ПОРЕДИЦА
СЪВРЕМЕННА
МАТЕМАТИКА

14

Тодор
Гичев

Здравка
Карамитева

ТЕОРИЯ НА ИГРИТЕ

ИЗДАТЕЛСТВО
НАУКА
И ИЗКУСТВО

СОФИЯ 1980

В предлаганата книга популярно за широк кръг читатели са изложени основните идеи и резултати от теорията на игрите. Това е една от най-младите математически дисциплини, чийто предмет са явления и ситуации от конфликтен тип. Основен проблем от теорията на игрите е намирането на оптимални стратегии за всеки играч.

В книгата са разгледани: антагонистични игри, които представляват интерес както за начинаещия читател, така и за специалиста; матрични игри — това са най-популярните и найчесто третирани игри; крайни безкоалиционни игри, позиционни игри, кооперативни игри, непрекъснати игри в квадрат, игри от оптимални смесени стратегии и занимателни игри. Материалът е написан достъпно, занимателно и е адресиран до читатели без специална подготовка.

Теорията на игрите намира широко приложение главно в икономиката, военното дело и техническите науки. Оттук се определя и читателят на книгата — ученици, студенти, математици, икономисти, физици, военни, инженери и други читатели.

ПРЕДГОВОР

В настоящата книга се излагат основните подходи, които се прилагат при анализирането на процесите на вземане на решение. Обсъждат се положителните страни и слабостите на тези подходи с цел да се подчертае сложността на проблемите и да се насочи вниманието към търсенето на други пътища за тяхното решаване.

Предлаганият материал е разпределен в шест глави. В първа глава се разглеждат антагонистичните игри. Следващите две глави са посветени на матричните игри, а шестата — на непрекъснатите игри. Крайните игри с повече от двама участници се изучават в четвърта и пета глава, като в първата от тях се разглеждат безкоалиционните игри, а във втората — кооперативните игри.

С малки изключения, при запознаването с представените в настоящата книга въпроси от теорията на игрите е достатъчна математическата подготовка, която получават възпитаниците на нашите висши технически учебни заведения. Известни затруднения могат да възникнат във връзка с използуването на интеграла на Стилтес при изучаването на непрекъснатите игри в шеста глава. Тази глава обаче може да се изпусне от читателя с по-малка математическа подготовка, без това да се отрази съществено на общото запознаване с основните идеи в теорията на игрите, изложени в книгата. Материалът от шеста глава е включен в книгата единствено за да даде представа за едно от възможните обобщения в случая, когато множеството от стратегиите не е крайно.

След излизането от печат през 1943 г. на първото систематизирано изложение на теорията на игрите [19] се появиха твърде много учебници и монографии, които са посветени на отделни раздели от тази теория. Приложеният в края на книгата списък на литературата съвсем не претендира за пълнота. В него са включени само по няколко заглавия от различните направления в тази теория, които могат да бъдат препоръчани за по-нататъшно разширяване на знанията.

Досега единствената книга по теория на игрите на български език е „Елементи от теория на игрите“ [4], в която се дават само някои първоначални сведения. Въпроси от теорията на матричните игри са включени в книгата „Изследване на операциите“[24].

Изказваме най-искрена благодарност на Веселин Спиридонов, рецензент и редактор на книгата, и на Асен Дончев, рецензент, които допринесоха за подобряване изложението на материала в настоящата книга.

Авторите
София, 1979 г.

ВЪВЕДЕНИЕ

ПРЕДМЕТ НА ТЕОРИЯТА НА ИГРИТЕ

Във всички сфери на обществения живот, икономиката, науката, практическата дейност протичат процеси, участниците в които се намират в различни взаимоотношения. Обикновено тези взаимоотношения се определят от известни правила. Участниците в тези процеси заедно с правилата, които регулират взаимоотношенията между тях, могат да бъдат разглеждани като самостоятелно обособени *„общества“*. Членовете на дадено „общество“ имат свои възможности — физически, материални, финансови и др., с помощта на които вземат участие в общия процес на взаимоотношенията, за да реализират собствените си цели. Целите на отделните членове на „обществото“ могат да съвпадат или да се доближават, без да се покриват напълно. Като пример за „общество“ от такъв вид могат да послужат колективите на един завод, един промишлено-аграрен комплекс, един научен институт у нас, многобройните кооперирани промишлени предприятия в нашето народно стопанство, „обществото“ на икономическата организация на социалистическите страни и др. Във всички тези случаи основни се явяват общите задачи, които стоят за разрешаване от „обществото“. Възможно е обаче целите на отделните членове на обществото силно да се различават, което в някои случаи може да доведе до появяването на конфликт между тях. Добри примери в това отношение могат да бъдат конкуриращите се монополи и различните политически партии в капиталстическите страни. При враждуващите страни конфликтът може да прерасне и във война.

Всяко едно „общество“ се характеризира с възможностите и интересите на неговите членове, с тяхната преценка за състоянието на „обществото“ и с „основния закон“, регулиращ взаимоотношенията между тях. „Основният закон" определя правата и задълженията на отделните членове и предвижда наказания за отклоняването от него.

Създаването на математически модели на „общества" дава възможност за изучаване на взаимоотношенията в тях с помощта на математически методи при използването на съвременните компютри. Самото създаване на тези модели е задача, която стои пред специалистите по изследване на операциите, а с техния анализ се занимава математическата дисциплина теория на игрите. Всеки модел в тази теория се нарича *игра*, а членовете на „обществото" — участници в играта или *играчи*. Играта е напълно определена, след като са описани възможностите на отделните играчи, конкретизирани са техните цели и са формулирани нейните правила.

Игровата терминология се е утвърдила при изучаването на взаимоотношенията в „обществата" може би по две причини. Първо, защото най-напред са били изследвани обикновените занимателни и хазартни игри. И на второ място, защото в тези игри много от резултатите на теорията на игрите допускат добра интерпретация. Примери на такива игри се привеждат на различни места в изложението.

Основната задача на теорията на игрите е анализирането на взаимоотношенията в моделите на „общества" и намирането на рационалното поведение на техните членове. От съществено значение при анализа на игровите модели е броят на участниците в играта. Игрите с един участник са добре известните задачи на математическото оптимиране, оптималното управление, вариационното смятане. В тях единственият участник няма никакви препятствия по пътя за пълното удовлетворяване на собствените си интереси. И ако разглежданата задача притежава оптимално решение, единственият играч в този случай притежава оптимално поведение, което се състои в придържане към това оптимално решение. При игрите с повече от един участник пред вид възможността за наличието на известна противоречивост в интересите на отделните играчи пълното удовлетворяване на всички играчи едновременно е невъзможно. В тези игри трябва да се направят някакви компромиси. В придържането към такъв начин на участие в играта на отделните играчи се състои тяхното рационално поведение.

Тъй като теорията на игрите анализира взаимоотношенията в различни „общества", понякога се говори, че тази теория се занимава с изучаване на различни *конфликтни ситуации*. В по-нататъшното изложение обаче при съдържателното описание на получените резултати ще използваме понятието общество. Авторите се надяват, че тази интерпретация, която е дадена от Джон фон Нойман и Оскар Моргенщерн в [19], ще бъде полезна при осмислянето на основните идеи в теорията на игрите. С нейна помощ може от единна гледна точка да се направи преглед на принципите, които стоят в основата на дефинициите на равновесно състояние в различните конфликтни ситуации. Но за да се подчертае, че понятията от обществените науки се използват само за онагледяване на излаганата теория, а самата тя не претендира да е достигнала онова равнище, когато би могла да описва сложните обществени явления, навсякъде думата общество ще се загражда в кавички.

За определянето на рационалното поведение в игровите модели на различните „общества" съществуват два подхода. Първият от тях, който е станал вече класически, се състои в едновременното анализиране на взаимоотношенията в цялото „общество". Той може да бъде приложен за изследване на игри, в които всеки от играчите разполага с пълна информация за правилата на играта, за възможностите и целите на всички участници в нея. В този случай се изучава равновесието на силите в „обществото" и се изследва кога вътре в него може да се формира устойчива „*норма на поведение*", т. е. да се установи един набор от принципи, които всички членове на „обществото" се стремят да спазват при изграждане на взаимоотношенията си. Придържането към „нормата на поведение" определя и рационалното поведение в играта. Естествено изискване към принципите, които стоят в основата на „нормата на поведение", е тяхната *непротиворечивост*. „Нормата на поведение" трябва да притежава и *вътрешна устойчивост* в „обществото". Последното изискване означава, че отклоняването от „нормата на поведение", което е в рамките на правилата на играта, не може да облагодетелствува „обществото" като цяло.

В практиката съществуват и такива процеси, при които информацията на отделния участник за възможностите и целите на останалите играчи, както и за правилата на играта, не е пълна. При тези случаи за определяне на рационалното поведение в „обществото" може да се подходи „субективно", от гледна точка на отделния участник, като се използват неговите субективни преценки и информация за „обществото". Този подход води началото си в работите на съветския математик Ю. Б. Гермейер и понастоящем се развива активно от неговите ученици. Подробно изложение на тези резултати се съдържа в монографията [6].

Тъй като основната цел на тази книга е запознаването с основните идеи в теорията на игрите, в нея ще бъдат разгледани само игрови модели, взаимоотношенията в които могат да се анализират чрез първия, класическия подход, чиито основи бяха положени с фундаменталните работи на Джон фон Нойман през тридесетте години на нашия век.

Може да бъде направена класификация на игровите модели по различни признаци. Като основен признак по-нататък е възприет начинът на участие на играчите в играта — колективно и индивидуално. В първата група попадат игри, чиито правила разрешават съвместни действия. Това са *кооперативните игри*. Към втората група спадат игрите, правилата на които забраняват каквато и да било съвместна дейност, независимо от това, че обединяването на усилията на някои от играчите може да бъде в техен интерес. Игрите от втората група се наричат *безкоалиционни*. В началото ще бъдат разгледани именно тези игри. По-нататъшна класификация на игрите от двете групи се прави съответно в началото на първа глава и в пета глава.

ГЛАВА 1 АНТАГОНИСТИЧНИ ИГРИ

1.1. ОСНОВНИ ПОНЯТИЯ И КЛАСИФИКАЦИЯ НА БЕЗКОАЛИЦИОННИТЕ ИГРИ

Правилата на една игра определят правата и задълженията на отделните играчи при взаимоотношенията между тях. При безкоалиционните игри преди започването на играта всеки от играчите разполага с пълна информация за възможностите и целите на другите играчи. В самата игра обаче играчите участвуват индивидуално. Забранено е влизането в преговори за организиране на съвместна дейност. При еднократно разиграване на играта никой не разполага с информация за поведението на останалите. Затова всеки се ръководи единствено от своите цели. В случаите, когато дадена игра се повтаря многократно, е позволено всеки да си води статистика за поведението на другите и ако сметне за необходимо, може да се възползува от тази информация при определяне на своето поведение.

При взаимоотношенията в една безкоалиционна игра в зависимост от възможностите на отделните играчи могат да се появят различни ситуации. Ние ще предполагаме, че познаваме предварително всички ситуации, които могат да възникнат. Също така ще предполагаме, че всеки играч започва играта с набор от планове, които определят неговото поведение във всички възможни ситуации. Всеки такъв план се нарича *стратегия* за съответния играч. Промяната на начина на действие само в една единствена ситуация означава изменение на стратегията.

Нека е дадена една безкоалиционна игра с N участници (играчи), $N \geqq 2$. Множеството от стратегиите на k-тия играч $(k=1,\dots,N)$ да означим с M_k. С избирането на стратегия $X_k \in M_k$ за $k=1,\dots,N$ се фиксира една *партия* $(X_1,\dots,X_N)$ в играта. Реализирането на една партия означава, че отделните играчи са реализирали по един от готовите си планове за свое поведение при всички възможни ситуации. И понеже играта е безкоалиционна, можем да предположим, че всички играчи правят избор на своя стратегия едновременно. Тогава нека k-тият играч оценява резултата за себе си от дадена партия $(X_1, \ldots, X_N)$, определена от избора на стратегиите $X_k \in M_k$, $k=1, \ldots, N$, с помощта на числовата функция $\mathscr{P}_k(X_1, \ldots, X_N)$, която ще наричаме негова *платежна функция*. Целта на k-тия играч ще идентифицираме с максимизирането на функцията $\mathscr{P}_k(X_1, \ldots, X_N)$.

Множеството от всички партии $(X_1, \ldots, X_N)$, $X_k \in M_k$, $k=1, \ldots, N$, в играта да означим с M и да положим

$$\mathscr{P}(X_1, \ldots, X_N) = (\mathscr{P}_1(X_1, \ldots, X_N), \ldots, \mathscr{P}_N(X_1, \ldots, X_N))$$

за $(X_1, \ldots, X_N) \in M$. С $\Gamma(\mathscr{P}, M)$ ще означаваме безкоалиционната игра с N участници, при която множеството от стратегиите и платежната функция на k-тия играч са съответно M_k и $\mathscr{P}_k$.

Класифицирането на безкоалиционните игри е полезно при изучаването на взаимоотношенията в тях и определянето на рационалното поведение на играчите. На базата на броя на играчите в една безкоалиционна игра, на свойствата на техните платежни функции и на множествата от стратегиите им са възможни различни класификации. В зависимост от това, дали множествата от стратегиите на всички играчи се състоят от краен брой елементи или множеството от стратегиите на поне един от тях е безкрайно, безкоалиционните игри са *крайни* и *безкрайни*.

Тъй като игрите с двама участника обикновено се изследват полесно и при тях се получават по-пълни резултати, тези игри се изучават самостоятелно. Крайните игри с двама участници се наричат *биматрични*.

Една безкоалиционна игра се нарича *игра с нулева сума*, ако за всяка партия $(X_1, \ldots, X_N) \in M$ е изпълнено равенството

$$\sum_{k=1}^{N} \mathscr{P}_k(X_1, \ldots, X_N) = 0.$$

Ако поне при една партия това равенство е нарушено, то играта се нарича с *ненулева сума*. Безкоалиционните игри на двама участници с нулева сума се наричат *антагонистични*, защото за всяка партия $(X_1, \ldots, X_N)$ в една такава игра е изпълнено равенството

$$\mathscr{P}_1(X_1, \ldots, X_N) = -\mathscr{P}_2(X_1, \ldots, X_N),$$

което означава, че интересите на двамата играчи са противоположни, антагонистични. Крайните антагонистични игри се наричат

още *матрични игри*. Матричните игри са биматрични игри с нулева сума.

Основна роля в теорията на безкоалиционните игри се пада на понятието *точка на равновесие*. Партията $(\tilde{X}_1, \ldots, \tilde{X}_N) \in M$ се нарича точка на равновесие за играта $\Gamma(\mathscr{P}, M)$, ако за всяко k, $k=1, \ldots, N$ и всяка стратегия $X_k \in M_k$ е изпълнено неравенството

$$\mathscr{P}_k(\tilde{X}_1, \ldots, \widetilde{X_k}, \ldots, \tilde{X}_N) \geqq \mathscr{P}_k(\tilde{X}_1, \ldots, X_k, \ldots, \tilde{X}_N). \tag{1.1}$$

Всяка точка на равновесие определя една *„норма на поведение“* която се състои в спазването на принципа всеки играч да избира стратегия от точката на равновесие. По такъв начин се определя рационалното поведение на играчите в една безкоалиционна игра. Така дефинираната „норма на поведение“ не постулира взаимно противоречащи принципи, което означава, че тя е вътрешно непротиворечива. От друга страна, неравенство (1.1) показва, че самостоятелното отклоняване на един играч от тази „норма на поведение“ при положение, че всички останали се придържат към нея, не може да гарантира успех на първия. При това свое поведение той дори рискува да загуби. Следователно определената с помощта на точката на равновесие „норма на поведение“ притежава *вътрешна устойчивост* по отношение на индивидуалните отклонения от нея, при които не се нарушават правилата на играта. И така, ако безкоалиционната игра притежава точка на равновесие, то в общия процес на взаимоотношенията в съответното „общество“ съществува равновесно състояние, придържането към което е в интерес на всички играчи.

Да се спрем на проблемите, които възникват при изследване равновесието на силите в безкоалиционните игри. На първо място стои изучаването на свойствата на точките на равновесие. Тези въпроси са тясно свързани със съществуването на точки на равновесие и с разработването на ефективни методи за намирането им. Друга проблема е характеризиране влиянието на малки неточности при съставянето на игрови модели върху равновесното състояние на „обществото“. Свойството малко да се променя точката на равновесие в този случай бихме могли да наречем *външна устойчивост* на играта (за разлика от определената по-горе вътрешна устойчивост на „нормата на поведение“). В по-нататъшното изложение при разглеждането на различните игрови модели последователно ще се спираме върху решаването на споменатите проблеми.

Изучаването на безкоалиционните игри ще започнем с антагонистичните игри, на които е посветена останалата част от тази глава. Крайните антагонистични игри — матричните игри, се разглеждат във втора глава, а в трета глава са дадени някои от известните методи за тяхното решаване. Един специален клас безкрайни антагонистични игри се изучава в шеста глава. В четвърта глава е отделено място на два специални класа крайни безкоалиционни игри — позиционни игри с N участници и биматрични игри.

1.2. АНТАГОНИСТИЧНИ ИГРИ, СЕДЛОВИ ТОЧКИ

Съгласно казаното в предишната точка антагонистични се наричат безкоалиционните игри на двама участници с нулева сума. Ако M_1 и M_2 са множествата от стратегиите съответно на първия и втория играч, за означаване на елементите на M_1 ще използуваме X, и за елементите на M_2 — Y. Една стратегия X на първия играч и една стратегия Y на втория определят една партия (X, Y) в играта. Нека M е множеството от всички партии и нека платежната функция $\mathscr{P}_1$ на първия играч да означим с $\mathscr{P}$. Тъй като разглеждаме антагонистична игра, платежната функция $\mathscr{P}_2$ на втория играч за всяка партия (X, Y) ще удовлетворява равенството

$$\mathscr{P}_2(X, Y) = -\mathscr{P}(X, Y).$$

Първият играч се стреми да максимизира функцията $\mathscr{P}(X, Y)$ Понеже вторият играч се стреми да максимизира своята платежна функция, съгласно въведените вече означения това означава минимизиране на функцията $\mathscr{P}(X, Y)$. Функцията $\mathscr{P}(X, Y)$ се нарича платежна функция на антагонистичната игра. Антагонистичната игра с платежна функция $\mathscr{P}$ и множество от възможни партии M ще означаваме $\Gamma(\mathscr{P}, M)$.

Да разгледаме следната проста антагонистична игра, известна под името „герб-стотинка". В играта участвуват двама играчи. Единият от тях (да го наречем първи играч) поставя на масата монета с герба или цифровата част (стотинката) нагоре, но така, че вторият играч да не я вижда. Вторият играч се стреми да познае положението на монетата. В случай че не познае, заплаща на първия играч 1 лв., ако познае — получава от него 1 лв. В тази игра всеки от двамата участници може да избира измежду две възможности (стратегии), които за първия играч нека да означим с X_1 (герб) и X_2 (стотинка), а за втория — с Y_1 (герб) и Y_2 (стотинка). Тогава множествата от стратегиите ще бъдат $M_1 = \{X_1, X_2\}$ и $M_2 = \{Y_1, Y_2\}$. За платежната функция $\mathscr{P}(X, Y)$ в случаите, когато и двамата играчи са избрали първите си стратегии X_1 и Y_1 или вторите си стратегии X_2 и Y_2, ще имаме

$$\mathscr{P}(X_1, Y_1) = \mathscr{P}(X_2, Y_2) = -1.$$

В останалите случаи

$$\mathscr{P}(X_1, Y_2) = \mathscr{P}(X_2, Y_1) = 1.$$

Удобно е стойностите на платежната функция на тази игра да бъдат записани в следната таблица:

	Y_1	Y_2
X_1	-1	1
X_2	1	-1

редовете и стълбовете на която съответствуват на различните стратегии на първия и втория играч. Тогава първият ред дефинира функцията $\mathscr{P}(X, Y)$ в случая, когато първият играч е избрал първа стратегия X_1, а вторият ред — когато е избрал стратегията X_2. Първият стълб определя резултата от играта на първия играч, ако вторият играч избира първата си стратегия Y_1, а вторият стълб — ако избира стратегията Y_2. Във всеки от разглежданите случаи вторият играч получава $-\mathscr{P}(X, Y)$. Тъй като множествата от стратегиите на двамата играчи са крайни, разглежданата игра представлява един пример на специалния клас антагонистични игри — матрични игри. На подробното разглеждане на тези игри ще бъде посветена следващата глава.

По-нататък ще бъдат разгледани антагонистични игри $\Gamma(\mathscr{P}, M)$ с платежни функции $\mathscr{P}(X, Y)$, които са непрекъснати в множеството M от партии $(X, Y) \in M$, $X \in M_1$, $Y \in M_2$, а множествата M_1 и M_2 ще предполагаме, че са ограничени и затворени подмножества съответно на векторните пространства R^n и R^m. При тези предположения да разглеждаме въпроса за определяне на рационалното поведение на играчите в антагонистичната игра $\Gamma(\mathscr{P}, M)$.

Нека за момент да предположим, че вторият играч е задължен пръв да избира своя стратегия $\tilde{Y} \in M_2$ и да съобщава избора си на първия играч. Тогава естествено е първият играч да избере такава своя стратегия $\tilde{X} \in M_1$, за която

$$\mathscr{P}(\tilde{X}\, \tilde{Y}) = \max_{X \in M_1} \mathscr{P}(X, \tilde{Y}).$$

Най-доброто, което може да направи в този случай вторият играч, е да избере такава стратегия $Y^0 \in M_2$, за която е изпълнено

$$\max_{X \in M_1} \mathscr{P}(X, Y^0) = \min_{Y \in M_2} \max_{X \in M_1} \mathscr{P}(X, Y).$$

Обратно, ако първият играч трябва да съобщава предварително своя избор, най-добре е той да избере такава своя стратегия $X^0 \in M_1$, за която

$$\min_{Y \in M_2} (X^0, Y) = \max_{X \in M_1} \min_{Y \in M_2} \mathcal{P}(X, Y).$$

При направените предположения относно свойствата на функцията $\mathcal{P}(X, Y)$ и множествата M_1 и M_2 всички минимуми и максимуми в горните равенства се достигат. По-нататък ще се изпуска отбелязването на множествата от стратегиите във формулите с max и min, когато това се подразбира.

Разглежданите два случая не са еквивалентни за първия играч. Това се вижда от следната

Лема 1.1. *При направените предположения за играта* $\Gamma(\mathcal{P}, M)$ *е вярно неравенството*

$$\min_Y \max_X \mathcal{P}(X, Y) \geqq \max_X \min_Y \mathcal{P}(X, Y). \tag{1.2}$$

Доказателство. От определението за максимум за всяка стратегия $Y \in M_2$ е изпълнено неравенството

$$\max_X \mathcal{P}(X, Y) \geqq \mathcal{P}(X, Y).$$

Ако от двете страни на неравенството вземем минимум по $Y \in M_2$, то се получава

$$\min_Y \max_X \mathcal{P}(X, Y) \geqq \min_Y \mathcal{P}(X, Y).$$

Но тъй като лявата страна на това неравенство не зависи от X, ще бъде изпълнено

$$\min_Y \max_X \mathcal{P}(X, Y) \geqq \max_X \min_Y \mathcal{P}(X, Y).$$

В двата случая за разглежданата конкретна игра имаме

$$\min_Y \max_X \mathcal{P}(X, Y) = 1, \quad \max_X \min_Y \mathcal{P}(X, Y) = -1.$$

Следователно за нея в (1.2) е налице строго неравенство. Този пример показва, че има антагонистични игри, при които информацията за направения избор на стратегия от страна на другия играч е съществена. Затова в такива игри всеки от играчите е заинтересован да получи сведение за поведението на другия играч. Но съгласно казаното единствената възможност за това е натрупване на статистика при многократно повтаряне на играта.

Да се спрем по-подробно на случая, когато (1.2) е равенство, т. е.

$$v = \max_X \min_Y \mathcal{P}(X, Y) = \min_Y \max_X \mathcal{P}(X, Y). \tag{1.3}$$

Числото v се нарича *цена на играта.*

Класът от антагонистични игри, за които е вярно равенството (1.3), е твърде важен, затова по-нататък ще се спрем върху установяването на някои свойства на игрите от този клас.

Лема 1.2. *Ако за антагонистичната игра* $\Gamma(\mathcal{P}, M)$ *е изпълнено равенството* (1.3), *съществува такава двойка стратегии* $(X^0, Y^0) \in M$, *че* $\mathcal{P}(X^0, Y^0) = v$ *и за произволна двойка стратегии* (X, Y) $X \in M_1$, $Y \in M_2$ *са изпълнени неравенствата*

$$\mathcal{P}(X, Y^0) \leqq \mathcal{P}(X^0, Y^0) \leqq \mathcal{P}(X^0, Y).$$

Доказателство. Да разгледаме функциите

$$\varphi(X) = \min_Y \mathcal{P}(X, Y), \quad \psi(Y) = \max_X \mathcal{P}(X, Y).$$

Те са непрекъснати, следователно съществуват точки $X^0 \in M_1$ и $Y^0 \in M_2$ такива, че

$$\varphi(X^0) = \max_X \min_Y \mathcal{P}(X, Y), \quad \psi(Y^0) = \min_Y \max_X (X, Y).$$

От (1.3) следва, че $\varphi(X^0) = \psi(Y^0)$. Тогава за произволни стратегии $X \in M_1$ и $Y \in M_2$ получаваме

$$\mathcal{P}(X^0, Y) \geqq \varphi(X^0) = \psi(Y^0) \geqq \mathcal{P}(X, Y^0). \tag{1.4}$$

Тъй като това съотношение е вярно за произволни $X \in M_1$ и $Y \in M_2$, то е вярно и за стратегиите X^0 и Y^0. Следователно $\mathcal{P}(X^0, Y^0) = \varphi(X^0) = \psi(Y^0)$. Тогава от (1.4) следва твърдението на лемата.

Всяка двойка стратегии (X^0, Y^0), $X^0 \in M_1$, $Y^0 \in M_2$, за която при произволни стратегии $X \in M_1$ и $Y \in M_2$ са изпълнени неравенствата

$$\mathcal{P}(X, Y^0) \leqq \mathcal{P}(X^0, Y^0) \leqq \mathcal{P}(X^0, Y)$$

се нарича *седлова точка* за играта $\Gamma(\mathcal{P}, M)$. Наличието на седлова точка е достатъчно условие за изпълняването на равенството (1.3), което се показва в следната

Лема 1.3. *Ако антагонистичната игра* $\Gamma(\mathcal{P}, M)$ *притежава седлова точка* (X^0, Y^0), *то е вярно равенството* (1.3) *и* $\mathcal{P}(X^0, Y^0)$ *се равнява на цената* v *на играта.*

Доказателство: Тъй като за всички $Y \in M_2$ е изпълнено неравенството

$$\mathcal{P}(X^0, Y^0) \leqq \mathcal{P}(X^0, Y),$$

то следва, че

$$\mathcal{P}(X^0, Y^0) \leqq \min_Y \mathcal{P}(X^0, Y) \leqq \max_X \min_Y \mathcal{P}(X, Y).$$

Аналогично се получава и неравенството

$$\mathcal{P}(X^0, Y^0) \geqq \min_Y \max_X \mathcal{P}(X, Y).$$

От тези две неравенства получаваме

$$\min_{Y} \max_{X} \mathscr{P}(X, Y) \leqq \mathscr{P}(X^0, Y^0) \leqq \max_{X} \min_{Y} \mathscr{P}(X, Y),$$

откъдето и от лема 1.1. следва, че

$$\mathscr{P}(X^0, Y^0) = \max_{X} \min_{Y} \mathscr{P}(X, Y) = \min_{Y} \max_{X} \mathscr{P}(X, Y).$$

С това лемата е доказана.

От доказаните лема 1.2 и лема 1.3 непосредствено следва

Теорема 1.1. *Необходимото и достатъчно условие играта* $\Gamma(\mathscr{P}, M)$ *да притежава седлова точка е да е изпълнено равенството*

$$\min_{Y} \max_{X} \mathscr{P}(X, Y) = \max_{X} \min_{Y} \mathscr{P}(X, Y).$$

Това равенство не е изпълнено за разгледаната игра „гербстотинка", следователно тя няма седлова точка.

Ако (X^0, Y^0) е седлова точка и v е цената на играта $\Gamma(\mathscr{P}, M)$, то са изпълнени неравенствата

(1.5) $$\mathscr{P}(X, Y^0) \leqq \mathscr{P}(X^0, Y^0) = v$$

за произволни $X \in M_1$ и

(1.6) $$v = \mathscr{P}(X^0, Y^0) \leqq \mathscr{P}(X^0, Y)$$

за произволни $Y \in M_2$.

Съотношението (1.6) показва, че избирайки стратегията X^0, първият играч си гарантира цената на играта при произволно поведение на втория играч. От (1.5) заключаваме, че със стратегията си Y^0 вторият играч може да попречи на първия да получи повече от цената v. Ако си припомним, че за платежната функция $\mathscr{P}_2(X, Y)$ на втория играч е изпълнено $\mathscr{P}_2(X, Y) = -\mathscr{P}(X, Y)$, неравенствата (1.5), (1.6) могат да се запишат така

(1.7) $$\mathscr{P}_2(X, Y^0) \geqq \mathscr{P}_2(X^0, Y^0) = -v,$$

(1.8) $$-v = \mathscr{P}_2(X^0, Y^0) \geqq \mathscr{P}_2(X^0, Y).$$

Тогава от (1.7) следва, че Y^0 е стратегията на втория играч, която му гарантира резултат от играта, числото $-v$, при произволно поведение на първия играч. Неравенството (1.8) показва, че със стратегията си X^0 първият играч може да попречи на втория да получи повече от $-v$. Поради посочените свойства стратегиите X^0, Y^0 от седловата точка (X^0, Y^0) се наричат *оптимални* съответно за първия и втория играч. Съгласно т. 1.1 от неравенствата (1.5) и (1.8) следва, че седловата точка (X^0, Y^0) е точка на равновесие.

Принципът да се избира стратегия от седловата точка, разбира се, ако такава съществува, определя една „норма на поведение", която гарантира равновесие в антагонистичната игра. Индивидуалното отклоняване от нея на единия играч при положение, че другият се придържа към нея, не е в интерес на първия.

Да разгледаме някои свойства на точката на равновесие в този специален случай на безкоалиционни игри.

Теорема 1.2. *Нека* $(\tilde{X}^0, \tilde{Y}^0)$ *и* (X^0, Y^0) *са две различни седлови точки за играта* $\Gamma(\mathscr{P}, M)$ *с цена* v. *Тогава*

а) *двойките стратегии* $(\tilde{X}^0, Y^0)$ и $(X^0, \tilde{Y}^0)$ *са също седлови точки*

б) *верни са равенствата*

$$\mathscr{P}(\tilde{X}^0, \tilde{Y}^0) = \mathscr{P}(X^0, Y^0) = \mathscr{P}(\tilde{X}^0, Y^0) = \mathscr{P}(X^0, \tilde{Y}^0).$$

Доказателство. Тъй като $(\tilde{X}^0, \tilde{Y}^0)$ и (X^0, Y^0) са седлови точки, то са изпълнени неравенствата:

(1.9) $$\mathscr{P}(\tilde{X}^0, \tilde{Y}^0) \geq \mathscr{P}(X^0, \tilde{Y}^0),$$

(1.10) $$\mathscr{P}(X^0, Y^0) \leqq \mathscr{P}(X^0, \tilde{Y}^0).$$

От (1.9) и (1.10) следва, че

$$\mathscr{P}(X^0, Y^0) \leqq \mathscr{P}(\tilde{X}^0, \tilde{Y}^0).$$

Но от пълната симетрия следва и обратното неравенство

$$\mathscr{P}(\tilde{X}^0, \tilde{Y}^0) \leqq \mathscr{P}(X^0, Y^0).$$

Следователно изпълнено е равенството

(1.11) $$\mathscr{P}(X^0, Y^0) = \mathscr{P}(\tilde{X}^0, \tilde{Y}^0).$$

Понеже $(\tilde{X}^0, \tilde{Y}^0)$ е седлова точка и са верни (1.10) и (1.11), за произволна стратегия $X \in M_1$ е изпълнено

(1.12) $$\mathscr{P}(X^0, \tilde{Y}^0) \geqq \mathscr{P}(X^0, Y^0) = \mathscr{P}(\tilde{X}^0, \tilde{Y}^0) \geqq \mathscr{P}(X, \tilde{Y}^0).$$

Но тъй като (X^0, Y^0) е също седлова точка, от (1.9) и (1.11) за произволна стратегия $Y \in M_2$ следва, че

(1.13) $$\mathscr{P}(X^0, \tilde{Y}^0) \leqq \mathscr{P}(\tilde{X}^0, \tilde{Y}^0) = \mathscr{P}(X^0, Y^0) \leqq \mathscr{P}(X^0, Y).$$

От (1.12) и (1.13) за произволни $X \in M_1$ и $Y \in M_2$ се получава

$$\mathscr{P}(X, \tilde{Y}^0) \leqq \mathscr{P}(X^0, \tilde{Y}^0) = \mathscr{P}(X^0, Y^0) \leqq \mathscr{P}(X^0, Y),$$

т. е. двойката стратегии $(X^0, \tilde{Y}^0)$ е седлова точка и съгласно лема 1.3 са изпълнени равенствата

$$\mathscr{P}(X^0, Y^0) = \mathscr{P}(\tilde{X}^0, \tilde{Y}^0) = \mathscr{P}(X^0, \tilde{Y}^0).$$

Аналогично се показва, че и точката $(\tilde{X}^0, Y^0)$ е седлова точка. С това теоремата е доказана.

Свойството а) в теорема 1.2 показва, че стратегиите от седловата точка са взаимнозаменяеми, а свойството б), че те са еквивалентни, т. е. гарантираният резултат от играта за всеки един от играчите не зависи от това, коя точка на равновесие (седлова точка) е избрана като „норма на поведение“ в играта. Затова съвсем основателно стратегиите от седловата точка се наричат оптимални за всеки играч поотделно.

По-нататък, вместо да говорим, че търсим седлова точка и цената на дадена антагонистичната игра, ще казваме че *решаваме* тази игра. В този смисъл всяка седлова точка и цената представляват едно *решение на играта*.

З а б е л е ж к а. Всички направени разсъждения остават в сила, ако $\mathscr{P}(X, Y)$ е непрекъсната функция, дефинирана в компактните подмножества M_1 и M_2 съответно на метричните пространства $\mathfrak{M}_1$ и $\mathfrak{M}_2$. От тези факти ще се възползуваме в глава шеста.

1.3. СЪЩЕСТВУВАНЕ НА СЕДЛОВА ТОЧКА

В т. 1.2 беше разгледан пример на антагонистична игра, която не притежава седлова точка. Затова интерес представляват достатъчните условия, гарантиращи наличието на седлова точка за една антагонистична игра $\Gamma(\mathscr{P}, M)$. Такива условия дава следната

Теорема 1.3. *Нека M_1 и M_2 са изпъкнали компактни подмножества съответно на R^n и R^m, а платежната функция $\mathscr{P}(X, Y)$ е непрекъсната в множеството $M=M_1\times M_2$, вдлъбната по X при всяка стратегия $Y\in M_2$ и изпъкнала по Y при всяка стратегия $X\in M_1$. Тогава антагонистичната игра $\Gamma(\mathscr{P}, M)$ притежава седлова точка.*

Доказателството на теоремата ще проведем на два етапа. Най-напред ще предположим, че функцията $\mathscr{P}(X, Y)$ е строго вдлъбната по M при всяка фиксирана стратегия $Y\in M_2$ и строго изпъкнала по Y при всяка стратегия $X\in M_1$. Това означава, че за всяко число $\lambda\in(0,1)$ и при всеки две стратегии за първия играч X^1, $X^2\in M_1$, $X^1\neq X^2$ и всеки две стратегии за втория играч $Y^1, Y^2\in M_2$, $Y^1\neq Y^2$ и произволни стратегии $X\in M_1$ и $Y\in M_2$ са изпълнени строгите неравенства:

$$\mathscr{P}(\lambda X^1+(1-\lambda) X_2, Y)>\lambda \mathscr{P}(X^1, Y)+(1-\lambda)\mathscr{P}(X^2, Y),$$
$$\mathscr{P}(X, \lambda Y^1+(1-\lambda) Y^2)<\lambda \mathscr{P}(X, Y^1)+(1-\lambda)\mathscr{P}(X, Y^2).$$

От непрекъснатостта на функцията $\mathscr{P}(X, Y)$ при всяка стратегия $X\in M_1$ следва съществуването на такава стратегия $Y(X)\in M_2$, че е изпълнено:

$$\mathscr{P}(X, Y(X))=\min_Y \mathscr{P}(X, Y)=m(X). \tag{1.14}$$

Тъй като функцията $\mathscr{P}(X, Y)$ е строго изпъкнала по Y, стратегията $Y(X)$ с това свойство е единствена. Следователно равенството (1.14) дефинира еднозначната функция $Y(X)$ в множеството M_1. Ще покажем, че тази функция е непрекъсната. Нека $\{X^k\}_1^\infty$ е една редица от стратегии $X^k\in M_1$, която е сходяща към стратегията $X^0\in M_1$. С Y^0 да означим една точка на сгъстяване на редицата $\{Y(X^k)\}_1^\infty$. Без ограничение на общността можем да считаме, че $\lim\limits_{k\to\infty} Y(X^k)=Y^0$. Тогава от неравенството

$$\mathscr{P}(X^k, Y(X^k))=\min_Y \mathscr{P}(X^k, Y)\leqq\mathscr{P}(X^k, Y(X^0))$$

след граничен преход се получава

$$\mathscr{P}(X^0, Y^0)\leqq\mathscr{P}(X^0, Y(X^0)), \tag{1.15}$$

като при това е използувана непрекъснатостта на платежната функция $\mathscr{P}$. Но тъй като, от друга страна,

$$\mathscr{P}(X^0, Y(X^0))=\min_Y \mathscr{P}(X^0, Y)\leqq\mathscr{P}(X^0, Y^0), \tag{1.16}$$

от (1.15) и (1.16) следва, че $\mathscr{P}(X^0, Y^0)=\mathscr{P}(X^0, Y(X^0))$. От единствеността на стратегията $Y(X^0)$, която се определя от (1.14) при X^0, получаваме, че $Y(X^0)=Y^0$. Но тъй като Y^0 беше произволна точка на сгъстяване на редицата $\{Y(X^k)\}_1^\infty$, следва, че тази редица е сходяща и нейната граница съвпада с $Y(X^0)$. С това е доказана непрекъснатостта на функцията $Y(X)$. От формулата $m(X)=\mathscr{P}(X, Y(X))$ следва и непрекъснатостта на функцията $m(X)$.

Нека X^* е точка, в която се достига максимумът на непрекъснатата функция $m(X)$ в ограниченото и затворено множество M_1. Избираме произволна стратегия $X\in M_1$ и означаваме $Y^\lambda=Y((1-\lambda) X^*+\lambda X)$, където λ е число от интервала (0,1). Точката $(1-\lambda) X^*+\lambda X$ принадлежи на множеството M_1, понеже то е изпъкнало. Тогава от дефиницията (1.14) на функцията $m(X)$, от дефиницията на точката X^* и от вдлъбнатостта на функцията $\mathscr{P}(X, Y)$ по X следват неравенствата

$$m(X^*)\geqq m((1-\lambda) X^*+\lambda X)=\mathscr{P}((1-\lambda) X^*+\lambda X, Y^\lambda)>$$
$$>(1-\lambda)\mathscr{P}(X^*, Y^\lambda)+\lambda\mathscr{P}(X, Y^\lambda)\geqq(1-\lambda)\min_Y \mathscr{P}(X^*, Y)+$$
$$+\lambda\mathscr{P}(X, Y^\lambda)=(1-\lambda) m(X^*)+\lambda\mathscr{P}(X, Y^\lambda).$$

Следователно е изпълнено

$$\mathscr{P}(X, Y^\lambda)\leqq m(X^*)=\mathscr{P}(X^*, Y(X^*)). \tag{1.17}$$

Но тъй като $\lim\limits_{\lambda\to 0}[(1-\lambda) X^*+\lambda X]=X^*$ и $\lim\limits_{\lambda\to 0} Y^\lambda=Y(X^*)$, от (1.17) и дефиницията (1.14) на функцията $m(X)$ следва, че

$$\mathscr{P}(X, Y(X^*))\leqq m(X^*)=\mathscr{P}(X^*, Y(X^*))\leqq\mathscr{P}(X^*, Y),$$

където Y е произволна стратегия от M_2. Това означава, че двойката стратегии $(X^*, Y(X^*))$ представлява седлова точка за разглежданата антагонистична игра.

Да се освободим от допълнително направеното предположение за строга вдлъбнатост и строга изпъкналост на функцията $\mathscr{P}(X, Y)$. За тази цел при всяко цяло положително число k да разгледаме функцията

$$\mathscr{P}_k(X, Y)=\mathscr{P}(X, Y)-\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{n} x_i^2+\frac{1}{k}\sum_{j=1}^{m} y_j^2,$$

където x_i, $i=1,\ldots, n$ и y_j, $j=1, \ldots, m$ са компонентите съответно на стратегиите $X \in M_1$ и $Y \in M_2$, а функцията $\mathscr{P}(X, Y)$ удовлетворява предположенията на теоремата. Функцията $\mathscr{P}_k(X, Y)$ е строго вдлъбната по X и строго изпъкнала по Y. Да докажем например строгата вдлъбнатост. Нека $X^1=(x_1^1, \ldots, x_n^1)$ и $X^2=(x_1^2, \ldots, x_n^2)$ са две различни стратегии от M_1, $\lambda \in (0, 1)$ и Y е стратегия от M_2. Тогава

$$\mathscr{P}_k(\lambda X^1+(1-\lambda) X^2, Y)=\mathscr{P}(\lambda X^1+(1-\lambda) X^2, Y)-\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{n}\lambda^2(x_i^1)^2-$$

$$-\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{n}(1-\lambda)^2 (x_i^2)^2-2\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{n} \lambda(1-\lambda) x_i^1 x_i^2+\frac{1}{k}\sum_{j=1}^{m} (y_j)^2 \geqq$$

$$\geqq \lambda \mathscr{P}_k(X^1, Y)+(1-\lambda)\mathscr{P}_k(X^2, Y)+\frac{1}{k}\lambda(1-\lambda)\sum_{i=1}^{n}(x_i^1-x_i^2)^2>$$

$$>\lambda \mathscr{P}_k(X^1, Y)+(1-\lambda)\mathscr{P}_k(X^2, Y).$$

Съгласно първата част от доказателството на настоящата теорема при всяко цяло положително число k съществува седлова точка (X^k, Y^k) за играта $\Gamma(\mathscr{P}_k, M)$. Можем да считаме, че редицата $\{(X^k, Y^k)\}_1^{\infty}$ е сходяща към (X^0, Y^0). За произволни стратегии $X \in M_1$ и $Y \in M_2$ имаме

$$\mathscr{P}(X, Y^k)-\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{n}(x_i)^2 \leqq \mathscr{P}_k(X, Y^k) \leqq \mathscr{P}_k(X^k, Y^k) \leqq$$

$$\leqq \mathscr{P}_k(X^k, Y)=\mathscr{P}(X^k, Y)+\frac{1}{k}\sum_{j=1}^{m}(y_j)^2.$$

След граничен преход получаваме неравенствата

$$\mathscr{P}(X, Y^0) \leqq \mathscr{P}(X^0, Y^0) \leqq \mathscr{P}(X^0, Y),$$

където X е произволна стратегия от M_1 и Y е произволна стратегия от M_2. Следователно двойката стратегии (X^0, Y^0) е седлова точка за играта $\Gamma(\mathscr{P}, M)$.

Въпросът за съществуването на седлова точка е от съществено значение при анализа на антагонистичните игри, тъй като с помощта на седловата точка се определя рационалното поведение на играчите в играта, което съгласно казаното в точка т. 1.2 с основание може да се нарече оптимално. Доказаната в тази точка теорема ще бъде използувана при доказателството на основната теорема на матричните игри в глава втора. Нейно обобщение за случая, когато множествата от стратегиите са подмножества на метрични пространства, ще бъде доказано в глава шеста.

1.4. ЗАВИСИМОСТ НА РЕШЕНИЕТО НА АНТАГОНИСТИЧНИТЕ ИГРИ ОТ НАЧАЛНИТЕ ДАННИ

При съставянето на математическите модели на конфликтни ситуации е възможно да се допуснат някои грешки. Грешките например могат да бъдат резултат от неточното определяне на платежните функции на отделните играчи. Тогава се получава модел, който не отразява точно реалната ситуация, а е едно нейно приближение. Да предположим, че моделът, който съответствува на взаимоотношенията в реалното „общество“, е една антагонистична игра с множества от стратегиите на двамата играчи съответно M_1 и M_2 и с платежна функция на играта $\mathscr{P}_0(X, Y)$, определена за $X \in M_1$, $Y \in M_2$. Тази игра да означим $\Gamma(\mathscr{P}_0)$. Нека при определянето на платежната функция сме допуснали грешка и вместо играта $\Gamma(\mathscr{P}_0)$ сме получили модела-антагонистична игра $\Gamma(\mathscr{P})$, където платежната функция $\mathscr{P}(X, Y)$ е определена също в множествата от стратегии на двамата играчи M_1 и M_2, но тя се различава от $\mathscr{P}_0(X, Y)$. Подобни грешки могат да се възприемат като известни смущения в платежната функция. Да предположим, че антагонистичните игри $\Gamma(\mathscr{P}_0)$ и $\Gamma(\mathscr{P})$ притежават седлови точки. Естествено възниква въпросът ще бъде ли близка цената на играта $\Gamma(\mathscr{P})$ до цената от играта $\Gamma(\mathscr{P}_0)$. Същото се отнася и до съответните множества от седловите точки.

На практика ние разполагаме само с приближения модел и имаме оценка за грешката, която сме направили при определянето на платежна функция. Интересуваме се доколко решението на приближения модел се отличава от решението, което съответствува на реалната конфликтна ситуация.

Понякога решаването на дадена антагонистична игра е затруднително и платежната ѝ функция $\mathscr{P}_0$ се приближава с по-проста в някакво отношение функция $\mathscr{P}$. В този случай също е необходимо да се знае дали решението на играта $\Gamma(\mathscr{P})$ ще бъде добро приближение на решението на играта $\Gamma(\mathscr{P}_0)$.

Характеризирането на влиянието на малки неточности при определянето на платежната функция $\mathscr{P}_0$ в една антагонистична игра ще направим в случая, когато платежните функции $\mathscr{P}_0$, $\mathscr{P}$ и множествата от стратегиите M_1, M_2 удовлетворяват условията на теорема 1.3. Множеството от всички игри $\Gamma(\mathscr{P})$, където $\mathscr{P}$ е произволна функция, удовлетворяваща предположенията на теорема 1.3, да означим с $\mathfrak{G}$. Ако играта $\Gamma(\mathscr{P}) \in \mathfrak{G}$, нека $v(\mathscr{P})$ е нейната цена, а $S(\mathscr{P})$ — множеството от седловите ѝ точки. Тогава в сила е следната

Теорема 1.4. *За всяка игра* $\Gamma(\mathscr{P}_0) \in \mathfrak{G}$ *и всяко число* $\varepsilon>0$ *съществува такова число* $\delta>0$, *че ако за играта* $\Gamma(\mathscr{P}) \in \mathfrak{G}$ *е изпълнено*

$$\max_{X\in M_1} \max_{Y\in M_2} |\mathscr{P}(X, Y)-\mathscr{P}_0(X, Y)|<\delta,$$

то $|v(\mathscr{P})-v(\mathscr{P}_0)|<\varepsilon$ *и за всяка седлова точка* $(X, Y) \in S(\mathscr{P})$ *ще се намери седлова точка* $(X_0, Y_0) \in S(\mathscr{P}_0)$, за която

$$\|X-X_0\|+\|Y-Y_0\|<\varepsilon,$$

където с $\|a-b\|$ *е означено разстоянието между точките a и b*.

