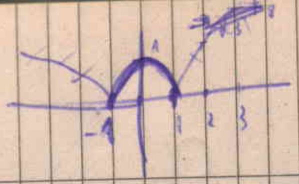
$|f(x) - l| < \varepsilon$

(Т) ~~горните~~ горните опр са еквивалентни

$$\lim_{x\to x_0}(f(x)+g(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x) + \lim_{x\to x_0} g(x)$$

$$\lim_{x\to x_0}(f(x)g(x)) = \lim f(x) \lim g(x)$$

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim f(x)}{\lim g(x)}$$



$((x+y)-z)^2$ $\quad (x+y)^2 - 2(x+y)z + z^2$

$(a+b)^2$ $\quad 1-(-1)^2$

опр1 нека е дадена функцията $f: M \to \mathbb{R}$

*

$x_0 \in M$

ако x_0 е изолирана т. на M считаме, че $f(x)$ е непр в x_0

ако x_0 е т. сг. на M казваме, че $f(x)$ е непр в x_0 ако

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

опр2 * казв, че $f(x)$ е непр в x_0 ако за $\forall$ редица

$\{x_n\}$ $x_n \in M$

$x_n \to x_0$ е изп $f(x_n) \to f(x_0)$

опр3 * казв, че $f(x)$ е непр в x_0 ако $\forall\ \varepsilon > 0$ може да се намери $\delta > 0$ такова, че ако $|x - x_0| < \delta$ $x \in M$ то $|f(x) - f(x_0)| < \delta\varepsilon$

Т определенията 1, 2 и 3 са еквивалентни

опр нека е дадена $f: M \to \mathbb{R}$ казв, че f е непр в M ако е непр във $\forall$ т. от M

~~ако f и g са дефо в M и … са непр в x_0~~

f и g са непр в x_0

$\Rightarrow f+g$ непр в x_0

$f-g$ — " —

$f \cdot g$ — " —

$\frac{f}{g}$ — " —

$g \neq 0$

$) = 3x^3 - x + 2$ – непр

$g(x) = x$ – непр

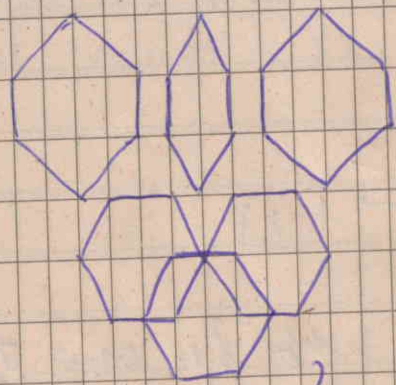
$x^2 = x \cdot x$ – непр

$x^3 = x^2 \cdot x$ – непр

$\dfrac{3x^3 - x + 2}{x^2 - 1}$ непр при $x \neq \pm 1$

) $f: M \to N$ $\quad g: N \to R$

$M, N \subset R$



$F: M \to R$

$(x) = g(f(x))$

$= (g \circ f)$

$f(x) = x^2 \quad g(x) = \sin x$

$g \circ f = \sin x^2 \qquad f \circ g = (\sin x)^2$

) нека са $g \circ g$ f, g нека $x_0 \in M$ f е непр в x_0 и

нека g е непр в $f(x_0)$

тогава $F = g \circ f$ е непр в x_0

Т-и за непр ф-и в кр. ~~зат~~ отр

Т) нека е дад. функц $f: [a, b] \to R$ и нека *

$f(x)$ е непр в $[a, b]$ тогава $\exists$ точки x' и $x'' \in [a, b]$

такива, че $\forall x \in [a, b]$ имаме $f(x') \le f(x) \le f(x'')$

Т) нека * ако точките $f(a)$, $f(b)$ са с разл знаци

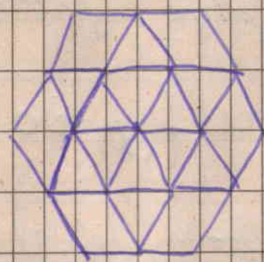
то $\exists$ $c \in (a; b)$ такова, че $f(c) = 0$

$x(x-1)$ ... $(-\infty; 0) \cup (1; \infty)$

n 0   1   0   1

302.151   151 $\frac{302 \cdot 151}{2} = 151^2$

$f(x) = x^3 + 7x^2 - x + 218 \qquad f(x) = 0$



$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

(T) Нека $f(x)$ е непр. в $[a, b]$ тогава съществуват $x', x'' \in [a, b]$: за $\forall x \in [a, b]$ е изпълнено $f(x') \leq f(x) \leq f(x'')$

До озн. $m = \sup\limits_{x \in [a, b]} f(x)$

Нека $n \in \mathbb{N}$ и разгл. $m - \frac{1}{n}$, което число не е горна граница на $\{f(x) \mid x \in [a, b]\} \Rightarrow$ съществува $x_n \in [a, b]$ такова, че $f(x_n) > m - \frac{1}{n}$

Редицата $\{x_n\}$ има сходяща подредица $\{x_{n_k}\}$ озн.

