Теория на игрите - 16.01.2014 година

Кооперативна игра - задава се с характеристична функция

$N=\{1,2,\dots,n\}$

1. $v(\emptyset)=0$

2. $v(S\cup T)\geq v(S)+v(T)$

$S\cap T=\emptyset$

Задача: $v(N)=v(S)+v(N\setminus S)$

$$v(S)=\begin{cases}0, & |S|=1\\ 1/2 & |S|=2\\ 1/2 & |S|=3\\ 1 & |S|=4\\ 1 & |S|=5\end{cases}$$

Делба - вектор $x=(x_1,x_2,\dots,x_n)$, всяка компонента показва печалбата на играчите

Свойства:

1. $x_i\geq v(\{i\})$

2. $\sum_{i=1}^{n} x_i=v(N)$

3. $\sum_{i\in S} x_i\geq v(S)$

от 1 до 3, за хубави делби

Кога една делба $y$ доминира делбата $x$ по коалицията $S$

$y\underset{S}{>}x \to y_i>x_i,\ i\in S$

$\sum_{i\in S} y_i\leq v(S)$

Задача:

$v(\{1\})=1$ $v(\{2\})=2$ $v(\{3\})=3$

$v(\{1,2\})=4$ $v(\{1,3\})=5$ $v(\{2,3\})=6$

$v(\{1,2,3\})=7$

$x_1 \geq 1$

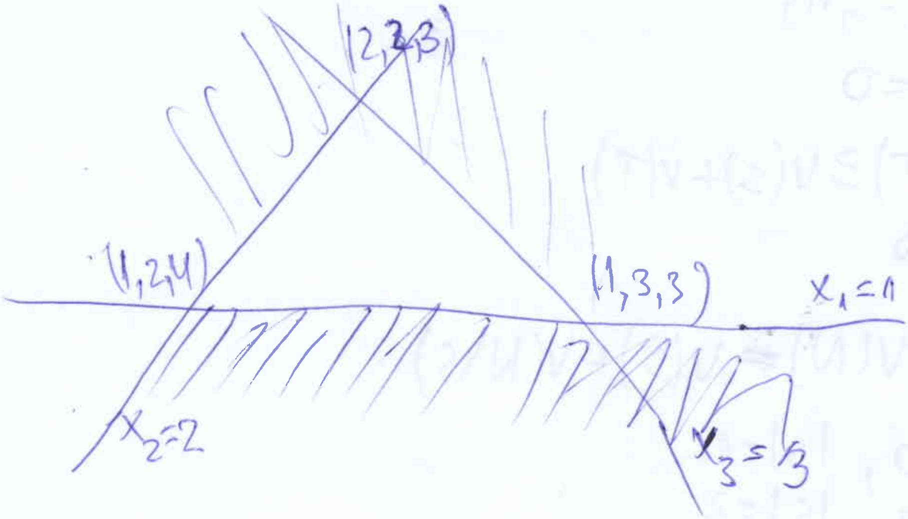
$x_2 \geq 2$

$x_3 \geq 3$

$x_1 + x_2 \geq 3$

$x_1 + x_3 \geq 4$

$x_2 + x_3 \geq 5$




$\Sigma$ $x_1 + x_2 \geq 4$

$x_1 + x_3 \geq 5$

$x_2 + x_3 \geq 6$

$x_1 + x_2 + x_3 \geq 7$

За да определим отсечката гледаме 3. $\sum_{i \in S} x_i \geq v(S)$ като равенство

$x_2 + x_3 = 6$

$\Rightarrow x_1 = 1$

$x_1 \leq 1$

$\Rightarrow$ множеството (ядрото) е празно

Задача 2: $v(\{1\}) = 1$ $v(\{2\}) = 2$ $v(\{3\}) = 3$ $v(\{1,2\}) = 4$ $v(\{1,3\}) = 5$

$v(\{2,3\}) = 6$ $v(\{1,2,3\}) = 8$

ядрото е от всички делби

Ако $v(\{1,2,3\}) = 7,5$

триъгълникът се променя

---

Произволна игра със обществена сума и празно ядро?

Да се докаже:

$V(N) = \sum_{i=1}^{n} x_i \geq x_1 + V(\cancel{N\setminus\{1\}})$

$V(\{1\}) + V(N\setminus\{1\})$

противоречие

Зад:

Търсим делба $x$, такава

$\left(\frac{1}{6},\frac{1}{6},\frac{1}{6},\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right) = X \underset{S}{\geq} Y = \left(\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{6},\frac{1}{6},\frac{1}{6}\right)$

$X \underset{T}{\leq} Y$

$S \neq T$ 2, 4

3, 1

$S = \{4, 5\}$

$T = \{1, 2\}$

Игра

$$V(S) = \begin{cases} 0, & |S| = 1 \\ 1, & |S| = 2 \\ 1, & |S| = 3 \end{cases}$$

$x_1 \geq 0$

$x_2 \geq 0$

$x_3 \geq 0$

$x_1 + x_2 + x_3 = 1$

$$\left.\begin{aligned} x_1 + x_2 &\geq 1 \\ x_1 + x_3 &\geq 1 \\ x_2 + x_3 &\geq 1 \end{aligned}\right\} x_1 + x_2 + x_3 \geq \frac{3}{2}$$