Доказателство. Най-напред ще докажем, че ако

(1.18) $\max\limits_{X\in M_1} \max\limits_{Y\in M_2} |\mathscr{P}(X, Y)-\mathscr{P}_0(X, Y)|=\gamma,$

е изпълнено

(1.19) $$|v(\mathscr{P})-v(\mathscr{P}_0)|\leqq\gamma.$$

Действително от (1.18) се получават неравенствата

$$\mathscr{P}(X, Y)\geqq\mathscr{P}_0(X, Y)-\gamma\geqq\min_{Y\in M_2} \mathscr{P}_0(X, Y)-\gamma,$$

$$\mathscr{P}(X, Y)\leqq\mathscr{P}_0(X, Y)+\gamma\leqq\max_{X\in M_1} \mathscr{P}_0(X, Y)+\gamma.$$

Следователно

(1.20) $v(\mathscr{P})=\max\limits_X \min\limits_Y \mathscr{P}(X,Y)\geqq\max\limits_X \min\limits_Y \mathscr{P}_0(X,Y)-\gamma=v(\mathscr{P}_0)-\gamma,$

(1.21) $v(\mathscr{P})=\min\limits_Y \max\limits_X \mathscr{P}(X, Y)\leqq\min\limits_Y \max\limits_X \mathscr{P}_0(X, Y)+\gamma=v(\mathscr{P}_0)+\gamma.$

От (1.20) и (1.21) следва неравенство (1.19).

Да преминем към доказателството на теоремата. За тази цел да допуснем противното. Тогава ще се намерят игра $\Gamma(\mathscr{P}_0) \in \mathfrak{G}$ и

число $\varepsilon_0>0$ такива, че за всяко число $\delta>0$ съществува игра $\Gamma(\mathscr{P}^\delta) \in \mathfrak{G}$ с платежна функция $\mathscr{P}^\delta(X, Y)$ и седлова точка $(X^\delta, Y^\delta) \in S(\mathscr{P}^\delta)$, за която е изпълнено неравенството

(1.22) $$\max_X \max_Y |\mathscr{P}^\delta(X, Y)-\mathscr{P}_0(X, Y)|<\delta,$$

но за всяка седлова точка $(X_0, Y_0) \in S(\mathscr{P}_0)$ имаме

(1.23) $$|v(\mathscr{P}^\delta)-v(\mathscr{P}_0)|+\|X^\delta-X_0\|+\|Y^\delta-Y_0\|\geqq\varepsilon_0.$$

Да дадем на δ последователно стойности $\frac{1}{k}$, където $k=1,2,\ldots$ Тогава ще получим една редица $\{\Gamma(\mathscr{P}_k)\}_1^\infty$ от игри $\Gamma(P_k)=\Gamma(\mathscr{P}^{\delta_k})$ със съответни платежни функции $\mathscr{P}_k(X, Y)$ и редица $\{(X_k, Y_k)\}_1^\infty$ от седлови точки $(X_k, Y_k)=(X^{\delta_k}, Y^{\delta_k})$, за които съгласно (1.22) ще бъде изпълнено

(1.24) $$\lim_{k\to\infty} \max_X \max_Y |\mathscr{P}_k(X, Y)-\mathscr{P}_0(X, Y)|=0,$$

но за всяка седлова точка $(X_0, Y_0) \in S(\mathscr{P}_0)$ съгласно (1.23) ще имаме

(1.25) $$|v(\mathscr{P}_k)-v(\mathscr{P}_0)|+\|X_k-X_0\|+\|Y_k-Y_0\|\geqq\varepsilon_0.$$

Без ограничаване на общността можем да считаме, че $\lim\limits_{k\to\infty}(X_k, Y_k)=(X^*, Y^*)$, тъй като в противен случай можем да изберем подредица с това свойство. От (1.24) и (1.19) следва, че $\lim\limits_{k\to\infty} v(\mathscr{P}_k)=v(\mathscr{P}_0)$. Тогава от (1.25) заключваме, че

(1.26) $$\inf_{(X, Y)\in S(\mathscr{P}_0)} (\|X^*-X\|+\|Y^*-Y\|)\geqq\frac{\varepsilon_0}{2}.$$

По-нататък ще докажем, че точката $(X^*, X^*) \in S(\mathscr{P}_0)$. За тази цел да изберем произволни стратегии $X \in M_1$ и $Y \in M_2$. Тогава от свойствата на седловата точка (X_k, Y_k) следва, че са верни неравенствата

(1.27) $$\mathscr{P}_k(X, Y_k)\leqq\mathscr{P}_k(X_k, Y_k)\leqq\mathscr{P}_k(X_k, Y).$$

От неравенството на триъгълника получаваме

$$|\mathscr{P}_k(X_k, Y_k)-\mathscr{P}_0(X^*, Y^*)|\leqq|\mathscr{P}_k(X_k, Y_k)-\mathscr{P}_0(X_k, Y_k)|+$$
$$+|\mathscr{P}_0(X_k, Y_k)-\mathscr{P}_0(X^*, Y^*)|.$$

Но първото събираемо в дясната част на горното неравенство клони към нула съгласно (1.24), а второто клони към нула, понеже функцията $\mathscr{P}_0(X, Y)$ е непрекъсната. Следователно $\lim\limits_{k\to\infty}\mathscr{P}_k(X_k, Y_k)=\mathscr{P}_0(X^*, Y^*)$. Аналогично се доказват и равенствата

$$\lim_{k\to\infty} \mathscr{P}_k(X, Y_k) = \mathscr{P}_0(X, Y^*), \lim_{k\to\infty} \mathscr{P}_k(X_k, Y) = \mathscr{P}_0(X^*, Y).$$

Тогава, извършвайки граничен преход в (1.27), получаваме, че за произволни стратегии $X \in M_1$ и $Y \in M_2$ са изпълнени неравенствата

$$\mathscr{P}_0(X, Y^*) \leqq \mathscr{P}_0(X^*, Y^*) \leqq \mathscr{P}_0(X^*, Y).$$

Но това означава, че $(X^*, Y^*) \in S(\mathscr{P}_0)$. Това съотношение обаче противоречи на неравенството (1.26). Достигнатото противоречие доказва верността на теоремата.

Доказаната теорема може да бъде изказана и по следния начин: малките смущения в платежната функция на антагонистичната игра предизвикват малки изменения на цената на играта, а множеството от седловите точки на смутената игра остава в „тясна“ околност на множеството от седловите точки на несмутената игра. Или, с други думи, *всяка антагонистична игра $\Gamma(\mathscr{P}) \in \mathfrak{G}$ притежава устойчивост по отношение на малки смущения в платежната функция.* По аналогичен начин може да се изследва и устойчивостта по отношение на малки смущения в множествата от стратегии. Тъй като принципиално нови затруднения в този случай не се появяват, анализът на този случай не се привежда.

ГЛАВА 2. МАТРИЧНИ ИГРИ

2.1. ОСНОВНИ СВОЙСТВА, СЕДЛОВИ ТОЧКИ

Да се спрем по-подробно на крайните антагонистични игри. От предидущата глава знаем, че при тези игри всеки от двамата играчи има краен брой стратегии. Нека броят на стратегиите на първия играч е n, а на втория — m. При избор на i-тата стратегия $(1 \leqq i \leqq n)$ от страна на първия играч и на j-тата стратегия от страна на втория играч $(1 \leqq j \leqq m)$ двойката числа (i, j) определя една *партия* в играта. Нека резултатът от нея за първия играч се изразява с числото a_{ij}, т. е. стойността на платежната му функция за разглежданата партия е a_{ij}. Тъй като играта е антагонистична, резултатът от същата партия за втория играч ще бъде

(2.1) $$-a_{ij}.$$

По такъв начин с всяка крайна антагонистична игра, в която първият от участниците има n стратегии, а вторият — m, се свързва една таблица от числа (матрица)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} \dots a_{2m} \\ \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} \dots a_{nm} \end{pmatrix} = \|a_{ij}\|_{n\times m},$$

която се определя от платежната функция на първия играч. Именно поради това крайните антагонистични игри се наричат още *матрични игри*, а матрицата A — *платежна матрица на играта.* На избор на стратегията i, $1 \leqq i \leqq n$ от първия играч съответствува i-тият ред $(a_{i1} \dots a_{ij} \dots a_{im})$ на матрицата A. Елементът a_{ij} на този ред представлява резултатът от играта за първия играч в ситуацията, която ще се получи, ако вторият играч е избрал j-тата си стратегия, $1 \leqq j \leqq m$. Следователно i-тият ред на матрицата A определя стойностите на платежната функция в случая, когато първият играч е избрал i-тата си стратегия за всички възможни ситуации, които могат да възникнат в зависимост от поведението на втория играч. Аналогично на избор на j-тата стратегия, $1 \leqq j \leqq m$, от втория играч съответствува стълбът $(a_{1j} \ldots a_{ij} \ldots a_{nj})$ от матрицата A. Елементът a_{ij} на този стълб представлява резултатът от играта за първия играч в ситуацията, която ще се получи, ако той е избрал стратегията си i.

От равенството (2.1) може да се определи платежната функция на втория играч, която се представя с помощта на следната матрица:

$$\begin{pmatrix} -a_{11} & -a_{12} \ldots -a_{1m} \\ -a_{21} & -a_{22} \ldots -a_{2m} \\ \cdot & \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\ -a_{n1} & -a_{n2} \ldots -a_{nm} \end{pmatrix} = -A.$$

Поради това по-нататък ще разгледаме само платежната матрица A на първия играч.

Матричната игра, определена с матрицата A, ще означаваме с $\Gamma(A)$.

Съгласно с казаното в т. 1.2 двойката стратегии (i_0, j_0) в матричната игра $\Gamma(A)$ се нарича *седлова* точка, ако за всяка стратегия i на първия играч и всяка стратегия j на втория играч са изпълнени неравенствата

(2.2) $$a_{ij_0} \leqq a_{i_0j_0} \leqq a_{i_0j}.$$

Дясното неравенство в (2.2) означава, че елементът $a_{i_0j_0}$ е минимален в i_0-вия ред, а лявото — че елементът $a_{i_0j_0}$ е максимален в j_0-вия стълб на матрицата A. Следователно, ако двойката стратегии (i_0, j_0) е седлова точка, елементът $a_{i_0j_0}$ е едновременно минимален в реда си и максимален в стълба си. Стратегиите i_0, j_0 от седловата точка нарекохме *оптимални* съответно за първия и втория играч, а числото $a_{i_0j_0}$ — *цена на играта*.

Първият играч, избирайки оптималната си стратегия i_0, гарантира за себе си резултат най-малко $a_{i_0j_0}$. Вторият играч със стратегията си j_0 може да попречи на първия да получи повече от $a_{i_0j_0}$. Ако матричната игра притежава седлова точка, най-изгодно за двамата играчи е да се придържат към оптималните си стратегии. В случай че някой от тях се отклони от оптималната си стратегия, а другият се придържа към своята, това няма да бъде изгодно за този, който е допуснал отклонение от оптималната си стратегия.

Търсенето на седлова точка в матричната игра $\Gamma(A)$ се извършва лесно. Това може да стане например по следния начин. Определят се минималните елементи на всички редове на платежната матрица и се записват вдясно от нея. Най-голямото от получените числа се отбелязва със звездичка. Нека то съответствува на реда i^*. След това се определят максималните елементи във всички стълбове и се записват под платежната матрица. Най-малкото от получените числа се отбелязва също със звездичка и нека то съответствува на стълба j^*. Ако двете числа, отбелязани със звездичка, са равни, т. е. изпълнено е равенството

(2.3) $$\min_{1 \leqq j \leqq m} \max_{1 \leqq i \leqq n} a_{ij} = \max_{1 \leqq i \leqq n} \min_{1 \leqq j \leqq m} a_{ij},$$

съгласно лема 1.2 играта притежава седлова точка. От избора на реда i^* и стълба j^* следва, че са изпълнени неравенствата

$$a_{ij^*} \leqq a_{i^*j^*} \leqq a_{i^*j},$$

т. е. двойката стратегии (i^*, j^*) е седлова точка.

Да проверим дали играта с платежна матрица

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -4 & 5 \\ 2 & -1 & -2 & 6 \\ 3 & 0 & -3 & 6 \end{pmatrix}$$

има седлова точка. Минималните елементи на редовете са -4, -2, -3. Записваме ги вдясно от матрицата и означаваме със звездичка най-голямото от тях, в случая -2. Максималните елементи по стълбовете са 3, 2, -2, 6. Записваме ги под самите стълбове и означаваме със звездичка най-малкото от тях — в случая -2. По такъв начин получаваме

$$\begin{array}{cccc} \left(\begin{matrix} 0 & 2 & -4 & 5 \\ 2 & -1 & -2 & 6 \\ 3 & 0 & -3 & 6 \end{matrix}\right) \begin{matrix} -4 \\ -2^* \\ -3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 3 & 2 & -2^* & 6 \end{matrix} \end{array}$$

Двете числа, означени със звездичка, са равни, следователно

$$\min_j \max_i a_{ij} = \max_i \min_j a_{ij} = -2,$$

т. е. намерили сме число (-2), което е едновременно минимално в реда си и максимално в стълба си. Тогава двойката (2, 3) е седлова точка за разглежданата игра, а числото -2 е цената на играта. При матричната игра с горната платежна матрица оптимален избор за първия играч е вторият ред, а за втория играч — третият стълб. Избирайки втория ред, първият играч може да разчита, че ще спечели не по-малко от -2 (т. е. ще загуби най-много 2). Избирайки третия стълб вторият играч си осигурява загуба най-много -2 (т. е. печалба най-малко 2).

Да разгледаме матричната игра с платежна матрица

$$A=\begin{pmatrix} 5 & 3 & 4 & 3 \\ 7 & 2 & 0 & -2 \\ 10 & -1 & -4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Прилагайки горното правило за определяне на седлова точка, получаваме

$$\begin{array}{c} \begin{pmatrix} 5 & 3 & 4 & 3 \\ 7 & 2 & 0 & -2 \\ 10 & -1 & -4 & 2 \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} 10 & 3^* & 4 & 3^* \end{matrix} \end{array} \begin{array}{c} 3^* \\ -2 \\ -4 \\ \end{array}$$

Двойката стратегии (1, 2) е седлова точка, защото числото 3 е минимално в първия ред и максимално във втория стълб. Същото се отнася и за двойката (1, 4), т. е. тази матрична игра има две седлови точки. Първият играч има една оптимална стратегия — първия ред, докато вторият играч има две оптимални стратегии — втория и четвъртия стълб. При това за цената на играта v са изпълнени равенствата $v=a_{12}=a_{14}$, факт, който следва и от теорема 1.2.

Според теорема 1.2, ако (i_0, j_0) и (i_1, j_1) са две различни седлови точки на една и съща матрична игра, и двойките (i_0, j_1), (i_1, j_0) са също седлови точки за тази игра. Ще проверим това свойство за матричната игра с платежна матрица

$$A=\begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 5 & 4 & 9 \end{pmatrix}.$$

Двойките (1, 1) и (2, 3) са седлови точки на играта. Тогава според горното свойство следва, че и двойките (1, 3) и (2, 1) са също седлови точки. Да проверим. Числото 4, съответствуващо на двойката (1, 3), е минимално в първия ред и максимално в третия стълб. Следователно (1, 3) е седлова точка на играта. Аналогично се вижда, че и двойката (2, 1) е седлова точка.

От лема 1.2 следва, че ако за една игра $\Gamma(A)$ е изпълнено равенството (2.3), тази игра притежава седлова точка. Искаме да обърнем внимание на следния факт. Твърдението на лема 1.2 не означава, че ако за една двойка стратегии (i^*, j^*) е изпълнено равенството

$$a_{i^*j^*}=\min_j \max_i a_{ij}=\max_i \min_j a_{ij},$$

тази двойка е седлова точка за играта. Действително в горния

пример елементът, съответствуващ на двойката (1, 2) (също и елементът, съответствуващ на двойката (1, 4)), е равен на цената на играта, но двойката (1, 2) (както и двойката (1, 4)) не е седлова точка, защото 4 е минимално число в първия ред, но не е максимално число във втория стълб.

От всичко казано дотук става ясно, че ако матричната игра притежава седлова точка, съществуват оптимални стратегии за двамата играчи. Обаче между матричните игри с практическа стойност рядко се срещат игри със седлови точки. Типични са случаите, в които те нямат седлова точка.

2.2. ПРИМЕРИ НА МАТРИЧНИ ИГРИ

Ще приведем няколко известни примера на матрични игри, с които, от една страна, ще илюстрираме начина на построяване на математически модели на матрични игри, т. е. начина на построяване на съответните им платежни матрици, и, от друга страна, с тези примери, макар и съвсем опростени, ще покажем, че анализът на една матрична игра и съставянето на платежната ѝ матрица не винаги са тривиални, даже когато играта ни изглежда съвсем проста.

Пример 2.1. В тази игра участвуват двама играчи. Всеки от тях тайно от другия избира едно от числата: 1, 2 или 3 и едновременно с това се опитва да познае какво число е избрал противникът му. Ако само единият от играчите познае, той печели сума, равна на сумата на двете избрани числа. В останалите случаи резултатът от играта е нула и за двамата играчи.

За да построим платежната матрица на тази игра, трябва да знаем стратегиите на всеки от играчите. Поради това тук и във всички останали примери първо ще определяме стратегиите на играчите, а след това ще построяваме платежната матрица на играта.

От описанието на играта се вижда, че всеки от играчите може да избере едно от числата: 1, 2, или 3, и в същото време да назове едно от същите числа. Следователно всеки от тях има 9 възможности, т. е. 9 стратегии, и в играта са възможни 81 различни партии. Ако всяка стритегия представим като двойка числа, първото от които показва избраното число, а второто — числото, което е обявено, то стратегиите на всеки от играчите ще бъдат (1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3).

Да предположим, че единият от играчите (ще го наричаме първи) избере стратегията си (1, 1), а другият — стратегията си (2, 1). Какъв ще бъде резултатът от играта за първия играч при направения избор, т. е. при така определената партия? Тъй като само вторият играч познава числото, избрано от първия, според правилата на играта той печели сума, равна на сбора на двете избрани числа, т. е. на числото 3. Тогава резултатът от играта за първия играч ще бъде числото 3.

По такъв начин, като пресметнем резултата от играта за първия играч при всяка възможна партия (т. е. при всяка комбинация на стратегиите на двамата играчи), ще получим следната платежна матрица:

I играч \ II играч	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(3,1)	(3,2)	(3,3)
(1,1)	0	2	2	−3	0	0	−4	0	0
(1,2)	−2	0	0	0	3	3	−4	0	0
(1,3)	−2	0	0	−3	0	0	0	4	4
(2,1)	3	0	3	0	−4	0	0	−5	0
(2,2)	0	−3	0	4	0	4	0	−5	0
(2,3)	0	−3	0	0	−4	0	5	0	5
(3,1)	4	4	0	0	0	−5	0	0	−6
(3,2)	0	0	−4	5	5	0	0	0	−6
(3,3)	0	0	−4	0	0	−5	6	6	0

Тази игра няма седлова точка, тъй като

$$\max_i \min_j a_{ij} = -3 \neq 3 = \min_j \max_i a_{ij}.$$

Пример 2.2. Две дивизии воюват за два пункта. Първата дивизия се състои от 4 полка, а втората от 3 полка. Дивизията, която изпрати повече полкове на един и същи пункт, го заема, унищожава всички противникови полкове, намиращи се на този пункт, и получава по една точка за всеки завзет пункт и за всеки унищожен противников полк. Ако двете дивизии изпратят еднакъв брой полкове на даден пункт, всяка от тях получава по нула точки. Целта на първа дивизия е така да разпредели своите полкове, че да спечели повече точки.

Първа дивизия може по 5 различни начина да разпредели четирите си полка на двата пункта, т. е. тя има 5 стратегии. Втора дивизия има 4 стратегии. Следователно в играта са възможни 20 различни партии. Аналогично на предишната игра и тук вся-

ка стратегия ще представим като двойка числа, първото от които ще показва броя на полковете, изпратени на първия пункт, а второто — броя на полковете, изпратени на втория пункт. Тогава стратегиите на първа дивизия ще бъдат (4, 0), (0, 4), (3, 1), (1, 3), (2, 2), а стратегиите на втората — (3, 0), (0, 3), (2, 1), (1, 2). Например стратегията (3, 1) на първа дивизия означава, че 3 полка са изпратени на първия пункт и един полк — на втория.

Да пресметнем резултата от играта за първа дивизия в една конкретна партия. Например в партията, определена от третата стратегия на първа дивизия и втората стратегия на втора дивизия. В тази партия на първия пункт първа дивизия ще изпрати три полка, а втора дивизия няма да изпрати нито един. Тогава първа дивизия ще завземе пункта и ще спечели една точка. На втория пункт първа дивизия ще изпрати един полк, а втора дивизия — три полка. Последната ще унищожи полка на първа дивизия, ще завземе пункта и следователно ще спечели две точки. Или общата печалба на първа дивизия от двата пункта ще бъде — 1.

Като пресметнем резултата от играта за първа дивизия при всички останали партии, ще получим следната платежна матрица:

I дивизия \ II дивизия	(3,0)	(0,3)	(2,1)	(1,2)
(4,0)	4	0	2	1
(0,4)	0	4	1	2
(3,1)	1	−1	3	0
(1,3)	−1	1	0	3
(2,2)	−2	−2	2	2

Лесно можем да се убедим, че тази игра също няма седлова точка.

Пример 2.3. Единият от двамата играчи избира едно от числата 1, 2 или 3. Другият играч се опитва да познае избраното число. При всяко предположение на втория играч първият отговаря „МНОГО", „МАЛКО" или „ПРАВИЛНО". Играта продължава, докато вторият играч познае избора на първия. Резултатът от играта за първия играч е броят на предположенията, който е необходим на втория играч, за да получи отговор „ПРАВИЛНО"

В тази игра очевидни са стратегиите на първия играч. Те са три: да избере едно от числата 1, 2 или 3. Не толкова очевидни са стратегиите на втория играч. За яснота всяка от тях ще представим с тройка числа, първото от които показва неговото първо предположение, второто — предположението му, след като първият е отговорил „МНОГО“, а третото — предположението му след отговора „МАЛКО“. Тогава вторият играч има следните пет стратегии: (1; 0, 2), (1; 0, 3), (2; 1, 3), (3; 1, 0), (3; 2, 0). (Тук нулата означава, че съответният отговор на първия играч е недопустим.) Следователно в играта са възможни 15 различни партии.

Подробно няма да пресмятаме резултата за всяка партия, а само за една конкретна партия, т. е. за една конкретна комбинация от стратегии на двамата играчи. Да разгледаме партията, определена от първата стратегия на първия играч и третата стратегия на втория играч. При така направения избор вторият играч предполага първо, че избраното число е 2. В случай че отговорът на първия играч е „МНОГО“, второто му предположение е числото 1, при отговор „МАЛКО“ — второто му предположение е числото 3. Тъй като първият играч е избрал 1, неговият отговор ще бъде „МНОГО“. Следователно на втория играч са необходими две предположения, за да познае числото 1. Според правилата на играта резултатът от тази партия за първия играч ще бъде 2.

Пресмятайки по аналогичен начин резултатите за останалите партии, ще получим следната платежна матрица:

I \ II	(1; 0, 2)	(1; 0, 3)	(2; 1, 3)	(3; 1, 0)	(3; 2, 0)
(1)	1	1	2	2	3
(2)	2	3	1	3	2
(3)	3	2	2	1	1

Играта е без седлова точка.

Пример 2.4. Играят двама играчи. Всеки от тях записва едно от числата 0, 1 или 2, пазейки в тайна избраното число от противника си. Първият играч, знаейки числото си, се опитва да познае сумата на двете числа. След това подобен опит прави вторият играч, но той няма право да нарече сумата, която вече е предложил първият играч. Ако единият от играчите познае, получава една точка, в противен случай и двамата получават нула точки.

Стратегиите на първия играч трябва да включват информация за избраното от него число и обявената сума. Следователно и тук е удобно всяка стратегия на първия играч да представим като двойка числа, първото от които съответствува на записаното от него число, а второто — на предполагаемата сума. Тогава стратегиите на първия играч са (0,0), (0,1), (0,2), (1,1), (1,2), (1,3), (2,2) (2,3), (2,4).

Структурата на стратегиите на втория играч е по-сложна, защото те трябва да включват освен горната информация още и информация за направеното вече предположение от първия играч. Поради това всяка стратегия на втория играч ще представим като набор от шест числа, т. е. като набор от вида

$$(k;\ k_0\ \ k_1\ k_2\ k_3\ k_4),$$

където числото „k“ означава записаното от него число (т. е. $k=0$, 1,2), а числото „k_j“ ($j=0$, 1, 2, 3, 4) — предполагаемата му сума, в случай че първият играч е обявил числото j. По такъв начин вторият играч има 10 стратегии, които, записани подробно, изглеждат така: (1)=(0; 10012), (2)=(0; 10022), (3)=(0;10112), (4)= =(1: 10122), (5)=(1; 12123), (6)=(1; 12323), (7)=(2; 22343), (8)= =(2; 22443), (9)=(2; 23343), (10)=(2; 23443).

Да разгледаме по-подробно една от тези стратегии. Например стратегията (5)=(1; 12123). Тя означава, че вторият играч е записал числото 1 и ако първият е обявил сума 0, той обявява сума 1; ако първият е обявил сума 1, той обявява сума 2; ако първият е обявил сума 2, той обявява сума 1, ако първият е обявил сума 3, той обявява сума 2 и накрая, ако първият е обявил сума 4, той обявява сума 3. Или всяка от горните стратегии съдържа освен избраното от втория играч число още и отговора му при всяко предположение на първия играч.

В играта са възможни 90 различни партии. Ако пресметнем резултата от играта за всяка от тях, ще получим платежната матрица от стр. 36. И тази игра е без седлова точка.

Пример 2.5. Две страни воюват за един пункт. Първата страна го напада с цел да го унищожи, а втората го отбранява. Първата разполага с 2 бомбардировача, втората — с 4 оръдия. За да може първата страна да унищожи пункта, достатъчно е един от бомбардировачите ѝ да си пробие път към него. Бомбардировачите могат да приближават към пункта от четири посоки. Всяко от оръдията на втората страна може да бъде насочено в произ-

I \ II	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)
(0, 0)	1	1	1	1	−1	−1	−1	−1	−1	−1
(0, 1)	−1	−1	−1	−1	1	1	−1	−1	0	0
(0, 2)	−1	−1	0	0	−1	0	1	1	1	1
(1, 1)	1	1	1	1	−1	−1	0	0	−1	−1
(1, 2)	0	0	−1	−1	1	1	−1	0	−1	0
(1, 3)	−1	0	−1	0	−1	−1	1	1	1	1
(2, 2)	1	1	1	1	0	−1	0	−1	0	−1
(2, 3)	0	−1	0	−1	1	1	−1	−1	−1	−1
(2, 4)	−1	−1	−1	−1	−1	−1	1	1	1	1

волна посока, като при това то може да обстрелва само пространството в посоката, в която е насочено (не и съседните му пространства). Освен това всяко оръдие може да обстрелва само един бомбардировач, като го поразява с вероятност 1. Първата страна не знае как са разположени оръдията, а втората — от коя посока ще дойдат бомбардировачите. Печалбата на първата страна е вероятността да унищожи пункта.

Първата страна има две стратегии:

(1) — да изпрати по един бомбардировач в две различни посоки;
(2) — и двата бомбардировача да изпрати в една и съща посока.

Втората страна има пет стратегии:

(1) — във всяка от четирите посоки да насочи по едно оръдие;
(2) — в две различни посоки да насочи по две оръдия;
(3) — в една и съща посока да насочи две оръдия и в две други посоки по едно оръдие;

(4) — в една и съща посока да насочи три оръдия и в друга посока — едно;
(5) — в една и съща посока да насочи и четирите оръдия.

Следователно в играта са възможни 10 различни партии.

Да пресметнем подробно вероятността, с която първата страна ще унищожи пункта само за две партии. Например за партията, определена от първата стратегия на първата страна и третата стратегия на втората страна, и за партията, определена от втората стратегия на първата страна и четвъртата стратегия на втората страна. При първата от тези две партии бомбардировачите са насочени в две различни посоки, а оръдията отбраняват три посоки, оставяйки една от посоките незащитена. Тогава вероятността поне един бомбардировач да си пробие път до пункта е равна на вероятността един от тях да избере незащитена посока, т. е. на числото 1/2.

При втората партия бомбардировачите летят в една и съща посока, а оръдията отбраняват фактически само една от посоките. (Посоката, в която е насочено едно оръдие, е незащитена срещу двата бомбардировача.) Неотбранявани са три посоки, затова вероятността поне един от бомбардировачите да си пробие път до пункта е равна на вероятността да изберат незащитена посока, т. е. на числото 3/4.

Пресмятайки вероятността да бъде унищожен пунктът за всяка от останалите 8 партии получаваме следната платежна матрица:

I \ II	1	2	3	4	5
1	0	5/6	1/2	5/6	1
2	1	1/2	3/4	3/4	3/4

Играта няма седлова точка.

Пример 2.6. Предприятие произвежда два вида бързо развалящи се продукти. Ежедневните разходи за производство и продажба на продукцията не трябва да превишават 16 000 лв. Себестойността на единица продукция от I вид е 1,6 лв., а цената, на която се продава — 2,4 лв.; себестойността на единица продукция от II вид е 1 лв., а цената ѝ — 1,6 лв. Ако продукцията не се продаде в деня на производството ѝ, поради значително снижаване на качествата ѝ на следния ден тя се продава 4 пъти поевтино. Продажбата зависи от времето. При хубаво време се продават 2000 единици от I вид и 12 000 единици от II вид; в лошо време се продават 8 000 единици от I вид и 2400 единици от II вид. Разходите по реализацията на цялата произведена за деня продукция възлизат на 800 лв. Пред предприятието стои задачата: да определи ежедневния обем на производството от всеки вид продукти по такъв начин, че печалбата му да бъде максимална.

От описанието на този пример се вижда, че за да състави дневния си производствен план, за предприятието е съществено да знае какво ще бъде времето през деня. Тъй като все още няма надеждни методи за прогнозиране на последното, предприятието трябва да съставя ежедневната си производствена програма, отчитайки появяването на най-неизгодното за него време. По такъв начин в разглежданата ситуация, от една страна, предприятието е заинтересовано да произведе продукция, която ще му донесе максимална печалба, а, от друга страна, природата може максимално да му навреди. Именно поради това тази ситуация може да се разглежда като конфликтна между предприятието и природата, по-точно като антагонистична игра, в която първият играч е предприятието, а вторият — природата.

Независимо от това, че природата не е разумен противник (тя не се стреми да вреди на предприятието), игровият подход към тази ситуация има своите преимущества. Действително, разглеждайки природата като противник, предприятието може да построи свой оптимален план за поведение, отчитайки най-неблагоприятните за него природни действия. Ако обаче тя „отстъпи" от тези най-изгодни за предприятието действия, чрез определения оптимален план за поведение то (предприятието) ще може да увеличи печалбата си.

И тъй да съставим платежна матрица на разглеждания конфликт. Очевидни са стратегиите и на двамата играчи. Първият — предприятието, има две стратегии:

(1) — да произвежда продукция, считайки, че времето ще бъде хубаво;

(2) — да произвежда продукция, считайки, че времето ще бъде лошо.

Вторият играч — природата, има две стратегии:

(1) — да създаде хубаво време;

(2) — да създаде лошо време.

Следователно в играта са възможни 4 различни партии.

Да пресметнем подробно резултата (печалбата на предприятието) от две партии: партията, определена от първите стратегии на двамата играчи, и партията, определена от втората стратегия на предприятието и първата — на природата. (Имайки пред вид условията на примера, пресмятанията ще се правят за период от 1 ден.)

Да въведем означенията:

P — печалба;

D — доход от продажба на продукцията;

R — разходи за производство и продажба.

Тогава $P=D-R$.

Да определим печалбата P_1 от първата партия. Тъй като предприятието прилага първата си стратегия (разчита на хубаво време) то ще произведе 2000 единици от I вид и 12 000 единици от II вид Тогава разходите му ще бъдат

$$R_1=2000\times 1{,}6+12\,000\times 1+800=16\,000.$$

Природата прилага също първата си стратегия, т. е. времето ще бъде хубаво, следователно предприятието ще продаде цялата си произведена продукция още същия ден. В такъв случай доходът му ще бъде

$$D_1=2000\times 2{,}4+12\,000\times 1{,}6=24\,000.$$

Или за печалбата P_1 на предприятието от тази партия ще получим

$$P_1=D_1-R_1=8000.$$

Да пресметнем сега резултата от втората партия. В нея предприятието участвува с втората си стратегия, т. е. предполага, че времето ще бъде лошо, следователно ще произведе: 8000 единици от I вид и 2400 единици от II вид. В такъв случай разходите ще бъдат:

$$R_2=8000\times 1{,}6+2400\times 1+800=16\,000.$$

Поради това, че природата участвува отново с първата си стратегия, времето ще бъде хубаво и още същия ден ще бъдат продадени: 2000 единици от I вид по 2,4 лв., всичките 2400 единици от II вид по 1,6 лв., а за другия ден ще останат 6000 единици от I вид, които ще бъдат продадени на 4 пъти по-ниска цена, т. е. по 0,6 лв.

Тогава доходът на предприятието ще бъде

$$D_2=2000\times 2{,}4+2400\times 1{,}6+6000\times 0{,}6=12\,240,$$

а печалбата му от партията

$$P_2=D_2-R_2=-3760.$$

Пресмятайки аналогично резултата от останалите две партии, ще получим следната платежна матрица:

II / I	(1)	(2)
(1)	8000	−3520
(2)	−3760	7040

Играта няма седлова точка.

Разглежданите примери потвърждават заключението, направено в предидущата точка, че рядко матрични игри с практическа стойност имат седлова точка. Затова естествен е въпросът: как да се определя рационалното поведение в такива игри. Именно на отговора на този въпрос е посветена следващата точка.

2.3. СМЕСЕНИ СТРАТЕГИИ

От приведените дотук примери стана ясно, че съществуват матрични игри, които не притежават седлова точка. Една такава игра е и играта „герб-стотинка" с платежна матрица

$$A=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Този факт означава, че при еднократно провеждане на тези игри не може да се посочи рационално поведение за отделните играчи. При определянето на безкоалиционните игри в т 1.1 беше казано, че всеки от участниците има право при многократно провеждане на играта да си води статистика за поведението на другия и ако може, да я използува по някакъв начин за реализиране на своите цели. Ето защо съвсем естествено възниква въпросът: не е ли възможно да се определи рационално поведение на играчите при многократно повтаряне на играта, като при това те се възползуват от статистиката, която водят за развитието на процеса на взаимоотношенията.

Да предположим, че антагонистичната игра $\Gamma(A)$ се е повтаряла L пъти. Честотата, с която първият играч е избирал i-тата си стратегия при това многократно разиграване, да означим с с x_i, а честотата, с която вторият играч е избирал j-тата си стратегия — с y_j. Тогава

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1, \quad x_i \geqq 0, \quad i=1,\ldots,n; \quad \sum_{j=1}^{m} y_j = 1, \quad y_j \geqq 0, \; j=1,\ldots\; m.$$

Първият играч може да очаква, че при $(L+1)$-то разиграване вторият играч ще използува своята j-та стратегия с честота y_j. Аналогично вторият играч може да очаква, че първият ще използува i-тата си стратегия с честота x_i. Тъй като изборът на сратегия от двамата играчи е независим, математическото очакване на първия играч в $(L+1)$-то повторение на играта е да получи

$$\mathscr{P}(X,\; Y)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_i y_j,$$

където

$$X=(x_1,\ldots,x_n), \quad x_i \geqq 0, \quad i=1,\ldots,\; n, \quad \sum_{i=1}^{n} x_i = 1;$$

$$Y=(y_1,\ldots,\; y_m),\; y_j \geqq 0, \quad j=1,\ldots,\; m, \quad \sum_{j=1}^{m} y_j = 1.$$

Нека играта „герб-стотинка" е разиграванa 10 пъти, при което първият играч е използувал първата си стратегия 3 пъти, а втората —7 пъти, а вторият играч е изполувал своите стратегии по 5 пъти. Тогава за честотите, с които играчите са избирали съответните си стратегии, получаваме

$$x_1=\frac{3}{10}, \; x_2=\frac{7}{10}; \quad y_1=\frac{5}{10}, \; y_2=\frac{5}{10}.$$

Математическото очакване на първия играч за резултата от играта ще бъде

$$\mathscr{P}(X, Y)=\frac{3}{10}\left(1\cdot\frac{5}{10}-1\cdot\frac{5}{10}\right)+\frac{7}{10}\left(-1\cdot\frac{5}{10}+1\cdot\frac{5}{10}\right)=0.$$

Възниква задачата как първият играч да подбере честотата, с която да използува отделните си стратегии, че математическото очакване на резултата от играта за него да бъде по възможност по-голямо. Аналогична задача може да се постави и за втория играч.

Тази идея за разширяване на антагонистичната игра $\Gamma(A)$ е довела до разглеждането на следната, съответна на матричната игра $\Gamma(A)$ антагонистична игра $\Gamma_C(A)$, в която стратегии на първия играч са вероятностните разпределения $X=(x_1,\ldots,x_n)$, $x_i \geqq 0$, $i=1,\ldots,\; n, \sum_{i=1}^{n} x_i = 1$, в множеството от допустими стратегии на първия играч в играта $\Gamma(A)$, а на втория играч — вероятностните разпределения $Y=(y_1,\dots,y_m)$, $y_j\geqq 0$, $j=1,\dots,m, \sum_{j=1}^{m} y_j=1$ в множеството от допустими стратегии съответно на втория играч в играта $\Gamma(A)$. Да означим с M_1 и M_2 съответно множествата от така определените стратегии X и Y, а резултатът от партията (X, Y) в играта $\Gamma_C(A)$ за първия играч да се определя с функцията

$$\mathscr{P}(X, Y)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{ij}x_i y_j. \tag{2.4}$$

В същност това е математическото очакване за изхода от играта $\Gamma(A)$ за първия играч, ако двамата играчи са възприели „смесване" на своите стратегии, определено от векторите X и Y.

Поради изказаните съображения стратегиите $X\in M_1$ и $Y\in M_2$ за играта $\Gamma_C(A)$ се наричат смесени стратегии за матричната игра $\Gamma(A)$. Казва се още, че играта $\Gamma_C(A)$ е игра в смесени стратегии, съответна на $\Gamma(A)$.

За да изясним по-добре връзката между игрите $\Gamma(A)$ и $\Gamma_C(A)$, да разгледаме следната спомагателна игра $\bar{\Gamma}(A)$. Нека платежната функция в $\bar{\Gamma}(A)$ се определя по формула (2.4), а множеството $\bar{M}_1$ $(\bar{M}_1\subset M_1)$ от допустимите стратегии на първия играч се състои от онези n вектори от множеството M_1, всички координати на които са нули, с изключение само на една, която е единица. Да означим с $\bar{X}^i$ n-мерния вектор $(0,\dots, 0, 1, 0,\dots,0)$, където единицата стои на i-то място. Тогава множеството $\bar{M}_1$ се състои от векторите $\bar{X}^i$ за $i=1,\dots,n$. Аналогично се определя и множеството $\bar{M}_2$ $(\bar{M}_2\subset M_2)$ от стратегиите $\bar{Y}^j$, $j=1,\dots,m$ на втория играч, в които на j-тото място стои единица, а на останалите — нула. Броят на стратегиите на първия играч в играта $\Gamma(A)$ съвпада с броя на стратегиите на първия играч в играта $\bar{\Gamma}(A)$. Същият извод може да се направи и за стратегиите на втория играч. При това при избор на i-тата стратегия на първия играч и на i-тата стратегия на втория играч стойностите на платежните функциите в двете игри съвпадат. Следователно двете игри $\Gamma(A)$ и $\bar{\Gamma}(A)$ са напълно равностойни. Тогава стратегиите в първоначалната игра $\Gamma(A)$ могат да се

разглеждат като съвпадащи със стратегиите от $\bar{M}_1$ и $\bar{M}_2$ и по такъв начин да се представят като специален вид смесени стратегии. Поради това е прието да се наричат чисти стратегии за играта $\Gamma(A)$ в смисъл, че са запазени от каквото и да било смесване.

Да се върнем към играта „герб-стотинка". В нея смесени стратегии за първия играч са всички вектори $X=(x_1, x_2)$, за които $x_1\geqq 0$, $x_2\geqq 0$, $x_1+x_2=1$, а за втория — векторите $Y=(y_1, y_2)$, за които $y_1\geqq 0$, $y_2\geqq 0$, $y_1+y_2=1$. Платежната функция на играта в смесени стратегии е

$$\mathscr{P}(X, Y)=x_1(-y_1+y_2)+x_2(y_1-y_2).$$

Следователно разглежданите по-горе вектори $X=\left(\frac{3}{10}, \frac{7}{10}\right)$ и $Y=\left(\frac{5}{10}, \frac{5}{10}\right)$ представляват две смесени стратегии. Спомагателната игра $\bar{\Gamma}(A)$ на играта „герб-стотинка" се определя от същата платежна функция и множествата

$$\bar{M}_1=\{(1, 0), (0, 1)\}, \quad \bar{M}_2=\{(1, 0), (0, 1)\}$$

от стратегиите на двамата играчи.

Необходимостта и ползата от въвеждането на смесените стратегии и разглеждането на играта в смесени стратегии се дава от следната фундаментална теорема в теорията на матричните игри.

Теорема 2.1. *Играта в смесени стратегии* $\Gamma_C(A)$ *притежава седлова точка.*

Доказателството на тази теорема следва непосредствено от теорема 1.3. Платежната функция $\mathscr{P}(X, Y)$ от (2.4) е линейна по X при фиксирано Y — значи е вдлъбната по X, и линейна по Y при фиксирано X, т. е. тя е изпъкнала по Y. Множествата от стратегиите са изпъкнали, ограничени и затворени. Следователно предположенията на теорема 1.3 са изпълнени. Това означава, че съществуват такива стратегия $X^0=(x_1^0,\dots,x_n^0)\in M_1$ за първия играч и стратегия $Y^0=(y_1^0,\dots,y_m^0)\in M_2$ за втория, че са изпълнени неравенствата

$$\mathscr{P}(X, Y^0)\leqq\mathscr{P}(X^0, Y^0)\leqq\mathscr{P}(X^0, Y). \tag{2.5}$$

Теорема 2.1 може да се изкаже и така: *всяка матрична игра притежава седлова точка в смесени стратегии.* Смесените стратегии от седловата точка се наричат *оптимални смесени стратегии.* Цената на играта в смесени стратегии се нарича *цена на матричната игра* $\Gamma(A)$. Тълкувайки твърдението на теорема 2.1 в „обществото" на двамата играчи от матричната игра $\Gamma(A)$, можем да кажем, че в това „общество" съществува вътрешно устойчива „норма на поведение", която се състои в придържане към определено правило за смесване на чистите стратегии (смесените стратегии от седловата точка) на отделните играчи. Отклоняването на един от играчите от това правило при условие, че другият го спазва, не е в интерес на първия.

Доказаната теорема 2.1 се нарича *основна теорема на матричните игри*. Тя е формулирана през 1927 г. от френския учен Е. Борел и е доказана през 1928 г. от австрийския учен Джон фон Нойман.

Да преминем към разглеждане на някои прости свойства на оптималните смесени стратегии, които се използват съществено при построяване на методи за намиране на оптималните смесени стратегии.

Теорема 2.2. *Нека е изпълнено $x^0_{i_0}>0$ за някой индекс $1\leq i_0\leq n$ в оптималната смесена стратегия $X^0=(x^0_1,\ldots,x^0_n)$ на първия играч. Тогава за всяка* оптимална *смесена стратегия $Y^0=(y^0_1,\ldots,y^0_m)$ на втория играч е изпълнено равенството*

$$\mathscr{P}(\overline{X^{i_0}},\ Y^0)=\mathscr{P}(X^0,\ Y^0),$$

където $\overline{X^{i_0}}$ е i_0-та чиста стратегия на първия играч.

Теорема 2.3. *Нека е изпълнено $y^0_{j_0}>0$ за някой индекс $1\leq j_0\leq m$ в оптималната смесена стратегия $Y^0=(y^0_1,\ldots,y^0_m)$ на втория играч. Тогава за всяка оптимална смесена стратегия $X^0=(x^0_1,\ldots,x^0_n)$ на първия играч е изпълнено равенството*

$$\mathscr{P}(X^0,\ \overline{Y^{j_0}})=\mathscr{P}(X^0,\ Y^0),$$

където $\overline{Y^{j_0}}$ е j_0-та чиста стратегия на втория играч.

Доказателствата на тези две теореми си приличат, поради което ще докажем само първата от тях. За всяка стратегия $\overline{X^i}\in M_1$ от (2.5) следва, че е изпълнено неравенството

$$\mathscr{P}(\overline{X^i},\ Y^0)\leq\mathscr{P}(X^0,\ Y^0).$$

Да предположим, че за i_0 имаме строгото неравенство

$$\mathscr{P}(\overline{X^{i_0}},\ Y^0)<\mathscr{P}(X^0,\ Y^0).$$

Умножавайки с x^0_i, $i=1,\ldots,n$, съответните неравенства

$$\mathscr{P}(\overline{X^i},\ Y^0)\leq\mathscr{P}(X^0,\ Y^0),\ i=1,\ldots,\ i_0-1,\ i_0+1,\ldots,\ n,$$

$$\mathscr{P}(\overline{X^{i_0}},\ Y^0)<\mathscr{P}(X^0,\ Y^0)$$

и сумирайки почленно левите и десните им части, получаваме противоречието

$$\mathscr{P}(X^0,\ Y^0)=\sum_{i=1}^{n}x^0_i\mathscr{P}(\overline{X^i},\ Y^0)<\mathscr{P}(X^0,\ Y^0).$$

С това теоремата е доказана.

От тази теорема следва, че всяка чиста стратегия, която влиза в оптимална смесена стратегия с честота, отлична от нула, приложена срещу всяка оптимална смесена стратегия на другия играч, дава цената на играта.

Вярна е и обратната

Теорема 2.4. *Нека стратегиите $X^0=(x^0_1,\ldots,x^0_n)$ и $Y^0=(y^0_1,\ldots,y^0_m)$ са оптимални съответно за първия и втория играч, а числото v е цена на играта. Тогава, ако за някой индекс $i_0(1\leq i_0\leq n)$ е вярно неравенството*

$$\mathscr{P}(\overline{X^{i_0}},Y^0)=\sum_{j=1}^{m}a_{i_0j}\,y^0_j<v,$$

то i_0-та компонента на стратегията X^0 е равна на нула, т. е. $x^0_{i_0}=0$. Аналогично, ако за някой индекс $j_0(1\leq j_0\leq m)$ е вярно

$$\mathscr{P}(X^0,\ \overline{Y^{j_0}})=\sum_{i=1}^{n}a_{ij_0}\,x^0_i>v,$$

то $y^0_{j_0}=0$.

Доказателството на теоремата, което се извършва чрез допускане на противното и с използуване на теореми 2.2 и 2.3, ще оставим за упражнение на читателя.

Теорема 2.5. *Ако за стратегиите $X^0=(x^0_1,\ldots,x^0_n)\in M_1$, $Y^0=(y^0_1,\ldots,y^0_m)\in M_2$ и числото w при всички чисти стратегии на двамата играчи се изпълнени неравенствата*

$$\mathscr{P}(\overline{X^i},\ Y^0)\leq w\leq\mathscr{P}(X^0,\ \overline{Y^j}),\tag{2.6}$$

то двойката $(X^0,\ Y^0)$ е седлова точка в смесени стратегии, а w — цена на играта.