$x'' = \lim\limits_{k \to \infty} x_{n_k}$

Имаме $m - \frac{1}{n_k} \leq f(x_{n_k}) \leq m$

И тъй като $f(x)$ е непр. имаме, че $f(x_{n_k}) \xrightarrow[k \to \infty]{} f(x'')$

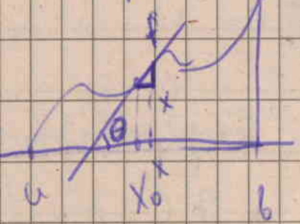
Получ. $m \leq f(x'') \leq m$

$f(x'') = m$

$f(x) \leq f(x'')$ за $\forall x \in [a, b]$

) нека $f(x)$ е непр в $[a,b]$ и в т.
$f(a)$, $f(b)$ са с рази знаци тогава съществува
$\in(a,b)$ такова, че $f(x)=0$

производна на ф-я, опр. и св-ва,



$\frac{f(x_0)}{x_0}$

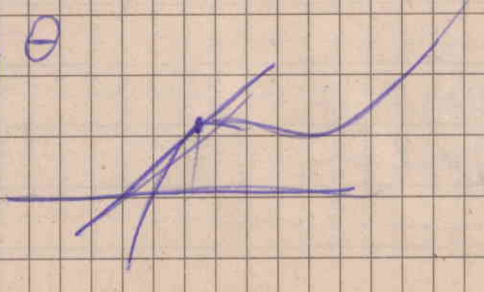
$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ x\neq x_0}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

нека $f(x)$ е опр в околността x_0 ако съществува

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ x\neq x_0}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x\to x_0} \quad (*)$$

зв, че $f(x)$ е диференц в x_0 ако по $(*)$ е пор
оизв на $f(x)$ в x_0 и се бел с $f'(x_0)$

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = tg\,\theta$$



$555 : 4 = 138\,(3)$

$\frac{4}{15}$

$3 \cdot 4 = 12$

35

$8 \cdot 4 = 32$

$f(x) = c$

$f(x) - f(x_0) = c - c = 0$

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 0$$

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 0$$

$f(x) = x$

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{x - x_0}{x - x_0} = 1$$

$$x_0' = \lim_{x \to x_0} \frac{x - x_0}{x - x_0} = 1$$

$f(x) = x^2$

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} = x + x_0 \xrightarrow[x \neq x_0]{x \to x_0} 2x_0$$

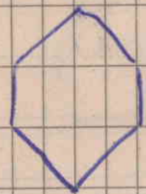
$f(x) = x^n$

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{x^n - x_0^n}{x - x_0} = \frac{\cancel{(x - x_0)}(x^{n-1} + x^{n-2}x_0 + \dots + x_0^{n-1})}{\cancel{x - x_0}}$$

$$= x^{n-1} + x^{n-2}x_0 + \dots + x_0^{n-1} \xrightarrow[x \neq x_0]{x \to x_0} n x_0^{n-1}$$

$$\boxed{f'(x) = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}$$

$f(x)=x^n \qquad f'(x) = n \cdot x^{n-1}$



(T) ако $f(x)$ е диференцируема в x_0 то тя е непр в x_0

(T) нека $f(x)$ и $g(x)$ са диференцируеми в x_0 тогава функциите

$h(x) = f(x)+g(x)$

$\Gamma(x) = f(x)-g(x)$

$l(x) = f(x)\cdot g(x)$

са диференц в x_0 и

$h'(x_0) = f'(x_0)+g'(x_0)$

$\Gamma'(x_0) = f'(x_0)-g'(x_0)$

$l'(x_0) = f'(x_0)g(x_0)+f(x_0)\cdot g'(x_0)$

ако още $g(x)\neq 0$ в околността на x_0 то функц $p(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$ е диференц в x_0 и

$$p'(x) = \frac{f'(x_0)g(x_0)-f(x_0)g'(x_0)}{[g(x_0)]^2}$$

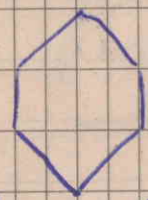
(T) нека $f(x)$ е диференц в x_0, $g(x)$ - диференц в y_0, $y_0=f(x_0)$ тогава