$\Rightarrow$ Ядрото е празно

Сега търсим множество от делби, които никои две не са сравними, тогава ~~които~~ ако ② вземем друга делба, то те ще се доминира по някоя коалиция

$M = \{(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0), (\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}), (0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})\}$ –

Това се нарича НМ решение

$x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0 \quad x_3 \geq 0$

$x_1 + x_2 + x_3 = 1$

Нека $x_1$ е най-големият елемент

~~xx~~ имаме вариантите: $x_1 = \frac{1}{2}, x_1 < \frac{1}{2}, \cancel{x_1} > \frac{1}{2}$

$N = \{(x_1, x_2, x_3), \ x_1 = \frac{1}{3}, x_2 \geq 0, \ x_3 \geq 0$

$x_2 + x_3 = \frac{2}{3}\}$

$\frac{1}{3} \cancel{+} \frac{1}{3}, \frac{1}{3} \quad (\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{2})$

$x_1, x_2, \cancel{x}_3 \geq 0$

$x_1 + x_2 + x_3 = 1$

1\. $x_1 < \frac{1}{3}$ а) $x_2 \leq \frac{1}{2}$ $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 0)$

$x_1 < \frac{1}{2}$ б) $x_3 \leq \frac{1}{2}$ $(\frac{1}{3}, 0, \frac{2}{3})$

~~2. $x_1 = \frac{1}{3}$~~

2\. $x_1 = \frac{1}{3} + 2\varepsilon$ $(\frac{1}{3}, x_2 + \varepsilon, x_3 + \varepsilon)$

Игри за гласуване

$V(S) \in \{0, 1\}$

$V(\bar{S}) = 1$

$S \subset \bar{S} \to V(S) = 0$

$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0$

$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 1$

$x \leq_S y$

1. $S \subset \bar{S}$

$x_i < y_i$

$i \in \bar{S}$

$0 \leq \sum_{x \in S} x_i < y_i \leq v(S) = 0$

2 сл. $S = \bar{S}$

$x_i < y_i \ \forall i \in S$

$\sum_{i \in S} y_i = 1$

$\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i \in S} x_i = 1$

Взимаме делба, която не е от това множество

$x_i \geq 0, \ i = 1, \dots, n$

$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$

$\sum_{i \notin \bar{S}} x_i = \varepsilon > 0$

$y_i = \begin{cases} x_i + \frac{\varepsilon}{|\bar{S}|}, & i \in \bar{S} \\ 0, & i \notin \bar{S} \end{cases}$

1. $v(\emptyset) = 0$
2. $v(S \cup T) \geq v(S) + v(T)$

$S \cap T = \emptyset$

$N = \{1, \dots, n\}$

Ако имаме две игри с характеристични ~~игри~~ функции съответно $v_1, v_2$

$(v_1+v_2)(S) = v_1(S) + v_2(S)$ – това хар. функция ли е – да

$(\alpha v)(S) = \alpha v(S)$

$\alpha \geq 0$

Това множество от игри е затворено относно + и умножение с положително число, изпъкнало и е конус

$(v_1 - v_2)(S) = v_1(S) - v_2(S)$ – понякога

$$\int_0^1 x^{t-1}(1-x)^{n-t}\,dx = \quad , n \geq t,\ t \geq 0$$

n-броят на игр-

$$= \frac{(t-1)!\,(n-t)!}{n!}$$

По индукция:

$$\int_0^1 x^t (1-x)^{n-t-1}\,dx = -\int_0^1 x^t (1-x)^{n-t-1}\,d(1-x) =$$

$$= -\frac{1}{n-t}\int_0^1 x^t\,d(1-x)^{n-t} = -\frac{1}{n-x}\,x^t(1-x)^{n-x}\Big|_0^1 +$$

$$+ \frac{t}{n-t}\int_0^1 x^{t-1}(1-x)^{n-x}\,dx = \frac{t!\,(n-t-1)!}{n!}$$

---

$\pi v(S) = v(\pi S)$ (пермутация)

$\pi v(\emptyset) = v(\pi \emptyset) = 0$

$\pi V(S\cup T) = V(\pi(S\cup T)) = V(\pi S \cup \pi T) \geq V(\pi S) + V(\pi T) = \pi V(S) + \pi V(T)$

S-носител на играта, ако удоволетворява, че ако вземем каквато и да е коалиция з

$S \subseteq N$ (произволно)

$V(T) = V(T \cap S)$

$T = (T \cap S) + (T \setminus S)$

$V(T \cap S) = V(T) \geq V(T \cap S) + V(T \setminus S)$

N е носител на всяка игра

$\varphi(v)$ - вектор, 2 игри - $v$ и $w$

Свойства:

1. $\varphi(\alpha v + \beta w) = \alpha \varphi(v) + \beta \varphi(w)$

$\alpha \geq 0 \quad \beta \geq 0$

2. $\sum_{i \in S} \varphi_i(v) = v(S)$

S-носител на играта

3. $\varphi_{\pi(i)}(\pi v) = \varphi_i(v)$

Тези 3 свойства опр. вектор, който е делба, но е решение