Доказателство. Нека X и Y са произволни смесени стратегии съответно за първия и втория играч. Тогава от (2.6) получаваме

$$\mathscr{P}(X, Y^0)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{ij}x_i y_j^0=\sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{j=1}^{m} a_{ij} y_j^0=\sum_{i=1}^{n} x_i \mathscr{P}(\overline{X^i}, Y^0)\leqq w,$$

$$\mathscr{P}(X^0, Y)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_i^0 y_j=\sum_{j=1}^{m} y_j \sum_{i=1}^{n} a_{ij}x_i^0=\sum_{j=1}^{m} y_j \mathscr{P}(X^0, \overline{Y^j})\geqq w.$$

Ако в тези неравенства поставим $X=X^0$ и $Y=Y^0$, то

$$\mathscr{P}(X^0, Y^0)\leqq w\leqq \mathscr{P}(X^0, Y^0)$$

и тогава $w=\mathscr{P}(X^0, Y^0)$ и

$$\mathscr{P}(X, Y^0)\leqq \mathscr{P}(X^0, Y^0)\leqq \mathscr{P}(X^0, Y).$$

Това означава, че двойката (X^0, Y^0) действително е седлова точка и w е цена на играта.

От тази теорема можем да направим заключението, че за да установим дали двойката стратегии (X, Y) е седлова точка, а числото w — цена на играта, е достатъчно да проверим дали те удовлетворяват крайния брой неравенства (2.6).

Да илюстрираме това заключение с конкретен пример. За разглежданата в пример 2.2 игра получихме платежната матрица

$$A=\begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 3 \\ -2 & -2 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Сега ще покажем, че векторите $X^0=\left(\frac{4}{9}, \frac{4}{9}\ 0,\ 0, \frac{1}{9}\right)$ и $Y^0=\left(\frac{1}{18}, \frac{1}{18}, \frac{4}{9}, \frac{4}{9}\right)$ са оптимални стратегии съответно за I и II дивизия, а цената v на играта е $\frac{14}{9}$. Според горния извод за това е достатъчно да проверим дали те удовлетворяват условия (2.6), които могат да се запишат така:

$$\sum_{j=1}^{m} a_{ij}\, y_j^0 \leqq v, \quad i=1,\ldots, n;$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij}\, x_i^0 \geqq v, \ j=1,\ldots, m.$$

Замествайки елементите на матрицата A и векторите X^0 и Y^0 в тези условия, получаваме за:

$$i=1: \sum_{j=1}^{4} a_{1j}\ y_j^0 = 4\cdot\frac{1}{18}+0\cdot\frac{1}{18}+2\cdot\frac{4}{9}+1\cdot\frac{4}{9}=\frac{14}{9};$$

$$i=2: \sum_{j=1}^{4} a_{2j}\ y_j^0=0\cdot\frac{1}{18}+4\cdot\frac{1}{18}+1\cdot\frac{4}{9}+2\frac{4}{9}=\frac{14}{9};$$

$$i=3: \sum_{j=1}^{4} a_{3j}\, y_j^0=\frac{12}{9}<\frac{14}{9};$$

$$i=4: \sum_{j=1}^{4} a_{4j}\, y_j^0=\frac{12}{9}<\frac{14}{9};$$

$$i=5: \sum_{j=1}^{4} a_{5j}\, y_j^0=\frac{14}{9};$$

$$j=1: \sum_{i=1}^{5} a_{i1}\ x_i^0=\frac{14}{9};$$

$$j=2: \sum_{i=1}^{5} a_{i2}\ x_i^0=\frac{14}{9};$$

$$j=3: \sum_{i=1}^{5} a_{i3}\ x_i^0=\frac{14}{9};$$

$$j=4: \sum_{i=1}^{5} a_{i4}\ x_i^0=\frac{14}{9}.$$

Проверката показва, че векторите X^0 и Y^0 и числото $\frac{14}{9}=v$ удовлетворяват условия (2.6), следователно те са оптимални стратегии в тази игра, а цената ѝ е $\frac{14}{9}$.

Този пример илюстрира добре и теореми 2.2, 2.3 и 2.4. Дей-
ствително първата компонента на стратегията X^0 е отлична от
нула $\left(x_1^0=\frac{4}{9}\right)$. Тогава, ако приложим чистата стратегия $\overline{X}^1=(1,$
0, 0, 0, 0) срещу оптималната стратегия Y^0, ще получим цената
на играта. Наистина

$$\sum_{j=1}^{4} a_{1j}\, y_j^0=\frac{14}{9}=v.$$

Аналогично може да се покаже, че и стратегиите $\overline{X}^2=(0, 1, 0, 0,$
0) и $\overline{X}^5=(0, 0, 0, 0, 1)$ срещу Y^0 дават цената $\frac{14}{9}$.

Втората компонента на оптималната стратегия Y^0 е отлична от
нула $\left(y_2^0=\frac{1}{18}\right)$. Тогава, прилагайки чистата стратегия $\overline{Y}^2=(0,$
1, 0, 0) срещу оптималната стратегия X^0, получаваме цената на
играта. Наистина

$$\sum_{i=1}^{5} a_{i2}\, x_i^0=\frac{14}{9}=v.$$

Нещо повече. Тъй като всички компоненти на стратегията Y^0 са
отлични от нула, всяка чиста стратегия на II дивизия срещу оп-
тималната стратегия X^0 на I дивизия ще дава цената v. Това се
вижда от направената проверка на условия (2.6) за $j=1, 2, 3, 4$.

От същата проверка се вижда още, че за $i=3$ и $i=4$

$$\sum_{j=1}^{4} a_{3j}\, y_j^0=\frac{12}{9}<v, \qquad \sum_{j=1}^{4} a_{4j}\, y_j^0=\frac{12}{9}<v$$

и съответните компоненти на X^0 са нули.

От теорема 2.5 можем да направим още един съществен извод,
а именно: *всяко неотрицателно решение на системата, която
се получава, като към неравенствата* (2.6) *присъединим равен-
ствата* $\sum_{i=1}^{n} x_i=1$, $\sum_{j=1}^{m} y_j=1$, *е решение на матричната игра,*

По такъв начин решаването на матричната игра $\Gamma(A)$ може да се
сведе до решаването на следната система линейни неравенства и
равенства:

$$\sum_{j=1}^{m} a_{ij}\, y_j \leqq w, \quad x_i \geqq 0, \; i=1,\ldots, n,$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij}\, x_i \geqq w, \quad y_j \geqq 0, \; j=1,\ldots, m,$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i=1, \qquad \sum_{j=1}^{m} y_j=1.$$

Използувайки това заключение, да определим оптималните стра-
тегии $Y^0=(y_1^0, y_2^0, y_3^0)$, $X^0=(x_1^0, x_2^0, x_3^0)$ и цената v на матрична иг-
ра с платежна матрица

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Според току-що казаното за това е достатъчно да намерим едно
неотрицателно решение $x_1^0\ x_2^0\ x_3^0\ y_1^0\ y_2^0\ y_3^0,\ v$ на системата:

$$\begin{aligned} y_1^0-y_2^0-y_3^0 &\leqq v & \qquad x_1^0-x_2^0-x_3^0 &\geqq v \\ -y_1^0-y_2^0+3y_3^0 &\leqq v & -x_1^0-x_2^0+2x_3^0 &\geqq v \\ -y_1^0+2y_2^0-y_3^0 &\leqq v & -x_1^0+3x_2^0-x_3^0 &\geqq v \\ y_1^0+y_2^0+y_3^0 &= 1 & x_1^0+x_2^0+x_3^0 &= 1 \end{aligned}$$

Тъй като (според теорема 2.1) всяка матрична игра има седлова
точка в смесени стратегии, получената система има поне едно
решение. Търсенето на решение се извършва, като последовател-
но се разглеждат всички възможни системи (общо 26), които се
получават, когато се заменят знаците $\leqq$ и $\geqq$ в шестте неравен-
ства съответно със знаците $<$ и $=$ и знаците $>$ и $=$.
Да разгледаме случая, когато всички неравенства са заменени с
равенства:

$$\begin{aligned} y_1^0-y_2^0-y_3^0 &= v, & \qquad x_1^0-x_2^0-x_3^0 &= v, \\ -y_1^0-y_2^0+3y_3^0 &= v, & -x_1^0-x_2^0+2x_3^0 &= v, \\ -y_1^0+2y_2^0-y_3^0 &= v, & -x_1^0+3x_2^0-x_3^0 &= v, \\ y_1^0+y_2^0+y_3^0 &= 1, & x_1^0+x_2^0+x_3^0 &= 1. \end{aligned}$$

Решавайки тази система (с кой да е от известните методи), получаваме

$$x_1^0=\frac{6}{13},\ x_2^0=\frac{3}{13},\ x_3^0=\frac{4}{13};$$

$$y_1^0=\frac{6}{13},\ y_2^0=\frac{4}{13},\ y_3^0=\frac{3}{13};\quad v=-\frac{1}{13}.$$

Тъй като това решение удовлетворява и условията за неотрицателност на x_i^0 и y_j^0 $(i, j=1, 2, 3)$, векторите $X^0=\left(\frac{6}{13}, \frac{3}{13}, \frac{4}{13}\right)$ и $Y^0=\left(\frac{6}{13}, \frac{4}{13}, \frac{3}{13}\right)$ са оптимални стратегии, а числото $v=\frac{-1}{13}$ — цена на играта. С други, думи, определихме едно решение на разглежданата матрична игра, според което оптималното поведение на първия играч е да избира редовете на матрицата (т. е. чистите си стратегии) съответно с вероятности $\frac{6}{13}$, $\frac{3}{13}$ и $\frac{4}{13}$, а оптималното поведение на втория играч — да избира стълбовете съответно с вероятности $\frac{6}{13}$, $\frac{4}{13}$ и $\frac{3}{13}$. При такова поведение първият играч си гарантира загуба, не по-голяма от $\frac{1}{13}$, а вторият си гарантира резултат най-малко $\frac{1}{13}$.

Ще разгледаме още един приимер за решаването на матрични игри чрез теорема 2.5. Нека е дадена игра с платежна матрица

$$A=\begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ -1 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

Аналогично на предидущия пример решаването на тази игра се свежда до решаване на системата:

$$\begin{aligned}
3y_1-2y_2+4y_3&\leqq v, & 3x_1-x_2+2x_3&\geqq v,\\
-y_1+4y_2+2y_3&\leqq v, & -2x_1+4x_2+2x_3&\geqq v,\\
2y_1+2y_2+6y_3&\leqq v, & 4x_1+2x_2+6x_3&\geqq v,\\
y_1+y_2+y_3&=1, & x_1+x_2+x_3&=1,\\
y_j\geqq 0,\ j&=1, 2, 3, & x_i\geqq 0,\ i&=1, 2, 3.
\end{aligned}$$

И тук първо ще разгледаме случая, когато всички неравенства са заменени с равенства:

$$\begin{aligned}
3y_1-2y_2+4y_3&=v, & 3x_1-x_2+2x_3&=v,\\
-y_1+4y_2+2y_3&=v, & -2x_1+4x_2+2x_3&=v,\\
2y_1+2y_2+6y_3&=v, & 4x_1+2x_2+6x_3&=v,\\
y_1+y_2+y_3&=1, & x_1+x_2+x_3&=1.
\end{aligned}$$

Решавайки тази система, ще се убедим, че тя няма решение, в което всички числа x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3 да са неотрицателни. Следователно замяната на неравенствата с равенства тук не води до намиране на решение на матричната игра.

Трябва да разгледаме друг случай. Например ще заменим четвъртото неравенство със строго неравенство, а всички останали с равенства:

$$\begin{aligned}
3y_1-2y_2+4y_3&=v, & 3x_1-x_2+2x_3&>v,\\
-y_1+4y_2+2y_3&=v, & -2x_1+4x_2+2x_3&=v,\\
2y_1+2y_2+6y_3&=v, & 4x_1+2x_2+6x_3&=v,\\
y_1+y_2+y_3&=1, & x_1+x_2+x_3&=1.
\end{aligned}$$

Щом $3x_1-x_2+2x_3>v$, според теорема 2.4 $y_1=0$. Да го заместим в горните равенства:

$$\begin{aligned}
-2y_2+4y_3&=v, & 3x_1-x_2+2x_3&>v,\\
4y_2+2y_3&=v, & -2x_1+4x_2+2x_3&=v,\\
2y_2+6y_3&=v, & 4x_1+2x_2+6x_3&=v,\\
y_2+y_3&=1, & x_1+x_2+x_3&=1.
\end{aligned}$$

Ако решим само системата от равенства за y_j, ще се убедим че тя е несъвместима. Следователно и тази система не води до, решение на матричната игра. Трябва да преминем към друга система. Изобщо, преминавайки от една система към друга, ще стигнем например до следната:

$$\begin{aligned}
3y_1-2y_2+4y_3&<v, & 3x_1-x_2+2x_3&=v,\\
-y_1+4y_2+2y_3&=v, & -2x_1+4x_2+2x_3&=v,\\
2y_1+2y_2+6y_3&=v, & 4x_1+2x_2+6x_3&>v,\\
y_1+y_2+y_3&=1, & x_1+x_2+x_3&=1.
\end{aligned}$$

От $3y_1-2y_2+4y_3<v$ следва, че $x_1=0$, а от $4x_1+2x_2+6x_3>v$ следва, че $y_3=0$. Тогава системата добива вида:

$$\begin{aligned}
-y_1+4y_2&=v, & -x_2+2x_3&=v,\\
2y_1+2y_2&=v, & 4x_2+2x_3&=v,\\
y_1+y_2&=1, & x_2+x_3&=1.
\end{aligned}$$

Решавайки я, получаваме неотрицателно решение:

$$y_1=\frac{2}{5},\quad y_2=\frac{3}{5},\ x_2=0,\ x_3=1,\ v=2.$$

Тогава векторите $X^0=(0,\ 0,\ 1)$, $Y^0=\left(\frac{2}{5},\ \frac{3}{5},\ 0\right)$ и числото $v=2$ са решение на разглежданата матрична игра.

От тези два примера се вижда ясно, че този начин за решаване на матричните игри е неприемлив, особено за игри с големи платежни матрици, тъй като при тях броят на възможните случаи е много голям.

По-нататък (в глава трета) ще бъдат разгледани по-ефективни и удобни методи за решаване на матрични игри, при които трудностите също се увеличават с увеличаване размерите на платежната матрица, но не в такава степен, както при директното прилагане на теорема 2.5.

Теорема 2.6. *Ако двойката смесени стратегии (X^0, Y^0) образуват седлова точка, верни са равенствата*

$$\min_{1\leq j\leq m} \mathcal{P}(X^0,\ \overline{Y^j})=\max_X \min_{1\leq j\leq m} \mathcal{P}(X,\ \overline{Y^j})=\mathcal{P}(X^0,\ Y^0)=$$

$$=\min_Y \max_{1\leq i\leq n} \mathcal{P}(\overline{X^i},\ Y)=\max_{1\leq i\leq n} \mathcal{P}(\overline{X^i},\ Y^0).$$

Доказателство. Тъй като $X^0 \in M_1$, съществува индекс i_0 такъв, че $x^0_{i_0}>0$. Тогава съгласно теорема 2.2 имаме

$$\mathcal{P}(\overline{X^{i_0}},\ Y^0)=\mathcal{P}(X^0,\ Y^0)$$

и следователно

(2.7) $$\max_{1\leq i\leq n} \mathcal{P}(\overline{X^i},\ Y^0)\geq\mathcal{P}(\overline{X^{i_0}},\ Y^0)=\mathcal{P}(X^0,\ Y^0).$$

От друга страна, тъй като $\overline{X^i}\in M_1$, от (2.5) следва, че

(2.8) $$\max_{1\leq i\leq n} \mathcal{P}(\overline{X^i},\ Y^0)\leq\mathcal{P}(X^0,\ Y^0).$$

Неравенствата (2.7) и (2.8) дават

(2.9) $$\max_{1\leq i\leq n} \mathcal{P}(\overline{X^i},\ Y^0)=\mathcal{P}(X^0,\ Y^0).$$

Аналогично се доказва и

(2.10) $$\min_{1\leq j\leq m} \mathcal{P}(X^0,\ \overline{Y^j})=\mathcal{P}(X^0,\ Y^0).$$

За произволни смесени стратегии $X\in M_1$ и $Y\in M_2$ имаме

$$\min_Y \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{ij}\,x_i\,y_j=\min_Y \sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij}\,x_i\right)y_j\geq$$

$$\geq\min_Y\left(\min_{1\leq j\leq m}\sum_{i=1}^{n} a_{ij}\,x_i\right)\sum_{j=1}^{m} y_j=\min_{1\leq j\leq m}\sum_{i=1}^{n} a_{ij}\,x_i=\min_{1\leq j\leq m}\mathcal{P}(X,\overline{Y^j}).$$

Вземайки максимум по $X\in M_1$ в това неравенство, получаваме

$$\mathcal{P}(X^0,\ Y^0)=\max_X \min_Y \mathcal{P}(X,\ Y)=\max_X \min_{1\leq j\leq m}\mathcal{P}(X,\ \overline{Y^j})\geq$$

$$\geq\min_{1\leq j\leq m}\mathcal{P}(X^0,\ \overline{Y^j})=\mathcal{P}(X^0,\ Y^0).$$

В последното равенство е използувано условието (2.10). Аналогично с използуването на условие (2.9) се доказва, че

$$\min_Y \max_{1\leq i\leq n} P(\overline{X^i},\ Y)=\mathcal{P}(X^0,\ Y^0).$$

От тази теорема може да се направи заключение, че всеки играч има най-малко по една чиста стратегия, която, ако бъде приложена срещу оптимална смесена стратегия на другия играч, дава цената на играта.

Ще се спрем на още едно интересно свойство на матричните игри, което често ще използваме по-нататък.

Нека е дадена матричната игра $\Gamma(A)$ с платежна матрица $A=\|a_{ij}\|_{n\times m}$ и цена v_A. Да образуваме матрицата $B=\|b_{ij}\|_{n\times m}$, където $b_{ij}=ca_{ij}+d$, $(c>0)$ и да разгледаме матричната игра $\Gamma(B)$ с цена v_B. С $\mathcal{P}_A$ и $\mathcal{P}_B$ да означим платежните функции на съответните игри в смесени стратегии. Споменатото свойство ще формулираме във вид на следната

Теорема 2.7. *Оптималните смесени стратегии на играчите в играта $\Gamma(B)$ съвпадат с оптималните смесени стратегии на съответните играчи в $\Gamma(A)$, а цените на двете игри са свързани с равенството*

$$v_B=cv_A+d.$$

Доказателство. Нека $X^0=(x^0_1,\dots,\ x^0_n)$ и $Y^0=(y^0_1,\dots,y^0_m)$ са оптимални смесени стратегии на играчите в играта $\Gamma(A)$, а $X^*=(x^*_1,\ \dots,\ x^*_n)$ и $Y^*=(y^*_1,\dots,\ y^*_m)$ са оптимални смесени стратегии в преобразуваната игра $\Gamma(B)$. Тогава стратегиите X^0, Y^0 удовлетворяват условията

$$\mathcal{P}_A(\overline{X}^i,\ Y^0)=\sum_{j=1}^{m} a_{ij}\, y_j^0 \leqq v_A,\ i=1,\dots,n;$$

(2.11)

$$\mathcal{P}_A(X^0,\ \overline{Y}^j)=\sum_{i=1}^{n} a_{ij}\, x_i^0 \geqq v_A,\ j=1,\dots,m.$$

Аналогично стратегиите X^*, Y^* удовлетворяват условията

$$\mathcal{P}_B(\overline{X}^i,\ Y^*)=\sum_{j=1}^{m} b_{ij}\, y_j^* \leqq v_B,\ i=1,\dots,n;$$

(2.12)

$$\mathcal{P}_B(X^*,\ \overline{Y}^j)=\sum_{i=1}^{n} b_{ij}\, x_i^* \geqq v_B,\ j=1,\dots,m.$$

Ще покажем, че:

1. Стратегиите X^*, Y^* са оптимални и за играта $\Gamma(A)$. От (2.12) и равенството $b_{ij}=ca_{ij}+d$ получаваме

$$\sum_{j=1}^{m} (ca_{ij}+d)\, y_j^* \leqq v_B,\ i=1,\dots,n;$$

$$\sum_{i=1}^{n} (ca_{ij}+d)\, x_i^* \geqq v_B,\ j=1,\dots,m.$$

Но тъй като

$$\sum_{j=1}^{m} y_j^*=1 \text{ и } \sum_{i=1}^{n} x_i^*=1,$$

то

$$c\sum_{j=1}^{m} a_{ij}\, y_j^*+d \leqq v_B,\ i=1,\dots,n;$$

$$c\sum_{i=1}^{n} a_{ij}\, x_i^*+d \geqq v_B,\ j=1,\dots,m$$

и понеже $c>0$, тези неравенства можем да запишем така:

$$\sum_{j=1}^{m} a_{ij}\, y_j^* \leqq \frac{v_B-d}{c},\ i=1,\dots,n;$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij}\, x_i^* \geqq \frac{v_B-d}{c},\ j=1,\dots,m,$$

откъдето съгласно с теорема 2.5 следва, че векторите X^*, Y^* са оптимални смесени стратегии и за играта $\Gamma(A)$, а числото $\frac{v_B-d}{c}$ е равно на цената v_A. Следователно $v_B=cv_A+d$.

2. Стратегиите X^0, Y^0 са оптимални за играта $\Gamma(B)$. От (2.11) следват неравенствата

$$c\sum_{j=1}^{m} a_{ij}\, y_j^0+d \leqq cv_A+d,\ i=1,\dots,n;$$

$$c\sum_{i=1}^{n} a_{ij}\, x_i^0+d \geqq cv_A+d,\ j=1,\dots,m,$$

които можем да запишем още така:

$$\sum_{j=1}^{m} ca_{ij}\, y_j^0+d\sum_{j=1}^{m} y_j^0 \leqq cv_A+d,\ i=1,\dots,n;$$

$$\sum_{i=1}^{n} ca_{ij}\, x_i^0+d\sum_{i=1}^{n} x_i^0 \geqq cv_A+d,\ j=1,\dots,m.$$

Следователно

$$\sum_{j=1}^{m} b_{ij}\, y_j^0 \leqq cv_A+d,\ i=1,\dots,n;$$

$$\sum_{i=1}^{n} b_{ij}\, x_i^0 \geqq cv_A+d,\ j=1,\dots,m,$$

т. е. векторите X_1 Y^0 са оптимални смесени стратегии и за играта $\Gamma(B)$, а $v_B = cv_A + d$.

Като се използува тази теорема, могат да се изменят елементите на платежната матрица на дадена матрична игра с цел полесно да се извършват пресмятанията при определяне на решението ѝ. В частност, ако матричната игра има отрицателни елементи, избирайки $c=1$ и $d > \left| \min_{i,j} a_{ij} \right|$, можем да направим положителни всички елементи на платежната ѝ матрица и по такъв начин да обезпечим положителност на цената на преобразуваната игра. Именно поради това можем да считаме в случаите, в които е необходимо, че всички елементи на дадена платежна матрица са положителни (или неотрицателни).

Да приложим теорема 2.7 към следния конкретен пример: да се определят оптималните стратегии $X^0=(x_1^0, x_2^0)$, $Y^0=(y_1^0, y_2^0)$ и цената v на матричната игра с платежна матрица

$$A=\begin{pmatrix} 1000 & 200 \\ 400 & 600 \end{pmatrix}.$$

Елементите на тази матрица могат да се опростят. Действително всеки елемент може да се раздели на 200 и след това от получените числа може да се извади единица. По такъв начин се получава матрицата

$$B=\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

В същност направено е следното преобразување:

$$b_{ij}=0{,}005\, a_{ij}-1.$$

Решаваме играта $\Gamma(B)$. Тъй като тя няма седлова точка в чисти стратегии, ще приложим теорема 2.5, т. е. ще търсим решение на системата

$$\begin{aligned} 4y_1^0 &\leqq v_B & \qquad 4x_1^0+x_2^0 &\geqq v_B \\ y_1^0+2y_2^0 &\leqq v_B & 2x_2^0 &\geqq v_B \\ y_1^0+y_2^0 &=1 & x_1^0+x_2^0 &=1 \\ y_1^0\geqq 0,\ y_2^0 &\geqq 0 & x_1^0\geqq 0,\ x_2^0 &\geqq 0. \end{aligned}$$

Като заместим всички неравенства с равенства и решим получената система, ще видим, че нейното решение е

$$y_1^0=\frac{2}{5},\quad y_2^0=\frac{3}{5},\quad x_1^0=\frac{1}{5},\quad x_2^0=\frac{4}{5},\quad v=\frac{8}{5},$$

т. е. решението на преобразуваната игра $\Gamma(B)$ е $X^0=\left(\frac{1}{5}, \frac{4}{5}\right)$, $Y^0=\left(\frac{2}{5}, \frac{3}{5}\right)$, $v_B=\frac{8}{5}$. Тогава изходната игра $\Gamma(A)$ има за оптимални стратегии същите вектори $X^0=\left(\frac{1}{5}, \frac{4}{5}\right)$, $Y^0=\left(\frac{2}{5}, \frac{3}{5}\right)$ и цена

$$v_A=\frac{v_B-d}{c}=520.$$

Този прост пример показва, че използуването на теорема 2.7 значително улеснява пресмятанията, свързани с намиране решението на горната система.

Вече споменахме, че при различните методи за решаване на матрични игри трудностите се увеличават с увеличаване размерите на платежната матрица. Ето защо интерес представляват не само възможностите за изменение елементите на дадена платежна матрица, но и възможностите за намаляване на нейните размери. Източно възможностите за преобразуване на дадена матрична игра, чиято платежна матрица е с по-малки размери и от решението на която лесно може да се определи решението на първоначалната игра. В това отношение полезно се оказва доминирането (превъзходството) на една стратегия над друга. Подробно този въпрос се разглежда в следващата точка.

2.4. ДОМИНИРАНЕ

Ще казваме, че векторът $\alpha=(\alpha_1, \ldots, \alpha_s)$ *доминира* над вектора $\beta=(\beta_1, \ldots, \beta_s)$ (или векторът β се доминира от вектора α), ако са изпълнени неравенствата

$$\alpha_i \geqq \beta_i,\quad i=1, \ldots, s.$$

В случай че всички тези неравенства са строги, ще казваме, че доминирането е строго.

Теорема 2.8. *Нека в матричната игра $\Gamma(A)$ i_0-вият ред се доминира от някоя изпъкнала комбинация от редове на матрицата A. С A' да означим матрицата, която се получава от матрицата A след изключване на i_0-вия ѝ ред. Тогава:*

а) *цената на играта $\Gamma(A')$ съвпада с цената на играта $\Gamma(A)$;*

б) *всяка оптимална смесена стратегия на втория играч в играта $\Gamma(A')$ е оптимална смесена стратегия за втория играч и в играта $\Gamma(A)$;*

в) *ако $\overline{X}^0=(x_1^0, \ldots, x_{i_0-1}^0, x_{i_0+1}^0, \ldots, x_n^0)$ е оптималната смесе-*

на стратегия за първия играч в играта $\Gamma(A)'$, *то* $X^0=(x_1^0,\dots x_{i_0-1}^0, 0, x_{i_0+1}^0,\dots, x_n^0)$ *е оптимална смесена стратегия за първия играч в играта* $\Gamma(A)$;

г) *ако допълнително предположим, че доминирането е строго във всяка оптимална смесена стратегия* $X=(x_1,\dots, x_n)$ *на първия играч в играта* $\Gamma(A)$ *е изпълнено* $x_{i_0}=0$.

Доказателство. Най-напред ще докажем твърдението г.) От предположението за строго доминиране на реда i_0 следва, че съществуват неотрицателни числа

$$\sigma_1,\dots,\sigma_n;\ \sigma_{i_0}=0, \sum_{i=1}^{n}\sigma_i=1, \tag{2.13}$$

такива, че са верни неравенствата

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij}\,\sigma_i > a_{i_0 j},\ j=1,\dots, m. \tag{2.14}$$

Векторът $\sigma=(\sigma_1,\dots, \sigma_n)$ можем да разглеждаме като смесена стратегия за първия играч в играта $\Gamma(A)$. Нека $Y^0=(y_1^0,\dots, y_m^0)$ е оптимална смесена стратегия за втория играч в играта $\Gamma(A)$ и v — нейната цена. Тогава от (2.14) чрез последователно умножаване на съответните неравенства с y_j^0 и почленното им събиране получаваме

$$v \geqq \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} a_{ij}\,\sigma_i\, y_j^0 > \sum_{j=1}^{m} a_{i_0 j}\, y_j^0. \tag{2.15}$$

Тъй като поне една от компонентите y_j^0 е положителна, от (2.15) и теорема 2.4 следва, че за произволна оптимална смесена стратегия $X=(x_1^0,\dots, x_n^0)$ на първия играч в играта $\Gamma(A)$ е изпълнено $x_{i_0}^0=0$. С това твърдението г) е доказано.

Нека $\widetilde{X}_0=(x_1^0,\dots, x_{i_0-1}^0, x_{i_0+1}^0,\dots, x_n^0)$ и $Y^0=(y_1^0,\dots, y_m^0)$ са двойка оптимални смесени стратегии за играта $\Gamma(A')$, а v' е цената ѝ. Тогава съгласно (2.5) са изпълнени неравенствата

$$\sum_{j=1}^{m} a_{ij}\, y_j^0 \leqq v',\quad i=1,\dots, i_0-1,\ i_0+1,\dots\ n; \tag{2.16}$$

$$\sum_{i \neq i_0}^{n} a_{ij}\, x_i^0 \geqq v',\quad j=1,\dots, m. \tag{2.17}$$

От (2.13) следва, че векторът $\sigma'=(\sigma_2,\dots, \sigma_{i_0-1}, \sigma_{i_0+1},\dots, \sigma_n)$ може да се разглежда като смесена стратегия за първия играч в играта $\Gamma(A')$. Тогава аналогично, както в (2.15), от (2.14) може да се получи неравенството

$$v' \geqq \sum_{\substack{i=1\\ i\neq i_0}}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{ij}\,\sigma_i\, y_j^0 \geqq \sum_{j=1}^{m} a_{i_0 j}\, y_j^0. \tag{2.18}$$

От (2.16), (2.17) и (2.18) следва, че съществуват число v' и смесени стратегии $X^0=(x_1^0,\dots, x_{i_0-1}^0, x_{i_0}^0, x_{i_0+1}^0,\dots, x_n^0)$, $x_{i_0}^0=0$ за първия играч и $Y^0=(y_1^0,\dots, y_m^0)$ за втория играч в играта $\Gamma(A)$, за които са изпълнени неравенствата

$$\sum_{j=1}^{m} a_{ij}\, y_j^0 \leqq v' \leqq \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\, x_i^0,\ i=1,\dots,n;\ j=1,\dots, m.$$

Съгласно теорема 2.5 това означава, че числото v' е цена, а двойката стратегии (X^0, Y^0) — седлова точка за играта $\Gamma(A)$. С това са доказани и твърденията а), б) и в) на теоремата.

Аналогично може да бъде доказана и следната

Теорема 2.9. *Нека в матричната игра* $\Gamma(A)$ j_0*-вия стълб доминира над някоя изпъкнала комбинация от стълбове на матрицата* A. *С* A'' *да означим матрицата, която се получава от матрицата* A *чрез зачеркване на* j_0*-вия стълб. Тогава:*

а) *цената на играта* $\Gamma(A'')$ съвпада с цената на играта $\Gamma(A)$;

б) *всяка оптимална смесена стратегия на първия играч в играта* $\Gamma(A'')$ *е оптимална смесена стратегия за първия играч и в играта* $\Gamma(A)$;

в) *ако* $\widetilde{Y}^0=(y_1^0,\dots, y_{j_0-1}^0, y_{j_0+1}^0,\dots, y_m^0)$ *е оптимална смесена стратегия за втория играч в играта* $\Gamma(A'')$, *то* $Y^0=(y_1^0,\dots, y_{j_0-1}^0, 0, y_{j_0+1}^0,\dots, y_m^0)$ *е оптимална смесена стратегия за втория играч в играта* $\Gamma(A)$;

г) *ако допълнително предположим, че доминирането е строго, за всяка оптимална смесена стратегия* $Y=(y_1,\dots, y_m)$ *на втория играч в играта* $\Gamma(A)$ *е изпълнено* $y_{j_0}=0$.

Теореми 2.8 и 2.9 се оказват изключително полезни при намаляване размера на платежната матрица A, тъй като въз основа на тях можем последователно да изключваме някои от редовете ѝ (или стълбовете ѝ). При това цената на преобразуваната игра е цена и на първоначалната игра (твърдението б) на двете теореми), а оптималните смесени стратегии на изходната игра получаваме чрез последователно разширяване на оптималните смесени стратегии на преобразуваната игра чрез добавяне на нули на съответните места (твърденията в) и г) на теоремите).

Забележка. Частен случай на предположенията на теорема 2.8 имаме, когато i_0-вият ред на матрицата A се доминира от i_1-вия ѝ ред, т. е. случай, в който коефициентите σ_i удовлетворяват условията $\sigma_i=0$ за $i \neq i_1$ и $\sigma_{i_1}=1$.

От теорема 2.8 и тази забележка следва, че ако i_1-вият ред доминира над i_0-вия ред, то i_1-вата чиста стратегия за първия играч е по-добра от i_0-вата му, поради което за него не е изгодно да използува i_0-вата си чиста стратегия. Именно за това вероятността, с която тази стратегия влиза във всяка оптимална смесена стратегия на първия играч, е нула. Аналогичен извод може да се направи и за втория играч, в случай че има доминиране между стълбове на платежната матрица.

Да илюстрираме практическото приложение на тези две теореми върху следния конкретен пример: дадена е матричната игра $\Gamma(A)$ с платежна матрица

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1{,}5 & 4 \\ 0 & 2 & 5 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Съществува ли доминиране между редовете (стълбовете) ѝ?

Изпъкналата комбинация на първия и втория стълб с множител $\frac{1}{2}$ се доминира строго от третия стълб. Действително

$$\frac{1}{2}\cdot 2+\frac{1}{2}\cdot 0=1<1{,}5$$

$$\frac{1}{2}\cdot 0+\frac{1}{2}\cdot 2=1<5$$

$$\frac{1}{2}\cdot 1+\frac{1}{2}\cdot 4=\frac{5}{2}<3.$$

Следователно третият стълб може да бъде изключен, от което следва, че $y_3=0$ във всяка оптимална смесена стратегия на втория играч. Разглеждаме новополучената матрица

$$A_1=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

и съответната ѝ игра $\Gamma(A_1)$. В матрицата A_1 третият стълб доминира строго над първия стълб. Следователно третият стълб може да бъде изключен. Получаваме матрицата

$$A_2=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

и играта $\Gamma(A_2)$. Тъй като вторият ред в матрицата A_2 се доминира строго от третия ред, може да го изключим. По такъв начин достигаме до матрицата

$$A_3=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

и играта $\Gamma(A_3)$.

Нека v_3 е цената, а $X^0=(x_1^0, x_2^0)$, $Y^0=(y_1^0, y_2^0)$ са двойка оптимални смесени стратегии за играта $\Gamma(A_3)$. Тогава v_3 е цена и на играта $\Gamma(A)$, тъй като, прилагайки последователно твърдението б) на теореми 2.8 и 2.9, се вижда, че v_3 е цена и на игрите $\Gamma(A_2)$ $\Gamma(A_1)$ а оттам и на $\Gamma(A)$.

Сега чрез X^0 и Y^0 да определим последователно оптималните стратегии на игрите $\Gamma(A_2)$, $\Gamma(A_1)$, $\Gamma(A)$. Векторите $(x_1^0, 0, x_2^0)$, (y_1^0, y_2^0) ще бъдат оптимални смесени стратегии на играта $\Gamma(A_2)$, тъй като матрицата A_3 беше получена от A_2 чрез зачеркване на втория ѝ ред (твърденията в) и г) от теорема 2.8). Аналогично $(x_1^0, 0, x_2^0)$, $(y_1^0, y_2^0, 0)$ ще бъде седлова точка в смесени стратегии на играта $\Gamma(A_1)$ (твърденията в) и г) на теорема 2.9). И накрая двойката смесени стратегии $(x_1^0, 0, x_2^0)$, $(y_1^0, y_2^0, 0, 0)$ ще образуват седлова точка за първоначалната игра $\Gamma(A)$.

Решавайки играта $\Gamma(A_3)$ чрез теорема 2.5, получаваме $X^0=\left(\frac{3}{5}, \frac{2}{5}\right)$, $Y^0=\left(\frac{4}{5}, \frac{1}{5}\right)$, $v_3=\frac{8}{5}$. Тогава решение на първоначалната игра $\Gamma(A)$ ще бъдат векторите $X^*=\left(\frac{3}{5}, 0, \frac{2}{5}\right)$, $Y^*=\left(\frac{4}{5}, \frac{1}{5}, 0, 0\right)$, а цената ѝ — числото $v=\frac{8}{5}$.

Ще се спрем по-подробно на случая, когато два реда в матрицата съвпадат. Тогава можем да зачертаем единия от двата съвпадащи реда. При това от твърдение а) на теорема 2.8 следва, че цената на новата игра ще съвпада с цената на първоначалната игра, а според твърдение б) множеството от оптималните стратегии на втория играч в новата игра съвпада с множеството от оптималните стратегии на втория играч в изходната игра. Твърдението в) дава правилото, с помощта на което получаваме оптимални стратегии на първия играч в първоначалната игра. Но в този случай твърдението г) вече може да не е вярно. Следователно със зачертаването на един от двата еднакви реда ние можем да намалим множеството от оптимални стратегии на първия играч в първоначалната игра, т. е. можем да загубим някои от решенията ѝ. Затова тази операция (изключване на повтарящ се ред) е разрешена само в случая, когато се интересуваме от цената на играта и от поне една оптимална стратегия за всеки от двамата играчи. Ако се интересуваме от всички оптимални стратегии, операцията е недопустима. Същият извод може да се направи и за съвпадащи стълбове.

Да проследим казаното върху матричната игра $\Gamma(A)$ с платежна матрица

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 7 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Първият и третият стълб на тази матрица съвпадат. Да изключим третия стълб. Ще получим матрицата

$$A_1=\begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

и съответната ѝ игра $\Gamma(A_1)$. Играта $\Gamma(A_1)$ притежава седлова точка в чисти стратегии, тъй като числото 3 е минимално в реда си и максимално в стълба си. Следователно чистите стратегии $X^0=(1,0)$ и $Y^0=(1,0)$ са нейни оптимални стратегии, а цената ѝ е числото 3. Тогава съгласно теорема 2.8 двойката вектори $\tilde{X}^0=(1,0)$ и $\tilde{Y}^0=(1, 0, 0)$ са оптимални стратегии, за играта $\Gamma(\tilde{A})$, а числото 3 — нейна цена. И тъй получихме едно решение на първоначалната игра $\Gamma(A)$.

Ако обаче директно изследваме играта $\Gamma(A)$ за седлова точка в чисти стратегии, ще видим, че числото 3 е максимално и в третия стълб, т. е. вторият играч в тази игра има още една оптимална чиста стратегия — вектора $Y=(0, 0, 1)$, факт, който не бихме установили, изхождайки само от решението на преобразуваната игра $\Gamma(A_1)$.

2.5. СИМЕТРИЧНИ ИГРИ

Ще разгледаме един специален клас матрични игри, така наречените симетрични (безобидни) игри, чиито свойства, както ще видим по-нататък, се оказват твърде полезни.

Една матрична игра се нарича *симетрична*, ако платежната ѝ матрица $A=\|a_{ij}\|_{n\times n}$ е кососиметрична, т. е. ако $a_{ij}=-a_{ji}$ за $i=1,\dots, n$; $j=1,\dots, n$. От определението на кососиметрична матрица се вижда, че елементите от главния ѝ диагонал са нули.

Матричната игра с платежна матрица

$$A=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & -2 \\ -3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

е симетрична, тъй като A е кососиметрична матрица. В разгледаните примери в т. 2.2 само платежната матрица на играта 2.1 е кососиметрична.

В по-нататъшното изложение симетричните игри ще означаваме с $C(A)$.

От кососиметричността на платежната матрица на една симетрична игра следва, че двамата играчи имат еднакви множества от стратегии ($M_1=M_2=M$), т. е. всяка възможност за единия играч е достъпна и за другия. Следователно, прилагайки еднакви стратегии, двамата играчи могат да очакват еднакъв резултат от играта. Това се вижда от следната

Теорема 2.10. *Цената на симетричната игра е нула. Освен това, ако $X^0\in M$ е оптимална смесена стратегия на първия играч, то X^0 е оптимална смесена стратегия и за втория играч.*

Доказателство. Нека $C(A)$ е симетрична игра.

1. Ще докажем, че цената ѝ v е равна на нула. Нека $X=(x_1,\dots, x_n)$ е произволна смесена стратегия в играта $C(A)$, т. е. $X\in M$. Тогава

$$\mathscr{P}(X, X)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j=-\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ji}x_i x_j=$$

$$=-\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_{ij}x_j x_i=-\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j=-\mathscr{P}(X, X).$$

Следователно

$$\mathscr{P}(X, X)=-\mathscr{P}(X, X), \text{ т. е. } \mathscr{P}(X, X)=0.$$

От това равенство следва, че за всяко $X \in M$ е вярно неравенството

$$\min_{Y \in M} \mathscr{P}(X, Y) \leqq \mathscr{P}(X, X) = 0,$$

от което получаваме

(2.19) $$\max_X \min_Y \mathscr{P}(X, Y) \leqq 0.$$

Аналогично от $\mathscr{P}(Y, Y) = 0$ за $Y \in M$ следва, че

$$\max_X \mathscr{P}(X, Y) \geqq 0$$

за всяко $Y \in M$, а оттук и неравенството

(2.20) $$\min_Y \max_X \mathscr{P}(X, Y) \geqq 0.$$

Но от (2.19) и (2.20) следва, че

$$\max_Y \min_X \mathscr{P}(X, Y) \leqq 0 \leqq \min_Y \max_X \mathscr{P}(X, Y),$$

т. е. $v = 0$.

2. Нека $X^0 \in M$ е оптимална смесена стратегия на първия играч. Ще покажем, че X^0 е оптимална и за втория играч. Наистина, щом $v = 0$ и X^0 е оптимална смесена стратегия за първия играч, според теорема 2.5 следва, че

$$0 \leqq \mathscr{P}(X^0, \overline{Y}^j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i^0 = -\sum_{i=1}^{n} a_{ji} x_i^0 =$$

$$= -\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^0 = -\mathscr{P}(\overline{X}^i, X^0),$$

откъдето

$$\mathscr{P}(\overline{X}^i, X^0) \leqq 0, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Тогава въз основа на същата теорема 2.5 можем да направим заключението, че X^0 е оптимална стратегия и за втория играч.

Аналогично може да се покаже и обратното твърдение.

От доказаната теорема могат да се направят следните две полезни забележки:

При решаване на симетрични игри не е необходимо да се пресмята цената на играта, тъй като тя е нула.

Двамата играчи могат да прилагат една и съща оптимална смесена стратегия, следователно достатъчно е да се пресметне оптималната смесена стратегия на единия играч. Тя ще бъде оптимална и за другия.

Използувайки тези забележки и теорема 2.5, да решим симетричната игра с платежна матрица

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ -2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тъй като цената на играта е нула и множествата от стратегиите на двамата играчи съвпадат, системата, съответствуваща на тази игра (според теорема 2.5), ще има два пъти по-малко ограничения и ще изглежда така:

$$\begin{aligned} 2x_2 - 3x_3 &\leqq 0 \\ -2x_1 \qquad &\leqq 0 \\ 3x_1 \qquad &\leqq 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1, \; x_i \geqq 0,& \; i = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

Заменяйки неравенствата с равенства и решавайки получената система, получаваме

$$x_1 = 0, \quad x_2 = \frac{3}{5}, \quad x_3 = \frac{2}{5}.$$

Тъй като тези стойности са неотрицателни, векторът $X^0 = \left(0, \frac{3}{4}, \frac{1}{4}\right)$ е оптимална смесена стратегия за двамата играчи в разглежданата игра.

От този прост конкретен пример се вижда, че поради свойствата на симетричните игри, определени от теорема 2.10, получаването на решение е свързано с решаване на системи с двойно по-малки размери, т. е. с по-малък обем пресмятания.

Основният интерес обаче към симетричните игри се обуславя не само от току-що направеното заключение, а преди всичко от следния важен факт: *на всяка матрична игра може да бъде съпоставена някаква симетрична игра, така че решението на първоначалната игра да се получи директно от решението на съответната ѝ симетрична игра.* По такъв начин всички методи за решаване на симетрични игри могат да се използуват и за решаване на произволни матрични игри.

Ще разгледаме един начин на преобразуване на една произволна матрична игра $\Gamma(A)$ в симетрична. За изходната игра $\Gamma(A)$ ще предполагаме само, че е с положителна цена ($v > 0$). Видяхме в т. 2.3 на тази глава (теорема 2.7) че всяка матрична игра може лесно да се сведе до матрична игра с положителна цена.

И тъй нека е дадена матричната игра $\Gamma(A)$ с положителна цена v. От платежната ѝ матрица $A = \|a_{ij}\|_{n \times m}$ да образуваме кососиметричната матрица $\overline{A}$ по следния начин:

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} O_n & A & -e_n \\ -A^T & O_m & I_m^T \\ e_n^T & -I_m & 0 \end{pmatrix} = \|\bar{a}_{ij}\|_{(n+m+1)\times(n+m+1)},$$

където

e_n — n-мерен вектор-стълб, елементите на който са единици;

I_m — m-мерен вектор-ред, елементите на който са единици;

O_n — квадратна нулева матрица от n-ти ред;

O_m — квадратна нулева митрица от m-ти ред;

0 — числото нула;

T — знак за транспонтиране.

Например на матрицата

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 1 \\ 5 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

съответната й кососиметрична матрица $\bar{A}$ ще бъде

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & 2 & 5 & -1 \\ -6 & -5 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -3 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -5 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Вярна е следната

Теорема 2.11. *Ако* $Z^0 = (X^0, Y^0, \lambda) = (x_1^0, \dots, x_n^0, y_1^0, \dots, y_m^0, \lambda)$ *е оптимална смесена стратегия на втория играч (следователно и на първия) в симетричната игра* $C(\bar{A})$, *то*

а) $\sum_{i=1}^{n} x_i^0 = \sum_{j=1}^{m} y_j^0 = \mu > 0$;

б) *векторите* $X^* = \left(\frac{x_1^0}{\mu}, \dots, \frac{x_n^0}{\mu}\right)$, $Y^* = \left(\frac{y_1^0}{\mu}, \dots, \frac{y_m^0}{\mu}\right)$ *са оптимални смесени стратегии съответно за първия и втория играч в изходната игра* $\Gamma(A)$;

в) *цената на играта* $\Gamma(A)$ *е* $v = \frac{\lambda}{\mu}$;

г) *вярно е и обратното твърдение, т. е. ако* X^0 *и* Y^0 *са оптимални смесени стратегии за играта* $\Gamma(A)$ *с цена* v, *то векторът*

$$Z^0 = \left(\frac{X^0}{2+v}, \frac{Y^0}{2+v}, \frac{v}{2+v}\right) = \left(\frac{x_1^0}{2+v}, \dots, \frac{x_n^0}{2+v}, \frac{y_1^0}{2+v}, \dots, \frac{y_m^0}{2+v}, \frac{v}{2+v}\right)$$

е оптимална смесена стратегия за симетричната игра $C(\bar{A})$.