$F(x) = g(f(x))$ е диференц в x_0

и $F'(x_0) = g'(y_0)\cdot f'(x_0) = g'(f(x_0))\cdot f'(x_0)$

$$\boxed{f'(x) = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}$$

$f(x)=x^n \qquad f'(x) = n\cdot x^{n-1}$



(T) ако $f(x)$ е диференцируема в x_0 то тя е непр в x_0

(T) нека $f(x)$ и $g(x)$ са диференцируеми в x_0 тогава функциите

$h(x) = f(x) + g(x)$

$\Gamma(x) = f(x) - g(x)$

$l(x) = f(x)\cdot g(x)$

са дифер в x_0 и

$h'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$

$\Gamma'(x_0) = f'(x_0) - g'(x_0)$

$l'(x_0) = f'(x_0)\, g(x_0) + f(x_0)\cdot g'(x_0)$

освен то $g(x) \neq 0$ в околността на x_0 то функц $p(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ е дифер в x_0 и

$$p'(x) = \frac{f'(x_0)\, g(x_0) - f(x_0)\, g'(x_0)}{\left[g(x_0)\right]^2}$$

(T) нека $f(x)$ е дифер в x_0, $g(x)$ - дифер в y_0

$y_0 = f(x_0)$ тогава

$F(x) = g(f(x))$ е дифер в x_0

и $F'(x_0) = g'(y_0)\cdot f'(x_0) = g'(f(x_0))\cdot f'(x_0)$

$$\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0}=\frac{g(f(x))-g(f(x_0))}{x-x_0}=\underbrace{\frac{g(f(x))-g(f(x_0))}{f(x)-f(x_0)}}_{\downarrow\; g'(f(x_0))}\cdot\underbrace{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}_{\downarrow\; f'(x_0)}$$

$f(x)-f(x_0)$ ✓

$$=g'(f(x_0))\cdot f'(x_0)$$

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\qquad e^{x+y}=e^x e^y$$

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\frac{e^{x_0+h}-e^{x_0}}{h}=e^{x_0}\cdot\frac{e^h-1}{e^h}$$

$$e^h=1+h+\frac{h^2}{2!}+\frac{h^3}{3!}+\ldots$$

$$e^h-1=h+\frac{h^2}{2!}+\frac{h^3}{3!}$$

$$\frac{e^h-1}{1}=1+\underbrace{\boxed{\frac{h}{2!}+\frac{h^2}{3!}+\frac{h^3}{4!}+\ldots}}_{\delta(h)}=1+\delta(h)$$

$$|\delta(h)|\le\frac{|h|}{2!}+\frac{|h|^2}{3!}+\ldots$$

$$|h|\le 1$$

$$|h|\Big(\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\ldots\Big)\le|h|$$

$$\parallel$$
$$e-2$$

$$\frac{e^h-1}{e^h}\to 1$$

$$e^{x_0}\leftarrow e^{x_0}\frac{e^h-1}{e^h}$$

$$(e^x)'=e^x$$

пр

що

$f(x)$ е деф в M и x_0 е вътр за M

казв, че $f(x)$ прит лок макс в x_0 ако същ

за ~~...~~ U на x_0 такова, че при $x \in U$ е изп

$f(x) \le f(x_0)$

—— // —— min в x_0 — // —— $f(x) \ge f(x_0)$

(Т) • нека $f(x)$ е деф в M, x_0 е вътр ~~з~~ т. на M

$f(x)$ прит лок екстремум в x_0 и е дифер в x_0

тогава $f'(x_0) = 0$

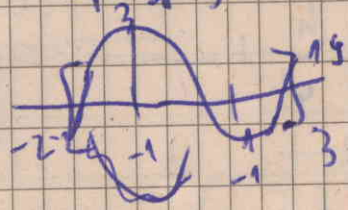
Зад Намери най-гол и най-мал ст на функ

$f(x) = x^3 - 3x + 1$ в инт $[-2; 3]$ и да се откр

т. в които стойностите се дост

$f'(x) = 3x^2 - 3$

$3(x-1)(x+1)$



$\cancel{1}\ 1 \ -3 \ +1$

-1

$-1 + 3 + 1$

3

$-8 + 6 + 1$

-1

$27 - 9 + 1 = 19$

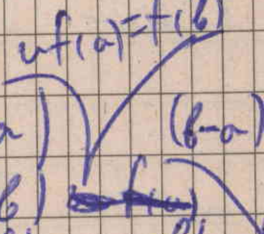
$\min\limits_{[-2,3]} f(x) = -1 = f(-2) = f(1)$