Доказателство. Ще покажем, че $\sum_{i=1}^{n} x_i^0 = \sum_{j=1}^{m} y_j^0 = \mu > 0$. От определението за смесени стратегии следва, че компонентите z_j^0 на вектора Z^0 ще удовлетворяват условията

$$(2.21) \qquad \sum_{j=1}^{n+m+1} z_j^0 = \sum_{i=1}^{n} x_i^0 + \sum_{j=1}^{m} y_j^0 + \lambda = 1, \ x_i^0 \geq 0, \ i = 1, \dots, n,$$
$$\lambda \geq 0, \ y_j^0 \geq 0, \ j = 1, \dots, m.$$

Стратегията Z^0 е оптимална смесена стратегия на втория играч в играта $C(\bar{A})$, чиято цена е нула, следователно за всяка чиста стратегия на първия играч ще бъдат изпълнени условията

$$\sum_{j=1}^{n+m+1} \bar{a}_{ij} z_j^0 \leq 0,$$

откъдето, имайки пред вид стойността на елементите $\bar{a}_{ij}$ на матрицата $\bar{A}$, получаваме

$$(2.22) \qquad \sum_{j=1}^{m} a_{ij} y_j^0 - \lambda \leq 0, \quad i = 1, \dots, n,$$

$$(2.23) \qquad -\sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i^0 + \lambda \leq 0, \ j = 1, \dots, m,$$

$$(2.24) \qquad \sum_{i=1}^{n} x_i^0 - \sum_{j=1}^{m} y_j^0 \leq 0.$$

От (2.21) следва, че $\lambda \geq 0$ като компонента на смесена стратегия.

1. Може ли да бъде изпълнено равенството $\lambda = 0$? Да допуснем, че $\lambda = 0$. Тогава от (2.22) и (2.23) следва, че

$$\mathscr{P}(X^i, Y^0) = \sum_{j=1}^{m} a_{ij} y_j^0 \leq 0, \ i = 1, \dots, n,$$

$$\mathscr{P}(X^0, Y^j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i^0 \geq 0, \quad j = 1, \dots, m.$$

Но от тези две неравенства и теорема 2.5 следва, че векторите $X^0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$ и $Y^0 = (y_1^0, \dots, y_m^0)$ са оптимални смесени стратегии в матричната игра $\Gamma(A)$, а цената й е нула, което противоречи на предположението, че $v>0$. Следователно $\lambda>0$. Тогава от теорема 2.3 следва, че условието (2.24) ще се удовлетворява като равенство, т. е.

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^0-\sum_{j=1}^{m} y_j^0=0$$

или

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^0=\sum_{j=1}^{m} y_j^0=\mu. \tag{2.25}$$

Ще докажем, че числото μ е положително, но преди това ще покажем, че $\lambda<1$. Допускаме, че $\lambda=1$. Тогава от (2.21) получаваме, че векторът Z^0 има вида $(0,\ldots,0,\ 1)$, откъдето и от (2.23) следва противоречието $1\leqq 0$. Следователно $\lambda<1$.

От (2.21) и (2.25) получаваме

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^0+\sum_{j=1}^{m} y_j^0=1-\lambda>0$$

$$\mu=\frac{1-\lambda}{2}>0.$$

С това твърдение а) от теоремата е доказано.

2. Ще докажем твърдения б) и в). Разделяме двете страни на съотношенията (2.22) и (2.23) на числото μ:

$$\sum_{j=1}^{m} a_{ij}\frac{y_j^0}{\mu}-\frac{\lambda}{\mu}\leqq 0,\quad -\sum_{i=1}^{n} a_{ij}\frac{x_i^0}{\mu}+\frac{\lambda}{\mu}\leqq 0$$

или

$$\sum_{j=1}^{m} a_{ij}\frac{y_j^0}{\mu}\leqq\frac{\lambda}{\mu}\leqq\sum_{i=1}^{n} a_{ij}\frac{x_i^0}{\mu}.$$

Тези неравенства съгласно теорема 2.5 означават, че векторите

$$X^*=\left(\frac{x_1^0}{\mu},\ldots,\frac{x_n^0}{\mu}\right),\ \frac{x_i^0}{\mu}\geqq 0,\ i=1,\ldots,n,\ \sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^0}{\mu}=1;$$

$$Y^*=\left(\frac{y_1^0}{\mu},\ldots,\frac{y_m^0}{\mu}\right),\ \frac{y_j^0}{\mu}\geqq 0,\ j=1,\ldots,m,\ \sum_{j=1}^{m}\frac{y_j^0}{\mu}=1$$

са оптимални смесени стратегии за играчите в първоначалната

игра $\Gamma(A)$, а цената ѝ е $v=\frac{\lambda}{\mu}>0$. С това твърденията б) и в) са доказани.

3. Ще докажем последното твърдение г).

Нека X^0 е оптимална смесена стратегия на първия играч, Y^0 е оптимална смесена стратегия на втория играч в играта $\Gamma(A)$ с цена $v>0$. Ще покажем, че векторът $Z^0=\left(\frac{X^0}{2+v},\ \frac{Y^0}{2+v},\ \frac{v}{2+v}\right)=$ $=\left(\frac{x_1^0}{2+v},\ldots,\frac{x_n^0}{2+v},\frac{y_1^0}{2+v},\ldots,\frac{y_m^0}{2+v},\ \frac{v}{2+v}\right)$ е оптимална смесена стратегия за симетричната игра $C(\bar{A})$.

Първо, всички $z_i^0\geqq 0$ и $\sum_{i=1}^{n+m+1} z_i^0=1$. Действително

$$z_i^0=\frac{x_i^0}{2+v}\geqq 0,\ i=1,\ldots,n,\ z_{n+j}^0=\frac{y_j^0}{2+v}\geqq 0,\ j=1,\ldots,m;$$

$$z_{n+m+1}^0=\frac{v}{2+v}>0.$$

$$\sum_{i=1}^{n+m+1} z_i^0=\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^0}{2+v}+\frac{\sum_{j=1}^{m} y_j^0}{2+v}-+\frac{v}{2+v}=\frac{1}{2+v}+\frac{1}{2+v}+\frac{v}{2+v}=1.$$

Второ, ще докажем, че векторът Z^0 е оптимална стратегия на играта $C(\bar{A})$, като покажем, че той удовлетворява условията (2.22), (2.24) за оптималност. От оптималността на векторите X^0 и Y^0 за играта $\Gamma(A)$ и от теорема 2.5 следва, че

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij}x_i^0\geqq v,\ j=1,\ldots,m;\ \sum_{j=1}^{m} a_{ij}y_j^0\leqq v,\ i=1,\ldots,n\cdot$$

От тези условия получаваме

$$-\sum_{i=1}^{n} a_{ij}x_i^0+v\leqq 0,\quad j=1,\ldots,m;$$

$$\sum_{j=1}^{m} a_{ij}y_j^0-v\leqq 0,\ i=1,\ldots,n.$$

Делим двете групи неравенства на $2+v$:

$$-\sum_{i=1}^{n} a_{ij} \frac{x_i^0}{2+v} + \frac{v}{2+v} \leqq 0, \; j=1,\ldots, m;$$

$$\sum_{j=1}^{m} a_{ij} \frac{y_j^0}{2+v} - \frac{v}{2+v} \leqq 0, \; i=1,\ldots, n.$$

Освен това

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^0}{2+v} - \sum_{j=1}^{m} \frac{y_j^0}{2+v} = 0.$$

Следователно векторът Z^0 удовлетворява условията (2.22), (2.24). С това е доказано и твърдението г).

От доказаната теорема следва, че действително двете матрични игри $\Gamma(A)$ и $C(\bar{A})$ са еквивалентни в смисъл, че от решение на едната можем да определим решение и на другата и обратното.

Задачи:

1. Да се построят платежните матрици на следните игри:

а) Двама играчи A и B едновременно и независимо един от друг записват едно от трите числа: 1, 2, 3. Ако сумата от написаните числа е четна, играчът B заплаща тази сума (например в левове) на играча A, ако сумата е нечетна, играчът A я заплаща на B.

б) Двама играчи трябва да изберат по едно от целите числа между 1 и 9. Ако числото, избрано от единия играч, е с 1 по-голямо от числото, избрано от другия играч, първият губи 2 точки. Ако изборът на единия от играчите е по-голям, макар и с 2 единици, той печели една точка. В случая, когато избраните числа са равни, никой не печели точка.

в) Случайно се избира едно от числата 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, след което двама играчи съобщават по една горна граница за избраното число (играчите знаят, че числото е между 1 и 7 и че изборът му е случаен). Ако е познал само единият играч, той получава една точка. Ако са познали и двамата играчи, една точка получава този, чиято горна граница е строго по-малка. Във всички останали случаи играчите получават нула точки.

г) Двама играчи имат по 2 лв. и един предмет с цена $c>0$. Всеки играч прави заявка в запечатан плик, предлагайки k лева (k е едно от числата: 0, 1, 2,) за предмета. Този, който предложи по-голяма сума, получава предмета и заплаща на другия сумата, която сам е предложил. Ако двамата играчи предлагат една и

съща сума, предметът остава и на двамата и компенсираща сума не се плаща. Има ли седлова точка платежната матрица на тази игра при различни стойности на c?

2. Намерете седловите точки на матричните игри със следните платежни матрици:

а) $$A=\begin{pmatrix} 2 & 4 & 7 & -3 & 2 \\ 0 & 3 & -2 & 1 & 4 \\ 3 & 5 & 7 & 8 & 9 \\ -2 & 4 & -3 & 7 & -4 \end{pmatrix};$$

б) $$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 8 & 7 & 6 & 5 \\ 7 & 6 & 5 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix};$$

в) $$A=\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 1 & 7 & 4 \\ 4 & 7 & 4 \end{pmatrix};$$

г) $$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

3. Покажете, че ако в матрична игра 2×2 първият играч има оптимална чиста стратегия, вторият играч също има оптимална чиста стратегия и обратно.

4. Да се покаже, че матричната игра с платежна матрица $A=\|a_{ij}\|_{n\times m}$, където $a_{ij}=i-j$, $i=1,\ldots, n$; $j=1,\ldots, m$, има седлова точка.

5. Да се покаже, че всяка от двете матрични игри $\Gamma(A)$ и $\Gamma(B)$ съответно с цени $v(A)$, $v(B)$ и платежни матрици

$$A=\begin{pmatrix} 0 & z \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ z & 0 \end{pmatrix}$$

има седлова точка и че могат да се намерят такива стойности z_1 и z_2 на z, при които да са изпълнени неравенствата

$$v(A+B)<v(A)+v(B)$$
$$v(A+B)>v(A)+v(B).$$

6. Нека $A=\|a_{ij}\|_{n\times m}$ е дадена матрица. Да се покаже, че съществува или такъв вектор $X=(x_1,\ldots, x_n)$, $x_i\geqq 0$, $i=1,\ldots, n$, $\sum_{i=1}^{n} x_i=1$, че $\sum_{i=1}^{n} x_i a_{ij}\geqq 0$ за $j=1,\ldots, m$ или вектор $Y=(y_1,\ldots, y_m)$,

$y_j \geqq 0,\ j=1,\ldots,m,\ \sum_{j=1}^{m} y_j=1$, че $\sum_{j=1}^{m} y_j\, a_{ij}<0$ за $i=1,\ldots,n$.

7. Нека са дадени матричните игри $\Gamma(A)$, $\Gamma(B)$, $\Gamma(C)$ с цени $v(A)$, $v(B)$, $v(C)$ и платежни матрици $A=\|a_{ij}\|_{n_1\times m_1}$, $B=\|b_{ij}\|_{n_1\times m_2}$, $C=\|c_{ij}\|_{n_2\times m_2}$. Нека (X^0, Y^0) и (X^*, Y^*) са седлови точки в смесени стратегии на игрите $\Gamma(A)$ и $\Gamma(C)$, а двойката вектори $(\xi, 1-\xi)$ и $(\eta, 1-\eta)$ е седлова точка на играта с платежна матрица

$$\begin{pmatrix} v(A) & v(B) \\ 0 & v(C) \end{pmatrix}.$$

Да се покаже, че ако $v(A)<0<v(C)$, векторите

$$X=(\xi x_1^0,\ldots,\xi x_{n_1}^0,\ (1-\xi)x_1^*,\ldots,(1-\xi)x_{n_2}^*)$$
$$Y=(\eta y_1^0,\ldots,\eta y_{m_1}^0,\ (1-\eta)y_1^*,\ldots,(1-\eta)y_{m_2}^*)$$

са оптимални смесени стратегии на играта с платежна матрица

$$\begin{pmatrix} A & B \\ O & C \end{pmatrix}.$$

8. Проверете дали векторите $X=\left(\frac{3}{4},\ \frac{1}{4}\right)$,
$Y=\left(0,0,0,\frac{3}{4},0,\frac{1}{4}\right)$ и числото $v=\frac{15}{4}$ са решение на играта с платежна матрица

$$A=\begin{pmatrix} 10 & 8 & 6 & 4 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 & 3 & 12 & 6 \end{pmatrix}.$$

9. Проверете дали векторите $X=\left(\frac{1}{4},0,\frac{1}{4},\frac{2}{4}\right)$, $Y=\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$ и числото 4 са решение на матричната игра с платежна матрица

$$A=\begin{pmatrix} 14 & -4 & 2 \\ -4 & 8 & 8 \\ 4 & 4 & 4 \\ 2 & 8 & 2 \end{pmatrix}.$$

10. С помощта на теорема 2.5 решете матричните игри с платежни матрици:

а) $$A=\begin{pmatrix} 10 & 6 \\ 2 & 9 \end{pmatrix};$$

б) $$A=\begin{pmatrix} 0 & 7 \\ 10 & 4 \end{pmatrix};$$

в) $$A=\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

11. С помощта на теоремите за доминиране да се намалят размерите на платежните матрици на следните матрични игри:

а) $$A=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 1 & 3 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 7 & -5 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 4 & -1 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 3 & -2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

б) $$A=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 7 & 14 & -2 \\ 5 & 3 & 4 & 2 & -3 \\ 7 & 6 & 9 & -4 & 2 \end{pmatrix};$$

в) $$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 4 \\ 3 & -2 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

12. Нека платежната матрица на дадена матрична игра се разлага на четири подматрици A_1, A_2, A_3, A_4 по следния начин:

$$A=\begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix},$$

където подматриците A_2 и A_3 имат следните свойства:

а) всеки стълб на матрицата A_2 строго доминира някаква изпъкнала комбинация на стълбовете на матрицата A_1;

б) всеки ред на A_3 се доминира строго от някаква изпъкнала комбинация на редовете на A_1.

Да се покаже, че всички решения на играта $\Gamma(A)$ се определят от решенията на играта $\Gamma(A_1)$, т. е. че подматриците A_2, A_3, A_4 могат да се зачеркнат.

13. Като се използува задача 12, теоремите за доминиране и теорема 2.5 да се реши следната матрична игра:

$$A=\begin{bmatrix} 0 & -3 & -3 & 5 & -3 \\ 1 & 1 & -2 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & -4 & 1 \\ 3 & -2 & -1 & 6 & -2 \end{bmatrix}.$$

ГЛАВА 3

МЕТОДИ ЗА РЕШАВАНЕ НА МАТРИЧНИ ИГРИ

Ще считаме, че една матрична игра е решена, ако е определено поне едно нейно решение, т. е. ако е определена поне една двойка оптимални стратегии и цената на играта.

Анализирайки матричните игри, стигнахме до следните два случая:

1. Играта притежава седлова точка, т. е. играта има решение в чисти стратегии. Казахме, че това са точно тези стратегии i_0 и j_0 (те могат да не са единствени), за които елементът $a_{i_0 j_0}$ е минимален в реда си и максимален в стълба си, а цената v е равна на $a_{i_0 j_0}$. На тези матрични игри няма да се спираме, тъй като в т. 2.1 беше подробно разгледан въпросът за намиране на решението им и бяха решени конкретни примери.

2. Играта не притежава седлова точка. Според теорема 2.1 всяка такава игра също има решение, но в смесени стратегии. Тази основна в теорията на игрите теорема гарантира съществуване на решение в смесени стратегии, но нейното доказателство не е конструктивно и не ни дава начин за определяне на това решение (то също може да не е единствено).

Досега за решаването на такива игри използувахме теорема 2.5, т. е. свеждахме намирането на оптимални смесени стратегии към търсене на неотрицателни решения на системи от равенства и неравенства. От решените в предидещата глава няколко примера се вижда, че този начин не е приемлив за матричните игри с по-големи размери, тъй като броят на системите, които трябва да се изследват, нараства бързо с увеличаване размерите на платежната матрица. Именно поради това прилагането на теорема 2.5 за практическо решаване на сложни матрични игри е неефективно.

В тази глава ще разгледаме някои от най-популярните методи

за решаване на матрични игри, но преди това ще обърнем внимание на следното: за да се избягнат излишни загуби на време и усилия, прилагането на всеки от следващите методи трябва да се предхожда от един предварителен етап, който включва:

проверка за седлова точка;

проверка за доминиране.

Въпреки че неколкократно беше отбелязано, че игрите с практическа стойност рядко притежават седлова точка, първата проверка е необходима, тъй като може да се случи играта да притежава седлова точка, а да се решава с методи, които търсят решение в смесени стратегии. Съществена е и проверката за доминиране, особено при решаване на игри с големи матрици, тъй като чрез нея може съществено да се намалят размерите на матрицата, а оттам и трудностите, свързани с пресмятане на решението.

3.1. КРАЙНИ МЕТОДИ

Методите, които ще бъдат разгледани в тази точка, са крайни Те гарантират получаване на точното решение на дадена матрична игра за краен брой операции. Изложението ще започнем с методите за решаване на най-простите матрични игри — тези, в които поне един от играчите има две чисти стратегии.

I. Игри 2×2

Нека е дадена матричната игра с платежна матрица

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Ще предполагаме, че играта не притежава седлова точка, т. е. че и двамата играчи нямат оптимални чисти стратегии. (Лесно може да се установи, че ако в игра 2×2 единият от играчите няма оптимална чиста стратегия, другият играч също няма такава.)

Ако $X=(x, 1-x)$ е произволна смесена стратегия на първия играч (в частност X може да е и чиста стратегия), а $Y=(y, 1-y)$ е произволна смесена стратегия на втория играч, платежната функция на играта ще бъде

$$\boxed{\mathscr{P}(X, Y)=\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} a_{ij} x_i y_j}$$

$$=x(a_{11}y+a_{12}(1-y))+(1-x)(a_{21}y+a_{22}(1-y)).$$

Търсим двойка стратегии (X^0, Y^0) и число v, които са едно решение на играта, т. е. $X^0=(x^0, 1-x^0)$ и $Y^0=(y^0, 1-y^0)$ са оптимални смесени стратегии съответно на първия и втория играч, а v е цена на играта.

От предположението, че играта няма седлова точка, следва, че трябва да са изпълнени неравенствата

$$0<x^0<1, \quad 0<y^0<1,$$
$$0<1-x^0<1 \quad 0<1-y^0<1.$$

Ако X^0 и Y^0 са оптимални стратегии и v — цената на играта, то са верни съотношенията

(3.1) $$v=\mathscr{P}, \ (X^0, \ Y^0)=x^0(a_{11}y^0+a_{12}(1-y^0))+ +(1-x^0)(a_{21}y^0+a_{22}(1-y^0)),$$

(3.2) $$a_{11}y^0+a_{12}(1-y^0)\leqq v,$$
$$a_{21}y^0+a_{22}(1-y^0)\leqq v.$$

Да допуснем, че поне едно от неравенствата (3.2) е строго. Например второто:

$$a_{21}y^0+a_{22}(1-y^0)<v.$$

Тогава от това неравенство и от $0<x^0<1$ и $0<1-x^0<1$, замествайки в (3.1), получаваме противоречието

$$v<x^0v+(1-x^0)v=v.$$

Следователно и двата израза от (3.2) трябва да бъдат равенства

(3.3) $$a_{11}y^0+a_{12}(1-y^0)=v,$$
$$a_{21}y^0+a_{22}(1-y^0)=v.$$

Аналогично може да се установи, че

(3.4) $$a_{11}x^0+a_{21}(1-x^0)=v,$$
$$a_{12}x^0+a_{22}(1-x^0)=v.$$

Ще покажем, че за разглежданата игра е изпълнено

(3.5) $$a_{11}+a_{22}-a_{21}-a_{12}\neq 0.$$

Да допуснем, че

(3.6) $$a_{11}+a_{22}-a_{21}-a_{12}=0.$$

Нека например $a_{11}\geqq a_{12}$. От (3.6) следва, че $a_{21}\leqq a_{22}$, т. е. първият стълб на матрицата A доминира над втория стълб и според теорема 2.9 той може да се зачертае. По такъв начин получаваме еквивалентна игра $\Gamma(A_1)$ с платежна матрица

$$A_1=\begin{pmatrix}a_{12}\\a_{22}\end{pmatrix}.$$

Очевидно тази игра притежава оптимални чисти стратегии, следователно изходната игра — също, което противоречи на направеното предположение. Аналогично се разглежда и случаят $a_{12}\geqq a_{11}$.

И тъй

$$a_{11}+a_{22}-a_{21}-a_{12}\neq 0.$$

Тогава за единствените решения на (3.3) и (3.4) получаваме

(3.7) $$x^0=\frac{a_{22}-a_{21}}{a_{11}+a_{22}-a_{21}-a_{12}}, \quad y^0=\frac{a_{22}-a_{12}}{a_{11}+a_{22}-a_{21}-a_{12}},$$
$$v=\frac{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}{a_{11}+a_{22}-a_{21}-a_{12}}.$$

Трябва да покажем, че определените от (3.7) x^0, y^0 принадлежат на интервала (0, 1). Ще направим това за x^0. В разглежданата игра няма доминиране по стълбове, следователно $a_{11}\neq a_{12}$, $a_{21}\neq a_{22}$ и можем да предположим, че е налице един от случаите:

1) $a_{11}>a_{12}$, $a_{21}<a_{22}$;
2) $a_{11}<a_{12}$, $a_{21}>a_{22}$.

Да разгледаме случая 1): $a_{11}-a_{12}>0$, $a_{22}-a_{21}>0$. Тогава

$$a_{11}+a_{22}-a_{12}-a_{21}=(a_{11}-a_{12})+(a_{22}-a_{21})>a_{22}-a_{21}>0,$$

т. е. $x^0\in(0,1)$. Аналогично се показва, че и в случая 2) $x^0\in(0,1)$ Чрез подобни разсъждения се убеждаваме също, че $y^0\in(0,1)$.

И тъй, ако дадена игра 2×2 не притежава седлова точка, то системите (3.3) и (3.4) имат единствено решение, което съгласно теорема 2.5 е решение в смесени стратегии и на разглежданата матрична игра.

Да приложим формула (3.7) за решаване на конкретни игри 2×2.

Пример 3.1. *Да се реши играта „герб-стотинка“.*

Знаем, че платежната матрица на тази игра е

$$A=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$$

и че тя няма седлова точка. От (3.7) получаваме

$$x^0=\frac{-1-1}{-4}=\frac{1}{2}, \qquad y^0=\frac{-1-1}{-4}=\frac{1}{2}, \qquad v=\frac{(-1).(-1)-1.1}{-4}=0.$$

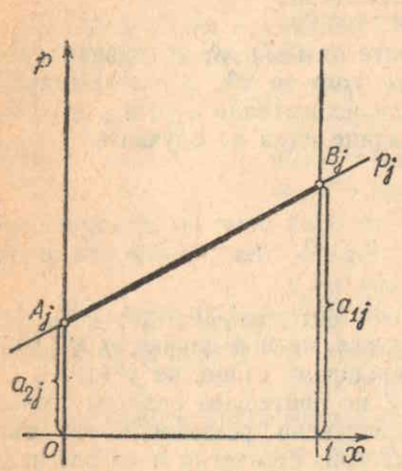
Следователно решението на играта е $X^0=\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $Y^0=\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $v=0$. Още веднъж стигаме до извода, че в играта „герб-стотинка“ рационалното поведение на всеки от играчите е по произволен начин да редува двете си чисти стратегии, като използува с еднаква честота всяка от тях.

Пример 3.2. *Да се реши матричната игра с платежна матрица*

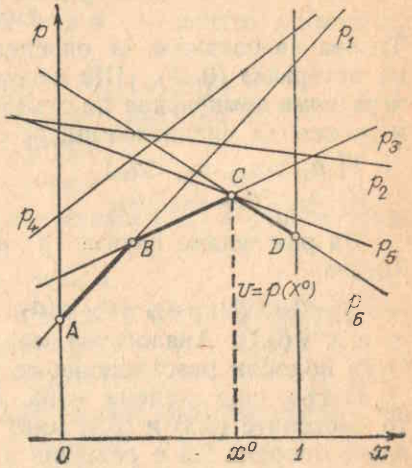
$$A = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тази игра също няма седлова точка, тъй като

$$\min_j \max_i \; a_{ij} = 3 \neq 0 = \max_i \; \min_j \; a_{ij}.$$



Фиг. 3.1



Фиг. 3.2

От (3.7) определяме $x^0 = \frac{6}{13}$, $y^0 = \frac{3}{13}$, $v = \frac{18}{13}$. Тогава решението на играта е $X^0 = \left(\frac{6}{13}, \frac{7}{13}\right)$, $Y^0 = \left(\frac{3}{13}, \frac{10}{13}\right)$, $v = \frac{18}{13}$.

II. Графичен метод за решаване на игри $2 \times m$ и $n \times 2$.

Нека е дадена матричната игра $\Gamma(A)$ с платежна матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} \dots & a_{2m} \end{pmatrix}$$

и нека $X = (x, 1-x)$ е произволна смесена стратегия на първия играч ($0 \leq x \leq 1$). Ако вторият играч играе с j-тата си чиста стратегия, т. е. със стратегията $\bar{Y}^j = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots 0)$ (единицата на j-тото място), то резултатът от играта за първия играч ще бъде

$$p_j(x) = \mathscr{P}(X, \bar{Y}^j) = a_{1j}x + a_{2j}(1-x).$$

Когато x се мени в интервала $[0,1]$, $p_j(x)$ определя права p_j в равнината. Тъй като $x \in [0,1]$, ще се интересуваме не от цялата права p_j, а само от частта ѝ, заключена между правите $x=0$ и $x=1$, т. е. от отсечката A_jB_j (фиг. 3.1). Именно ординатите на точките от тази отсечка дават резултата на първия играч, когато x се мени в $[0, 1]$, а вторият играч играе със стратегията $\bar{Y}^j$. Тъй като на всяка чиста стратегия $\bar{Y}^j$, $j = 1, \dots, m$ ще съответствува такава права, ще се получат m различни прави (фиг. 3.2).

За $x \in [0, 1]$ да въведем функцията

$$p(x) = \min_{1 \leq j \leq m} \mathscr{P}(X, \bar{Y}^j) = \min_{1 \leq j \leq m} p_j(x).$$

Когато x се мени в интервала $[0, 1]$, точката $(x, p(x))$ определя долната обвивка на семейството прави p_j, $j = 1, \dots, m$. На фиг. 3.2 тази обвивка е начупената линия $ABCD$. Първият играч се стреми да максимизира резултата си $p(x)$, следователно той ще избере такава своя стратегия $X^0 = (x^0, 1-x^0)$, за която

$$p(x^0) = \max_{0 \leq x \leq 1} p(x) = \max_{0 \leq x \leq 1} \min_{1 \leq j \leq m} p_j(x).$$

С други думи, от всички x в $[0, 1]$ първият играч ще избере това x^0 (може да не е единствено), което е абсциса на точката от начупената линия $p(x)$ с най-голяма ордината. На фиг. 3.2 това е точката C. От казаното дотук ще имаме

$$\mathscr{P}(X^0, \bar{Y}^j) = p_j(x^0) \geq \min_{1 \leq j \leq m} p_j(x^0) = p(x^0). \tag{3.8}$$

Да разгледаме няколко възможни случая:

1. Съществува чиста стратегия $\bar{Y}^{j_0}$ на втория играч, на която съответствува права p_{j_0}, минаваща през точката $(x^0, p(x^0))$ и успоредна на абсцисната ос (фиг. 3.3 и 3.4).

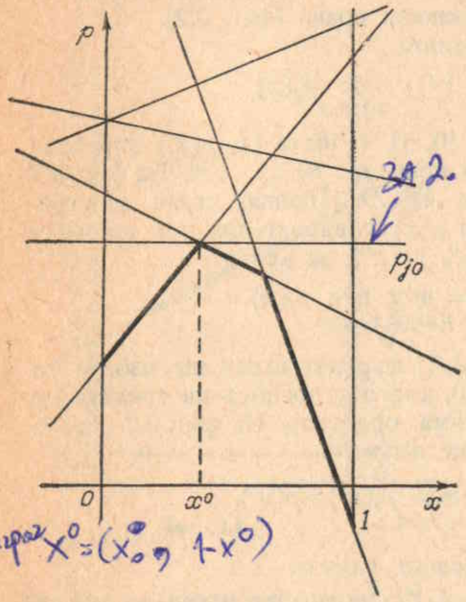
Тогава

$$\mathscr{P}(X, \bar{Y}^{j_0}) = p_{j_0}(x) = p(x^0), \quad 0 \leq x \leq 1. \tag{3.9}$$

Съгласно теорема 2.5 от (3.8) и (3.9) следва, че двойката стратегии $(X^0, \bar{Y}^{j_0})$ образуват седлова точка $v = p(x^0)$ е цена на играта. В играта, изобразена на фиг. 3.3, първият играч има единствена оптимална смесена стратегия — стратегията $X^0 = (x^0, 1-x^0)$, а вторият — единствена оптимална чиста стратегия — стратегията $\bar{Y}^{j_0}$, съответствуваща на правата p_{j_0}. В играта на фиг. 3.4 първият играч има безброй много оптимални смесени стратегии. Това са всички стратегии $X^0 = (x^0, 1-x^0)$, за които x^0 принадлежи на интервала $\triangle$, а вторият играч — единствена оптимална чиста стратегия $\bar{Y}^{j_0}$, съответствуваща на правата p_{j_0}.

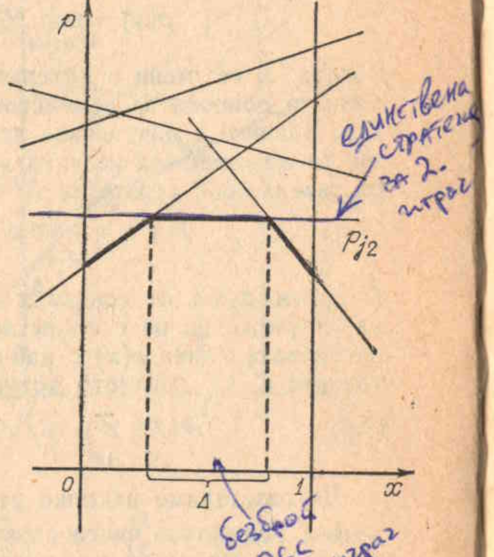
2. През точката $(x^0,\ p(x^0))$ не минава права, успоредна на абсцисната ос. Възможни са три подслучая:

а) $x^0=0$ (фиг. 3.5). Нека $\bar{Y}^{j_0}$ е чистата стратегия на втория играч, която съответствува на правата p_{j_0}, минаваща през точ-



за 1. играч $X^0=(x^0_0,\ 1-x^0)$

Фиг. 3.3



Фиг. 3.4

ката $(0,\ p(0))$ и имаща най-голям по абсолютна стойност отрицателен наклон. Тогава

$$\mathscr{P}(X,\ \bar{Y}^{j_0})=p_{j_0}(x)\leq \max_{0\leq x\leq 1} p_{j_0}(x)=p_{j_0}(0)=p(0)$$

и съгласно теорема 2.5 и (3.8) следва, че чистите стратегии $X^0=(0,1)$, $\bar{Y}^{j_0}$ и числото $v=p(0)$ са решение на играта, т. е. играта е със седлова точка.

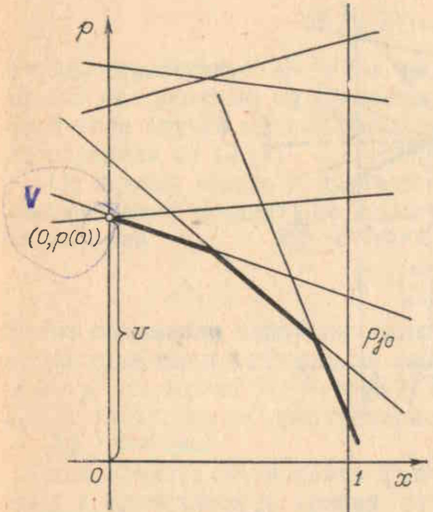
б) $x^0=1$ (фиг. 3.6). Нека в този случай $\bar{Y}^{j_0}$ е чистата стратегия на втория играч, която съответствува на правата p_{j_0}, минаваща през точката $(1,\ p(1))$ и имаща най-голям положителен наклон. Аналогично на случай а) се показва, че чистите стратегии $X^0=(1,\ 0)$, $\bar{Y}^{j_0}$ и числото $v=p(1)$ са решение на играта.

в) $0<x^0<1$ (фиг. 3.7). Тогава в точката $(x^0, p(x^0))$ се пресичат

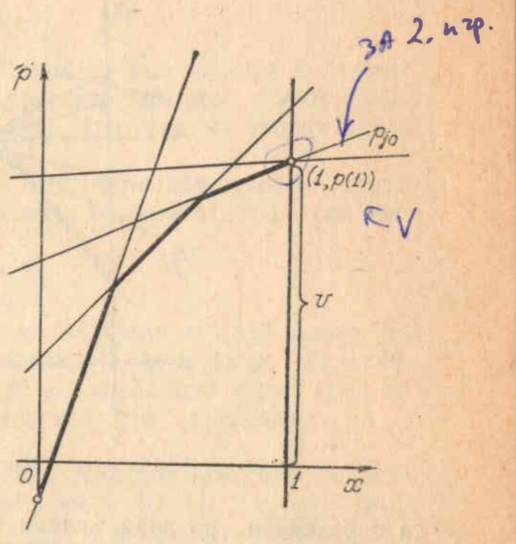
точно две прави, съдържащи отсечки от начупената линия, от които едната е с положителен наклон, а другата — с отрицателен. На фиг. 3.7 това са правите p_{j_1} и p_{j_2} с уравнения

$$p_{j_1}(x)=a_{1j_1}x+a_{2j_1}(1-x),$$

$$p_{j_2}(x)=a_{1j_2}x+a_{2j_2}(1-x).$$



Фиг. 3.5



Фиг. 3.6

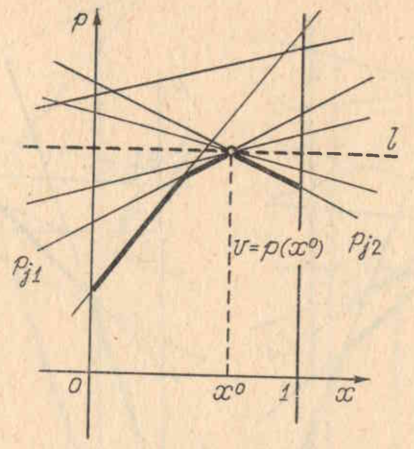
В този случай вторият играч няма оптимална чиста стратегия, затова за него е най-изгодно да смесва чистите си стратегии. От фиг. 3.7 обаче не се вижда коя е оптималната му смесена стратегия, а се вижда само, че за него е най-добре да смесва двете си чисти стратегии $\bar{Y}^{j_1}$ и $\bar{Y}^{j_2}$, съответствуващи на правите p_{j_1} и p_{j_2}. Ясно е, че оптималната смесена стратегия трябва да бъде такава комбинация между чистите стратегии $\bar{Y}^{j_1}$ и $\bar{Y}^{j_2}$, на която да съответствува права, минаваща през точката $(x^0,\ p(x^0))$ и успоредна на абсцисната ос (на фиг. 3.7 — правата l).

И тъй търсим оптимална смесена стратегия $Y^0=(0,\dots,0,\ y^0,\ 0,\dots,0,1-y^0,\ 0,\dots,0)$ (y^0 е на j_1-во място, а $1-y^0$—на j_2-ро) на втория играч, на която да съответствува права, минаваща през пресечната точка на правите p_{j_1} и p_{j_2} и да е успоредна на оста Ox, т. е. търсим число y^0 в $[0,1]$, за което правата с уравнение

$$y^0 p_{j_1}(x)+(1-y^0)p_{j_2}(x)=p(x^0) \qquad (3.10)$$

да е успоредна на Ox. Правите

$$p_{j_1}(x)=a_{1j_1}x+a_{2j_1}(1-x)=(a_{1j_1}-a_{2j_1})x+a_{2j_1},$$
$$p_{j_2}(x)=a_{1j_2}x+a_{2j_2}(1-x)=(a_{1j_2}-a_{2j_2})x+a_{2j_2}$$



Фиг. 3,7

са с различни по знак ъглови коефициенти. Нека за определеност $a_{1j_1}-a_{2j_1}>0$, а $a_{1j_2}-a_{2j_2}<0$. Замествайки $p_{j_1}(x)$ и $p_{j_2}(x)$ в (3.10) и групирайки по x, за уравнението на търсената права получаваме

$$x(a_{1j_1}y^0-a_{2j_1}y^0+(1-y^0)a_{1j_2}-(1-y^0)a_{2j_2})+$$
$$+(a_{2j_1}y^0+(1-y^0)a_{2j_2})=p(x^0).$$

За да бъде тази права успоредна на оста Ox, трябва коефициентът пред x да бъде нула, т. е.

$$a_{1j_1}y^0-a_{2j_1}y^0+(1-y^0)a_{1j_2}-(1-y^0)a_{2j_2}=0$$

или

$$y^0(a_{1j_1}-a_{2j_1}+a_{2j_2}-a_{1j_2})=a_{2j_2}-a_{1j_2}.$$

От предположението $a_{1j_1}-a_{2j_1}>0$ $a_{1j_2}-a_{2j_2}<0$ следва, че

$$a_{1j_1}-a_{2j_1}+a_{2j_2}-a_{1j_2}\neq 0.$$

Тогава

$$y^0=\frac{a_{2j_2}-a_{1j_2}}{a_{1j_1}-a_{2j_1}+a_{2j_2}-a_{1j_2}}. \qquad (3.11)$$

Тъй като в (3.11) и числителят, и знаменателят са положителни числа, то y^0 е също положително число. Трябва да покажем, че

$y^0<1$. Ако към двете страни на неравенството $a_{1j_1}-a_{2j_1}>0$ прибавим положителното число $a_{2j_2}-a_{1j_2}$, ще получим

$$a_{1j_1}-a_{2j_1}+a_{2j_2}-a_{1j_2}>a_{2j_2}-a_{1j_2}.$$

Следователно $y^0<1$.

И тъй за смесената стратегия $Y^0=(0,\dots,0,\ y^0,\ 0,\dots,0,1-y^0,\ 0,\dots,0)$ при всяка смесена стратегия X на първия играч имаме

$$\mathcal{P}(X,\ Y^0)=p(x^0).$$

Тогава стратегиите X^0, Y^0 и числото $p(x^0)$ въз основа на теорема 2.5 са решение на разглежданата матрична игра. Следователно в този случай оптималната смесена стратегия на втория играч се определя от (3.11)

От всичко казано в подточка в) можем да направим следното заключение: с помощта на всяко решение на играта 2×2 с платежна матрица

$$B=\begin{pmatrix} a_{1j_1} a_{1j_2} \\ a_{2j_1} a_{2j_2} \end{pmatrix},$$

чиято оптимална стратегия можем да получим от (3.7), може да се построи едно решение на разглежданата игра $2\times m$. Да сравним y^0 за играта $\Gamma(B)$ от (3.7) с y^0 за изходната игра $\Gamma(A)$ от (3.11). Виждаме, че действително двата израза съвпадат.

Да обобщим:

ако точката x^0, в която функцията $p(x)$ достига своя максимум, е единствена и крайна за интервала [0, 1], играта има единствено решение в чисти стратегии, т. е. двамата играчи имат по една оптимална чиста стратегия;

ако точката x^0 не е единствена, т. е. $p(x)$ има хоризонтална графика, вторият играч има оптимална чиста стратегия, а първият безбройно много оптимални стратегии;

ако x^0 е единствена, вътрешна за интервала [0, 1] и през точката $(x^0,\ p(x^0))$ не минава права, успоредна на Ox, играта има единствено решение в смесени стратегии.

Да приложим разглеждания графичен метод за решаване на конкретни игри $2\times m$.

Пример 3.3. Да се реши матричната игра с платежна матрица

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Играта няма седлова точка.

2. Третият стълб доминира над първия. Зачертаваме го и решаваме получената еквивалентна игра с платежна матрица

$$A_1=\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

3. Вторият играч в играта $\Gamma(A_1)$ има четири чисти стратегии. Съответните им прави са:

$$p_1(x)=2x-1(1-x)=3x-1,$$
$$p_2(x)=0\,.\,x+2(1-x)=-2x+2,$$
$$p_3(x)=-2x+2(1-x)=-4x+2,$$
$$p_4(x)=-x+2(1-x)=-3x+2.$$

4. Построяваме правите p_1, p_2, p_3, p_4 и определяме долната им обвивка ABC в интервала $[0, 1]$ (фиг. 3.8).

5. Определяме абсцисата x^0 на точката B с най-голяма ордината:

$$3x^0-1=-4x^0+2$$
$$7x^0=3,\ x^0=\frac{3}{7}.$$

Оптималната стратегия на първия играч в играта $\Gamma(A_1)$ е $X^0=\left(\frac{3}{7},\ \frac{4}{7}\right)$, а цената ѝ $v=\frac{9}{7}$.

6. Оптималната стратегия на втория играч в $\Gamma(A_1)$ ще определим или като пресметнем оптималната стратегия на втория играч в играта с платежна матрица

$$A_2=\begin{pmatrix} 2 & -2\\ -1 & 2\end{pmatrix}$$

по (3.11), или

като прекараме права през точката B, успоредна на Ox. Ще направим това по втория начин: извършваме пресмятанията

$$y^0p_1(x)+(1-y^0)p_3(x)=\frac{2}{7}$$
$$y^0(3x-1)+(1-y^0)(-4x+2)=\frac{2}{7}$$
$$x(3y^0+4y^0-4)-y^0+2-2y^0=\frac{2}{7}$$
$$x(7y^0-4)-3y^0+2=\frac{2}{7}$$
$$7y^0-4=0,\ y^0=\frac{4}{7}.$$

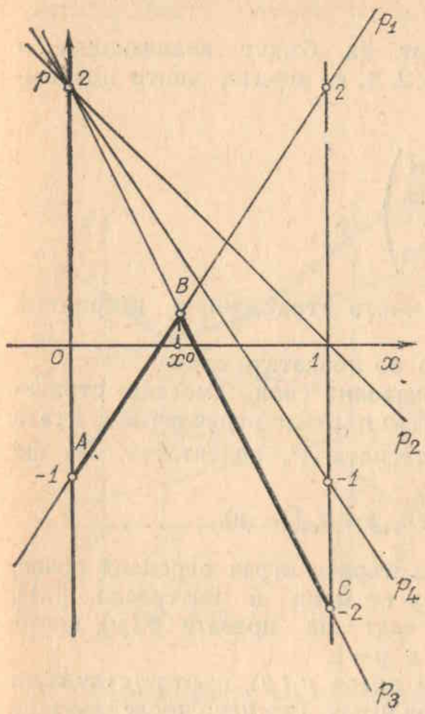
Следователно оптималната стратегия на втория играч в играта $\Gamma(A_1)$ е $\left(\frac{4}{7},\ 0, \frac{3}{7},\ 0\right)$, а оптималната му стратегия в изходната игра ще бъде $Y^0=\left(\frac{4}{7},\ 0, 0\ \frac{3}{7},\ 0\right)$.

7. Решение на изходната игра:

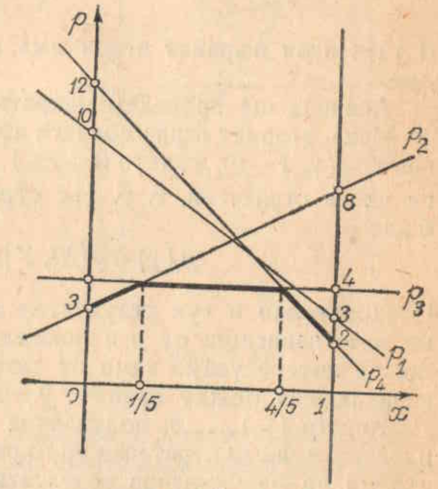
$$X^0=\left(\frac{3}{7},\ \frac{4}{7}\right),\qquad Y^0=\left(\frac{4}{7},\ 0,\ 0,\ \frac{3}{7},\ 0\right),\qquad v=\frac{2}{7}.$$

Пример. 3.4. Да се реши играта с платежна матрица

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 8 & 4 & 2\\ 10 & 3 & 4 & 12\end{pmatrix}.$$



Фиг. 3.8



Фиг. 3.9

1. Играта не притежава седлова точка.
2. Доминиране няма.
3. $p_1(x)=-7x+10,$
   $p_2(x)=5x+3,$
   $p_3(x)=4,$
   $p_4(x)=-10\,x+12.$

4. Построяваме правите p_1, p_2, p_3, p_4 (фиг. 3.9) За нагледност интервалът [0,1] е изобразен с по-голяма дължина от дължината на единичната отсечка, с която са построени правите.

5. Вторият играч има единствена оптимална чиста стратегия. Това е стратегията $\overline{Y}^3=(0, 0,\ 1,\ 0)$, съответстваща на правата p_3.

Първият играч има безбройно много смесени стратегии $X^0 = (x^0, 1-x^0)$. Това са всички стратегии X^0, за които $\frac{1}{5} \leqq x^0 \leqq \frac{4}{5}$. Цената на играта е $v=4$.

Аналогично на игрите $2\times m$ могат да бъдат анализирани и графически решавани и игрите $n\times 2$, т. е. игрите, чиито платежни матрици имат вида

$$A=\begin{pmatrix} a_{11}a_{12} \\ a_{21}a_{22} \\ \dots \\ a_{n1}a_{n2} \end{pmatrix}.$$

В тези игри първият играч има n чисти стратегии, а вторият — две.

Анализа ще проведем накратко по познатата схема.

Нека вторият играч прилага произволна своя смесена стратегия $Y=(y, 1-y)$, където $0\leqq y\leqq 1$. Ако първият играч играе с i-тата си чиста стратегия, т. е. със стратегията $\overline{X}^i$, резултатът му ще бъде

$$p_i(y)=\mathscr{P}(\overline{X}^i, Y)=a_{i1}y+a_{i2}(1-y).$$

Следователно и тук резултатът на първия играч определя права, но вече зависеща от y и понеже y се мени в интервала $[0,1]$, ще се интересуваме само от тази част на правата $p_i(y)$, която е заключена между правите $y=0$ и $y=1$.

Когато $i=1,\dots,n$, получаваме n прави $p_i(y)$, съответствуващи на всички чисти стратегии на първия играч. Тъй като последният се стреми да максимизира резултата си, за него е изгодно да играе не с една и съща чиста стратегия, а така, че

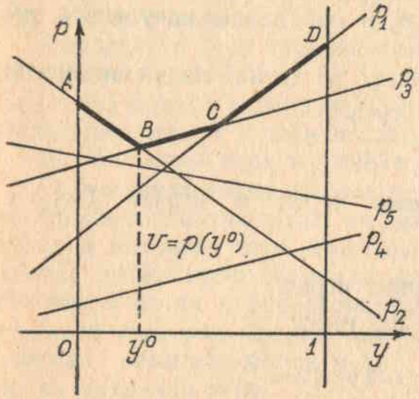
$$p(y)=\max_{1\leqq i\leqq n} \mathscr{P}(\overline{X}^i, Y)=\max_{1\leqq i\leqq n} p_i(y).$$

Когато y се мени в $[0,1]$, функцията $p(y)$ описва горната обвивка на семейството прави $p_i(y)$ (фиг. 3.10), т. е. начупената линия $ABCD$.

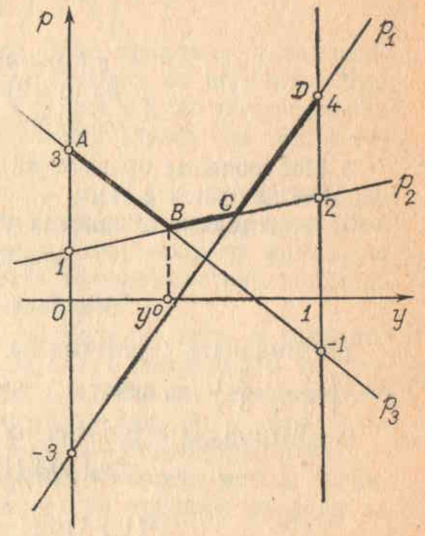
Вторият играч се стреми резултатът на първия да бъде възможно най-малък, следователно той трябва да избере такова y^0 от $[0, 1]$, за което

$$p(y^0)=\min_{0\leqq y\leqq 1} p(y)=\min_{0\leqq y\leqq 1}\max_{1\leqq i\leqq n} p_i(y),$$

откъдето и от теорема 2.5 следва, че стратегията $Y^0=(y^0, 1-y^0)$ е оптимална за втория играч, а цената $v=p(y^0)$. С други думи, абсцисата y^0 на точката от начупената линия $p(y)$ с най-малка ордината определя оптималната стратегия на втория играч, а нейната ордината — цената на играта.



Фиг. 3.10



Фиг. 3.11

Разглеждането на случаите, свързани с положението на y^0 в интервала [0, 1] и на отсечките от начупената линия $p(y)$ спрямо оста Oy, оставяме за упражнение на читателя.

Въпросът за определянето на оптималната стратегия на първия играч се третира по същия начин, т. е. или се прекарва права през точката $(y^0, p(y^0))$, успоредна на оста Oy, или се решава еквивалентна игра 2×2.

Пример 3.5 Да се реши матричната игра с платежна матрица

$$A=\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 2 & 1 \\ -1 & 3 \\ 0 & -1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Играта няма седлова точка.

2. Вторият ред доминира над четвъртия и над петия ред. Зачертаваме ги. Получаваме еквивалентна игра $\Gamma(A_1)$:

$$A_1=\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

3.
$$p_1(y)=4y-3(1-y)=7y-3,$$
$$p_2(y)=2y-1(1-y)=y+1,$$
$$p_3(y)=-1y+3(1-y)=-4y+3.$$

4. Построяваме правите p_1, p_2, p_3 и определяме начупената линия $ABCD$ (фиг. 3.11).

5. Определяме абсцисата y^0 на т. B с най-малка ордината:

$$y^0+1=-4y^0+3$$
$$5y^0=2,\ y^0=\frac{2}{5},\ v=\frac{7}{5}.$$

Оптималната стратегия на втория играч в играта $\Gamma(A_1)$ е $Y^0=\left(\frac{2}{5},\ \frac{3}{5}\right)$, а цената ѝ $v=\frac{7}{5}$.

6. Оптимална стратегия на първия играч:

$$x^0p_2(y)+(1-x^0)p_3(y)=v$$

$$x^0(y+1)+(1-x^0)(-4y+3)=\frac{7}{5}$$

$$y(x^0-4+4x^0)-2x^0+3-\frac{7}{5}=0$$

$$y(5x^0-4)-2x^0+\frac{8}{5}=0$$

$$5x^0-4=0,\ x^0=\frac{4}{5}.$$

Следователно оптимална стратегия на първия играч в играта $\Gamma(A_1)$ е $X^0=\left(0, \frac{4}{5}, \frac{1}{5}\right)$.

7. Решение на изходната игра:

$$X^*=\left(0,\ \frac{4}{5},\ \frac{1}{5}, 0, 0\right);\ Y^0=\left(\frac{2}{5},\ \frac{3}{5}\right),\ v=\frac{7}{5}.$$

8. Проверка на решението:

$$\mathscr{P}(X^*,\ Y^0)=\frac{7}{5},$$

$$\mathscr{P}(X^*,\ Y^0)=0\cdot\left(4\cdot\frac{2}{5}-3\cdot\frac{3}{5}\right)+\frac{4}{5}\left(2\cdot\frac{2}{5}+1\cdot\frac{3}{5}\right)+$$
$$+\frac{1}{5}\left(-\frac{2}{5}+3\cdot\frac{3}{5}\right)+0\cdot\left(0\cdot\frac{2}{5}-1\cdot\frac{3}{5}\right)+0\cdot\left(-3\cdot\frac{2}{5}+0\cdot\frac{3}{5}\right)=$$
$$=\frac{4}{5}\cdot\frac{7}{5}+\frac{1}{5}\cdot\frac{7}{5}=\frac{7}{5}\left(\frac{4}{5}+\frac{1}{5}\right)=\frac{7}{5}.$$

Подобен графичен метод може да бъде приложен и за решаването на матрични игри, в които поне единият от играчите има три чисти стратегии, т. е. за игри $3\times m$ и $n\times 3$, но построенията тук са вече сложни, затова практическата стойност на един такъв метод е малка.

Решаването чрез графичен метод на игри, в които всеки един от играчите има повече от три чисти стратегии, е невъзможно. За такива игри се използуват по-общи методи, някои от които ще бъдат разгледани в тази и следващата точка на настоящата глава III. Матрични игри и линейно оптимиране.

Съществува тясна връзка между матричните игри и задачите на линейното оптимиране, на базата на която решаването на произволна матрична игра може да бъде сведено към решаване на двойка двойнствени задачи на линейното оптимиране и обратното. По такъв начин добре развитите методи на линейното оптимиране (като симплекс-метода, модифицирания симплекс-метод, двойнствения симплекс-метод и др.) могат да се прилагат за решаване на матрични игри.

Първо ще разгледаме въпроса, как решаването на произволна матрична игра може да се сведе към решаване на двойка двойнствени задачи на линейното оптимиране. Нека е дадена матричната игра $\Gamma(A)$, където $A=\|a_{ij}\|n\times m$. Имайки пред вид теорема 2.7, можем да считаме, че всички елементи на матрицата A са положителни числа, следователно и цената v е също положително число. Искаме да определим едно решение на играта $\Gamma(A)$. Според теорема 2.5 за това е достатъчно да се намерят вектори $X^0=(x_1^0,\ldots,x_{n0}),\ Y^0=(y_1^0,\ldots,y_m^0)$ и число $v>0$, такива, че да са изпълнени условията

$$\mathscr{P}(X^0,\ Y^j)=\sum_{i=1}^{n} a_{ij}x_i^0\geqq v \text{ за } j=1,\ldots,m,$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^0=1, \tag{3.12}$$

$$x_i^0\geqq 0,\ i=1,\ldots,n;$$

$$\mathscr{P}(\overline{X}^i, Y^0)=\sum_{j=1}^{m} a_{ij}y_j^0 \leqq v, \quad i=1,\ldots,n,$$

$$(3.13)\qquad \sum_{i=1}^{m} y_j^0=1,$$

$$y_j^0 \geqq 0, \quad j=1,\ldots,m.$$

Тогава търсенето на оптимална стратегия X^0 за първия играч, който се стреми да максимизира резултата си, е равносилно на решаването на следната задача на линейното оптимиране:

Да се определи вектор $(X^0, v)=(x_1^0,\ldots, x_n^0, v)$, *който да максимизира линейната функция*

$$(3.14)\qquad L(x_1,\ldots, x_n, v)=v$$

при условията

$$(3.15)\qquad \begin{aligned} a_{11}x_1+\ldots+a_{n1}x_n &\geqq v,\\ \ldots\ldots&\ldots\\ a_{1m}x_1+\ldots+a_{nm}x_n &\geqq v\\ x_1+\ldots+\quad x_n &=1\\ x_i &\geqq 0, \quad i=1,\ldots,n. \end{aligned}$$

Аналогично търсенето на оптимална стратегия Y^0 за втория играч е равносилно на решаване на задачата:

Да се определи вектор $(y_1^0,\ldots y_m^0, v)$, *който да минимизира линейната функция*:

$$(3.16)\qquad G(y_1,\ldots, y_m, v)=v$$

при условията

$$(3.17)\qquad \begin{aligned} a_{11}y_1+\ldots+a_{1m}y_m &\leqq v,\\ \ldots\ldots&\ldots\\ a_{n1}y_1+\ldots+a_{nm}y_m &\leqq v,\\ y_1+\ldots+y_m &=1,\\ y_j &\geqq 0, \quad j=1,\ldots,m. \end{aligned}$$

И тъй решаването на играта $\Gamma(A)$ се свежда до решаване на задачите (3.14) — (3.15) и (3.16) — (3.17). За да изясним по-добре връзката между тези две задачи, както и въпросът за тяхната разрешимост, ще ги преобразуваме в двойка двойнствени задачи по следния начин. Разделяме двете страни на всяко от ограниченията (3.15) и (3.17) на числото v, за което знаем, че е положително. Получаваме

$$(3.18)\qquad \begin{aligned} a_{11}\frac{x_1}{v}+\ldots+a_{n1}\frac{x_n}{v} &\geqq 1,\\ \ldots\ldots&\ldots\\ a_{1m}\frac{x_1}{v}+\ldots+a_{nm}\frac{x_n}{v} &\geqq 1,\\ \frac{x_i}{v} &\geqq 0, \quad i=1,\ldots,n; \end{aligned}$$

$$(3.19)\qquad \frac{x_1}{v}+\ldots+\frac{x_n}{v}=\frac{1}{v};$$

$$(3.20)\qquad \begin{aligned} a_{11}\frac{y_1}{v}+\ldots+a_{1m}\frac{y_m}{v} &\leqq 1,\\ \ldots\ldots&\ldots\\ a_{n1}\frac{y_1}{v}+\ldots+a_{nm}\frac{y_m}{v} &\leqq 1,\\ \frac{y_1}{v} &\geqq 0, \quad j=1,\ldots,m; \end{aligned}$$

$$(3.21)\qquad \frac{y_1}{v}+\ldots+\frac{y_m}{v}=\frac{1}{v}.$$

Полагаме

$$(3.22)\qquad \begin{aligned} \bar{x}_i &= \frac{x_i}{v}, \quad i=1,\ldots,n,\\ \bar{y}_i &= \frac{y_j}{v}, \quad j=1,\ldots,m. \end{aligned}$$

Тогава от (3.19) и (3.21) се вижда, че

$$(3.23)\qquad \sum_{i=1}^{n}\bar{x}_i=\sum_{j=1}^{m}\bar{y}_j=\frac{1}{v},$$

откъдето следва, че първият играч, който се стреми да максимизира v, трябва да минимизира $\frac{1}{v}$, т. е. $\sum_{i=1}^{n}\bar{x}_i$. Аналогично вторият играч, вместо да минимизира v, ще максимизира $\frac{1}{v}$, т. е. ще максимизира $\sum_{j=1}^{m}\bar{y}_j$. По такъв начин при въведените нови променливи $\bar{x}_i$ и $\bar{y}_i$ от задачите (3.14) — (3.15) и (3.16) — (3.17) се получава следната двойка двойнствени задачи:

I задача: *Да се намери вектор* $\overline{X}^0=(\bar{x}_1^0,\ldots,\bar{x}_n^0)$, *който да минимизира линейната функция*

$$\overline{L}(\bar{x}_1,\ldots,\bar{x}_n)=\sum_{i=1}^{n}\bar{x}_i \tag{3.24}$$

при условията

$$\sum_{i=1}^{n}a_{ij}\bar{x}_i\geqq 1,\ j=1,\ldots,m \tag{3.25}$$

$$\bar{x}_i\geqq 0,\ i=1,\ldots,n.$$

II задача: *Да се намери вектор* $\overline{Y^0}=(\bar{y}_1^0,\ldots,\bar{y}_m^0)$, *който да максимизира линейната функция*

$$\overline{G}(\bar{y}_1,\ldots,\bar{y}_m)=\sum_{j=1}^{m}\bar{y}_j \tag{3.26}$$

при условията

$$\sum_{j=1}^{m}a_{ij}\bar{y}_j\leqq 1,\ i=1,\ldots,n \tag{3.27}$$

$$\bar{y}_j\geqq 0,\ j=1,\ldots,m.$$

По такъв начин решаването на матричната игра $\Gamma(A)$ се свежда към решаването на двойката двойнствени задачи (3.24) — (3.25) и (3.26) — (3.27).

Знаем, че всяка матрична игра има решение в смесени стратегии (теорема 2.1). Тогава, щом на играта $\Gamma(A)$ съпоставяме задачи I и II, естествен е въпросът, винаги ли тази двойка задачи е разрешима? Отговорът е утвърдителен. Действително от направеното предположение, че всички елементи на матрицата A са положителни числа, следва, че множеството, определено от условия (3.27), е ограничено. Освен това то е непразно (m-мерният вектор $\overline{Y}=(0,0,\ldots,0)$ удовлетворява (3.27)). Следователно задача II е разрешима. Но според една от основните теореми на двойнствеността в линейното оптимиране [26] следва, че и задача I е също разрешима, при това, ако $\overline{X}^0=(\bar{x}_1^0,\ldots,\bar{x}_n^0)$ и $\overline{Y}^0=(\bar{y}_1^0,\ldots,\bar{y}_m^0)$ са съответно решение на двойката двойнствени задачи, то

$$\sum_{i=1}^{n}\bar{x}_i^0=\overline{L}(\overline{X}^0)=\overline{G}(\overline{Y}^0)=\sum_{j=1}^{m}\bar{y}_j^0.$$

Задачи I и II могат да бъдат решени с един от известните методи на линейното оптимиране, например *симплекс-метода* [26]. Нека чрез този метод са получени оптималните планове:

$$\overline{X}^0=(\bar{x}_1^0,\ldots,\bar{x}_n^0)\ \text{за задача I},$$

$$\overline{Y}=(\bar{y}_1^0,\ldots,\bar{y}_m^0)\ \text{за задача II},$$

при това $\sum\limits_{i=1}^{n}\bar{x}_i^0=\sum\limits_{j=1}^{m}\bar{y}_j^0$. От условие (3.25) следва, че векторът $\overline{X}^0\neq O$ (с O ще означаваме нулев вектор). Следователно числото $\sum\limits_{i=1}^{n}\bar{x}_i^0=\sum\limits_{j=1}^{m}\bar{y}_j^0>0$.

Сега трябва от задачите I и II да се върнем към изходната матрична игра $\Gamma(A)$, за да определим решението ѝ. Този преход е съвсем прост. В (3.22) и (3.23) заместваме оптималните планове $\overline{X}^0$ и $\overline{Y}^0$. Векторите

$$X^0=\overline{X}^0\cdot v=(v\bar{x}_1^0,\ldots,v\bar{x}_n^0)$$

$$Y^0=\overline{Y}^0\cdot v=(v\bar{y}_1^0,\ldots,v\bar{y}_m^0)$$

са оптимални смесени стратегии за играчите в $\Gamma(A)$ според теорема 2.5, а цената ѝ $v=\dfrac{1}{\sum\limits_{i=1}^{n}\bar{x}_i^0}=\dfrac{1}{\sum\limits_{j=1}^{m}\bar{y}_j^0}>0.$

От теорията на двойствеността в линейното оптимиране се знае, че за да се определят оптималните планове $\overline{X}^0$ и $\overline{Y}^0$ на двойките задачи I и II, не е необходимо и двете да се решават чрез симплекс-метода. Достатъчно е да се реши едната от тях, тогава оптималният план на другата се съдържа в последната симплекс-таблица. Компонентите на този план са точно оценките — Δ_j, съответствуващи на допълнителните променливи в решаваната задача [26].

В същност доказахме следната

Теорема 3.1. *На всяко решение* X^0, Y^0, v *на матричната игра* $\Gamma(A)$ *съответствуват решения* $\overline{X}^0=(\bar{x}_1^0,\ldots,\bar{x}_n^0)$ и $\overline{Y}^0=(\bar{y}_1^0,\ldots,\bar{y}_m^0)$ *на двойката задачи* I и II, *за които е изпълнено* $\sum\limits_{i=1}^{n}\bar{x}_i^0=\sum\limits_{j=1}^{m}\bar{y}_j^0=$

$=\frac{1}{v}$, *и обратно, на всяка двойка решения на задачи* I *и* II *съответствува решение на играта* $\Gamma(A)$.

Има и други начини за свеждане на една матрична игра към еквивалентна двойка двойнствени задачи, но на тях няма да се спираме.

Ще подчертаем още веднъж, че възможността матричните игри да се решават с методите на линейното оптимиране е много съществена, особено за игри с големи платежни матрици, решаването на които чрез методите на теорията на игрите е свързано с голям обем пресмятания.

Да разгледаме и обратния въпрос: как на една двойка двойнствени задачи на линейното оптимиране може да се съпостави матрична игра, от чието решение лесно се пресмята решението на двойката двойнствени задачи (разбира се, ако то съществува) или се установява неразрешимостта им. Ще отбележим още веднъж, че докато всяка матрична игра има решение, не всяка задача на линейното оптимиране е разрешима.

Нека е дадена следната двойка двойнствени задачи:

Задача A: *Да се определи вектор* $X=(x_1,\dots, x_n)$, *максимизиращ линейната функция*

$$L(X)=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

при условията

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ji} x_j \leqq b_i,\ i=1,\dots,m,$$

$$x_j \geqq 0,\ j=1,\dots,n.$$

Задача B: *Да се определи вектор* $Y=(y_1,\dots,y_m)$, *минимизиращ линейната функция*

$$G(Y)=\sum_{i=1}^{m} b_i y_i$$

при условията

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ji} y_i \geqq c_j,\ j=1,\dots,n,$$

$$y_i \geqq 0,\ i=1,\dots,m.$$

Чрез матрицата $A=\|a_{ij}\|_{n\times m}$ и векторите $X=(x_1,\dots, x_n)$, $Y=(y_1,\dots,y_m)$, $C=(c_1,\dots,c_n)$, $B=b_1,\dots,b_m)$ да построим матрицата $\bar{A}$ по следния начин:

$$\bar{A}=\begin{pmatrix} O_n & -A & C^{\mathrm{T}} \\ A^{\mathrm{T}} & O_m & -B^{\mathrm{T}} \\ -C & B & 0 \end{pmatrix},$$

където

O_n е квадратна матрица с нулеви елементи от n-ти ред;

O_m — квадратна матрица с нулеви елементи от m-ти ред;

0 — числото нула;

T — знак за транспониране.

Разглеждаме играта с платежна матрица $\bar{A}$. Тъй като матрицата $\bar{A}$ е кососиметрична, съответната ѝ игра е симетрична. Ще я означаваме с $C(\bar{A})$. Според теорема 2.10 цената на играта $C(\bar{A})$ е нула и двамата играчи в нея имат еднакви оптимални смесени стратегии.

Следващата теорема дава необходими и достатъчни условия за съществуване решение на двойката задачи A и B.

Теорема 3.2. *Двойката задачи* A *и* B *имат решения тогава и само тогава, когато симетричната игра* $C(\bar{A})$ *има такава оптимална стратегия* $Z^0=(z_1^0,\dots,z_{n+m+1}^0)$, *за която* $z_{n+m+1}^0>0$. *При това векторите* $X^0=(x_1^0,\dots,x_n^0)$ *и* $Y^0=(y_1^0,\dots,y_m^0)$, *чиито компоненти удовлетворяват условията*

$$x_i^0=\frac{z_i^0}{z_{n+m+1}^0},\quad i=1,\dots,n,$$

$$y_j^0=\frac{z_{n+j}^0}{z_{n+m+1}^0},\quad j=1,\dots,m, \tag{3.28}$$

са оптимални планове съответно на задачи A *и* B.

Доказателство. Необходимост: Нека двойката задачи A и B е разрешима и векторите $X^0=(x_1^0,\dots, x_n^0)$, $Y^0=(y_1^0,\dots,y_m^0)$ са съответно техни оптимални планове. Ще покажем, че симетричната игра $C(\bar{A})$ има оптимална стратегия Z^0, в която $z_{n+m+1}>0$.

Построяваме вектор $Z^0=\left(\frac{X^0}{\lambda}, \frac{Y^0}{\lambda}, \frac{1}{\lambda}\right)$, където $\lambda=1+\sum_{i=1}^{n} x_i^0+\sum_{j=1}^{m} y_j^0$. Тъй като $x_i^0\geqq 0$, $i=1,\dots,n$ и $y_j^0\geqq 0$, $j=1,\dots,m$, числото $\lambda>0$, тогава векторът $Z^0\geqq O$. Освен това

$$\sum_{j=1}^{n+m+1} z_j^0=\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^0}{\lambda}+\sum_{j=1}^{m}\frac{y_j^0}{\lambda}+\frac{1}{\lambda}=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^0+\sum_{j=1}^{m}y_j^0+1}{\lambda}=1.$$

Следователно Z^0 е смесена стратегия на играта $C(\bar{A})$. С $\mathscr{P}(Z, Z)$ да означим платежната функция на играта $C(\bar{A})$. Ще докажем, че за произволна чиста стратегия $\bar{Z}^j$, $j=1,\ldots,n+m+1$ е изпълнено неравенството

$$(3.29)\qquad \mathscr{P}(Z^0, \bar{Z}^j)=\sum_{i=1}^{n+m+1}\bar{a}_{ij}\, z_i^0\geqq 0,\ j=1,\ldots,n+m+1.$$

Действително векторът

$$Z^0 . \bar{A}=\left(\frac{X^0}{\lambda}, \frac{Y^0}{\lambda}, \frac{1}{\lambda}\right)\begin{pmatrix} O_n & -A & C^{\tau} \\ A^{\tau} & O_m & -B^{\tau} \\ -C & B & 0 \end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{\lambda}\left(Y^0A^{\tau}-C,\ -X^0A+B,\ X^0C^{\tau}-Y^0B^{\tau}\right)$$

е с неотрицателни компоненти, тъй като:

1. Y^0 е план на задача В, следователно удовлетворява нейните условия, т. е.

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ji}\, y_i^0\geqq c_j,\ j=1,\ldots, n$$

или в матричен вид $Y^0A^{\tau}\geqq C$, следователно $Y^0A^{\tau}-C\geqq O$.

2. Аналогично от условието на задачата А следва, че

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ji}\, x_j^0\leqq b_i,\ i=1,\ldots, m,$$

следователно $B-X^0A\geqq O$.

3. Щом X^0 и Y^0 са оптимални планове съответно на задачи А и В, то, както вече отбелязахме, стойностите на целевите функции за тези планове са равни т. е.

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j^0=\sum_{i=1}^{m} b_i\, y_i^0$$

или

$$X^0C^{\tau}=Y^0B^{\tau},\ \text{т. е.}\ X^0C^{\tau}-Y^0B^{\tau}=0.$$

С това условие (3.29) е доказано. Тогава от теорема 2.5 следва, че векторът Z^0 е оптимална смесена стратегия за играта $C(\bar{A})$, при това компонентата му $Z_{n+m+1}^0=\frac{1}{\lambda}>0$.

Достатъчност: Нека векторът $Z^0=(z_1^0,\ldots,z_{n+m}^0, \mu)$ е оптимална смесена стратегия за играта $C(\bar{A})$ и $\mu>0$. Ще покажем, че двойката двойнствени задачи А и В е разрешима.

Построяваме вектори $X^0=(x_1^0,\ldots,x_n^0)$ и $Y^0=(y_1^0,\ldots,y_m^0)$ с компоненти, удовлетворяващи условия (3.28) от теоремата, т. е.

$$0\leqq x_i^0=\frac{z_i^0}{\mu},\ i=1,\ldots,n,$$

$$0\leqq y_j^0=\frac{z_{n+j}^0}{\mu},\ j=1,\ldots,m.$$

Тогава $Z^0=(\mu X_1^0, \mu Y^0, \mu)$. Векторите X^0 и Y^0 са оптимални планове на задачи А и В. Действително от оптималността на стратегията Z^0 за играта $C(\bar{A})$ следва, че $Z^0\bar{A}\geqq O$ или

$$\mu\left(Y^0A^{\tau}-C,\ -X^0A+B,\ X^0C^{\tau}-Y^0B^{\tau}\right)\geqq O,\ \mu>0.$$

Следователно $Y^0A^{\tau}\geqq C$, $X^0A\leqq B$ и

$$(3.30)\qquad X^0C^{\tau}-Y^0B^{\tau}\geqq 0.$$

От $Y^0A^{\tau}\geqq C$ и $XY^0\geqq O$ заключаваме, че Y^0 е план на задача В Аналогично от $X^0A\leqq B$ и $X^0\geqq O$ заключаваме, че X^0 е план на задача A, а от теорема 2.2 следва, че щом $\mu>0$, смесената стратегия Z^0 ще удовлетворява (3.30) като равенство. Следователно $X^0C^{\tau}=Y^0B^{\tau}$, откъдето по първа основна теорема на двойнствеността в линейното оптимиране следва, че векторите X^0 и Y^0 са оптимални планове съответно на задачите А и В. С това теоремата е доказана.

За упражнение: Ако във всяка оптимална смесена стратегия Z^0 на играта $C(\bar{A})$ компонентата $z_{n+m+1}^0=0$, двойката задачи А и В е неразрешима.

Решаването на една матрична игра $\Gamma(A)$ с методите на линейното оптимиране може да стане по следната окрупнена схема:

1. Проверява се дали играта има седлова точка:
   ако „ДА“ — задачата е решена. Към т. 9;
   ако „НЕ“ — към т. 2.
2. Проверява се дали всички елементи на платежната матрица A са неотрицателни числа:

ако ДА — към т. 5;

ако НЕ — към т. 3.

3. Определя се най-големият по абсолютна стойност отрицателен елемент на матрицата A, т. е. определя се числото a, за което $a = \max\limits_{a_{ij}<0} |a_{ij}|$. Към т. 4.

4. Матрицата A се преобразува в матрица A_1 с неотрицателни елементи по формулата $A_1 = A + a$. Към т. 5.

5. Решава се едната от двойката двойнствени задачи (3.24) — (3.25), (3.26) — (3.27) по симплекс-метода.

В случай че разликата $n-m$ не е много голяма по абсолютна стойност, по-удобно е да се решава задачата (3.26) — (3.27), тъй като след привеждане на условията ѝ към равенства е налице начален базис и не е необходимо да се въвежда изкуствен базис. Но когато n е много по-голямо число от $m\,(n \gg m)$, тогава е по-целесъобразно да се решава задача (3.24) — (3.25), понеже обемът на информацията, която се обработва в този случай, е значително по-малък от този, ако се решава другата задача.

Нека е налице първият случай. Решава се задача (3.26) — (3.27), т. е. задачата

$$\max\left\{\bar{G}(\bar{y}_1,\ldots,\bar{y}_m) = \sum_{i=1}^{m} \bar{y}_i\right\}$$

$$\sum_{j=1}^{m} a_{ij}\bar{y}_j \leqq 1, \; i=1,\ldots,n.$$

$$\bar{y}_j \geqq 0, \; j=1,\ldots,m.$$

Получен е оптимален план $\bar{Y}^0 = (\bar{y}_1^0,\ldots,\bar{y}_m^0)$ и максимална стойност на целевата функция $\bar{G}_{\max} = \bar{G}(\bar{Y}^0)$. Към т. 6.

6. От последната симплекс-таблица, получена в табл. 5, се определя оптималният план X^0 на задача (3.24) — (3.25) чрез оценките $-\Delta_j$, съответствуващи на допълнителните променливи в решената задача. Към т. 7.

7. Определят се оптималните смесени стратегии $X^0 = (x_1^0,\ldots,x_n^0)$ и $Y^0 = (y_1^0,\ldots,y_m^0)$ съответно на първия и втория играч на играта $\Gamma(A_1)$ и цената ѝ v_1 по формулите

$$x_i^0 = v_1\bar{x}_i^0, \; i=1,\ldots,n,$$
$$y_j^0 = v_1\bar{y}_j^0, \; j=1,\ldots,m,$$

$$v_1 = \frac{1}{\sum\limits_{i=1}^{n} \bar{x}_i^0} = \frac{1}{\sum\limits_{j=1}^{m} \bar{y}_j^0}.$$

Към т. 8.

8. Определя се цената на изходната игра $\Gamma(A)$ по формулата $v = v_1 - a$.
Към т. 9.

9. Край.

Пример 3.6. По изложената схема да се определи решението на матричната игра $\Gamma(A)$ с платежна матрица

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}.$$

1. Играта $\Gamma(A)$ няма седлова точка.
2. Матрицата A има отрицателни елементи.
3. Определяме числото a:

$$a = \max\{|-3|, |-2|\} = 3.$$

4. Получаваме матрицата A_1 по формулата

$$A_1 = A + 3 = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 0 & 4 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}.$$

5. По симплекс-метода решаваме съответната на играта $\Gamma(A_1)$ задача (3.26) — (3.27), т. е. решаваме задачата

$$\max\{\bar{G}(\bar{y}_1,\bar{y}_2) = \bar{y}_1 + \bar{y}_2\}$$
$$5\bar{y}_1 + 3\bar{y}_2 \leqq 1$$
$$4\bar{y}_2 \leqq 1$$
$$7\bar{y}_1 + \bar{y}_2 \leqq 1$$
$$\bar{y}_1 \geqq 0, \; \bar{y}_2 \geqq 0.$$

Получаваме оптимален план $\bar{Y}^0 = \left(\frac{1}{20}, \frac{1}{4}\right)$ и стойност на функцията $\bar{G}(\bar{Y}^0) = \frac{3}{12}$.

6. Оптималният план на дуалната ѝ задача е

$$\bar{X}_0 = \left(\frac{1}{5}, \frac{1}{10}, 0\right).$$

7. Определяме от формулите в т. 7 на схемата решенията на играта:

а) $\sum_{i=1}^{3}\bar{x}_i^0=\frac{1}{5}+\frac{1}{10}+0=\frac{3}{10}$, $\sum_{j=1}^{2}\bar{y}_j^0=\frac{1}{20}+\frac{1}{4}=\frac{3}{10}$

$$v_1=\frac{1}{\sum_{i=1}^{3}\bar{x}_i^0}=\frac{1}{\sum_{j=1}^{2}\bar{y}_j^0}=\frac{10}{3}=3{,}333;$$

б) $X^0=(x_1^0,\ x_2^0,\ x_3^0)$

$$x_1^0=v_1\bar{x}_1^0=\frac{2}{3},\qquad x_2^0=v_1\bar{x}_2^0=\frac{1}{3},\qquad x_3^0=v_1\bar{x}_3^0=0$$

$$X^0=\left(\frac{2}{3},\ \frac{1}{3},\ 0\right);$$

в) $Y^0=(y_1^0,\ y_2^0)$

$$y_1^0=v_1\bar{y}_1^0=\frac{1}{6},\qquad y_2^0=v_1\bar{y}_2^0=\frac{5}{6}$$

$$Y^0=\left(\frac{1}{6},\ \frac{5}{6}\right).$$

8. Цената v на изходната игра $\Gamma(A)$ е $v=v_1-3=\frac{1}{3}$.

Или решението на изходната матрична игра $\Gamma(A)$ е:

оптимална стратегия на първия играч $X^0=\left(\frac{2}{3},\ \frac{1}{3},\ 0\right)$;

оптималната стратегия на втория играч $Y^0=\left(\frac{1}{6},\ \frac{5}{6}\right)$;

цена на играта $v=\frac{1}{3}$.

3.2. ИТЕРАТИВНИ МЕТОДИ

В тази точка ще бъдат разгледани някои методи, предназначени за приближено решаване на матрични игри. При тези методи се построява редица от партии, стойностите от платежните функции за които клонят към цената на играта. По такъв начин с отнапред зададена точност може да се определят цената на играта и съответните стратегии, при които тази стойност на платежната функция се получава.

Итеративните методи, макар и да са бавно сходящи, са удобни за решаване на матрични игри с големи размери, тъй като са сравнително прости. Те са удобни и затова, че лесно могат да

бъдат реализирани на АСМ (автоматична сметачна машина), което още повече улеснява решаването им с отнапред зададена точност.

I. Метод на Браун

Методът на Браун е най-простият итеративен метод за решаване на матрични игри, известен още в литературата като метод на фиктивното разиграване. Неговата най-обща схема е следната: предполага се, че играта се играе многократно. Започвайки от произволна начална чиста стратегия, в следващата партия всеки от играчите определя своя чиста стратегия въз основа на това, с каква честота другият играч е избирал до дадения момент своите чисти стратегии. С други думи, всеки от играчите, следейки чистите стратегии, използувани от другия, се стреми да му отговори по най-добрия за себе си начин.

Да опишем метода по-подробно. Нека е дадена матричната игра $\Gamma(A)$ с платежна матрица

$$A=\begin{pmatrix} a_{11}a_{12}\ldots a_{1m}\\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\ a_{n1}a_{n2}\ldots a_{nm}\end{pmatrix}.$$

Ще предполагаме, че двамата играчи играят последователно, като пръв играе вторият играч. В първото разиграване на играта вторият играч избира произволна своя чиста стратегия — например j_1-вата, т. е. стратегията $Y^{j_1}=(0,\ldots,\ 0,\ 1,\ 0,\ldots,\ 0)$ (единицата на j_1-то място). Първият играч, знаейки избора на втория, играе с тази от своите чисти стратегии, която е най-добра срещу стратегията $\overline{Y}^{j_1}$, т. е. играе със стратегията X^{i_1}, за която

$$\mathscr{P}(X^{i_1},\overline{Y}^{j_1})=\max_{1\leq i\leq n}\mathscr{P}(\overline{X}^{i},\overline{Y}^{j_1})=\max_{1\leq i\leq n}a_{ij_1}=a_{i_1j_1}=v_{\mathrm{I}}\ (1).$$

В следващата партия вторият играч избира най-добрата си чиста стратегия срещу X^{i_1}, т. е. чистата си стратегия $\overline{Y}^{j_2}$, при която резултатът от играта за първия играч ще бъде най-малък. Следователно вторият играч ще определи стратегията си $\overline{Y}^{j_2}$, изхождайки от условието

$$\mathscr{P}(X^{i_1},\overline{Y}^{j_2})=\min_{1\leq j\leq m}\mathscr{P}(\overline{X}^{i_1},\overline{Y}^{j})=\min_{1\leq j\leq m}a_{i_1j}=a_{i_1j_2}=v_{\mathrm{II}}\ (2).$$

Отново играе първият играч. Избирайки своята нова чиста стратегия, той знае, че вторият играч е избрал (до този момент) стратегиите си $\overline{Y}^{j_1}$ и $\overline{Y}^{j_2}$, затова предполага, че вторият играч се придържа към смесената си стратегия $Y^{(2)}=\left(0,\ldots,\ 0,\ \frac{1}{2},\ 0,\ldots,\right.$

$0, \frac{1}{2}, 0, \ldots, 0\Big)$, в която чистите стратегии $\overline{Y}^{j_1}$ и $\overline{Y}^{j_2}$ влизат с вероятност 1/2. Тъй като при това предположение възможните резултати за първия играч са

$$\mathscr{P}(\overline{X}^i, Y^{(2)}) = \frac{a_{ij_1} + a_{ij_2}}{2}, \quad i = 1, \ldots, n,$$

то той ще избере тази своя чиста стратегия, за която това частно е най-голямо, т. е. ще избере стратегията $\overline{X}^{i_2}$, за която

$$\mathscr{P}(\overline{X}^{i_2}, Y^{(2)}) = \max_{1 \leq i \leq n} \mathscr{P}(\overline{X}^i, Y^{(2)}) = \frac{1}{2} \max_{1 \leq i \leq n} (a_{ij_1} + a_{ij_2}) = v_{\text{I}}(2).$$

Сега вече вторият играч предполага, че първият се придържа към смесената си стратегия $X^{(2)} = \Big(0, \ldots, 0, \frac{1}{2}, 0, \ldots, 0, \frac{1}{2}, 0, \ldots, 0\Big)$ (1/2 на i_1-во и i_2-ро място) и в следващата партия избира чистата си стратегия Y^{j_3}, за която

$$\mathscr{P}(X^{(2)}, \overline{Y}^{j_3}) = \min_{1 \leq j \leq m} \mathscr{P}(X^{(2)} Y^j) = \frac{1}{2} \min_{1 \leq j \leq m} (a_{i_1 j} + a_{i_2 j}) = v_{\text{II}}(3).$$

По-нататък първият играч, изхождайки от аналогични съображения, избира поредната си чиста стратегия, след него вторият играч и т. н. По такъв начин разиграването на играта може да продължи колкото искаме дълго.

Ясно е вече, че след всяка партия на това последователно разиграване всеки от играчите пресмята честотата, с която другият е избрал чистите си стратегии, предполага, че той (другият) играе със смесена стратегия, определена от тези честоти, и избира такава своя чиста стратегия, която му гарантира най-добър резултат.

Да предположим, че са изиграни k партии, в които първият играч е избрал i-тата си чиста стратегия $N_i(k)$ пъти $(i = 1, \ldots, n)$, а вторият играч — j-тата си чиста стратегия $M_j(k)$ пъти $(j = 1, \ldots, m)$. Тогава в $(k+1)$-ата партия вторият играч предполага, че първият се придържа към смесената си стратегия

$$X^{(k)} = \left(\frac{N_1(k)}{k}, \frac{N_2(k)}{k}, \ldots, \frac{N_n(k)}{k}\right)$$

и избира най-добрата си чиста стратегия срещу $X^{(k)}$, т. е. избира стратегията $\overline{Y}^{j_{k+1}}$, за която

$$\mathscr{P}(X^{(k)}, \overline{Y}^{j_{k+1}}) = \frac{1}{k} \min_{1 \leq j \leq m} \sum_{i=1}^{n} a_{ij} N_i(k) = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{n} a_{ij_{k+1}} N_i(k) = v_{\text{II}}(k+1).$$

Аналогично първият играч предполага, че вторият се придържа към смесената си стратегия

$$Y^{(k+1)} = \left(\frac{M_1(k+1)}{k+1}, \frac{M_2(k+1)}{k+1}, \ldots, \frac{M_m(k+1)}{k+1}\right),$$

затова избира чистата си стратегия $X^{i_{k+1}}$, за която

$$\mathscr{P}(\overline{X}^{i_{k+1}}, Y^{(k+1)}) = \frac{1}{k+1} \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^{m} a_{ij} M_j(k+1) = \frac{1}{k+1} \sum_{j=1}^{m} a_{i_{k+1} j} M_j(k+1) =$$

$$= v_{\text{I}}(k+1).$$

От теорема 2.5 следва, че $v_{\text{II}}(k) \leq v \leq v_{\text{I}}(k)$, където v е цената на играта.

По такъв начин се получават две редици от стратегии $\{X^{(k)}\}_1^\infty$, $\{Y^{(k)}\}_1^\infty$, съответно за първия и втория играч, и две редици $\{v_{\text{I}}(k)\}_1^\infty$, $\{v_{\text{II}}(k)\}_1^\infty$ от стойности за резултата на първия играч. Естествен е въпросът: сходящи ли са вторите две редици към цената на играта. Отговорът на този въпрос се съдържа в доказаната от Дж. Робинсон теорема [13], според която

$$\lim_{k \to \infty} v_{\text{I}}(k) = \lim_{k \to \infty} v_{\text{II}}(k) = v_0.$$

Няма да привеждаме доказателството на теоремата, само ще отбележим, че итерационният процес, определен от метода на Браун, е бавно сходящ.

Ще изложим един алгоритъм на метода, използувайки следните означения:

k — номер на партия;

$v_{\text{I}}(k)$ — максимален резултат, който първият играч си осигурява в k-тата партия;

$v_{\text{II}}(k)$ — минимален резултат за първия играч, който вторият играч допуща в k-тата партия;

$N^{(k)} = (N_1^{(k)}, \ldots, N_n^{(k)})$ — вектор, всяка компонента $N_i^{(k)}$ на който показва колко пъти чистата стратегия $\overline{X}^i$ е била избрана от първия играч до k-тата партия включително;

$M^{(k)} = (M_1^{(k)}, \ldots, M_m^{(k)})$ — аналогичен вектор за втория играч;

$S^{(k)} = (S_1^{(k)}, \ldots, S_n^{(k)})$ — вектор, интерпретиращ стълб, който е равен на сумата от всички стълбове на платежната матрица A, които съответствуват на избраните от втория играч стратегии до k-тата партия включително;

$r^{(k)} = (r_1^{(k)}, \ldots, r_m^{(k)})$ — аналогичен вектор, интерпретиращ ред, който е равен на сумата от всички избрани от първия играч редове.

Алгоритъм:

1. Първа партия ($k=1$). Вторият играч избира произволна чиста стратегия $\overline{Y}^{j_1}$, т. е. произволен стълб j_1. Тогава

$$S^{(1)}=(a_{1j_1},\ a_{2j_1},\dots,\ a_{nj_1});$$

$$M_j^{(1)}=\begin{cases}0 \text{ за } j\neq j_1,\ j=1,\dots,\ m,\\ 1 \text{ за } j=j_1).\end{cases}$$

Първият играч избира ред i_1, за който

$$v_{\mathrm{I}}(1)=S_{i_1}^{(1)}=\max_{1\leq i\leq n} S_i^{(1)}.$$

Тогава

$$r^{(1)}=(a_{i_11},\ a_{i_12},\dots,\ a_{i_1m});$$

$$N_i^{(1)}=\begin{cases}0 \text{ за } i\neq i_1,\ i=1,\dots,\ n,\\ 1 \text{ за } i=i_1.\end{cases}$$

2. Втора итерация ($k=2$). Вторият играч избира стълб j_2 от условието

$$v_{\mathrm{II}}(2)=r_{j_2}^{(1)}=\min_{1\leq j\leq m} r_j^{(1)}.$$

Тогава

$$S_i^{(2)}=S_i^{(1)}+a_{ij_2},\ i=1,\dots,\ n:$$

$$M_j^{(2)}=\begin{cases}M_j^{(1)} \text{ за } j\neq j_2,\ j=1,\dots,\ m,\\ M_j^{(1)}+1 \text{ за } j=j_2.\end{cases}$$

Първият играч избира ред i_2, за който

$$v_{\mathrm{I}}(2)=S_{i_2}^{(2)}=\max_{1\leq i\leq n} S_{i_2}^{(2)}.$$

Тогава

$$r_j^{(2)}=r_j^{(1)}+a_{i_2j},\ j=1,\dots,\ m;$$

$$N_i^{(2)}=\begin{cases}N_i^{(1)} \text{ за } i\neq i_2,\ i=1,\dots,\ n;\\ N_i^{(1)}+1 \text{ за } i=i_2.\end{cases}$$

3. k-та партия

а) вторият играч избира стълб j_k:

$$v_{\mathrm{II}}(k)=r_{j_k}^{(k-1)}=\min_{1\leq j\leq m} r_j^{(k-1)},$$

$$S_i^{(k)}=S_i^{(k-1)}+a_{ij_k},\ i=1,\dots,\ n,$$

$$M_j^{(k)}=\begin{cases}M_j^{(k-1)} \text{ за } j\neq j_k,\ j=1,\dots,\ m,\\ M_j^{(k-1)}+1 \text{ за } j=j_k.\end{cases}$$

б) първият играч избира ред i_k:

$$v_{\mathrm{I}}(k)=S_{i_k}^{(k)}=\max_{1\leq i\leq n} S_i^{(k)},$$

$$r_j^{(k)}=r^{(k-1)}+a_{i_kj},\ j=1,\dots,\ m,$$

$$N_i^{(k)}=\begin{cases}N_i^{(k-1)} \text{ за } i\neq i_k,\ i=1,\dots,\ n,\\ N_i^{(k-1)}+1 \text{ за } i=i_k.\end{cases}$$

в) проверка за край.

Ако е изпълнено $\frac{v_{\mathrm{I}}(k)-v_{\mathrm{II}}(k)}{k}\leq\varepsilon$, цената на партията е получена с предварително зададената точност ε. Към т. 4 от алгоритъма. Ако горното условие не е изпълнено, преминава се към следващата партия.

4. Определяне приближеното решение

$$X^0=\left(\frac{N_1^{(k)}}{k},\ \frac{N_2^{(k)}}{k},\dots,\ \frac{N_n^{(k)}}{k}\right),$$

$$Y^0=\left(\frac{M_1^{(k)}}{k},\ \frac{M_2^{(k)}}{k},\dots,\ \frac{M_m^{(k)}}{k}\right),$$

$$v=\frac{v_{\mathrm{I}}(k)+v_{\mathrm{II}}(k)}{2k}.$$

Забележка. По-нататък сме възприели следното правило: Ако максимумът в $\max\limits_i S_i^{(k)}$ и (или) минимумът в $\min\limits_j r_j^{(k)}$ се достига за повече от един индекс, работи се с първия от тях.

Пример 3.7. Да се определи по метода на Браун решение за матричната игра с платежна матрица

$$A=\begin{pmatrix}2 & 0\\ -3 & 1\\ 4 & -2\end{pmatrix}$$

с точност $\varepsilon=0{,}2$.

За удобство резултатите от пресмятанията по приведения алгоритъм са нанесени в следната таблица (стр. 106).

Ще изясним подробно попълването на първите два реда от таблицата. Пръв играе вторият играч с първата си чиста стратегия, т. е. с първия стълб. Тогава числата 1 и 0 записваме в първия ред на таблицата съответно в колони $M_1^{(k)}$ и $M_2^{(k)}$, а числата от избрания стълб 2, -3, 4 — съответно в колони $S_1^{(k)}$, $S_2^{(k)}$, $S_3^{(k)}$. Най-голямото от тези числа е 4. Ограждаме го в квадрат. Записваме частното $\frac{4}{k}=\frac{4}{1}=4$ в колона $\frac{v_{\mathrm{I}}(k)}{k}$. Щом максималното число е 4, първият играч ще играе с третия си ред. Тогава числата 0, 0, 1 записваме в колони $N_1^{(k)}$, $N_2^{(k)}$, $N_3^{(k)}$, а числата от третия

k	$r_1^{(k)}$	$r_2^{(k)}$	$\frac{v_{II}(k)}{k}$	$N_1^{(k)}$	$N_2^{(k)}$	$N_3^{(k)}$	$S_1^{(k)}$	$S_2^{(k)}$	$S_3^{(k)}$	$\frac{v_I(k)}{k}$	$M_1^{(k)}$	$M_2^{(k)}$	$\frac{v_I^{(k)}}{k}-\frac{v_{II}^{(k)}}{k}$
1	4	$\boxed{-2}$	−2	0	0	1	2	−3	$\boxed{4}$	4	1	0	6
2	6	$\boxed{-2}$	−1	1	0	1	$\boxed{2}$	−2	2	1	1	1	2
3	8	$\boxed{-2}$	−0,667	2	0	1	$\boxed{2}$	−1	0	0,667	1	2	1,334
4	10	$\boxed{-2}$	−0,5	3	0	1	$\boxed{2}$	0	−2	0,5	1	3	1
5	12	$\boxed{-2}$	−0,4	4	0	1	$\boxed{2}$	1	−4	0,4	1	4	0,8
6	9	$\boxed{-1}$	−0,167	4	1	1	2	$\boxed{2}$	−6	0,333	1	5	0,5
7	6	$\boxed{0}$	0	4	2	1	2	$\boxed{3}$	−8	0,428	1	6	0,428
8	3	$\boxed{1}$	0,125	4	3	1	2	$\boxed{4}$	−10	0,5	1	7	0,375
9	$\boxed{0}$	2	0	4	4	1	2	$\boxed{5}$	−12	0,556	1	8	0,556
10	$\boxed{2}$	2	0,2	5	4	1	$\boxed{4}$	2	−8	0,4	2	8	0,2

ред: 4, —2— съответно в колони $r_1^{(k)}$, $r_2^{(k)}$. Минималното от тези числа е —2. Ограждаме го в квадрат и записваме частното $\frac{-2}{k}=\frac{-2}{1}=-2$ в колона $v_{II}(k)/k$, а разликата $\frac{v_I(k)}{k}-\frac{v_{II}(k)}{k}=6$ в последната колона. Тъй като числото —2 е минимално в реда си, вторият играч избира втория стълб. Прибавяме единица в колона $M_2^{(k)}$ и числата от втория стълб към числата съответно от колони $S_1^{(k)}$, $S_2^{(k)}$, $S_3^{(k)}$. От получените числа 2, —2, 2 максимални са две. Според направената уговорка за максимално ще считаме първото от тях. Тогава прибавяме единица към колона $N_1^{(k)}$, а частното $\frac{2}{k}=\frac{2}{2}=1$ записваме в колона $\frac{v_I(k)}{k}$. Числата от първия ред прибавяме към числата от колони $r_1^{(k)}$, $r_2^{(k)}$. Минималното от получените числа е —2. Прибавяме единица към колона $M_2^{(k)}$, частното $\frac{-2}{k}=\frac{-2}{2}=-1$ записваме в колона $v_{II}(k)/k$, а разликата на числата 1 и —1 — в последната колона.