то $\max\limits_{[-2;3]} f(x) = 119 = f(3)$

Т (на Рол)

нека $f(x)$ е непр в $[a,b]$, дифер в (a,b) и $f(a)=f(b)$
тогава $\exists\, c \in (a,b)$ такова, че $f'(c)=0$

Т (на Лагранж за крайните нараствания)



нека $f(x)$ е непр в $[a,b]$, дифер в (a,b)
тогава $\exists\, c \in (a,b)$ такова, че $f'(b)-f'(a) = f'(c)(b-a)$

Сл. ако $f(x)$ е дифер в (α,β) ~~то~~ и ако
$f'(x)=0$ за $\forall\, x \in (\alpha,\beta)$
то $f(x)$ е константа

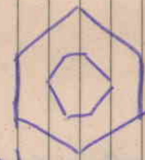
Сл. ако $f(x)$ е дифер в (α,β) и $f'(x) \geq 0$
$f(x)$ е монот раст

Сл ако $f(x)$ е дифер* в (α,β) и $f'(x) \leq 0$
$f(x)$ е монот нам

Сл * $f'(x) > 0$ $f(x)$ е стр раст

Сл * $f'(x) < 0$ $f(x)$ е стр нам

Т (Коши) нека $f(x), g(x)$ са непр в $[a,b]$, дифер в (a,b)
$g(b) \neq g(a)$
$g'(x) \neq 0$ за $x \in (a,b)$



тогава $\exists\, c \in (a, b)$ така, че $\dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$

~~$g'(x) \neq 0$~~

(Т) Правило на Лопитал $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ $f(x_0) = g(x_0) = 0$

Нека $f(x), g(x)$ са дефинирани в околност U на x_0

$g'(x) \neq 0$ $x \in U$ $x \neq x_0$ $f(x_0) = g(x_0) = 0$

в нея. $\exists$ гран. $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} \dfrac{f(x)}{g(x)}$

тогава $\exists$ и гран. $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ има същата стойност

(Т) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$

$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha \cos\beta \pm \cos\alpha \sin\beta$

$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha \cos\beta \mp \sin\alpha \sin\beta$

$\dfrac{\sin x - \sin x_0}{x - x_0} =$

$\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta) = 2 \cos\alpha \sin\beta$

$\alpha + \beta = u$ $\alpha - \beta = v$

$\sin u - \sin v = 2 \cos \dfrac{u+v}{2} \sin \dfrac{u-v}{2}$

$= \dfrac{1}{x - x_0} \left(2 \cos \dfrac{x + x_0}{2} \sin \dfrac{x + x_0}{2} \right) = \cos \dfrac{x + x_0}{2} \cdot \underbrace{\dfrac{\sin \frac{x - x_0}{2}}{\frac{x - x_0}{2}}}_{\to 1} \;\text{I} \to$

$\text{I} \to \cos x_0$

$(\sin x)' = \cos x$

$(\cos x)' = -\sin x$

$$(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)'\cos x - \sin x(\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$(\operatorname{cotg} x)' = \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x^2} = -\frac{1}{2}$$

$$\Uparrow$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{-\sin x}{2x} = -\frac{1}{2}$$

~~$f(x) =$~~ Т ~~Тейлър~~

$f'(x)$, $f''(x)$

$f^{(1)}(x)$ $f^{(2)}(x)$ $f^{(10)}(x)$

$$(*)\; f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f^{(2)}(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \Delta$$

$$(**)\; \Delta = \Delta_{f,x,a,n} = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

Т (Тейлър) нека $n \in \mathbb{N}$

нека $f(x)$ има $n+1$-ва произв в окол. U на т. a

тогава при $x \in U$ $x \neq a$ имаме

$(*)$ и вярно $(**)$ и ξ е някаква т. м/у x и a

(вдлъбн)

опр: казв., че функц $f(x)$ е изпъкнала в интерв I ако за $\forall\, x_1, x_2 \in I$ и за $\forall\, \theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$ за които $\theta_1, \theta_2 \geq 0$, $\theta_1 + \theta_2 = 1$ е изп

$$f(\theta_1 x_1 + \theta_2 x_2) \overset{(\geq)}{\leq} \theta_1 f(x_1) + \theta_2 f(x_2)$$