След всяка партия следим (в последната колона на таблицата) дали сме получили цената със зададената точност $\varepsilon=0,2$. В този пример точността се достига след 10 партии. Полученото приближено решение е

$$\widetilde{X}^0=\left(\frac{5}{10},\ \frac{4}{10},\ \frac{1}{10}\right),\quad \widetilde{Y}^0=\left(\frac{2}{10},\ \frac{8}{10}\right),\quad \widetilde{v}=0,3.$$

От т. 3.1 се вижда, че точното решение на тази игра е

$$X^0=\left(\frac{2}{3},\ \frac{1}{3},\ 0\right),\quad Y^0=\left(\frac{1}{6},\ \frac{5}{6}\right),\quad v=\frac{1}{3}.$$

II. Метод на Джон фон Нойман

Нека е дадена матричната игра $\Gamma(A)$. Искаме да определим едно нейно решение. Знаем, че векторите $X=(x_1,\dots,x_n)$, $Y=(y_1,\dots,y_m)$ и числото v са решение на играта, ако удовлетворяват условията

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij}x_i\geqq v,\ j=1,\dots,m;$$

$$\sum_{j=1}^{m} a_{ij}y_j\leqq v,\ i=1,\dots,n;$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1,\ x_i \geqq 0,\ i=1,\dots,n; \tag{3.31}$$

$$\sum_{j=1}^{m} y_j = 1,\ y_j \geqq 0,\ j=1,\dots,m. \tag{3.32}$$

Да въведем означенията

$$P_i = \sum_{j=1}^{m} a_{ij} y_j - v,\ i=1,\dots,n;$$

$$Q_j = v - \sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i,\ j=1,\dots,m;$$

$$p_i = \max\{0,\ P_i\},\ i=1,\dots,n;$$
$$q_j = \max\{0,\ Q_j\},\ j=1,\dots,m$$

и да разгледаме следната задача на квадратичното оптимиране. Търсят се вектори $p=(p_1,\dots,p_n)$ и $q=(q_1,\dots,q_m)$, които да минимизират квадратичната функция

$$\varphi(p,\ q) = \sum_{i=1}^{n} p_i^2 + \sum_{j=1}^{m} q_j^2$$

при условия (3.31) — (3.32).

Стойността на функцията $\varphi(p,\ q)$ оценява близостта на разглежданите вектори X, Y и числото v до решението на играта, т. е. функцията $\varphi(p,\ q)$ ни дава един критерий за отклоняване от решението и следователно свеждането й до нула е равносилно на решаването на играта.

Тази задача може да се реши и с общите методи на квадратичното оптимиране, но предлаганият метод на Джон фон Нойман е по-удобен, тъй като отчита спецификата на задачата. Този метод се състои от последователни итерации, на всяка от които се избира двойка вектори $(X,\ Y)$ и число v такива, че стойността на $\varphi(p,\ q)$ да клони към нула. С други думи, методът е една итерационна процедура за минимизиране на критерия за отклонение $\varphi(v,\ q)$.

При този метод преминаването от k-тата итерация към $(k+1)$-вата става по следните формули:

$$\begin{aligned} X^{(k+1)} &= (1-\alpha^{(k)})X^{(k)} + \alpha^{(k)}\overline{X}^{(k)}; \\ Y^{(k+1)} &= (1-\alpha^{(k)})Y^{(k)} + \alpha^{(k)}\overline{Y}^{(k)}; \\ v^{(k+1)} &= (1-\alpha^{(k)})v^{(k)} + \alpha^{(k)}\overline{v}^{(k)}, \end{aligned} \tag{3.33}$$

където компонентите на векторите $\overline{X}^{(k)}$, $\overline{Y}^{(k)}$ и числото $\overline{v}^{(k)}$ се получават така:

$$\bar{x}_i^{(k)} = \frac{p_i^{(k)}}{\sum_{i=1}^{n} p_i^{(k)}},\ i=1,\dots,n;\ \bar{y}_j^{(k)} = \frac{q_j^{(k)}}{\sum_{j=1}^{m} q_j^{(k)}},\ j=1,\dots,m;$$

$$\overline{v}^{(k)} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_{ij}\, \bar{x}_i^{(k)} \bar{y}_j^{(k)}.$$

Ако $\sum_{i=1}^{n} p_i^{(k)} = 0$ $\left(\text{или } \sum_{j=1}^{m} q_j^{(k)} = 0\right)$, за вектор $\overline{X}^{(k)}$ (или $Y^{(k)}$) може да се избере произволен вектор, удовлетворяващ (3.31) (или (3.32)). В предложения по-нататък алгоритъм се взема предидещото приближение, т. е. векторът $\overline{X}^{(k-1)}$ (или $\overline{Y}^{(k-1)}$). В случай че е изпълнено $\sum_{i=1}^{n} p_i^{(k)} = \sum_{j=1}^{m} q_j^{(k)} = 0$, това е признак, че решението е достигнато и итерационният процес трябва да се прекрати.

Параметърът $\alpha^{(k)}$ от (3.33) се избира по такъв начин, че функцията $\varphi(p,\ q)$ да намалява монотонно. Следователно $\alpha^{(k)}$ играе ролята на управляващ параметър и неговото пресмятане е съществено за сходимостта на метода. За скоростта на сходимост на този метод може да се докаже следната

Теорема 3.3. *Редицата* $\{\alpha^{(k)}\}$ *може да се избере така, че методът да е сходящ. При това функцията* $\varphi^{(k)}(p,\ q)$ *клони към нула със скорост* $\frac{1}{k}$.

Доказателството на теоремата няма да привеждаме. То може да се намери например в [8].

Една възможност за избор на параметъра $\alpha^{(k)}$ е следната:

$$\alpha^{(k)} = \frac{\varphi^{(k)}(p,\ q)}{\varphi^{(k)}(p,\ q) + S^{(k)}},$$

където

$$S^{(k)}=\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{m}a_{ij}\bar{y}_j^{(k)}-\bar{v}^{(k)}\right)^2+\sum_{j=1}^{m}\left(\bar{v}^{(k)}-\sum a_{ij}\,.\,\bar{x}_i^{(k)}\right)^2.$$

За начални вектори X и Y могат да се избират произволни вектори, удовлетворяващи условия (3.31) и (3.32), но обикновено се избират векторите $X=\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n},\dots,\frac{1}{n}\right)$, $Y=\left(\frac{1}{m},\frac{1}{m},\dots,\frac{1}{m}\right)$. При избора на начална стойност на числото v трябва да се изхожда от съотношението (теорема 2.5)

$$\min_{1\leq j\leq m}\sum_{i=1}^{n}a_{ij}x_i\leq v\leq\max_{1\leq i\leq n}\sum_{j=1}^{m}a_{ij}y_j.$$

В литературата най-често използувани са формулите

$$v=\frac{1}{2}\left(\max_{i,j}\{a_{ij}\}-\min_{i,j}\{a_{ij}\}\right);$$

$$v=\frac{1}{m\,.\,n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}a_{ij}.$$

Ще опишем един алгоритъм на метода на Нойман.

I. Начална итерация. Определят се началните вектори $X^{(0)}=\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n},\dots,\frac{1}{n}\right)$, $Y^{(0)}=\left(\frac{1}{m},\dots,\frac{1}{m}\right)$ числото $v^{(0)}=$

$$=\frac{1}{2}\left(\max_{i,j}\{a_{ij}\}-\min_{i,j}\{a_{ij}\}\right)$$ и векторите $P^{(0)}$ и $Q^{(0)}$ по формулите

$$P_i^{(0)}=\sum_{j=1}^{m}a_{ij}y_j^{(0)}-v^{(0)}=\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}a_{ij}-v^{(0)},\ i=1,\dots,n;$$

$$Q_j^{(0)}=v^{(0)}\sum_{i=1}^{n}a_{ij}x_i^{(0)}=v^{(0)}-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_{ij},\ j=1,\dots,m.$$

Задава се точност ε за край на метода.

II. k-та итерация

1. Пресмятат се неотрицателните вектори $q^{(k)}$, $p^{(k)}$ и функцията $\varphi^{(k)}(p,q)$:

$$p_i^{(k)}=\max\{0,P_i^{(k)}\},\ i=1,\dots,n;$$
$$q_j^{(k)}=\max\{0,Q_j^{(k)}\},\ j=1,\dots,m;$$

$$\varphi_{(p,q)}^{(k)}=\sum_{i=1}^{n}(p_i^{(k)})^2+\sum_{j=1}^{m}(q_j^{(k)})^2.$$

2. Прави се проверка, дали е изпълнено: $\varphi^{(k)}\leq\varepsilon$. Ако ДА — решението е определено. Към т. III на алгоритъма.

Ако НЕ — към т. 3.

3. Пресмятат се числата

$$\bar{p}^{(k)}=\sum_{i=1}^{n}p_i^{(k)},\ \bar{q}^{(k)}=\sum_{j=1}^{m}q_j^{(k)}.$$

Определят се коригиращите вектори $\bar{X}^{(k)}$ и $\bar{Y}^{(k)}$ по следния начин:

а) ако $\bar{p}^{(k)}=0$, полага се $\bar{X}^{(k)}=\bar{X}^{(k-1)}$ и се преминава към б). Ако $\bar{p}^{(k)}\neq 0$, компонентите на $\bar{X}^{(k)}$ се пресмятат по формулата

$$\bar{x}_i^{(k)}=\frac{p_i^{(k)}}{\bar{p}^{(k)}},\ i=1,\dots,n.$$

Към б).

б) ако $\bar{q}^{(k)}=0$, полага се $\bar{Y}^{(k)}=\bar{Y}^{(k-1)}$ и се преминава към т. 5. Ако $\bar{q}^{(k)}\neq 0$, то

$$\bar{y}_j^{(k)}=\frac{q_j^{(k)}}{\bar{q}^{(k)}},\ j=1,\dots,m.$$

Към т. 5.

5. Пресмята се коригиращото число

$$\bar{v}^{(k)}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}a_{ij}\bar{x}_i^{(k)}\bar{y}_j^{(k)}.$$

6. Определят се коригиращите вектори $\bar{P}^{(k)}$, $\bar{Q}^{(k)}$, числото $S^{(k)}$ и параметърът $\alpha^{(k)}$:

$$\bar{P}_i^{(k)}=\sum_{j=1}^{m}a_{ij}\bar{y}_j^{(k)}-\bar{v}^{(k)},\ i=1,\dots,n;$$

$$\overline{Q}_j^{(k)}=\overline{v}^{(k)}-\sum_{i=1}^{n}a_{ij}\overline{x}_i^{(k)},\ j=1,\dots,\ m;$$

$$S^{(k)}=\sum_{i=1}^{n}(\overline{P}_i^{(k)})^2+\sum_{j=1}^{m}(\overline{Q}_j^{(k)})^2;$$

$$\alpha^{(k)}=\varphi^{(k)}/(\varphi^{(k)}+S^{(k)}).$$

7. Пресмята се ново приближение на решението:

$$X^{(k+1)}=(1-\alpha^{(k)})\,X^{(k)}+\alpha^{(k)}\overline{X}^{(k)};$$

$$Y^{(k+1)}=(1-\alpha^{(k)})\,Y^{(k)}+\alpha^{(k)}\overline{Y}^{(k)};$$

$$v^{(k+1)}=(1-\alpha^{(k)})\,v^{(k)}+\alpha^{(k)}\overline{v}^{(k)},$$

и ново приближение на векторите P и Q:

$$P^{(k+1)}=(1-\alpha^{(k)})\,P^{(k)}+\alpha^{(k)}\overline{P}^{(k)};$$

$$Q^{(k+1)}=(1-\alpha^{(k)})\,Q^{(k)}+\alpha^{(k)}\overline{Q}^{(k)}.$$

Преминава се към т. 1.

III. Край.

Пример 3.8. Да се приложи описаният алгоритъм за решаване на матричната игра от пример 3.7.

Платежната матрица на тази игра е

$$A=\begin{pmatrix}2 & 0\\ -3 & 1\\ 4 & -2\end{pmatrix},$$

а точното ѝ решение: $X^0=\left(\frac{2}{3},\ \frac{1}{3},\ 0\right)$, $Y^0=\left(\frac{1}{6},\ \frac{5}{6}\right)$, $v=\frac{1}{3}$.

1. Тъй като $n=3$, а $m=2$, за начално приближение на векторите X^0, Y^0 и числото v приемаме

$$X^{(0)}=\left(\frac{1}{3},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{3}\right),\ Y^{(0)}=\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right),\ v^{(0)}=\frac{4-(-3)}{2}=3{,}5.$$

2. Пресмятаме компонентите на векторите $P^{(0)}$ и $Q^{(0)}$:

$$P_1^{(0)}=\sum_{j=1}^{2}a_{1j}y_j^{(0)}-v^{(0)}=2\,.\,\frac{1}{2}+0\,.\,\frac{1}{2}-\frac{7}{2}=-\frac{5}{2};$$

$$P_2^{(0)}=\sum_{j=1}^{2}a_{2j}y_j^{(0)}-v^{(0)}=-3\,.\,\frac{1}{2}+1\,.\,\frac{1}{2}-\frac{7}{2}=\frac{-9}{2};$$

$$P_3^{(0)}=\sum_{j=1}^{2}a_{3j}\,y_j^0-v^{(0)}=4\,.\,\frac{1}{2}+(-2)\,.\,\frac{1}{2}-\frac{7}{2}=\frac{-5}{2};$$

$$Q_1^{(0)}=v^{(0)}-\sum_{i=1}^{3}a_{i1}x_i^{(0)}=\frac{7}{2}-2\,.\,\frac{1}{3}+3\,\frac{1}{3}-\frac{4}{3}=\frac{5}{2},$$

$$Q_2^{(0)}=v^{(0)}-\sum_{i=1}^{3}a_{i2}\,x_i^{(0)}=\frac{7}{2}-\frac{1}{3}\,.\,0-\frac{1}{3}\,.\,1+\frac{1}{3}\,.\,2=\frac{23}{6}.$$

3. Определяме неотрицателните вектори $p^{(0)}$, $q^{(0)}$ и функцията $\varphi^{(0)}(p,\ q)$:

$$p_1^{(0)}=\max\{0,\ P_1^{(0)}\}=\max\left\{0,\ \frac{-5}{2}\right\}=0;$$

$$p_2^{(0)}=\max\{0,\ P_2^{(0)}\}=\max\left\{0,\ \frac{-9}{2}\right\}=0;$$

$$p_3^{(0)}=\max\{0,\ P_3^{(0)}\}=\max\left\{0,\ \frac{-5}{2}\right\}=0;$$

$$q_1^{(0)}=\max\{0,\ Q_1^{(0)}\}=\max\left\{0,\ \frac{5}{2}\right\}=\frac{5}{2};$$

$$q_2^{(0)}=\max\{0,\ Q_2^{(0)}\}=\max\left\{0,\ \frac{23}{6}\right\}=\frac{23}{6};$$

$$\varphi_{(p,\ q)}^{(0)}=\sum_{i=1}^{3}(p_i^{(0)})^2+\sum_{j=1}^{2}(q_j^{(0)})^2=\frac{754}{36}=20{,}944.$$

4. Проверка за край. Тъй като $\varphi^{(0)}=20{,}944\neq0$, не сме получили решението. Към т. 5.

5. Пресмятаме числата $\overline{p}^{(0)}$ и $\overline{q}^{(0)}$:

$$\overline{p}^{(0)}=\sum_{i=1}^{3}p_i^{(0)}=0;\ \overline{q}^{(0)}=\sum_{j=1}^{2}q_j^{(0)}=\frac{19}{3}.$$

6. Определяме коригиращите вектори $\overline{X}^{(0)}$ и $\overline{Y}^{(0)}$.

Тъй като $\overline{p}^{(0)}=0$, то $\overline{X}^{(0)}=X^{(0)}=\left(\frac{1}{3},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{3}\right)$;

Тъй като $\overline{q}^{(0)}\neq0$, то $\overline{Y}^{(0)}=\left(\frac{q_1^{(0)}}{\overline{q}^{(0)}},\ \frac{q_2^{(0)}}{\overline{q}^{(0)}}\right)=(0{,}395;\ 0{,}605).$

7. Определяме коригиращото число $\overline{v}^{(0)}$:

$$\overline{v}^{(0)}=\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{2}a_{ij}\overline{x}_i^{(0)}\overline{y}_j^{(0)}=\frac{22}{38\,.\,3}=0{,}193.$$

8. Определяме компонентите на коригиращите вектори $\overline{P}^{(0)}$, $\overline{Q}^{(0)}$, числото $S^{(0)}$ и параметъра $\alpha^{(0)}$:

$$\overline{P}_1^{(0)}=\sum_{j=1}^{2}a_{1j}\overline{y}_j^{(0)}-\overline{v}^{(0)}=2\,.\,\frac{15}{38}+0\,.\,\frac{33}{38}-\frac{22}{38\,.\,3}=\frac{68}{38\,.\,3}=0{,}596;$$

$$P_2^{(0)}=-\frac{88}{38\,.\,3}=-0{,}772;$$

$$\overline{P}_3^{(0)}=\frac{20}{38\,.\,3}=0{,}175;$$

$$\overline{Q}_1^{(0)}=\overline{v}^{(0)}-\sum_{i=1}^{2}a_{i1}\,x_i^{(0)}=\frac{22}{38\,.\,3}-\frac{1}{3}\,(2-3+4)=-0{,}807;$$

$$\overline{Q}_2^{(0)}=0{,}526;$$

$$S^{(0)}=\sum_{i=1}^{3}(\overline{P}_i^{(0)})^2+\sum_{j=1}^{2}(\overline{Q}_j^{(0)})^2=1{,}91;$$

$$\alpha^{(0)}=0{,}916.$$

9. Пресмятаме новото (първо) приближение на решението и на векторите P, Q:

$$X^{(1)}=(1-\alpha^{(0)})\,X^{(0)}+\alpha^{(0)}\,\overline{X}^{(0)}=(0{,}333;\ 0{,}333;\ 0{,}333);$$

$$Y^{(1)}=(1-\alpha^{(0)})\,Y^{(0)}+\alpha^{(0)}\overline{Y}^{(0)}=(0{,}404;\ 0{,}596);$$

$$v^{(1)}=(1-\alpha^{(0)})\,v^{(0)}+\alpha^{(0)}\,\overline{v}^{(0)}=0{,}471;$$

$$P^{(1)}=(1-\alpha^{(0)})\,P^{(0)}+\alpha^{(0)}\overline{P}^{(0)}=(0{,}336;\ -1{,}085;\ -0{,}05);$$

$$Q^{(1)}=(1-\alpha^{(0)})\,Q^{(0)}+\alpha^{(0)}\overline{Q}^{(0)}=(-0{,}529;\ 0{,}804).$$

С това една итерация е завършена. За да започнем следващата итерация, трябва да преминем към т. 3. Резултатите от пресмятанията в следващите три итерации са нанесени в таблицата:

Таблица

k	$p_1^{(k)}$	$p_2^{(k)}$	$p_3^{(k)}$	$q_1^{(k)}$	$q_2^{(k)}$	$\varphi^{(k)}_{(p\,.\,q)}$	$\overline{p}^{(k)}$	$\overline{q}^{(k)}$	$\overline{x}_1^{(k)}$	$\overline{x}_2^{(k)}$	$\overline{x}_3^{(k)}$	$\overline{y}_1^{(k)}$	$\overline{y}_2^{(k)}$	$\overline{v}^{(k)}$
1	0,366	0	0	0	0,804	0,759	0,336	0,804	1	0	0	0	1	0
2	0,31	0	0	0	0,741	0,645	0,31	0,741	1	0	0	0	1	0
3	0,289	0	0	0	0,691	0,561	0,289	0,691	1	0	0	0	1	0

$\overline{P}_1^{(k)}$	$\overline{P}_2^{(k)}$	$\overline{P}_3^{(k)}$	$\overline{Q}_1^{(k)}$	$\overline{Q}_2^{(k)}$	$S^{(k)}$	$\alpha^{(k)}$	$x_1^{(k+1)}$	$x_2^{(k+1)}$	$x_3^{(k+1)}$	$y_1^{(k+1)}$	$y_2^{(k+1)}$	$v^{(k+1)}$	$P_1^{(k+1)}$	$P_2^{(k+1)}$	$P_3^{(k+1)}$	$Q_1^{(k+1)}$	$Q_2^{(k+1)}$
0	1	−2	−2	0	9	0,078	0,385	0,307	0,307	0,372	0,628	0,434	0,310	−0,922	−0,202	−0,612	0,741
0	1	−2	−2	0	9	0,067	0,426	0,286	0,286	0,347	0,653	0,405	0,289	−0,792	−0,322	−0,705	0,691
0	1	−2	−2	0	9	0,059	0,460	0,269	0,269	0,327	0,673	0,381	0,278	−0,687	−0,417	−0,781	0,650

ЗАДАЧИ

1. Като се използват формули (3.7), да се решат следните матрични игри:

а) $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$.

2. Като се използува графическият метод, да се решат игрите:

а) $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 5 & -2 & 3 & 7 & 0 \\ 0 & 5 & 2 & 2 & 6 \end{pmatrix}$ в) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \\ 9 & 11 \end{pmatrix}$,

г) $\begin{pmatrix} 9 & 1 \\ 7 & 5 \\ 8 & 3 \\ 5 & 9 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}$.

3. Като се използува връзката между матричните игри и линейното оптимиране, да се решат игрите:

а) $\begin{pmatrix} 4 & 2 & 8 \\ 6 & 5 & 4 \\ 3 & 7 & 1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

4. Да се решат с метода на Браун и с метода на Джон фон Нойман матричните игри:

а) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & -3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 & 6 \\ 1 & 6 & 2 & 5 \\ 5 & 1 & 6 & 2 \end{pmatrix}$.

ГЛАВА 4 КРАЙНИ БЕЗКОАЛИЦИОННИ ИГРИ

4.1. ПОЗИЦИОННИ ИГРИ

Безкоализационните игри с N участника бяха определени в т. 1.1. Участието на всеки един от играчите в такава игра е индивидуално и нейните правила изключват всякакви колективни действия. Една безкоалиционна игра се определя напълно чрез задаването на множествата от стратегиите M_k и на платежните функции $\mathscr{P}_k$, $k=1,\ldots, N$ на всеки един от играчите. При крайните безкоалиционни игри играчите разполагат с краен брой стратегии. Отделните стратегии представляват пълен план за действие на съответния играч във всички възможни ситуации, които могат да се появят при протичането на играта. Преди започването на играта отделният играч разполага с информация за множествата от плановете за действие (стратегиите) на всички играчи и за техните платежни функции. Една партия от играта се състои от едновременен избор на стратегия от всеки играч. Нека например са избрани стратегиите $X_k \in M_k$. Тогава k-тият играч оценява резултата от тази партия с помощта на своята платежна функция $\mathscr{P}_k(X_1,\ldots, X_N)$. Функцията $\mathscr{P}_k$ зависи от стратегиите на всички играчи и нейната стойност в дадена партия се определя от конкретно избраните стратегии на всеки играч. Целта на k-тия играч е да се получи такава партия, при която стойността на неговата платежна функция да е по възможност по-голяма. За реализирането на тази цел обаче той разполага само със своите стратегии. При избора на стратегия той трябва да се съобразява с евентуалния избор на стратегия от останалите играчи.

За безкоалиционната игра, описана по-горе, е прието да се казва, че е *представена в нормална форма*. Нормалната форма на безкоалиционната игра е много удобна за математическо изследване. Но тя се отличава от нашата обичайна представа за игра, например играта на шах. При шахматната игра се започва от една фиксирана начална позиция и последователно всеки от двамата играчи прави по един ход. Така се преминава от една позиция в друга до завършването на партията. Характерно при шахматната игра е, че преди да направи даден ход, играчът знае всички предишни ходове в партията, т. е. разполага с пълна информация за нейната история. За да бъде определена напълно, шахматната игра трябва да се разглежда заедно с правилата, които изключват повторяемостта на едни и същи позиции, като по такъв начин се гарантира завършването на всяка партия след краен брой ходове.

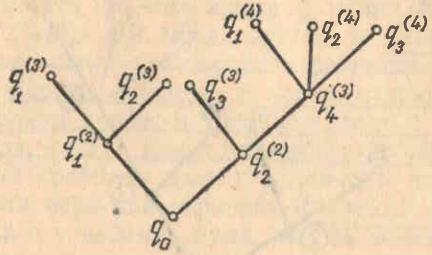
Да проследим развитието на една шахматна игра. Тя започва от една начална позиция, в която право на ход има играчът, който играе с белите фигури (първи играч). За тази позиция първият играч може да избира между краен брой позиции, от които по-нататък партията ще продължи. В така получената втора позиция право на избор на следващата позиция има вторият играч (който играе с черните фигури). След неговия избор в третата позиция на ход е отново първият играч. И така се продължава, докато се достигне до позиция, печеливша за един от двамата играчи, или до равна позиция. С това партията завършва.

Шахматната игра принадлежи на класа от игри, във всяка партия на които последователно се преминава от една позиция в друга. Тези игри се наричат *позиционни*. Ние ще разгледаме позиционни игри с N участници, всяка партия на които се състои от краен брой ходове. Всяка такава партия започва от фиксирана начална позиция. Играчите в някакъв ред правят лични ходове, при които те избират към коя от краен брой позиции да се премине. Така, започвайки от началната позиция, се преминава от една позиция в друга до достигане на някоя крайна позиция. Крайните позиции са зададени предварително заедно с личната оценка на всеки играч за всяка от тях. Така че след завършването на партията в дадена крайна позиция е определена оценката на всеки играч за нея. По такъв начин отделната партия в позиционната игра можем да си представим като един процес на последователно вземане на решение за начина, по който да продължи партията в зависимост от създалата се обстановка (позиция).

Ще бъде разгледана и възможността за включване и на ходове на случаен механизъм в играта. Това означава, че ще се допускат позиции, в които са зададени разпределения, определящи вероятността за продължаване на партията по един от няколко възможни варианта.

При изследването на позиционните игри полезно се оказва из-

ясняването на връзката им с безкоалиционните игри в нормална форма. За тази цел е необходимо да се опишат стратегиите на отделните играчи като пълни планове за действия във всички възможни ситуации и да се определят стойностите на платежните им функции в различните партии.



Фиг. 4.1

За точно описание на позиционните игри е необходимо да се въведе понятието *крайно дърво*. Под крайно дърво ще разбираме равнинна фигура, която се състои от краен брой *възлови точки* (възли) и краен брой *съединителни отсечки* между тези точки, като са изпълнени следните условия:

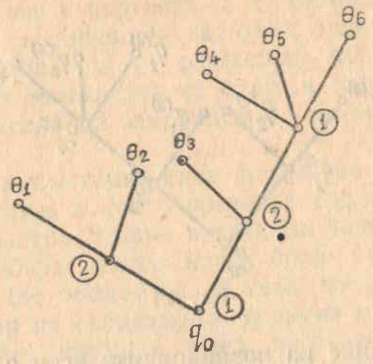
възлите се подреждат в известен брой нива, като на най-ниското ниво се намира точно един възел q_0, наречен *начало на дървото*;

съединителни отсечки има само между възли от съседни нива, като всеки различен от q_0 възел q е съединен с точно един възел q^* от съседното по-ниско ниво; в този случай ще казваме, че възелът q^* *предхожда* възела q.

Съединителните отсечки започват да се разклоняват от началото на дървото q_0, както е показано на фиг. 4.1.

Възлите, които не са свързани с възли от по-високо ниво, се наричат *крайни възли*. Броят на нивата минус единица се нарича *дължина на дървото*. На фиг. 4.1 на първото ниво принадлежи единствено началото на дървото q_0, от второ ниво са възлите $q_1^{(2)}$, $q_2^{(2)}$, от третото ниво — възлите $q_i^{(3)}$, $i=1,\ldots,4$ и от четвъртото — възлите $q_1^{(4)}$, $q_2^{(4)}$, $q_3^{(4)}$. Крайни са възлите $q_1^{(3)}$, $q_2^{(3)}$, $q_3^{(3)}$, $q_1^{(4)}$, $q_2^{(4)}$, $q_3^{(4)}$. Дължината на дървото е три.

Ще казваме, че съществува *път, свързващ възлите* q и q^* от крайното дърво, ако съществува редица $q, q_1, \ldots, q_s, q^*$ от възли, притежаващи свойството: ако q' и q'' са два последователни възела от тази редица, възелът q' предхожда възела q''. Тогава за възлите $q_1, \ldots, q_s$ ще казваме, че лежат на пътя, който свързва възела q с възела q^*. Ясно е, че при направените предположения между два възела може да има най-много един път. Например на фиг. 4.1 съществува път, свързващ началото q_0 с всич-



Фиг. 4.2

ки крайни позиции, но не съществува път, свързващ възела $q_1^{(2)}$ възела $q_2^{(4)}$.

По-нататък ще разглеждаме позиционни игри с N участници, които могат графически да се опишат с крайно дърво. Нека е зададено едно крайно дърво (вж. фиг. 4.2). Началото на дървото да разглеждаме като начална позиция в играта; възлите да бъдат позициите, а отсечките, излизащи от един възел — алтернативите, по които може да се продължи развитието на партията от тази позиция. Нека на всеки възел, който не е краен, е съпоставено едно от числата $1, \ldots, N$ или 0. Ако на един възел е съпоставено едно от числата от 1 до N, това число ще определи кой от играчите трябва да направи ход в съответната позиция, т. е. да избере една от известните предварително определени възможности за развитието на партията до позиция от следващото ниво. Числото нула се съпоставя на позициите, в които ходът се прави от случаен механизъм. Ако в такава позиция има m отсечки, насочени към позициите $q_1, \ldots, q_m$ от по-горното ниво, трябва да бъдат зададени числата

$$p_1, \ldots, p_m; \sum_{\nu=1}^{m} p_\nu = 1, \ p_\nu \geq 0, \ \nu = 1, \ldots, m.$$

Числото p_ν, $\nu = 1, \ldots, m$ определя вероятността, с която партията би продължила развитието си от тази позиция към позицията q_ν на следващото ниво. Ще предполагаме, че всички ходове на случайния механизъм представляват независими събития. С $T = \{\theta_1, \ldots, \theta_l\}$ да означим множеството от крайните позиции θ_ν. Резултатът от партията за k-тия играч при достигане на крайната позиция θ се задава с помощта на платежната функция $F_k(\theta)$. Да означим $F(\theta) = (F_1(\theta), \ldots, F_N(\theta))$. Ще предполагаме, че целта на k-тия играч в така описаната игра се състои в реализирането на партия, завършваща в крайна позиция, в която функцията F_k приема възможно най-голяма стойност (или по-голямо е математическото очакване в случая, когато има и ходове на случайния механизъм).

Дължината на крайното дърво, с помощта на което се определя позиционната игра, ще наричаме *дължина на играта*. Една позиционна игра е с нулева сума, ако за всяка крайна позиция θ е изпълнено равенството $\sum_{k=1}^{N} F_k(\theta) = 0$. Основното предположение в следващото изложение ще бъде, че отделните играчи при вземането на решение се ръководят единствено от своите интереси, като при това им е забранено да влизат в съглашение с други играчи за съвместна дейност. Всички играчи обаче, преди да извършат поредния си ход в дадена партия, разполагат с пълна информация за всички направени вече ходове и знаят вероятностните разпределения във всички позиции, в които ходът се прави от случаен механизъм, както и платежните функции в крайните позиции на всички играчи. Следователно разглежданият клас позиционни игри притежава характерните белези на безкоалиционните игри. Затова естествено възниква въпросът за връзката между позиционните игри и безкоалиционните игри от т. 1.1. Оказва се, че на всяка позиционна игра може да се съпостави една безкоалиционна игра в нормална форма.

За да намерим безкоалиционната игра в нормална форма, която съответствува на дадена позиционна игра, трябва найнапред да определим стратегиите на k-тия играч за $k = 1, \ldots, N$ в тази игра. Възможните ситуации в позиционната игра, в които на k-тия играч би му се наложило да вземе решение, се определят от позициите, в които той е на ход. Следователно един пълен план за действие във всички възможни ситуации (една стратегия) за k-тия играч ще получим, ако за всеки възел q, на който е съпоставено числото k и който принадлежи на нивото i, фиксираме по един възел от следващото ниво $(i+1)$, за който съществува съединителна отсечка, свързваща го с възела q.

Комбинирайки всички възможни избори за позиции, в които на ход е k-тият играч, ще получим всички негови стратегии. Множеството от тези стратегии да означим с M_k. Една партия за безкоалиционната игра в нормална форма, която конструираме, се определя чрез фиксиране по една стратегия $X_k \in M_k$ от всеки играч.

Нека $X_1^*, \ldots, X_N^*$; $X_k^* \in M_k$, $k=1, \ldots, N$ са стратегиите, които играчите са избрали в дадена партия. С $P(X_1^*, \ldots, X_N^*; \theta)$ да означим вероятността тази партия да завърши в крайната позиция θ. Да разгледаме два случая. Нека в първия стратегиите $X_1^*, \ldots, X_N^*$ са такива, че, започвайки от началната позиция q_0, крайната позиция θ не може да се достигне. Тогава полагаме $P(X_1^*, \ldots, X_N^*; \theta)=0$. Във втория случай нека при стратегиите $X_1^*, \ldots, X_N^*$ да съществува (единствен) път, свързващ началната позиция с крайната позиция θ. Възлите, които лежат на този път и в които решението се взема от случаен механизъм, да означим с $q_1, \ldots, q_s$. С $p(X_1^*, \ldots, X_N^*; q_i, \theta)$ да означим вероятността, след като е достигнат възелът q_i, партията да продължи по пътя, който води към крайната позиция θ. И понеже вземането на решения от случайния механизъм във възлите $q_1, \ldots, q_s$ са независими събития, следва, че

$$P(X_1^*, \ldots, X_N^*; \theta)=\prod_{i=1}^{s} p(X_1^*, \ldots, X_N^*; q_i, \theta).$$

Тогава математическото очакване на k-тия играч за резултата от партията, в която са избрани стратегиите $(X_1^*, \ldots, X_N^*)$, се дава с формулата

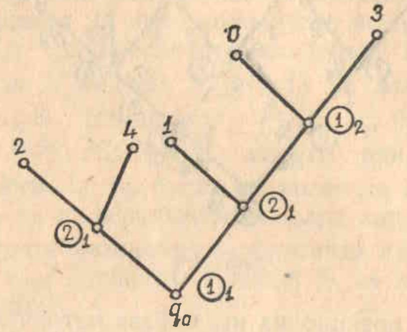
$$\mathscr{P}_k(X_1^*, \ldots, X_N^*)=\sum_{\theta_\nu \in T} P(X_1^*, \ldots, X_N^*; \theta_\nu)\, F_k(\theta_\nu),$$

където T е множеството от всички крайни позиции.

И така на разглежданата позиционна игра ние съпоставихме безкоалиционната игра в нормална форма $\Gamma(M_k, \mathscr{P}_k)$ с определените по-горе множества от стратегиите M_k и платежни функции $\mathscr{P}_k$. По-нататък ще направим анализ на „нормите на поведение" за играта $\Gamma(M_k, \mathscr{P}_k)$.

Да разгледаме един пример на позиционна игра с двама участници, в която няма случайни ходове.

Пример 4.1. Нека в позиционната игра с нулева сума двамата участници последователно избират едно от числата 1 или 2. При всеки избор са известни предишните избори. Играта приключва тогава, когато сумата от избраните числа стане по-голяма от 2. Крайното дърво, което съответствува на тази игра, е показано на фиг. 4.3. До всеки от възлите на дървото е отбелязано кой играч прави избора в този възел. От всеки възел нагоре излизат две отсечки, като лявата отговаря на избор на числото 2, а дясната — на числото 1. Над крайните позиции са отбелязани стойностите на платежната функция на първия играч.



Фиг. 4.3

Множеството от стратегиите на първия играч ще получим чрез комбиниране на неговите възможности на първия и втория му ход, а именно

$$M_1=\{(2,\ 2),\ (2,\ 1),\ (1,\ 2),\ (1,\ 1)\}.$$

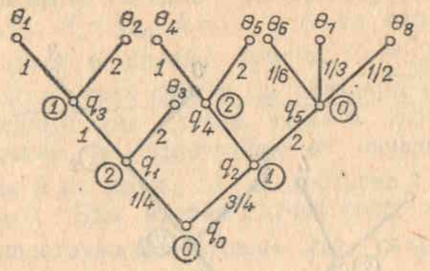
Аналогично чрез комбиниране на възможностите на втория играч в двата му хода получаваме множеството от неговите стратегии

$$M_2=\{(2,\ 2),\ (2,\ 1),\ (1,\ 2),\ (1,\ 1)\}.$$

Ако първият играч избере стратегията си (1, 2), а вторият — стратегията си (2, 2), резултатът от тази партия за първия играч съгласно с фиг. 4.3 е 1. Аналогично могат да се пресметнат стойностите на платежната функция за първия играч и в останалите партии, получаващи се чрез комбиниране на стратегиите от множествата M_1 и M_2. Тези стойности са дадени в следната таблица:

	(2,2)	(2,1)	(1,2)	(1,1)
(2,2)	2	2	4	4
(2,1)	2	2	4	4
(1,2)	1	0	1	0
(1,1)	1	3	1	3

Редовете на таблицата определят платежната функция на първия играч при фиксирана стратегия на първия играч, а стълбовете — при фиксирана стратегия на втория играч. Матричната игра, определена от горната таблица, може да се разглежда като съответна



Фиг. 4.4

на разглежданата позиционна игра. Тази матрична игра притежава седлова точка. Една седлова точка образуват първите стратегии на двамата играчи. Втора седлова точка образуват втората стратегия на първия и първата на втория играч.

Наличието на точка на равновесие в крайните безкоалиционни игри, които съответствуват на позиционните игри, е общ факт, който ще бъде установен по-нататък. Но преди това да разгледаме пример на позиционна игра, в която се правят ходове от случаен механизъм.

Пример 4.2. Да разгледаме позиционната игра с двама играчи, на която съответствува крайното дърво от фиг. 4.4.

Некрайните възли са означени с q_j, $j=0,\dots,5$, а крайните с θ_i, $i=1,\dots,8$. Цифрите в кръгчетата до всеки възел означават кой от играчите е на ход в този възел. Нулата съответствува на ход на случайния механизъм. Нека резултатът за първия играч, ако една партия завърши в крайната позиция θ_i, е $F_1(\theta_i)$, а за втория — $F_2(\theta_i)$. В началната позиция q_0 случайният избор се прави съответно с вероятности 1/4 и 3/4, а в позицията q_5 — съответно с вероятности 1/6, 1/3, 1/2. Възможностите за избор на двамата играчи в съответните позиции да означим с 1 и 2 (отляво надясно). Ако с двойка числа означим избора на първия играч съответно в позициите q_2 и q_3, множеството от неговите стратегии ще се определи по следния начин:

$$M_1=\{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)\}.$$

Двойката (1, 2) например означава първа възможност в позицията q_2 и втора в позицията q_3. С аналогични двойки да означим възможностите на втория играч във възлите q_1 и q_4. Тогава за множеството от стратегиите на втория играч получаваме

$$M_2=\{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)\}.$$

По-нататък за всяка двойка стратегии $X_1 \in M_1$, $X_2 \in M_2$ и всяка крайна позиция θ_i, $i=1,\dots,8$ трябва да пресметнем вероятността $P(X_1, X_2;\ \theta_i)$ партията, започвайки от началната позиция q_0, да завърши в позицията θ_i при положение, че е избрана двойката стратегии (X_1, X_2). Да пресметнем например $P(X_1^*, X_2^*;\ \theta_i)$ при двойката стратегии $X_1^*=(1, 2)$, $X_2^*=(2, 1)$ за всички крайни позиции θ_i, $i=1,\dots,8$. Най-напред $P(X_1^*, X_2^*;\ \theta_1)=P(X_1^*, X_2^*;\ \theta_2)=P(X_1^*, X_2^*;\ \theta_4)=P(X_1^*, X_2^*;\ \theta_5)=0$, защото при така избраните стратегии позициите θ_1, θ_2, θ_4, θ_5 не могат да бъдат достигнати. Ако $p(X_1^*, X_2^*;\ q_j,\ \theta_i)$ е вероятността, след като при стратегиите X_1^*, X_2^* е достигната позицията q_j, партията да продължи по пътя, който води към крайната позиция θ_i, за крайните възли θ_3, θ_6, θ_7, θ_8 получаваме

$$P(X_1^*, X_2^*;\ \theta_3)=p(X_1^*, X_2^*;\ q_0,\ \theta_3)=\frac{1}{4};$$

$$P(X_1^*, X_2^*;\ \theta_6)=p(X_1^*, X_2^*;\ q_0,\ \theta_6)\cdot p(X_1^*, X_2^*;\ q_5,\ \theta_6)=\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{6}=\frac{3}{24};$$

$$P(X_1^*, X_2^*;\ \theta_7)=p(X_1^*, X_2^*;\ q_0,\ \theta_7)\cdot p(X_1^*, X_2^*;\ q_5,\ \theta_7)=\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{3}=\frac{3}{12}=\frac{6}{24};$$

$$P(X_1^*, X_2^*;\ \theta_8)=p(X_1^*, X_2^*;\ q_0,\ \theta_8)\cdot p(X_1^*, X_2^*;\ q_5,\ \theta_8)=\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}=\frac{9}{24}.$$

За така получените вероятности е изпълнено равенството

$$\sum_{i=1}^{8} P(X_1^*, X_2^*;\ \theta_i)=\frac{6+3+6+9}{24}=1.$$

Стойностите на платежните функции на двамата играчи при избор на стратегиите X_1^*, X_2^* се определят при $j=1, 2$ по формулата

$$\mathscr{P}_j(X_1^*, X_2^*)=\sum_{i=1}^{8} P(X_1^*, X_2^*;\ \theta_i)F_j(\theta_i).$$

Определянето на стойностите на платежните функции за всички останали двойки стратегии $(X_1, X_2)\in M_1\times M_2$ оставяме за упражнение.

Да разгледаме въпроса за съществуване на точка на равновесие в безкоалиционната игра в нормална форма, която съответствува на една позиционна игра. Всяка такава точка (ако съществува) ще наричаме *точка на равновесие за позиционната игра*. В сила е следната

Теорема 4.1. *Всяка позиционна игра с N участници притежава точка на равновесие.*

Доказателството ще проведем по индукция спрямо дължината на позиционната игра. Нека дължината ѝ е нула. Тогава началната позиция q_0 е и крайна позиция, в която са определени платежните функции на всички играчи. Отделните играчи нямат никакъв избор в тази игра и поради това множеството от стратегиите на всеки един от тях се състои от една единствена стратегия — да не прави нищо. Тази стратегия за k-тия играч да означим X_k. Тогава в съответната безкоалиционна игра в нормална форма е възможна само една партия, определена от стратегиите $X_1, \dots, X_k$, и следователно $(X_1, \dots, X_k)$ е точка на равновесие в тази игра.

Да допуснем, че всички позиционни игри с дължина, по-малка от λ, притежават точка на равновесие, където λ е някакво цяло положително число. Да разгледаме една позиционна игра, дължината на която е λ. От началото на съответното ѝ крайно дърво q_0 излизат краен брой отсечки, които го свързват с възлите $q_1, \dots, q_m$. Всеки един от възлите q_μ, $\mu=1,\dots,m$ може да се разглежда като начало на крайно дърво с дължина, по-малка от λ. Позиционната игра, която се определя от крайното дърво с начало q_μ, $\mu=1,\dots,m$, да означим с S_μ. Нека M_k^μ е множеството от стратегиите и $\mathscr{P}_k^\mu$ е платежната функция на k-тия играч в безкоалиционната игра в нормална форма, която съответствува на играта S_μ. Според индукционното предположение игрите S_μ притежават точки на равновесие $(\widetilde{X}_1^\mu, \dots, \widetilde{X}_N^\mu)$, $\widetilde{X}_k^\mu \in M_k^\mu$, $k=1,\dots,N$. Следователно за всички стратегии $X_k^\mu \in M_k^\mu$ при $k=1,\dots,N$ и $\mu=1,\dots,m$ са изпълнени неравенствата

$$\mathscr{P}_k^\mu(\widetilde{X}_1^\mu, \dots, \widetilde{X}_N^\mu) \geqq \mathscr{P}(\widetilde{X}_1^\mu, \dots, X_k^\mu, \dots, \widetilde{X}_N^\mu). \tag{4.1}$$

По-нататък ще разглеждаме възможните два случая:

Случай 1. Нека в началната позиция q_0 ходът се прави от случайния механизъм с вероятностно разпределение $p_1, \dots, p_m$, $p_\mu \geqq 0$, $\sum_{\mu=1}^{m} p_\mu = 1$. Множеството M_k от стратегиите X_k на k-тия играч се определя чрез комбиниране помежду им на всевъзможните стратегии от множествата M_k^μ. Ако стратегията $X_k \in M_k$ се разглежда само в безкоалиционна игра S_μ, тя съвпада с някоя от стратегиите $X_k^\mu \in M_k^\mu$. В разглеждания случай стойността на платежната функция $\mathscr{P}_k(X_1, \dots, X_N)$ на k-тия играч в цялата игра за стратегиите $X_k \in M_k$, $k=1,\dots,N$ се определя по формулата

$$\mathscr{P}_k(X_1, \dots, X_N) = \sum_{\mu=1}^{m} p_\mu \mathscr{P}_k^\mu(X_1^\mu, \dots, X_N^\mu).$$

От неравенството (4.1) за произволна стратегия $X_k \in M_k$ при всяко $k=1,\dots,N$ получаваме

$$\mathscr{P}_k(\widetilde{X}_1, \dots, \widetilde{X}_N) = \sum_{\mu=1}^{m} p_\mu \mathscr{P}_k^\mu(\widetilde{X}_1^\mu, \dots, \widetilde{X}_N^\mu) \geqq$$

$$\geqq \sum_{\mu=1}^{m} p_\mu \mathscr{P}_k^\mu(\widetilde{X}_1^\mu, \dots, X_k^\mu, \dots, \widetilde{X}_N^\mu) = \mathscr{P}_k(\widetilde{X}_1, \dots, X_k, \dots, \widetilde{X}_N),$$

където $\widetilde{X}_k$ е стратегия на k-тия играч, която в играта S_μ съвпада със стратегията $\widetilde{X}_k^\mu$ от точката на равновесие в тази игра. Следователно стратегиите $(\widetilde{X}_1, \dots, \widetilde{X}_N)$ образуват точка на равновесие за разглежданата игра с дължина λ. Да преминем към

Случай 2. Нека в началната позиция q_0 на ход е k_0-вият играч. Множеството M_k от стратегиите на k-тия играч при $k \neq k_0$ се определя, както в случай 1. Множеството от стратегиите на k_0-вия играч се получава чрез комбиниране на стратегиите $X_{k_0}^\mu \in M_{k_0}^\mu$ в играта S_μ, $\mu=1,\dots,m$, от една страна, с различните преходи от началната позиция към позициите $q_1, \dots, q_m$ от друга. Нека числото μ_0, $1 \leqq \mu_0 \leqq m$, е такова, че

$$\mathscr{P}_{k_0}^{\mu_0}(\widetilde{X}_1^{\mu_0}, \dots, \widetilde{X}_N^{\mu_0}) = \max_{1 \leqq \mu \leqq m} \mathscr{P}_{k_0}(\widetilde{X}_1^\mu, \dots, \widetilde{X}_N^\mu). \tag{4.2}$$

С $\widetilde{X}_{k_0}$ да означим стратегията на k_0-вия играч, която в началната позиция представлява преход към позицията q_{μ_0}, а в играта S_μ, $\mu=1,\dots,m$ съвпада със стратегията $\widetilde{X}_{k_0}^\mu$ от точката на равновесие в тази игра. При $k \neq k_0$ стратегията $\widetilde{X}_k$ се определя, както в случай 1. Нека X_k е произволна стратегия от множеството M_k при $k=1,\dots,N$. Тогава за всички k, отлични от k_0,

$$\mathscr{P}_k(\widetilde{X}_1, \dots, \widetilde{X}_N) = \mathscr{P}_k^{\mu_0}(\widetilde{X}_1^{\mu_0}, \dots, \widetilde{X}_N^{\mu_0}) \geqq \tag{4.3}$$

$$\geqq \mathscr{P}_k^{\mu_0}(\widetilde{X}_1^{\mu_0}, \dots, X_k^{\mu_0}, \dots, \widetilde{X}_N^{\mu_0}) = \mathscr{P}_k(\widetilde{X}_1, \dots, X_k, \dots, \widetilde{X}_N).$$

Като се използва (4.2), аналогично за k_0 се получава

$$\mathscr{P}_{k_0}(\widetilde{X}_1,\ldots,\widetilde{X}_N)=\mathscr{P}_{k_0}^{\mu_0}(\widetilde{X}_1^{\mu_0},\ldots,\widetilde{X}_{k_0}^{\mu_0},\ldots,\widetilde{X}_N^{\mu_0})\geqq \tag{4.4}$$
$$\geqq\mathscr{P}_{k_0}^{\mu}(\widetilde{X}_1^{\mu},\ldots,\widetilde{X}_{k_0}^{\mu},\ldots,\widetilde{X}_N^{\mu})\geqq\mathscr{P}_{k_0}^{\mu}(\widetilde{X}_1^{\mu},\ldots,X_{k_0}^{\mu},\ldots,\widetilde{X}_N^{\mu})=$$
$$=\mathscr{P}_{k_0}(\widetilde{X},\ldots,X_{k_0},\ldots,\widetilde{X}_N).$$

Но (4.3) и (4.4) означават, че $(\widetilde{X}_1,\ldots,\widetilde{X}_N)$ е точка на равновесие за играта с дължина λ в разглеждания случай.

И така, изхождайки от индукционното предположение, че всички позиционни игри с дължина, по-малка от λ, притежават точка на равновесие, доказахме, че всяка позиционна игра с дължина λ притежава точка на равновесие. С това доказателството на теоремата е завършено.

Съгласно доказаната теорема всички играчи в една позиционна игра притежават такива планове за действие във всички възможни ситуации (стратегии), отклоняването от които само на един от играчите не може да гарантира едностранно облагодетелстване на последния. По тази причина всички играчи са заинтересовани да се придържат към стратегиите от точката на равновесие. Тъй като шахматната игра е позиционна игра, за нея също е в сила твърдението на теоремата. Следователно шахматната игра притежава седлова точка, т. е. всеки от играчите притежава оптимална стратегия. Но това съвсем не означава, че всички въпроси около шахматната игра са решени и тя е загубила своята привлекателност. Въпреки че двамата играчи имат крайни множества от стратегии, никой все още не е успял дори да опише тези множества, а още по-малко да намери оптималните стратегии.

4.2. БИМАТРИЧНИ ИГРИ

Глава втора бе посветена на крайните безкоалиционни игри на двама участници с нулева сума. Сега ще разгледаме крайните безкоалиционни игри на двама участници, при които не се налага никакво ограничение за сумата от платежните функции на играчите. Нека отново n е броят на стратегиите на първия играч и m—броят на стратегиите на втория играч. При избор на i-тата стратегия $1\leqq i\leqq n$ от първия играч и на j-тата стратегия от втория играч $1\leqq j\leqq m$ двойката стратегии (i, j) определя една партия в играта. Нека резултатът от нея за първия играч се изразява с числото a_{ij}, а резултатът за втория играч — с числото b_{ij}. По такъв начин с всяка крайна безкоалиционна игра на двама

участници, в която първият има n стратегии, а вторият — m стратегии, се свързват две таблици

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1m}\\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2m}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nm}\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1m}\\ b_{21} & b_{22} & \ldots & b_{2m}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ b_{n1} & b_{n2} & \ldots & b_{nm}\end{pmatrix}.$$

Тези две таблици могат да се запишат и като една по следния начин:

$$(A, B)=\begin{pmatrix} (a_{11}, b_{11}) & (a_{12}, b_{12}) & \ldots & (a_{1m}, b_{1m})\\ (a_{21}, b_{21}) & (a_{22}, b_{22}) & \ldots & (a_{2m}, b_{2m})\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ (a_{n1}, b_{n1}) & (a_{n2}, b_{n2}) & \ldots & (a_{nm}, b_{nm})\end{pmatrix}.$$

По тази причина крайните безкоалиционни игри с двама участници се наричат *биматрични*. Матрицата A се нарича платежна матрица за първия играч, а матрицата B — платежна матрица за втория играч. Биматричната игра с платежни матрици A и B съответно за първия и втория играч ще означаваме $\Gamma(A, B)$. Една стратегия за всеки един от играчите представлява план за действие във всички възможни ситуации. Различните ситуации, в които може да се окаже единият играч, се определят от избора на стратегия от другия играч. На i-тата стратегия $(1\leqq i\leqq n)$ на първия играч съответствува i-тият ред $(a_{i1},\ldots, a_{im})$ в матрицата A. Елементът a_{ij} от този ред представлява резултатът за първия играч в ситуация, която ще се получи, ако вторият играч е избрал своята j-та стратегия, $1\leqq j\leqq m$. Следователно i-тият ред на матрицата A дава резултата за първия играч за всички партии, в които той е избрал i-тата си стратегия.

Аналогично на j-тата стратегия на втория играч съответствува стълбът $(b_{1j},\ldots, b_{nj})$ на матрицата B. Елементът b_{ij} на този стълб представлява резултатът за втория играч в ситуацията, която ще се получи, ако първият играч е избрал i-тата си стратегия.

Матричната игра $\Gamma(A)$ с платежна матрица A е специален вид биматрична игра. Действително можем да я разглеждаме като биматрична игра с платежна матрица A на първия играч и платежна матрица на втория играч матрицата

$$B=\begin{pmatrix} -a_{11} & -a_{12} & \ldots & -a_{1m}\\ -a_{21} & -a_{22} & \ldots & -a_{2m}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ -a_{n1} & -a_{n2} & \ldots & -a_{nm}\end{pmatrix}.$$

Съгласно с т. 1.1 двойката стратегии (i_0, j_0) се нарича точка на равновесие на биматричната игра $\Gamma(A, B)$, ако за произволна стратегия i на първия играч и произволна стратегия j на втория играч са изпълнени неравенствата

$$a_{ij_0} \leqq a_{i_0 j_0}, \qquad (4.5)$$

$$b_{i_0 j} \leqq b_{i_0 j_0}. \qquad (4.6)$$

Неравенството (4.5) означава, че елементът $a_{i_0 j_0}$ е максимален в j_0-вия стълб на матрицата A, а неравенството (4.6) означава, че елементът $b_{i_0 j_0}$ е максимален в i_0-вия ред на матрицата B. Всяка точка на равновесие (i_0, j_0) в биматричната игра определя една *„норма на поведение"*, която се състои в избор на стратегиите от точката на равновесие. В случаите, когато съществува точка на равновесие, с нейна помощ се определя рационалното поведение на играчите. От неравенствата (4.5) и (4.6) следва, че отклоняването на един от играчите от тази „норма на поведение", т. е. избор на стратегия, различна от стратегията в точката на равновесие, не може да доведе до едностранно облагодетелстване на отклоняващия се от „нормата на поведение". Следователно точката на равновесие съответствува на равновесие на силите в играта, а „нормата на поведение", определена от тази точка на равновесие, притежава устойчивост по отношение на действията на играчите, които не нарушават правилата на играта за индивидуално участие в нея.

Да разгледаме следната биматрична игра, която в литературата е известна под названието „двама престъпници". В предварителен арест се намират две лица, които са участници в някакво престъпление. Липсват обаче доказателства за тяхната вина. Като доказателство би послужило признанието на поне един от тях. В тази ситуация всеки от двамата трябва да избере една от двете възможности на поведение — да признае вината си или да отрича. На тях им е известно, че срокът за лишаване от свобода в години в различните случаи се определя от следната таблица:

II играч \ I играч	Признава	Не признава
Признава	(−5, −5)	(0, −10)
Не признава	(−10, 0)	(−1, − 1)

Числото a от двойката $(-a, -b)$ във всяка клетка на таблицата е срок на наказанието на първото лице, а числото b — за

второто лице. Например, ако двете лица признаят своето участие в престъплението, наказанието им ще бъде по 5 години лишаване от свобода. Естествено всеки от двамата играчи в биматричната игра $\Gamma(A, B)$ с матрици

$$A=\begin{pmatrix} -5 & 0 \\ -10 & -1 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} -5 & -10 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

се стреми да минимизира срока на наказанието си. Двойката стратегии (1,1) представлява точка на равновесие на тази биматрична игра. Действително елементът -5 от матрицата A е максимален в първия стълб, т. е. изпълнено е неравенството $-10 < -5$ и елементът -5 от матрицата B е максимален в първия ред, т. е. $-10 < -5$. Тези две неравенства са достатъчни да твърдим, че първите стратегии на двамата играчи образуват точката на равновесие в биматричната игра $\Gamma(A, B)$. Това означава, че в създалата се ситуация равновесие ще се получи, ако двамата престъпници признаят вината си. Тогава те ще получат по 5 години наказание. Никой от тях не е заинтересован да се отклонява от „нормата на поведение" — самопризнание, защото веднага ще се получи двойно по-голямо наказание. Тук трябва да се отбележи, че ако бъдат нарушени правилата за забрана на обмена на информация и по някакъв начин двамата се договорят да не признават вината си, те ще получат само по 1 година наказание (например по някакво общо обвинение за нарушаване на обществения ред). Но двойката стратегии (2, 2) не определя устойчива „норма на поведение", защото ако единият от престъпниците наруши споразумението и признае вината си, то той ще бъде напълно оправдан.

В разглеждания пример играта притежава само една точка на равновесие. Да разгледаме друг пример на биматрична игра, която притежава две точки на равновесие, и да се спрем на възникващите в този случай проблеми. Тази игра е известна в литературата под името „семеен спор". В една съботна вечер едновременно се провеждат интересен балетен спектакъл и състезание по бокс. Съпружеска двойка трябва да си избере развлечение. Съпругът предпочита да присъствува на спортното състезание, а предпочитанията на съпругата са за спектакъла. Но тъй като и двамата държат на семейството си, на всеки от тях по-голямо удоволствие ще достави посещението в компанията на партньора си на мероприятието, което той не предпочита, отколкото индивидуалното посещение на любимото развлечение. Условно да изразим с 2 единици удоволствието, което получава всеки от тях от любимото развлечение в компанията на партньора си, с 1 единица удоволствието, което получава от нежеланото развлечение, но отново в присъствието на партньора си, и с —1— „удоволствието“, което получава при индивидуалното посещение на което и да е мероприятие. Тогава единиците удоволствие в различните случаи за двамата съпрузи могат да се запишат в следната таблица:

Съпруг \ Съпруга	Бокс	Балет
Бокс	(2, 1)	(−1, −1)
Балет	(−1, −1)	(1, 2)

Двойките стратегии (1, 1) и (2, 2) представляват точки на равновесие за безкоалиционната игра с горната матрица. Всяка една от тях определя по една „норма на поведение“. Но тези „норми на поведение“ не са еквивалентни за двамата играчи. Например първият играч в единия случай ще получи 2, а в другия —1. Аналогична бележка е вярна и за втория играч. Приведеният пример показва, че съществуват „общества“, условията в които позволяват да се установят различни „норми на поведение“. Тези „норми на поведение“ притежават вътрешна устойчивост, но не е изключена възможността те да си противоречат помежду си.

В допълнение ще отбележим, че стратегиите от точките на равновесие не са взаимозаменяеми, както това беше вярно за матричните игри (теорема 1.2). Например в играта „семеен спор“ двойката стратегии (1, 2) не е точка на равновесие, въпреки че двойките (1, 1) и (2, 2) поотделно са точки на равновесие. Поради всичко казано дотук е ясно, че при биматричните игри не може да се говори за оптимални стратегии. Стратегиите от точката на равновесие могат да бъдат препоръчани само като рационални в различните ситуации.

Да се върнем отново към съдържателното тълкуване на играта „семеен спор“. Наличието на две точки на равновесие в играта не предлага еднозначен избор за двамата съпрузи. „Нормата на поведение“, която отговаря на избор на първите стратегии от всеки от тях, ще се установи, когато е известно, че съпругът никога не отстъпва, а съпругата винаги се съобразява с желанието на партньора си. Аналогично тълкуване има и изборът на вторите стратегии. Но ако двамата съпрузи са неотстъпчиви или пък прекалено нерешителни, никога няма да се достигне до установяване на равновесно състояние в семейството. От казаното е ясно, че двете „норми на поведение“ не са еквивалентни за

двамата съпрузи, а установяването на една от тях зависи от допълнителните условия в семейството.

4.3. СМЕСЕНИ СТРАТЕГИИ

Тъй като не всички биматрични игри притежават точки на равновесие (такива са например матричните игри без седлова точка), естествено е да направим опит за изследване на равновесието на силите в биматричните игри с помощта на смесените стратегии. Смесените стратегии се определят, както в т. 2.3. Нека в биматричната игра $\Gamma(A, B)$ първият играч има n стратегии, а вторият — m. Тогава смесените стратегии на първия играч са вероятностните разпределения

$$X=(x_1, \ldots, x_n), \quad x_i \geqq 0, \quad i=1, \ldots, n, \quad \sum_{i=1}^{n} x_i = 1$$

в множеството от стратегиите му. Смесените стратегии на втория играч са вероятностните разпределения

$$Y=(y_1, \ldots, y_m), \; y_j \geqq 0, \; j=1, \ldots, m, \; \sum_{j=1}^{m} y_j = 1$$

в множеството от неговите стратегии. За множествата от смесените стратегии съответно на първия и втория играч ще използуваме отново означенията M_1 и M_2. Математическото очакване на първия играч за резултата от партия, в която двамата играчи използуват съответно смесените стратегии $X \in M_1$ и $Y \in M_2$, се дава с формулата

$$\mathscr{P}_1(X, Y)=\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_i y_j. \tag{4.7}$$

Аналогично математическото очакване за втория играч е

$$\mathscr{P}_2(X, Y)=\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} b_{ij} x_i y_j. \tag{4.8}$$

Смесените стратегии от вида $\bar{X}^i=(0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$, където 1 стои на i-то място, се наричат чисти стратегии на първия играч, а смесените стратегии от вида $\bar{Y}^j=(0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$, където 1 стои на j-то място — чисти стратегии за втория играч.

На биматричната игра $\Gamma(A, B)$ съпоставяме безкоалиционната игра $\Gamma_c(A, B)$ на двама участници с множества от стратегиите M_1 и M_2 и платежни функции $\mathscr{P}_1$ и $\mathscr{P}_2$. Полагаме $M=M_1\times M_2$ и $\mathscr{P}(X, Y)\doteq(\mathscr{P}_1(X, Y), \mathscr{P}_2(X, Y))$. Тази игра ще наричаме игра в смесени стратегии. Аналогично, както в т. 2.3, може да се покаже, че биматричната игра $\Gamma(A, B)$ е напълно равностойна с безкоалиционната игра $\Gamma(\mathscr{P}, \bar{M})$, където $\bar{M}=\bar{M}_1\times\bar{M}_2$, а $\bar{M}_1$ и $\bar{M}_2$ са множествата от чистите стратегии на двамата играчи. Използувайки чистите стратегии, платежните функции от (4.7) и (4.8) могат да бъдат записани по следния начин:

$$\mathscr{P}_1(X, Y)=\sum_{i=1}^{n}x_i\sum_{j=1}^{m}y_j\,a_{ij}=\sum_{i=1}^{n}x_i\mathscr{P}_1(\bar{X}^i, Y), \tag{4.9}$$

$$\mathscr{P}_2(X, Y)=\sum_{j=1}^{m}y_j\sum_{i=1}^{n}b_{ij}\,x_i=\sum_{j=1}^{m}y_j\mathscr{P}_2(X, \bar{Y}^j).$$

Вярна е следната

Теорема 4.2. *Безкоалиционната игра* $\Gamma_c(A, B)$ *притежава точка на равновесие.*

Доказателство. Нека (X, Y) са двойка смесени стратегии $X\in M_1$, $Y\in M_2$ и $\bar{X}^i$, $\bar{Y}^j$ са две чисти стратегии, $\bar{X}^i\in M_1$ и $\bar{Y}^j\in M_2$. За $i=1, \dots, n$ и $j=1, \dots, m$ полагаме

$$c_i^1=\max\{0, \mathscr{P}_1(\bar{X}^i, Y)-\mathscr{P}_1(X, Y)\}, \tag{4.10}$$
$$c_j^2=\max\{0, \mathscr{P}_2(X, \bar{Y}^j)-\mathscr{P}_2(X, Y)\}.$$

Да означим

$$v_i=\frac{x_i+c_i^1}{1+\sum_{i=1}^{n}c_i^1}, \quad w_j=\frac{y_j+c_j^2}{1+\sum_{j=1}^{m}c_j^2}, \tag{4.11}$$

Векторите $V=(v_1, \dots, v_n)$ и $W=(w_1, \dots, w_m)$ представляват смесени стратегии съответно за първия и втория играч. Действително

$$v_i\geqq 0, \ i=1,\dots,n, \quad \sum_{i=1}^{n}v_i=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i+\sum_{i=1}^{n}c_i^1}{1+\sum_{i=1}^{n}c_i^1}=\frac{1+\sum_{i=1}^{n}c_i^1}{1+\sum_{i=1}^{n}c_i^1}=1.$$

Следователно $V\in M_1$. Аналогично се проверява, че и $W\in M_2$. Това означава, че по формулите (4.11) на всяка двойка стратегии (X, Y), $X\in M_1$, $Y\in M_2$ се съпоставя двойка стратегии (V, W), $V\in M_1$, $W\in M_2$. Така определеното съответствие от множеството $M_1\times M_2$ в същото множество да означим по следния начин:

$$(V, W)=T(X, Y).$$

Тъй като знаменателят в (4.11) не се анулира, съответствието T е непрекъснато.

Двойката стратегии $(\tilde{X}, \tilde{Y})$, $\tilde{X}\in M_1$, $\tilde{Y}\in M_2$ се нарича неподвижна точка на съответствието T, ако е изпълнено равенството

$$(\tilde{X}, \tilde{Y})=T(\tilde{X}, \tilde{Y}). \tag{4.12}$$

Ще докажем, че двойката стратегии $(\tilde{X}, \tilde{Y})$ е точка на равновесие за играта $\Gamma_c(A, B)$ тогава и само тогава, когато тя е неподвижна точка на съответствието T.

Нека двойката стратегии $(\tilde{X}, \tilde{Y})$ е точка на равновесие. Тогава за всяка чиста стратегия $\bar{X}^i\in\bar{M}_1$, $i=1, \dots, n$ и за всяка чиста стратегия $\bar{Y}^j\in M_2$, $j=1, \dots, m$ са изпълнени неравенствата

$$\mathscr{P}_1(\bar{X}^i, \tilde{Y})\leqq\mathscr{P}_1(\tilde{X}, \tilde{Y}), \quad \mathscr{P}_2(\tilde{X}, \bar{Y}^j)\leqq\mathscr{P}_2(\tilde{X}, \tilde{Y}).$$

По формулите (4.10) за съответните на $(\tilde{X}, \tilde{Y})$ числа $c_i^1, i=1,\dots, n$ и c_j^2, $j=1, \dots, m$ получаваме $c_i^1=c_j^2=0$. Тогава от (4.11) следва равенството (4.12), т. е. двойката $(\tilde{X}, \tilde{Y})$ е неподвижна точка на съответствието T.

Обратно, нека двойката стратегии $(\tilde{X}, \tilde{Y})$ е неподвижна точка на съответствието T. Да допуснем, че тя не е точка на равновесие за играта $\Gamma_c(A, B)$. Тогава ще се намери чиста стратегия за поне един от играчите (за определеност да предположим на първия), за която да бъде изпълнено неравенството

$$\mathscr{P}_1(\bar{X}^{i_0}, \tilde{Y})>\mathscr{P}_1(\tilde{X}, \tilde{Y}). \tag{4.13}$$

Това е така, защото ако предположим, че такава чиста стратегия не съществува, то за $i=1, \dots, n$ и $j=1, \dots, m$ ще бъдат изпълнени неравенствата

$$\mathscr{P}_1(\bar{X}^i, \tilde{Y})\leqq\mathscr{P}_1(\tilde{X}, \tilde{Y}), \quad \mathscr{P}_2(\tilde{X}, \bar{Y}^j)\leqq\mathscr{P}_2(\tilde{X}, \tilde{Y}).$$

Тогава от (4.9) за произволни стратегии $X \in M_1$ и $Y \in M_2$ ще получим неравенствата

$$\mathscr{P}_1(X, \widetilde{Y}) = \sum_{i=1}^{n} x_i \mathscr{P}_1(\bar{X}^i, \widetilde{Y}) \leqq \mathscr{P}_1(\widetilde{X}, \widetilde{Y}),$$

$$\mathscr{P}_2(\widetilde{X}, Y) = \sum_{j=1}^{m} y_j \mathscr{P}_2(\widetilde{X}, \bar{Y}^j) \leqq \mathscr{P}_2(\widetilde{X}, \widetilde{Y}),$$

които противоречат на направеното предположение, че двойката стратегии $(\widetilde{X}, \widetilde{Y})$ не е точка на равновесие.

От друга страна, за първия играч ще се намери такъв индекс i_1, $1 \leqq i_1 \leqq n$, че да бъдат изпълнени едновременно двете неравенства

$$(4.14) \qquad \widetilde{x}_{i_1} > 0, \quad \mathscr{P}_1(\bar{X}^{i_1}, \widetilde{Y}) \leqq \mathscr{P}_1(\widetilde{X}, \widetilde{Y}),$$

защото ако допуснем, че такъв индекс не съществува, с помощта на (4.9) ще получим противоречието

$$\mathscr{P}_1(\widetilde{X}, \widetilde{Y}) = \sum_{i=1}^{n} \widetilde{x}_i \mathscr{P}_1(\bar{X}^i, \widetilde{Y}) > \sum_{i=1}^{n} \widetilde{x}_i \mathscr{P}_1(\widetilde{X}, \widetilde{Y}) = \mathscr{P}_1(\widetilde{X}, \widetilde{Y}).$$

Да означим с $\widetilde{v}_i$ и $\widetilde{c}_i^1$, $i = 1, \ldots, n$ съответните на стратегиите $\widetilde{X}$, $\widetilde{Y}$ числа, които се определят по формулите (4.10) и (4.11). Тогава съгласно (4.13) имаме $\sum_{i=1}^{n} \widetilde{c}_i^1 > \widetilde{c}_{i_0}^1 > 0$, а съгласно (4.14) е изпълнено $\widetilde{c}_{i_1}^1 = 0$. Следователно

$$\widetilde{v}_{i_1} = \frac{\widetilde{x}_{i_1}}{1 + \sum_{i=1}^{n} \widetilde{c}_i} < \widetilde{x}_{i_1}.$$

Но последното неравенство означава, че $T(\widetilde{X}, \widetilde{Y}) \neq (\widetilde{X}, \widetilde{Y})$, т. е. двойката стратегии $(\widetilde{X}, \widetilde{Y})$ не е неподвижна точка за съответствието T. Достигнатото противоречие се дължи на допускането, че $(\widetilde{X}, \widetilde{Y})$ не е точка на равновесие.

Следователно въпросът за съществуване на точка на равновесие за играта $\Gamma_c(A, B)$ може да се замени с еквивалентната задача за съществуването на неподвижна точка на съответствието T. Последната задача се решава от теоремата на Брауер за неподвижната точка. Тази теорема в необходимата за случая формулировка се привежда по-долу. Нейното доказателство може да бъде намерено в книгите по функционален анализ (например [12]), понякога в много по-обща формулировка.

Теорема на Брауер. *Непрекъснатото съответствие T, изобразяващо изпъкналото и компактно подмножество S на l-мерното евклидово пространство в себе си, притежава поне една неподвижна точка.*

С това теорема 4.2 е доказана. Както и теорема 2.1 от т. 2.3 тя може да се изкаже по следния начин: *биматричната игра $\Gamma(A, B)$ притежава точка на равновесие в смесени стратегии.* Следователно във всяка биматрична игра съществува „норма на поведение“, която за всеки един от играчите се състои в придържане към определено правило за смесване на стратегиите. Доказана теорема 4.2 е вярна за всяка крайна безкоалиционна игра с N участници, $N \geqq 2$. При това приведеното доказателство лесно се модифицира и за този случай.

Теорема 4.2 е публикувана за първи път от американския математик Дж. Неш през 1951 г.

Крайните безкоалиционни игри, които съответствуват на разгледаните в т. 4.1 позиционни игри, представляват един специален клас такива игри, които притежават точка на равновесие в чисти стратегии. За общите крайни безкоалиционни игри може да се твърди само, че имат точка на равновесие в смесени стратегии.

Тъй като теорема 4.2 представлява едно обобщение на теорема 2.1 от т. 2.3 и се доказва независимо от нея, тя може да се разглежда и като едно ново доказателство на тази теорема.

Съществуват различни алгоритми за намирането на точките на равновесие на биматричните игри. Върху тях ние няма да се спираме, а ще покажем само как задачата за намиране на точките на равновесие на биматричните игри може да бъде сведена към една задача на математическото оптимиране. За тази цел най-напред ще докажем някои свойства на точките на равновесие в смесени стратегии на биматричните игри.

Теорема 4.3. *Необходимото и достатъчно условие двойката смесени стратегии (X^0, Y^0), $X^0 \in M_1$, $Y^0 \in M_2$ да бъде точка на равновесие в смесени стратегии за биматричната игра $\Gamma(A, B)$ е да съществуват числа α и β, за които да са изпълнени съотношенията*

$$(4.15) \qquad \sum_{j=1}^{m} a_{ij} y_j^0 \leqq \alpha, \quad i = 1, \ldots, n,$$

$$(4.16) \qquad \sum_{i=1}^{n} b_{ij} x_i^0 \leqq \beta, \quad j = 1, \ldots, m,$$

$$(4.17)\qquad \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(a_{ij}+b_{ij})x_i^0 y_j^0=\alpha+\beta.$$

Доказателство. Да допуснем най-напред, че двойката смесени стратегии (X^0, Y^0) е точка на равновесие за играта $\Gamma_c(A, B)$. Тогава за чистите стратегии $\bar{X}^i$ и $\bar{Y}^j$ са изпълнени неравенствата

$$(4.18)\qquad \mathscr{P}_1(\bar{X}^i, Y^0)\leqq\mathscr{P}_1(X^0, Y^0),\ \mathscr{P}_2(X^0, \bar{Y}^j)\leqq\mathscr{P}_2(X^0, Y^0).$$

Ако положим

$$(4.19)\qquad \mathscr{P}_1(X^0, Y^0)=\alpha,\quad \mathscr{P}_2(X^0, Y^0)=\beta,$$

от (4.18) и (4.19) получаваме (4.15), (4.16), (4.17).

Обратно, нека двойката смесени стратегии (X^0, Y^0) и числата α, β удовлетворяват съотношенията (4.15), (4.16), (4.17). Тогава за произволни стратегии $X=(x_1, \dots, x_n)\in M_1$ и $Y=(y_1, \dots, y_m)\in M_2$ от съотношенията (4.9), (4.15), (4.16) следват неравенствата

$$(4.20)\qquad \mathscr{P}_1(X, Y^0)\leqq\alpha,$$

$$(4.21)\qquad \mathscr{P}_2(X^0, Y)\leqq\beta.$$

Сумирайки почленно (4.20) и (4.21) при $(X, Y)=(X^0, Y^0)$ и като вземем пред вид (4.17), получаваме

$$\alpha=\mathscr{P}_1(X^0, Y^0),\ \beta=\mathscr{P}_2(X^0, Y^0).$$

Като заместим тези стойности на α и β в (4.20) и (4.21), получаваме, че за произволни стратегии $X\in M_1$ и $Y\in M_2$ са изпълнени неравенствата

$$\mathscr{P}_1(X, Y^0)\leqq\mathscr{P}_1(X^0, Y^0),\ \mathscr{P}_2(X^0, Y)\leqq\mathscr{P}_2(X^0, Y^0),$$

т. е. двойката (X^0, Y^0) е точка на равновесие в смесени стратегии за играта $\Gamma(A, B)$. С това теоремата е доказана.

Теорема 4.4. *Необходимото и достатъчно условие двойката смесени стратегии (X^0, Y^0), $X^0\in M_1$, $Y^0\in M_2$ да бъде точка на равновесие в смесени стратегии за биматричната игра $\Gamma(A, B)$ е да съществуват такива числа α^0, β^0, че α^0, β^0, X^0, Y^0 да са решение на следната задача на математическото оптимиране:*

Да се намери максимумът на функцията

$$(4.22)\qquad Q(X, Y, \alpha, \beta)=\mathscr{P}_1(X, Y)+\mathscr{P}_2(X, Y)-\alpha-\beta$$

при ограниченията:

$$(4.23)\qquad \sum_{j=1}^{m}a_{ij}y_j\leqq\alpha,\quad \sum_{i=1}^{n}b_{ij}x_i\leqq\beta,$$

$$(4.24)\qquad \sum_{i=1}^{n}x_i=\sum_{j=1}^{m}y_j=1;\ x_i\geqq0,\ i=1, \dots, n;\ y_j\geqq0,\ j=1, \dots, m.$$

Доказателство. От (4.9) следва, че за всички α, β, X, Y, удовлетворяващи (4.23) и (4.24), е изпълнено неравенството

$$(4.25)\qquad Q(X, Y, \alpha, \beta)=\mathscr{P}_1(X, Y)+\mathscr{P}_2(X, Y)-\alpha-\beta\leqq0.$$

Нека двойката стратегии (X^0, Y^0) е точка на равновесие. Да положим $\alpha^0=\mathscr{P}_1(X^0, Y^0)$ и $\beta^0=\mathscr{P}_2(X^0, Y^0)$. Тогава α^0, β^0, Y^0, X^0 удовлетворяват ограниченията (4.23), (4.24) и освен това в (4.25) се достига максималната стойност нула, т. е. това е едно решение на задачата (4.22) — (4.24).

Обратно, нека стратегиите X^0, Y^0 и числата α^0, β^0 са решение на задача (4.22) — (4.24). Съгласно теорема 4.2 съществува точка на равновесие $(\tilde{X}, \tilde{Y})$ за играта $\Gamma_c(A, B)$, а според доказаното вече в настоящата теорема $\tilde{\alpha}$, $\tilde{\beta}$, $\tilde{X}$, $\tilde{Y}$, $(\tilde{\alpha}=\mathscr{P}_1(\tilde{X}, \tilde{Y}),\ \tilde{\beta}=\mathscr{P}_2(\tilde{X}, \tilde{Y}))$ е решение на задача (4.22) — (4.24) при максимална стойност на целевата функция нула. Но тогава и за решението β^0, α^0, X^0, Y^0 е изпълнено

$$Q(X^0, Y^0, \alpha^0, \beta^0)=\mathscr{P}_1(X^0, Y^0)+\mathscr{P}_2(X^0, Y^0)-\alpha^0-\beta^0=0$$

или

$$(4.26)\qquad \mathscr{P}_1(X^0, Y^0)+\mathscr{P}_2(X^0, Y^0)=\alpha^0+\beta^0.$$

От (4.24) следва, че $X^0\in M_1$ и $Y^0\in M_2$. Понеже α^0, β^0, X^0, Y^0 удовлетворяват още и (4.23) и (4.26), от теорема 4.3 следва, че двойката стратегии (X^0, Y^0) е точка на равновесие в смесени стратегии за иматричната игра $\Gamma(A, B)$. С това доказателството на теоремата завършено.

ГЛАВА 5

КООПЕРАТИВНИ ИГРИ

5.1. КООПЕРАТИВНИ ИГРИ В НОРМАЛНА ФОРМА

В тази глава ще бъдат разгледани игри с N участници, правилата на които разрешават на отделните играчи да се обединяват помежду си с цел получаване на по-голяма изгода. Ще предполагаме, че допустимата форма на сътрудничество е създаването на коалиции. Такива игри се наричат *кооперативни*. Отделният играч в една кооперативна игра също се разглежда като коалиция. Максималната коалиция се състои от всичките N играчи. За пълнота при изложението ще разглеждаме и коалицията $\emptyset$ ($\emptyset$ е празното множество), в която не взема участие нито един играч. Ако с K означим множеството от всички N играчи, всяко подмножество S на K може да бъде една коалиция.

За анализиране на равновесието на силите в една кооперативна игра е необходимо да се знае резултатът за всяка отделна коалиция, който тя би могла да си гарантира в играта при произволни действия на останалите играчи. Задаването на гарантирания резултат за всяка коалиция $S \subset K$ в една кооперативна игра става с помощта на *характеристична функция*. Да се спрем найнапред върху определението на характеристичната функция за един доста широк клас кооперативни игри.

Кооперативната игра, в която k-тият играч има краен брой стратегии $X_k \in M_k$ и платежна функция $\mathscr{P}_k(X_1, \ldots, X_N)$, $k=1, \ldots, N$ се нарича *кооперативна игра в нормална форма*. В тази точка ще разгледаме кооперативни игри в нормална форма с нулева сума, т. е. игри, за които при всички $X_k \in M_k$, $k=1, \ldots, N$ е изпълнено равенството

$$\sum_{k=1}^{N} \mathscr{P}_k(X_1, \ldots, X_N) = 0. \tag{5.1}$$

При определяне на резултата, който коалицията S може да си гарантира в играта, може да се изходи от предположението, че всички останали играчи са се обедннили в коалицията $S^- = K \setminus S$, интересите на която са противоположни на интересите на коалицията S. По такъв начин за определянето на стойността на характеристичната функция за коалицията S е необходимо да определим цената на матричната игра $\Gamma(M^S, \mathscr{P}^S)$ с множества от стратегиите:

$$M^s = \prod_{k \in S} M_k, \quad M^{S-} = \prod_{k \in S} M_k$$

и платежни функции

$$\mathscr{P}^S(X^S, Y^S) = \sum_{k \in S} \mathscr{P}_k(X_1, \ldots, X_N); \; X^S \in M^S, \; Y^S \in M^{S-}, \tag{5.2а}$$

$$\mathscr{P}^{S-}(X^{S-}, Y^{S-}) = \sum_{k \in S} \mathscr{P}_k(X_1, \ldots, X_N); \; X^{S-} \in M^{S-}, \; Y^{S-} \in M^S. \tag{5.2б}$$

С $\prod$ е означено декартовото произведение на съответните множества. От (5.1) и (5.2) следва, че

$$\mathscr{P}^{S-}(X^{S-}, Y^{S-}) = \sum_{k \in S} \mathscr{P}_k(X_1, \ldots, X_N) = -\sum_{k \in S} \mathscr{P}_k(X_1, \ldots, X_N) = -\mathscr{P}^S(X^S, Y^S). \tag{5.3}$$

Съгласно теорема 2.1 разглежданата матрична игра притежава седлова точка в смесени стратегии. Нейната цена да означим с $v(S)$. Функцията $v(S)$, която е дефинирана за всяка коалиция $S \subset K$, представлява характеристичната функция на разглежданата кооперативна игра в нормална форма.

Теорема 5.1. *Характеристичната функция $v(S)$ на кооперативната игра с нулева сума в нормална форма притежава следните свойства:*

а) $v(\emptyset) = 0$;
б) *ако* $S \subset K$, *то* $v(S) = -v(S^-)$;
в) *ако* $S \subset K$, $T \subset K$ *и* $T \cap S = \emptyset$, *то*

$$v(S) + v(T) \leq v(S \cup T). \tag{5.4}$$

Доказателство. Твърдението а) следва от факта, че за коалицията $\emptyset$ сумата в (5.2а) не съдържа нито едно събираемо и $\mathscr{P}^{\emptyset}(X^{\emptyset}, Y^{\emptyset}) = 0$.

Нека $S \subset K$ и $\{\alpha_i\}$, $\{\beta_j\}$ са вероятностни разпределения съответно в множествата M^S, M^{S-}. Тогава от дефиницията на $v(S)$ и (5.3) имаме

$$v(S) = \max_{\{\alpha_i\}} \min_{\{\beta_j\}} \sum_i \sum_j \mathscr{P}^S(X_i^S, Y_j^S)\alpha_i\beta_j =$$

$$= \max_{\{\alpha_i\}} \min_{\{\beta_j\}} \sum_i \sum_j (-\mathscr{P}^{S-}(X_j^{S-}, Y_i^{S-})\alpha_i\beta_j) =$$

$$= -\max_{\{\beta_j\}} \min_{\{\alpha_i\}} \sum_j \sum_i \mathscr{P}^{S-}(X_j^{S-}, Y_i^{S-})\beta_j\alpha_i = -v(S^-).$$

С това равенството в б) е доказано. Да преминем към доказателството на в). Ако положим $R = (S \cup T)^-$, тогава $K = R \cup S \cup T$ и следователно

$$S^- = K \setminus S = R \cup T, \quad T^- = K \setminus T = R \cup S.$$

Това означава, че са изпълнени равенствата

$$M^{S-} = M^T \times M^R, \quad M^{T-} = M^R \times M^S, \quad M^{R-} = M^T \times M^S.$$

Нека $(\{\widetilde{\alpha}_\lambda\}, \{\widetilde{\alpha}_i^-\})$, $(\{\widetilde{\beta}_\mu\}, \{\widetilde{\beta}_j^-\})$, $(\{\widetilde{\gamma}_\nu\}, \{\widetilde{\gamma}_l^-\})$ са седлови точки в смесени стратегии съответно за игрите $\Gamma(M^S, \mathscr{P}^S)$, $\Gamma(M^T, \mathscr{P}^T)$ и $\Gamma(M^R, \mathscr{P}^R)$. От вероятностните разпределения $\{\widetilde{\alpha}_\lambda\}$ и $\{\widetilde{\beta}_\mu\}$ съответно в множествата M^S и M^T получаваме вероятностното разпределение $\{\widetilde{\alpha}_\lambda, \widetilde{\beta}_\mu\}$ в множеството M^{R-}. Аналогично получаваме вероятностните разпределения $\{\widetilde{\beta}_\mu, \widetilde{\gamma}_\nu\}$ и $\{\widetilde{\alpha}_\lambda, \widetilde{\gamma}_\nu\}$ в множествата M^{S-} и M^{T-}. От свойствата на седловата точка следват съотношенията

$$\sum_\lambda \Big(\sum_\mu \sum_\nu \mathscr{P}^S(X_\lambda^S, (X_\mu^T, X_\nu^R))\widetilde{\beta}_\mu\widetilde{\gamma}_\nu\Big)\widetilde{\alpha}_\lambda \geqq$$

(5.5) $$\geqq \sum_\lambda \sum_i \mathscr{P}^S(X_\lambda^S, Y_i^S)\widetilde{\alpha}_i^-\widetilde{\alpha}_\lambda = v(S);$$

$$\sum_\mu \Big(\sum_\lambda \sum_\nu \mathscr{P}^T(X_\mu^T, (X_\lambda^S, X_\nu^R))\widetilde{\alpha}_\lambda \widetilde{\gamma}_\nu\Big)\widetilde{\beta}_\mu \geqq$$

(5.6) $$\geqq \sum_\mu \sum_j \mathscr{P}^T(X_\mu^T, Y_i^T)\, \widetilde{\beta}_i^- \widetilde{\beta}_\mu = v(T).$$

Чрез почленното събиране на (5.5) и (5.6) получаваме

$$v(S) + v(T) \leqq \sum_\lambda \sum_\mu \sum_\nu (\mathscr{P}^S(X_\lambda^S, (X_\mu^T, X_\nu^R)) + \mathscr{P}^T(X_\mu^T, (X_\lambda^S, X_\nu^R)))\widetilde{\alpha}_\lambda\widetilde{\beta}_\mu\widetilde{\gamma}_\nu =$$

$$= \sum_\lambda \sum_\mu \sum_\nu \mathscr{P}^{R-}((X_\lambda^S, X_\mu^T), X_\nu^R)\widetilde{\alpha}_\lambda\widetilde{\beta}_\mu\widetilde{\gamma}_\nu \leqq$$

$$\leqq \sum_l \sum_\nu \mathscr{P}^{R-}(X_l^{R-}, Y_\nu^{R-})\widetilde{\gamma}_l^-\, \widetilde{\gamma}_\nu = v(R^-) = v(S \cup T),$$

т. е. изпълнено е неравенството (5.4). С това теоремата е напълно доказана.

Следствие 5.1. Ако числовата функция $w(S)$ е дефинирана за $S \subset K$ и притежава свойствата а) — в) *от теорема* 5.1, *тя притежава и свойствата*:

а$_1$) $w(K) = 0$;

б$_1$) *ако* $S_\varrho \subset K$, $\varrho = 1, \ldots, r$ и $S_{\varrho_1} \cap S_{\varrho_2} = \emptyset$ *за всеки два индекса* $\varrho_1 \neq \varrho_2$, $1 \leqq \varrho_1 \leqq r$, $1 \leqq \varrho_2 \leqq r$, *то*

$$\sum_{\varrho=1}^r w(S_\varrho) \leqq w\Big(\bigcup_{\varrho=1}^r S_\varrho\Big);$$

в$_1$) *ако* $S_\varrho \in K$, $\varrho = 1, \ldots, r$ и $S_{\varrho_1} \cap S_{\varrho_2} = \emptyset$ *за всеки два индекса* $\varrho_1 \neq \varrho_2$, $1 \leqq \varrho_1 \leqq r$, $1 \leqq \varrho_2 \leqq r$ и $\bigcup_{\varrho=1}^r S_\varrho = K$, то $\sum_{\varrho=1}^r w(S_\varrho) \leqq 0$.

Доказателство. Свойството а$_1$) следва от а) и б) на теорема 5.1, понеже $w(K) = -w(\emptyset) = 0$. Свойството б$_1$) се доказва с помощта на в) от теорема 5.1, а в$_1$) следва от а$_1$) и б$_1$), защото

$$\sum_{\varrho=1}^r w(S_\varrho) \leqq w\Big(\bigcup_{\varrho=1}^r S_\varrho\Big) = w(K) = 0.$$

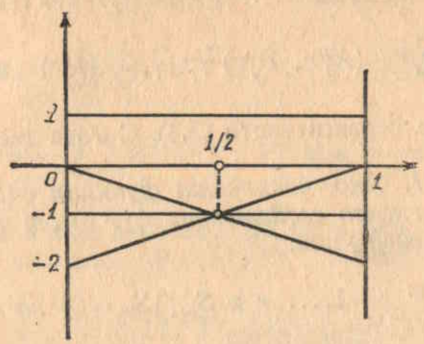
Да намерим характеристичната функция на една кооперативна игра с трима участници (играч 1, играч 2, играч 3), която е зададена в нормална форма. Нека всеки от играчите има по две възможности — да избира едно от числата 1 или 2. Когато всички играчи са избрали еднакво число, плащания в играта няма. Ако двамата играчи са избрали еднакво число, различно от числото, избрано от третия, последният плаща на останалите по 1. Да означим $\mathscr{P}_1$, $\mathscr{P}_2$, $\mathscr{P}_3$ платежните функции на играчите 1, 2, 3. Тогава

$$\mathscr{P}_3(1, 1, 1) = \mathscr{P}_3(2, 2, 2) = 0; \ \mathscr{P}_3(1, 1, 2) = \mathscr{P}_3(2, 2, 1) = -2;$$

$$\mathscr{P}_3(2, 1, 1) = \mathscr{P}_3(1, 2, 1) = \mathscr{P}_3(2, 1, 2) = \mathscr{P}_3(1, 2, 2) = 1$$

и аналогично за $\mathscr{P}_1$ и $\mathscr{P}_2$.

Да предположим, че играчите 1 и 2 образуват коалиция против играча 3. Тогава играчът 3 има две стратегии — той може да избере числото 1 или числото 2. Коалицията $\{1, 2\}$ има четири възможности: двамата играчи избират едновременно 1 или 2; играчът 1 избира 1, а играчът 2 — избира 2; играчът 1 избира 2, а играчът 2 — избира 1. От дефиницията на платежните функции на играчите при различните възможности получаваме за платежната функция на коалицията $\{3\}$ в матричната игра срещу коалицията $\{1, 2\}$ стойностите от следната таблица:



Фиг. 5.1

	$\|1\ 1\|$	$\|1\ 2\|$	$\|2\ 1\|$	$\|2\ 2\|$
1	0	1	1	−2
2	−2	1	1	0

Да намерим по графичния метод цената на тази матрична игра. От фиг. 5.1 се вижда, че $v(3)=-1$. Следователно $v(1, 2)=1$. Аналогично намираме

$$v(1)=v(2)=-1,\ v(1,\ 3)=v(2,\ 3)=-1.$$

Понеже играта е с нулева сума, то

$$v(\varnothing)=v(1,\ 2,\ 3)=0.$$

По такъв начин характеристичната функция на разглежданата игра е напълно определена.

За изследване предпочитаемостта на една коалиция пред друга в кооперативните игри е достатъчно да познаваме резултата, който всяка коалиция може да си гарантира в играта при всевъзможни действия на останалите играчи. От друга страна, в т. 5.1 видяхме, че за всяка кооперативна игра с нулева сума в нормална форма може да бъде определена характеристичната функция, която именно дава резултата, на който може да разчита отделната коалиция в играта. Ето защо по-нататък ще считаме кооперативната игра определена, ако е зададена нейната характеристична функция.

Да разгледаме една кооперативна игра с N участници, множеството от играчите на която е означено с K. Числовата функция $v(S)$, която е определена за всички подмножества на $S\subset K$, ще наричаме характеристична функция за кооперативната игра, ако тя удовлетворява следните условия:

$$v(\varnothing)=0; \tag{5.7}$$

$$v(S)+v(T)\leqq v(S\bigcup T) \quad \text{за } S\subset K \text{ и } T\subset k, \text{ за които } S\bigcap T=\varnothing. \tag{5.8}$$

Кооперативната игра с N участници и характеристичната функция $v(S)$ ще означаваме $\Gamma(v, N)$.

Ако за всеки две непресичащи се коалиции на една кооперативна игра (5.8) се удовлетворява като равенство, в тази игра няма никаква заинтересованост от страна на играчите за създаване на коалиция. В този случай никакво обединяване на усилията за съвместни действия не може да гарантира нещо повече в сравнение с индивидуалното участие. Такива кооперативни игри се наричат *несъществени*. Ако кооперативната игра $\Gamma(v, N)$ има поне две непресичащи се коалиции, за които в (5.8) имаме строго неравенство, играта се нарича *съществена*. В сила е следната

Теорема 5.2. *Необходимото и достатъчно условие кооперативната игра $\Gamma(v, N)$ да бъде несъществена е да се изпълнява равенството*

$$\sum_{k=1}^{N} v(k)=v(K). \tag{5.9}$$

Доказателство. Нека най-напред играта е несъществена. Тогава, прилагайки последователно равенството (5.8), получаваме

$$v(K)=v(1)+v(2,\ldots,N)=v(1)+v(2)+v(3,\ldots,N)=\sum_{k=1}^{N} v(k).$$

Обратно, да предположим, че е вярно равенството (5.9). Да допуснем, че играта е съществена. Тогава ще се намерят две коалиции $S \subset K$ и $T \subset K$, за които $S \cap T = \varnothing$, но

$$v(S)+v(T)<v(S \cup T). \tag{5.10}$$

От (5.8), (5.9) и (5.10) следва, че

$$v(K)=\sum_{k=1}^{N} v(k)=\sum_{k \in S} v(k)+\sum_{k \in T} v(k)+\sum_{k \in (S \cup T)^{-}} v(k) \leq$$

$$\leq v(S)+v(T)+v((S \cup T)^{-})<v(S \cup T)+v((S \cup T)^{-}) \leq v(K).$$

Достигнатото противоречие се дължи на допускането, че играта е съществена. С това теоремата е доказана.