$\theta \in [0, 1]$

$$f(\theta x_1 + (1-\theta) x_2) \leq \theta f(x_1) + (1-\theta) f(x_2)$$

дом, че е точно

Т нека $f(x)$ е двукратно диференц в инт I и нека $f''(x) \underset{(\leq)}{\geq} 0$ за $\forall x \in I$ тогава $f(x)$ е изпъкнала в I

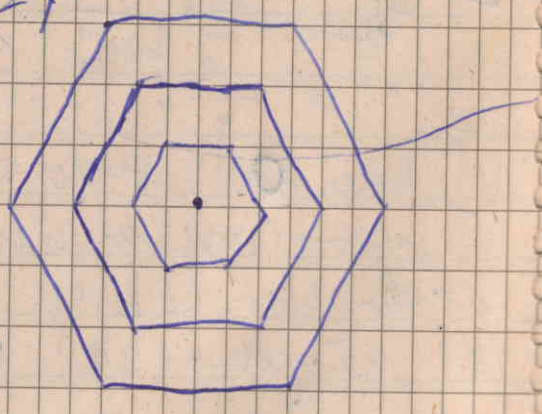
вдлъбнато

зад. док, че ако $f(x)$ е изп в инт I то тя е непр

$f: [a, b] \to [\alpha, \beta]$ – биекция

$\forall\, x_1 \neq x_2 \in [a, b] \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

$\forall y \in [\alpha, \beta] \Rightarrow \exists x \in [a, b]: f(x) = y$



$f^{-1}: [\alpha, \beta] \to [a, b]$

$y \to x$

$f(x) = y$

$f^{-1}(y)$ – обратна функция на f

$f(f^{-1}(y)) = y$

$f^{-1}(f(x)) = x$

(T)₁ ако $f:[a,b]\to[\alpha,\beta]$ и $\exists\, f^{-1}(y)$ то $f^{-1}(y)$ е монотонно раст (намал)

е монотонно раст (намал)

(T) ако f е непр в $[a,b]$, f е растяща и $f(a)=\alpha$, $f(b)=\beta$ (намал)

и е непр то $f^{-1}(y)$ съществува $f^{-1}(y)$ раст (намал) и непр в инт $[\alpha,\beta]$

Лема $f(x)$ е непр $[a,b]$ раст (намал) $f(a)=\alpha$ $f(b)=\beta$ тогава ~~когато~~ $f(x)$ е непр $\Leftrightarrow$ за $\forall y\in[\alpha,\beta]$ $\exists x\in[a,b]$ $f(x)=y$

(T) $f(x)$ е непр и (раст (намал)) в околност на т. x_0, ~~която~~ дифер в т. x_0 нека $f(x_0)=y_0$ $f'(x)\neq 0$ тогава обратната ф-я $f^{-1}(y)$ е дифер в т. y_0 и

$$\left(f^{-1}(y_0)\right)'=\frac{1}{f'(x_0)}$$

Св-ва ln

1) $\ln x$ е раст
2) $\ln x$ е непр в $(0,+\infty)$
3) $\ln x$ е дифер в $(0,+\infty)$

$$(\ln y)'=\frac{1}{(e^x)'} \qquad e^x=y$$

$$(\ln y)'=\frac{1}{e^x}=\frac{1}{y}$$

$$(\ln y)'=\frac{1}{y}$$

$\ln x_1 \cdot x_2 = \ln x_1 + \ln x_2$

$\ln \frac{x_1}{x_2} = \ln x_1 - \ln x_2$

$\ln 1 = 0$

$a^x : (-\infty; +\infty) \to [0, +\infty]$

$a > 0$

$a^x = e^{x \ln a}$

Св-ва

1) $a^0 = e^{0 \cdot \ln a} = e^0 = 1$

2) $a^{x_1 + x_2} = a^{x_1} \cdot a^{x_2}$

3) $a^{x_1 - x_2} = \frac{a^{x_1}}{a^{x_2}}$

4) $(a^x)' = (e^{x \ln a})' = e^{x \ln a} \cdot \ln a = a^x \cdot \ln a$

5) $a > 1 \Leftrightarrow \ln a > 0 \Leftrightarrow (a^x)' > 0 \Leftrightarrow a^x \nearrow$

6) $a < 1 \Leftrightarrow \ln a < 0 \Leftrightarrow (a^x)' < 0 \Leftrightarrow a^x \searrow$

$(a^x)^y = a^{x \cdot y}$