Кооперативната игра $\Gamma(v, N)$ се нарича *с постоянна сума*, ако за всяка коалиция $S \subset K$ е изпълнено равенството

$$v(S)+v(S^{-})=v(K). \tag{5.11}$$

Разгледаните в т. 5.1 кооперативни игри с нулева сума са един пример эа кооперативни игри с постоянна сума. Действително съгласно условието б) в теорема **5.1** за всяка коалиция $S \subset K$ имаме $v(S)+v(S^{-})=0$, а съгласно a_1) в следствие **5**.1 е в сила $v(K)=0$. Следователно е изпълнено равенството (5.11).

Следващият модел на пазар с един продавач и двама купувачи представлява прост пример на кооперативна игра с трима участници, която не е с постоянна сума. Продавачът (играч 1) притежава един неделим товар, който той оценява на a платежни единици. При продаването му за p единици ($p \geqq a$) разликата $p-a$ ще определи неговата печалба. Двамата купувачи (играч 2 и играч 3) оценяват товара съответно на b и c единици. Печалбата на всеки един от тях ще се определи съответно от неотрицателните разлики $b-p$ и $c-p$, ако той закупи товара за p единици. За да бъдат и тримата заинтересовани да участвуват в сделката, да предположим, че $a<b \leqq c$. Играчите, които вземат участие в дадена сделка, образуват една коалиция. Възможни са коалиции от един, двама или трима души, но печалба могат да имат само тези коалиции, в които участвува продавачът и поне един от купувачите, т. е. когато в сделката се извършва размяна. При коалициите от един играч и при коалицията от двамата купувачи не се извършва никаква размяна и затова печалбите на тези коалиции са нулеви. Следователно, ако с $v(S)$ за $S \subset \{1, 2, 3\}$ означим гарантираната печалба в играта, ще получим

$$v(1)=v(2)=v(3)=v(2,3)=0.$$

Да пресметнем печалбата на коалицията $\{1,2\}$. В този случай товарът ще бъде продаден от първия играч на втория за p единици, $a \leqq p \leqq b$. Първият ще спечели $(p-a)$ единици, а вторият — $(b-p)$ единици и следователно независимо от действията на играча 3 коалицията $\{1, 2\}$ може да си гарантира печалба $v(1, 2)= =(p-a)+(b-p)=b-a$. Аналогично се пресмята, че $v(1, 3)=c-a$.

В коалицията $\{1, 2, 3\}$ купувачите ще действуват съвместно, за да понижат цената на товара. Вторият купувач ще купи товара за p единици, $a \leqq p<c$, като заедно с това той ще изплати на първия купувач определена сума, например q, $0<q<c-p$, за неговото участие в сделката. Тогава, сумирайки печалбата на първия играч $p-a$, печалбата на втория q и печалбата на третия $c-p-q$, за гарантираната печалба на коалицията $\{1, 2, 3\}$ ще получим $v(1, 2, 3)=c-a$. По такъв начин се определя гарантираната печалба на всички коалиции в играта — характеристичната функция на играта. Лесно се проверява, че за всички възможни случаи е изпълнено неравенството (5.8). Тази игра не е с постоянна сума, защото

$$v(1)+v(2, 3)=0<c-a=v(1, 2, 3).$$

От това неравенство следва, че играта е съществена, тъй като съществуват поне две непресичащи се коалиции, за които в (5.8) имаме строго неравенство.

Характеристичната функция дава гарантирания резултат от играта за отделните коалиции. Но за да се изследват равновесието на силите в кооперативната игра и „нормите на поведение“ които могат да се формират в такава игра, е необходимо да се знаят възможните разпределения между отделните играчи вътре в коалицията.

Векторът $(x_1, \ldots, x_N)$ се нарича *дележ на кооперативната игра* $\Gamma(v, N)$, ако:

$$1) \sum_{k=1}^{N} x_k = v(K); \tag{5.12}$$

$$2) \; x_k \geqq v(k), \; k=1, \ldots, N. \tag{5.13}$$

Равенството (5.12) означава, че допустими разпределения са само тези, които разпределят всичко, което коалицията от всичките играчи може да си гарантира в играта. Според неравенството (5.13) всеки един от играчите би се съгласил само на такова разпределение, което му дава най-малко онова, което той може да си гарантира сам при индивидуалното участие в играта. Така че в кооперативната игра се допускат разпределения, които са колективно рационални (5.12) и индивидуално рационални (5.13).

Следващата теорема се явява още едно потвърждение на необходимостта от разграничаване на несъществените игри.

Теорема 5.3. *Кооперативната игра* $\Gamma(v, N)$ *е несъществена тогава и само тогава, когато тя има само един дележ.*

Доказателство. Да допуснем, че играта е несъществена. Тогава един дележ е векторът $(v(1), \ldots, v(N))$, тъй като съгласно теорема 5.2 е изпълнено равенството $\sum_{k=1}^{N} v(k) = v(K)$. Ако съществува друг дележ $(x_1, \ldots, x_N)$, различен от него, съгласно (5.13) ще се намери такъв играч k_0, че да бъде изпълнено $x_{k_0} > v(k_0)$. Следователно от (5.13) за дележа $(x_1, \ldots, x_N)$ получаваме неравенството $\sum_{k=1}^{N} x_k > \sum_{k=1}^{N} v(k) = v(K)$, което противоречи на (5.12).

Обратно, нека играта $\Gamma(v, N)$ има само един дележ $(x_1, \ldots, x_N)$. Да допуснем, че той е различен от вектора $(v(1), \ldots, v(N))$, т. е. съществува играч k_0 такъв, че $x_{k_0} > v(k_0)$. Но тогава лесно се проверява, че векторът $(y_1, \ldots, y_N)$, където

$$y_k = x_k + (x_{k_0} - v(k_0))/(N-1) \text{ за } k \neq k_0 \text{ и } y_{k_0} = v(k_0)$$

е дележ, защото са изпълнени съотношенията (5.12) (5.13). Но дележът $(y_1, \ldots, y_N)$ е различен от дележа $(x_1, \ldots, x_N)$. Достигнатото противоречие показва, че $x_k = v(k)$ за $k = 1, \ldots, N$. Тогава от (5.12) следва, че $\sum_{k=1}^{N} v(k) = v(K)$. Но това равенство съгласно теорема 5.2 означава, че играта $\Gamma(v, N)$ е несъществена. С това теоремата е доказана.

5.3. ЕКВИВАЛЕНТНИ ИГРИ

Въвеждането на отношението *еквивалентност* в множеството от всички кооперативни игри позволява това множество да се раздели на класове еквивалентни игри. Всички *еквивалентни кооперативни игри* притежават еднакви основни свойства. Ползата от изучаването на това отношение на еквивалентност се състои в това, че може измежду всички еквивалентни игри да се намери онази, която е най-проста в смисъл, че нейното изследване се провежда най-лесно. Съществено е, след като този прост представител на класа еквивалентни игри е изследван, да може да се получи точното описание на свойствата на всички игри от класа.

Да преминем към точното определение на отношението еквивалентност в множеството на кооперативните игри. Кооперативната игра $\Gamma(v, N)$ се нарича *еквивалентна* на кооперативната игра $\Gamma(v', N)$, ако съществуват такива положително число r и реални числа α_k, $k = 1, \ldots, N$, че за всяка коалиция $S \subset K$ да бъде изпълнено равенството

$$v'(S) = rv(S) + \sum_{k \in S} \alpha_k. \tag{5.14}$$

Лесно се проверява, че въведеното отношение е рефлексивно, симетрично и транзитивно. Действително всяка кооперативна игра е еквивалентна сама на себе си, защото в равенството (5.14) може да се избере $r = 1$ и $\alpha_k = 0$, $k = 1, \ldots, N$. Следователно отношението е рефлексивно. Ако играта $\Gamma(v, N)$ е еквивалентна на играта $\Gamma(v', N)$, (5.14) е изпълнено при $r > 0$. Но тогава $\frac{1}{r} > 0$ и за всяка коалиция $S \subset K$

$$v(S) = \frac{1}{r} v'(S) + \sum_{k \in S} \frac{-\alpha_k}{r}. \tag{5.15}$$

Равенството (5.15) обаче означава, че играта $\Gamma(v', N)$ е еквивалентна на играта $\Gamma(v, N)$. С това е показана и симетричността на отношението. Да докажем транзитивността. Нека играта $\Gamma(v, N)$ е еквивалентна на играта $\Gamma(v', N)$, която пък от своя страна е еквивалентна на играта $\Gamma(v'', N)$, т. е. за всяка коалиция $S \subset K$ са изпълнени равенствата

$$v'(S) = r'v(S) + \sum_{k \in S} \alpha'_k, \quad r' > 0,$$

$$v''(S) = r''v'(S) + \sum_{k \in S} \alpha''_k, \quad r'' > 0.$$

Но тогава

$$v''(S) = r'r''v(S) + \sum_{k \in S} (r''\alpha'_k + \alpha''_k), \quad r'r'' > 0.$$

Следователно играта $\Gamma(v, N)$ е еквивалентна на играта $\Gamma(v'', N)$.

По такъв начин е показано, че въведеното отношение **е една** *релация на еквивалентност.* От това следва, че множеството от кооперативни игри се разделя по единствен начин на взаимно непресичащи се класове еквивалентност.

Казва се, че кооперативната игра $\Gamma(v, N)$ е *редуцирана форма с модул* γ, ако

$$v(k)=\gamma \text{ за } k=1,\dots,N; \quad v(K)=0,$$

където γ е или -1, или 0.

Теорема 5.4. *За всяко цяло положително число N съществува единствена игра в редуцирана форма с модул $\gamma=0$. Тя е несъществена и с нея са еквивалентни всички несъществени игри* .

Доказателство. За редуцираната игра с модул $\gamma=0$ е изпълнено

$$v(k)=0 \text{ за } k=1,\dots, N; \quad v(K)=0$$

и ако S е произволна коалиция, съгласно с (5.8)

$$0=\sum_{k\in S} v(k)\leqq v(S)=v(S)+\sum_{k\in S^-} v(k)\leqq v(S)+v(S^-)\leqq v(K)=0,$$

т. е. за всяка коалиция имаме $v(S)=0$. Следователно съществува единствена игра в редуцирана форма с модул $\gamma=0$ и тя е несъществена, понеже $\sum_{k=1}^{N} v(k)=v(K)=0$.

Нека $\Gamma(v', N)$ е една несъществена игра. Ако изберем $r=1$ и $\alpha_k=-v'(k)$ за $k=1,\dots, N$, ще получим, че тя е еквивалентна на играта $\Gamma(v, N)$, чиято характеристична функция удовлетворява следните равенства:

$$v(k)=v'(k)-v'(k)=0, \tag{5.16}$$

$$v(K)=v'(K)-\sum_{k=1}^{N} v'(k)=0. \tag{5.17}$$

При последното равенство е използувана теорема 5.2. Но (5.16) и (5.17) означават, че $\Gamma(v, N)$ е единствената игра в редуцирана форма с модул $\gamma=0$.

Теорема 5.5. *Всяка съществена игра $\Gamma(v, N)$ е еквивалентна с точно една игра в редуцирана форма с модул $\gamma=-1$.*

Доказателство. Да съставим следната система от $(N+1)$ уравнения с $N+1$ неизвестни r, α_k, $k=1,\dots,N$:

$$rv(k)+\alpha_k=-1, \quad k=1,\dots,N, \tag{5.18}$$

$$rv(K)+\sum_{k=1}^{N} \alpha_k=0. \tag{5.19}$$

Събирайки почленно уравненията в (5.18), получаваме уравнението $r\sum_{i=1}^{N} v(k)+\sum_{k=1}^{N}\alpha_k=-N$, което заедно с (5.19) дава $r\left(v(K)-\sum_{k=1}^{N} v(k)\right)=N$. Тъй като разглежданата игра е съществена, съгласно с теорема 5.2 $v(K)-\sum_{k=1}^{N} v(k)>0$. Следователно за r се получава

$$r=\frac{N}{v(K)-\sum_{k=1}^{N} v(k)}.$$

Тогава от (5.18) определяме

$$\alpha_k=-1-rv(k)=-1-N\frac{v(k)}{v(K)-\sum_{k=1}^{N} v(k)}.$$

Следователно променливите r и α_k се определят по единствен начин от (5.16) и (5.17).

Да разгледаме сега играта $\Gamma(v', N)$, където

$$v'(S)=rv(S)+\sum_{k\in S}\alpha_k,$$

а r и числата $\alpha_k, k=1,\dots,N$ са полученото по-горе единствено решение на (5.18) и (5.19). Играта $\Gamma(v', N)$ е в редуцирана форма с модул $\gamma=-1$, защото

$$v'(k)=rv(k)+\alpha_k=-1, \quad v(K)=rv(K)+\sum_{k=1}^{N}\alpha_k=0.$$

Следователно играта $\Gamma(v, N)$ е еквивалентна на играта $\Gamma(v', N)$ в редуцирана форма с модул $\gamma=-1$. От еднозначността на избора на r и α_k, които удовлетворяват системата уравнения (5.18), (5.19), следва, че това е единствената игра в редуцирана форма, на която играта $\Gamma(v, N)$ може да бъде еквивалентна. С това теоремата е доказана.

Да обърнем внимание на следния факт. Теорема 5.5 не означава, че всяка съществена игра е еквивалентна на игра в редуцирана форма с нулева сума. Това е така, защото за да бъде една кооперативна игра с постоянна сума и толкова повече с нулева сума, трябва за всяка коалиция S да бъде изпълнено равенството (5.11). Но подобно нещо за игрите в редуцирана форма не се предполага.

Съгласно т. 5.2 дележите $(x_1, \ldots, x_N)$ в една съществена игра в редуцирана форма удовлетворяват съотношенията

1. $\sum_{k=1}^{N} x_k = 0,$

2. $x_k \geqq -1$, за $k = 1, \ldots, N.$

Полезна се оказва по-нататък следната

Лема 5.1. *Ако играта* $\Gamma(v, N)$ *е в редуцирана форма с модул* γ *и коалицията* S *съдържа* p *елемента, то*

$$p\gamma \leqq v(S) \leqq (p-N)\gamma.$$

Доказателство. Тъй като са изпълнени съотношенията

$$p\gamma = \sum_{k \in S} v(k) \leqq v(S), \quad (N-p)\gamma = \sum_{k \in S^-} v(k) \leqq v(S^-),$$

от неравенството $v(S) \leqq -v(S^-)$ следва твърдението на лемата.

Ще разгледаме някои кооперативни игри в редуцирана форма. В теорема 5.4 беше показано, че има само една такава несъществена игра. Най-напред да се спрем на игрите с постоянна сума, т. е. тези, за които е изпълнено неравенството (5.11). Да започнем с игра на двама участници. Нейната характеристична функция трябва да удовлетворява съотношенията

$$v(1) = v(2) = \gamma, \ \gamma = 0 \text{ или } \gamma = 1; \ v(1, 2) = 0$$

и от (5.11) имаме още

$$2\gamma = v(1) + v(2) = v(1, 2) = 0.$$

Но тъй като едновременното удовлетворяване на изброените съотношения е възможно само при $\gamma = 0$, следва, че единствената игра на двама участници с постоянна сума в редуцирана форма е несъществената игра.

Да преминем към разглеждането на игрите с постоянна сума на трима участници. За характеристичната функция на всяка такава съществена игра трябва да бъдат изпълнени равенствата

$$v(1) = v(2) = v(3) = -1, \ v(1, 2, 3,) = 0$$

и от (5.11) имаме още

$$v(1, 2) = -v(3) = 1, \ v(2, 3) = -v(1) = 1, \ v(1,3) = -v(2) = 1.$$

Тъй като от горните равенства характеристичната функция на игра с постоянна сума в редуцирана форма с модул $\gamma = -1$ се определя еднозначно, съществува точно една такава игра. Следователно има само две игри в редуцирана форма с постоянна сума и трима участници — едната е съществена, а другата несъществена.

При игрите с четирима участници разнообразието е много по-голямо. Характеристичната функция на всяка съществена игра в редуцирана форма удовлетворява равенствата

$$v(1) = v(2) = v(3) = v(4) = -1, \ v(1, 2, 3, 4) = 0.$$

Еднозначно се определят и стойностите ѝ за коалициите от трима участници:

$$v(1, 2, 3) = -v(4) = 1, \ v(2, 3, 4) = -v(1) = 1,$$
$$v(3, 4, 1) = -v(2) = 1, \ v(4, 2, 1) = -v(3) = 1.$$

От (5.11) следва, че тя трябва да удовлетворява още и равенствата

$$v(1, 2) = -v(3, 4), \quad v(1, 3) = -v(2, 4), \quad v(1,4) = -v(2, 3).$$

Да положим

$$v(3, 4) = 2\xi_1, \quad v(2, 4) = 2\xi_2, \quad v(2, 3) = 2\xi_3.$$

Съгласно лема 5.1, за да бъде v характеристична функция на разглежданата игра, трябва да са изпълнени неравенствата $|\xi_k| \leqq 1$ за $k = 1, 2, 3$. Тогава всяка точка (ξ_1, ξ_2, ξ_3) от тримерното пространство, координатите на която удовлетворяват неравенствата $|\xi_k| \leqq 1$, определя един клас еквивалентни съществени игри. Следователно вече за четирима участници съществуват безброй много съществени игри.

Да разгледаме игрите, за които не е изпълнено условието (5.11) за постоянство на сумата. Съществува точно един клас на еквивалентност при съществени игри на двама участници. Действително тогава характеристичната функция се определя еднозначно от съотношенията

$$v(1) = v(2) = -1, \ v(1, 2) = 0.$$

Характеристичната функция на съществена игра в редуцирана форма на трима участници удовлетворява равенствата

$$v(1) = v(2) = v(3) = -1, \quad v(1, 2, 3) = 0.$$

Да положим

$$v(1,\ 2) = -3\,\xi_1 + 1, \quad v(1,\ 3) = -3\,\xi_2 + 1, \quad v(2,\ 3) = -3\,\xi_3 + 1.$$

Отново от лема 5.1 следва, че всяка тройка $(\xi_1,\ \xi_2,\ \xi_3)$, за която $\xi_k \in [0,1]$, определя една игра на трима участници в редуцирана форма с модул $\gamma = -1$.

Характеристичната функция на описаната в т. 5.2 игра — модел на пазар с един продавач и двама купувачи, приемаше стойности

$$v(3) = v(1) = v(2) = v(2,\ 3) = 0, \quad v(1,\ 2) = b - a,$$
$$v(1,\ 3) = c - a, \quad v(1,\ 2,\ 3) = c - a.$$

Ако положим

$$r = \frac{3}{c-a}, \quad \alpha_k = -1, \quad k = 1, 2, 3,$$

за характеристичната функция $v'(S) = 3v(S)/(c-a) - 1$ ще получим

$$v'(1) = v'(2) = v'(3) = -1,$$

т. е. играта $\Gamma(v', 3)$ е единствената игра в редуцирана форма с модул $\gamma = -1$, на която е еквивалентна разглежданата съществена игра $\Gamma(v, 3)$.

5.4. ЯДРО И НМ-РЕШЕНИЕ

Преди да пристъпим към анализиране на рационалното поведение в кооперативните игри, да въведем принципа, въз основа на който отделните коалиции ще определят своето предпочитание в множеството от всички дележи в играта. Да предположим, че е зададена кооперативната игра $\Gamma(v,\ N)$. Казва се, че дележът $(x_1, \ldots, x_N)$ доминира над дележа $(y_1, \ldots, y_N)$ по отношение на коалицията S (ще означаваме $(x_1, \ldots, x_N) \underset{S}{>} (y_1, \ldots, y_N)$), ако

$$\sum_{k \in S} x_k \leqq v(S), \tag{5.20}$$

$$x_k > y_k, \quad k \in S. \tag{5.21}$$

Неравенството (5.20) означава, че за да бъде един дележ предпочитан от коалицията S пред друг дележ, необходимо е преди всичко той да бъде допустим за нея, т. е. сумата от печалбите на отделните членове на коалицията не може да превишава онова, което коалицията сама може да си гарантира в играта. Според (5.21) предпочитанието на коалицията се формира от единодушното предпочитание на всички участници в нея.

За дележа $(x_1, \ldots, x_N)$ се казва, че доминира над дележа $(y_1, \ldots, y_N)$, ако съществува коалиция S, по отношение на която

дележът $(x_1, \ldots, x_N)$ доминира над дележа $(y_1, \ldots, y_N)$. Според това определение дележът $(x_1, \ldots, x_N)$ е предпочитан в „обществото" на играчите на кооперативната игра, ако се намери поне една коалиция, която да го предпочита.

Лесно се вижда, че е невъзможно доминиране по отношение на коалициите от един играч. Действително, ако допуснем, че за k_0-вия играч $(x_1, \ldots, x_N) \underset{\{k_0\}}{>} (y_1, \ldots, y_N)$, от (5.20), (5.21) и (5.13) следва противоречието

$$v(k_0) \geqq x_{k_0} > y_{k_0} \geqq v(k_0).$$

Невъзможно е доминиране и по отношение на коалицията от всички играчи, защото, ако $(x_1, \ldots, x_N) \underset{K}{>} (y_1, \ldots, y_N)$, съгласно (5.12), (5.20), (5.21) ще достигнем до противоречието

$$v(K) \geqq \sum_{k=1}^{N} x_k > \sum_{k=1}^{N} y_k = v(K).$$

Тъй като доминиране е възможно в кооперативни игри $\Gamma(v, N)$ за $N \geqq 3$, по-нататък ще разглеждаме само такива игри.

Ядро в кооперативната игра $\Gamma(v,\ N)$ се нарича множеството от дележи, всеки от които не се доминира от никакъв друг дележ.

Теорема 5.6. *Необходимото и достатъчно условие дележът $(x_1, \ldots, x_N)$ да принадлежи на ядрото е за всяка коалиция S да бъде изпълнено неравенството*

$$v(S) \leqq \sum_{k \in S} x_k. \tag{5.22}$$

Доказателство Нека дележът $(x_1, \ldots, x_N)$ принадлежи на ядрото. Да допуснем, че за някаква коалиция S е изпълнено

$$v(S) > \sum_{k \in S} x_k. \tag{5.23}$$

Нека ν е броят на играчите в S. Съгласно с (5.12) и (5.13) неравенството (5.23) е възможно само ако $1 < \nu < N$. Векторът $(y_1, \ldots, y_N)$, където

$$y_k = x_k + \frac{1}{\nu}\left(v(S) - \sum_{k \in S} x_k\right) \quad \text{за } k \in S,$$

$$y_k = v(k) + \frac{1}{N-\nu}\left(v(K) - v(S) - \sum_{k \in S^-} v(k)\right) \quad \text{за } k \in S^-$$

е дележ, защото

1) $$\sum_{k=1}^{N} y_k = \sum_{k \in S} x_k + v(S) - \sum_{k=S} x_k + \sum_{k \in S^-} v(k) + v(K) - v(S) -$$

$$-\sum_{k \in S-} v(k) = v(K),$$

2) $y_k \geq x_k \geq v(k), \ k \in S;$

$$y_k \geq v(k) \text{ за } k \in S^-, \text{ защото } v(S) + \sum_{k \in S-} v(k) \leq v(K).$$

Освен това $(y_1, \ldots, y_N) \underset{S}{>} (x_1, \ldots, x_N)$. Но това противоречи на принадлежността на дележа $(x_1, \ldots, x_N)$ към ядрото. С това неравенство (5.22) е доказано.

Обратно, нека при всяка коалиция S за дележа $(x_1, \ldots, x_N)$ е изпълнено (5.22). Да допуснем, че този дележ не принадлежи на ядрото. Тогава ще се намерят коалиция S_0 и дележ $(y_1, \ldots, y_N)$, който да доминира над $(x_1, \ldots, x_N)$ по отношение на S_0. Но тогава от (5.20), (5.21) и (5.22) достигаме до противоречието

$$v(S_0) \leq \sum_{k \in S_0} x_k < \sum_{k \in S_0} y_k \leq v(S_0).$$

С това доказателството на теоремата е завършено. Непосредствено от нея получаваме следното

Следствие 5.2. *За всяка съществена игра с постоянна сума ядрото е празно.*

Доказателство. Да допуснем, че дележът $(x_1, \ldots, x_N)$ принадлежи на ядрото. Тогава съгласно теорема 5.6 при всяко k, $k=1, \ldots, N$ за коалициите $\{k\}$ и $\{K \setminus k\}$ са изпълнени неравенствата

(5.24)
$$v(k) \leq x_k,$$
$$v(K \setminus k) \leq \sum_{i \in K/k} x_i .$$

Като съберем почленно тези неравенства и вземем пред вид (5.11), тъй като играта е с постоянна сума, и от (5.12), ще получим

$$v(K) = v(k) + v(K \setminus k) \leq \sum_{i=1}^{N} x_i = v(K).$$

Следователно в (5.24) за всяко $k=1, \ldots, N$ имаме $x_k = v(k)$. Като сумираме почленно тези неравенства, от (5.12) получаваме

$$\sum_{k=1}^{N} v(k) = \sum_{k=1}^{N} x_k = v(K).$$

Но това равенство съгласно теорема 5.2 означава, че играта е несъществена. Достигнатото противоречие доказва следствието.

Един вид „норма на поведение" в кооперативната игра се определя с помощта на ядрото. Придържането към избор на дележи от ядрото определя рационалното поведение на всяка коалиция. Съгласно теорема 5.6 в този случай всяка коалиция S получава не по-малко от гарантираната печалба $v(S)$. Със самоволно нарушаване на тази „норма на поведение" никоя коалиция не може да си гарантира по-предпочитано разпределение пред някой от дележите на ядрото за всички свои членове едновременно, понеже дележите на ядрото не се доминират от никой друг дележ. Тази „норма на поведение" е вътрешно непротиворечива, защото вътре в ядрото няма доминиране. Използуването на ядрото обаче не може да се счита като универсален принцип, понеже от следствие 5.2 е известно, че за игрите с постоянна сума то е празно, т. е. това са „общества", условията в които не позволяват да се формира такъв вид „норма на поведение".

Втори вид „норма на поведение" в кооперативната игра се определя с помощта на решението на Нойман—Моргенщерн (НМ-решение), което е въведено в § 19). Множеството A от дележи се нарича *НМ-решение,* ако:

1. Никои два дележа от A не се доминират един друг.
2. За всеки дележ, който не принадлежи на A, съществува дележ от A, който доминира над първия.

В този случай рационалното поведение се състои в избор на дележи от НМ-решението. Първото условие в определението на НМ-решение означава, че то определя една вътрешно непротиворечива „норма на поведение". Второто означава, че отклоняването на дадена коалиция от определената чрез НМ-решението „норма на поведение" не е изгодна за „обществото" като цяло, т. е. за всеки избор на дележ, който не принадлежи на НМ-решението, ще се намери коалиция, за която този дележ ще бъде неприемлив. Следователно бихме могли да кажем, че така формираната „норма на поведение" притежава устойчивост по отношение действията на цялото „общество".

Съществуват кооперативни игри, които притежават повече от едно НМ-решение. Това означава, че в „обществото", съответствуващо на тази игра, условията позволяват да се формират повече от една „норма на поведение". При това, въпреки че всяка от тях е вътрешно непротиворечива, те могат да бъдат повече или по-малко противоречащи една на друга. Определянето на онази от тях, която ще се установи в такова „общество", зависи от други фактори. Друга трудност, свързана с използуването на НМ-решение е, че не всички кооперативни игри притежават решение. Съществува пример на игра с 10 участници, която не притежава НМ-решение.

Следната теорема дава връзката между НМ-решението и ядрото.

Теорема 5.7. *Ако кооперативната игра* $\Gamma(v,N)$ *притежава непразно ядро* C *и НМ-решение* A, *то* $C \subset A$.

Доказателство. Ако дележът $(x_1,\ldots,x_N)\in C$ принадлежи на ядрото, той не се доминира от никакъв дележ, включително и от дележите от A. Но тогава той трябва да принадлежи на A.

Теорема 5.8. *Всяко НМ-решение на една съществена кооперативна игра* $\Gamma(v,N)$ *съдържа поне два дележа.*

Доказателство. Да допуснем, че съществената игра $\Gamma(v,N)$ има НМ-решение, което се състои от единствения дележ $(x_1,\ldots,x_N)$. Тъй като

$$\sum_{k=1}^{N} x_k = v(K), \qquad \sum_{k=1}^{N} v(k) \leq v(K),$$

ще се намери k_0, $1\leq k_0\leq N$, за което $x_{k_0} > v(k_0)$. Но тогава векторът $(y_1,\ldots,y_N)$, където

$$y_k = x_k + \frac{1}{N-1}(x_{k_0} - v(k_0)) \text{ за } k \neq k_0 \text{ и } y_{k_0} = v(k_0)$$

е дележ, който не се доминира от дележа $(x_1,\ldots,x_N)$ по отношение на никоя коалиция с брой на участвуващите в нея p, $1<p<N$. Достигнатото противоречие доказва теоремата.

Теорема 5.9. *Нека кооперативната игра* $\Gamma(v,N)$ *е еквивалентна на кооперативната игра* $\Gamma(v',N)$, *като* r *и* α_k, $k=1,\ldots,N$ *са числата в* (5.14). *Тогава:*

а) *ако* $(x_1,\ldots,x_N)$ *е дележ в играта* $\Gamma(v,N)$, *то* $(x'_1,\ldots,x'_N)$, *където*

$$x'_k = r x_k + \alpha_k, \quad k=1,\ldots,N, \tag{5.25}$$

е дележ в играта $\Gamma(v',N)$;

б) *ако* $(x_1,\ldots,x_N)$ *и* $(y_1,\ldots,y_N)$ *са два дележа в играта* $\Gamma(v,N)$, S *е коалиция,* $(x_1,\ldots,x_N) > S(y_1,\ldots,y_N)$ *и* $(x'_1,\ldots,x'_N)$, $(y'_1,\ldots,y'_N)$ *са съответните дележи от* (5.25), *то* $(x'_1,\ldots,x'_N) > S(y'_1,\ldots,y'_N)$.

Доказателство. За вектора $(x'_1,\ldots,x'_N)$ от (5.25) са изпълнени следните съотношения:

$$x'_k = r x_k + \alpha_k \geq r v(k) + \alpha_k = v'(k).$$

$$\sum_{k=1}^{N} x'_k = \sum_{k=1}^{N}(r x_k + \alpha_k) = r\sum_{k=1}^{N} x_k + \sum_{k=1}^{N}\alpha_k = r v(K) + \sum_{k=1}^{N}\alpha_k = v'(K).$$

Следователно $(x'_1,\ldots,x'_N)$ е дележ на играта $\Gamma(v'\,N)$.

Да преминем към доказателството на б). Нека S е коалиция от ν участници, където $1<\nu<N$. Тогава съответно от (5.20), (5.25) и от (5.21), (5.25) получаваме

$$\sum_{k\in S} x'_k = \sum_{k\in S} r x_k + \sum_{k\in S}\alpha_k \leq r v(S) + \sum_{k\in S}\alpha_k = v',(S),$$

$$x'_k = r x_k + \alpha_k > r y_k + \alpha_k = y'_k \text{ за } k \in S.$$

Но това е достатъчно да твърдим, че $(x'_1,\ldots,x'_N) > S(y'_1,\ldots,y'_N)$.

Съгласно с теорема 5.9 отношението еквивалентност запазва доминирането. От нея получаваме

Следствие 5.3. *Нека кооперативната игра* $\Gamma(v,N)$ *е еквивалентна на кооперативната игра* $\Gamma(v',N)$, *като* r *и* α_k $k=1,\ldots N$ *са числата в* (5.14). *Тогава, ако* A *е НМ-решение на първата игра, а* C *е нейното ядро, то множествата*

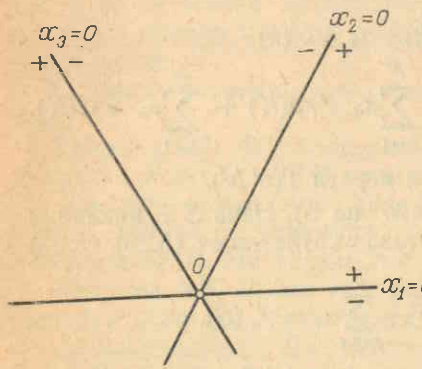
$$A' = \{(x'_1,\ldots,x'_N)/x'_k = r x_k + \alpha_k, (x_1,\ldots,x_N)\in A\},$$

$$C' = \{(x'_1,\ldots,x'_N)/x'_k = r x_k + \alpha_k, (x_1,\ldots,x_N)\in C\},$$

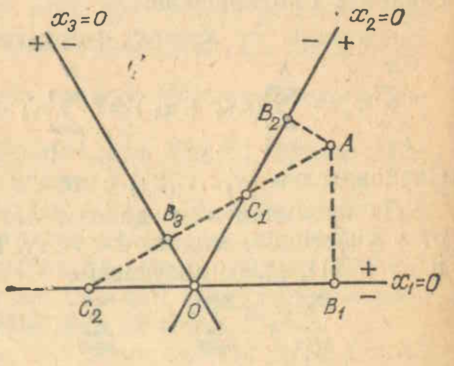
са съответно НМ-решение и ядро за втората игра.

Намирайки НМ-решенията или ядрото на играта в редуцирана форма, съгласно със следствие 5.3 можем да конструираме съответно НМ-решението или ядрото на всички игри от разглеждания клас на еквивалентност. В следващата точка ще се спрем на намирането на НМ-решението на някои игри в редуцирана форма и след това ще покажем как можем да намерим НМ-решението на произволна игра от същия клас на еквивалентност.

При изследването на съществените кооперативни игри с трима участници в редуцирана форма е удобно в равнината да се въведе следната координатна система. Да вземем три прави, преминаващи през една точка и сключващи помежду си ъгъл 60°. Нека всяка от тях разделя равнината на две полуравнини — положителна и отрицателна, както е показано на фиг. 5.2, където



Фиг. 5.2



Фиг. 5.3

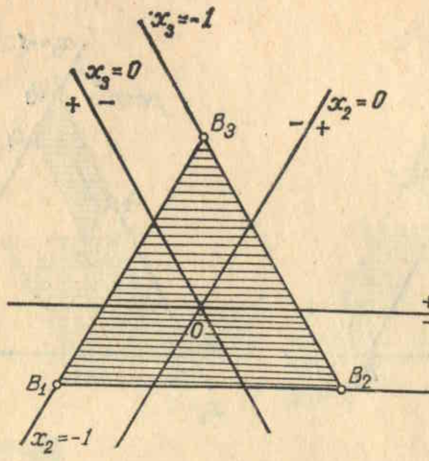
правите с уравнения $x_1=0$, $x_2=0$, $x_3=0$ са означени съответно с x_1, x_2, x_3. На всяка точка от равнината да съпоставим тройка числа (x_1, x_2, x_3), които представляват разстоянията със знак от тази точка съответно до правите x_1, x_2, x_3. Тогава за всяка точка е изпълнено равенството

(5.26) $$x_1+x_2+x_3=0.$$

Например да разгледаме точката A от фиг. 5.3. Лесно се проверява, че $\sphericalangle AC_1B_2=\sphericalangle B_3C_1O=\sphericalangle B_3C_2O=30°$ и че $\triangle OC_2B_3$ е еднакъв с $\triangle OB_3C_1$. От $\triangle AC_1B_2$ получаваме $x_2=AB_2=\frac{1}{2}AC_1$, а от $\triangle AB_1C_2$ имаме $x_1=AB_1=\frac{1}{2}AC_2=\frac{1}{2}(AC_1+C_1B_3+B_3C_2)$, а от $\triangle C_1OB_2$ и $\triangle OC_2B_3 - C_1B_3=B_2C_2$. Следователно

$$x_1+x_2+x_3=\frac{1}{2}AC_1+\frac{1}{2}(AC_1+C_1B_3+B_2C_2)-AC_1-C_1B_3=0.$$

По такъв начин имаме кординатна система в равнината, координатите на точките относно която автоматически удовлетворяват едното от условията, определящи дележите в кооперативните игри в редуцирана форма с трима участници. Точките, чиито координати удовлетворяват неравенствата $x_1\geqq-1$, $x_2\geqq-1$, $x_3\geqq-1$, лежат в защрихованата област на фиг. 5.4. Това са дележите в разглежданата игра.



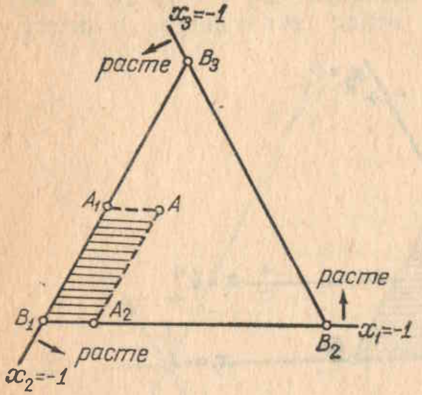
Фиг. 5.4

За простота по-нататък ще се ограничим с единствената съществена игра на трима участници с постоянна сума. Да припомним, че доминиране в такава игра е възможно само по отношение на коалициите от двама участници. Да вземем коалицията {1,2}. Доминирането на дележа (x_1, x_2, x_3) над дележа (y_1, y_2, y_3) по отношение на нея означава, че са изпълнени неравенствата

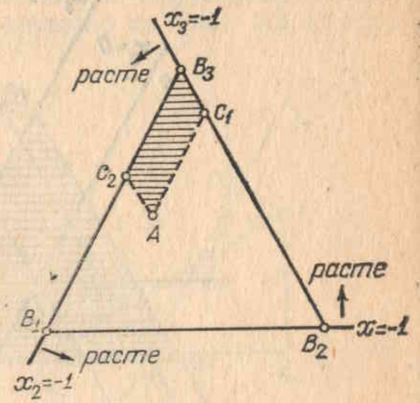
(5.27) $$x_1+x_2\leqq v(1,2)=1,$$

(5.28) $$x_1>y_1, \quad x_2>y_2.$$

Нека дележът (x_1, x_2, x_3) е представен като точка A на фиг. 5.5, където е означена и посоката на растене на съответните координати. Неравенството (5.27) се изпълнява автоматически, понеже от (5.26) следва, че $x_1+x_2=-x_3\leqq 1$. Да проверим за кои дележи (y_1, y_2, y_3) са изпълнени неравенствата (5.28). Неравенството $x_1>y_1$ означава, че всички дележи, над които доминира дележът (x_1, x_2, x_3), трябва да се намират строго под правата през A, успоредна на отсечката B_1B_2. От друга страна, неравенството $x_2>y_2$ означава, че всички дележи, над които доминира дележът (x_1, x_2, x_3), трябва да се намират строго вляво от правата през A, успоредна на отсечката B_1B_3. Следователно дележът (x_1, x_2, x_3) ще бъде предпочитан от коалицията $\{1,2\}$ пред дележите от защрихованата област на фиг. 5.5, като отсечките AA_1 и AA_2 се изключват.



Фиг. 5.5



Фиг. 5.6

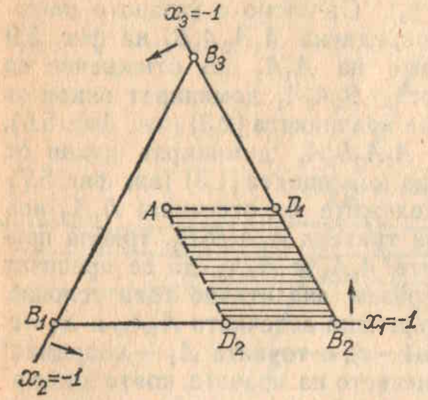
Аналогично множеството от дележите, над които доминира дележът (x_1, x_2, x_3) по отношение на коалицията $\{2,3\}$, е защрихованата област на фиг. 5.6 без отсечките AC_1 и AC_2. Множеството от дележите, над които доминира дележът (x_1, x_2, x_3) по отношение на коалицията $\{1,3\}$, е защрихованата област на фиг. 5.7 без отсечките AD_1 и AD_2. Следователно множеството от всички дележи, над които доминира дележът (x_1, x_2, x_3), съвпада със защрихованата област на фиг. 5.8. От направения анализ на доминирането в разглежданата игра става ясно, че необходимото и достатъчно условие два дележа да не се доминират е точките, които им съответствуват, да лежат на права, успоредна на една от отсечките B_1B_2, B_2B_3, B_3B_1.

От следствие 5.2 знаем, че ядрото на съществените игри с постоянна сума е празно. Затова да разгледаме различните НМ-решения в съществената кооперативна игра в редуцирана форма на трима участници. Най-напред ще отбележим, че съгласно с теорема 5.8 всяко НМ-решение на тази игра трябва да съдържа поне два дележа. Понеже никои два дележа от НМ-решението не се доминират, то съгласно казаното по-горе отсечката, която свързва два произволни дележа от НМ-решението, трябва да бъде ус-

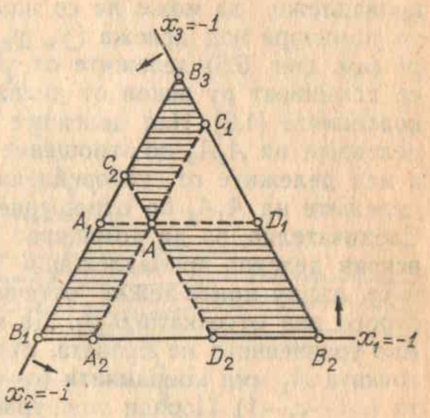
поредна на една от страните на $\triangle B_1B_2B_3$ (фиг. 5.8). По-нататък ще разглеждаме следните два възможни случая:

всички принадлежащи на НМ-решението дележи лежат на една права;

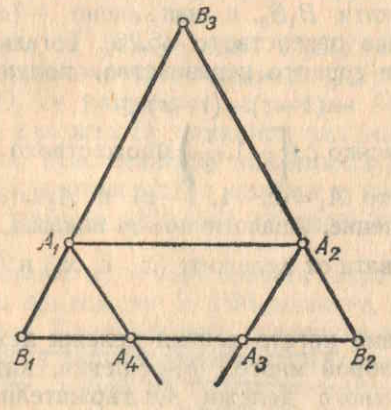
не всички дележи от НМ-решението лежат на една права.



Фиг. 5.7



Фиг. 5.8



Фиг. 5.9

Да се спрем най-напред на първия случай. За определеност да предположим, че всички дележи от НМ-решението принадлежат на отсечката A_1A_2, която е успоредна на отсечката B_1B_2 от фиг. 5.9. Тъй като никои два дележа от отсечката A_1A_2 не се доминират помежду си, трябва цялата отсечка да се съдържа в НМ-решението, защото в противен случай ще остане дележ, който не се доминира от дележ, принадлежащ на НМ-решението.

За да бъде множеството от точките на отсечката A_1A_2 едно НМ-решение, трябва за произволен дележ (y_1, y_2, y_3), който не й принадлежи, да може да се намери дележ от тази отсечка, който доминира над дележа (y_1, y_2, y_3). Съгласно с казаното по-горе (вж. фиг. 5.5) дележите от успоредника $A_1A_2A_3B_1$ на фиг. 5.9 се доминират от някои от дележите на A_1A_2 по отношение на коалицията $\{1,2\}$. Над дележите от $\triangle B_3A_2A_1$ доминират някои от дележите на A_1A_2 по отношение на коалицията $\{2,3\}$ (вж. фиг. 5.6), а над дележите от успоредника $A_1A_2B_2A_4$ доминират някои от дележите на A_1A_2 по отношение на коалицията $\{1,3\}$ (вж. фиг. 5.7). Следователно, за да доминират дележите от отсечката A_1A_2 над всички дележи, принадлежащи на трапеца $A_1A_2B_2B_1$, трябва правите, върху които лежат отсечките A_1A_4 и A_2A_3, да се пресичат строго под отсечката B_1B_2. Да изразим аналитично това условие. Ако уравнението на правата, съдържаща отсечката A_1A_2, е $x_1=c$, точката A_1 има координати $(c,-1,1-c)$, а точката A_2 — координати $(c,1-c,-1)$. Поради това уравнението на правата, която съдържа отсечката A_1A_4, има уравнение $x_3=1-c$, а тази, която съдържа отсечката A_2A_3 — уравнение $x_2=1-c$. За точките (x_1, x_2, x_3), лежащи под отсечката B_1B_2, е изпълнено $-(x_2+x_3)=x_1<-1$, където е използувано равенството (5.26). Тогава, полагайки $x_2=1-c$ и $x_3=1-c$ в горното неравенство, получаваме условието

$$-(1-c)-(1-c)<-1.$$

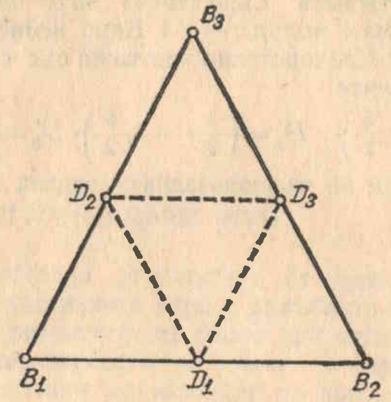
Следователно при всяко $c\in\left[-1,\frac{1}{2}\right)$ множеството от точките на отсечката A_1A_2, където $A_1=(c,-1, 1-c)$ и $A_2=(c, 1-c,-1)$ образуват едно НМ-решение. Аналогично се показва, че при всяко $c\in\left[-1,\frac{1}{2}\right)$ множествата от дележите (x_1, c, x_3) и (x_1, x_2, c) образуват НМ-решение.

Следователно само когато всички дележи лежат на една права, съществуват безброй много НМ-решения, като всяко от тях съдържа безброй много дележи. Съдържателното описание на НМ-решение от този вид е следното. Всеки двама от играчите могат да се договорят да дадат на третия играч c, $c\in\left[-1,\frac{1}{2}\right)$ и да разделят помежду си $-c$. По такъв начин те дискриминират третия играч и решават спора в полза на коалицията.

НМ-решение, дележите на което не лежат на една права, е тройката дележи

$$(5.29)\quad D_1=\left(-1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \quad D_2=\left(\frac{1}{2}, -1, \frac{1}{2}\right), \quad D_3=\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -1\right).$$

Това са точките, които са среди на отсечките B_1B_2, B_1B_3, B_2B_3 (фиг. 5.10). Ясно е, че никои два от тези дележи не се доминират.



Фиг. 5.10

При това дележите от успоредника $D_2D_3D_1B_1$ се доминират от дележа D_3 по отношение на коалицията $\{1,2\}$; дележите от успоредника $D_2D_3B_2D_1$ се доминират от дележа D_2 по отношение на коалицията $\{1,3\}$; дележът D_1 доминира над дележите на успоредника $D_1D_2B_3D_3$ по отношение на коалицията $\{2,3\}$. Следователно така определеното множество от дележи е едно НМ-решение. То е симетрично за тримата играчи и при него никой от играчите не се дискриминира.

С това е показано, че съществената игра с трима участници и постоянна сума притежава и НМ-решение, което се състои от краен брой дележи. Следователно условията в „обществото“, на което съответствува разглежданата игра, позволяват в него да се формират различни „норми на поведение“ на базата на изброените НМ-решения.

Да разгледаме задачата за определяне на едно НМ-решение за играта с трима участници, чиято характеристична функция се определя, както следва:

$$v(\varnothing)=0,\ v(1)=-2,\ v(2)=-3,\ v(3)=-4,$$
$$v(1,2)=4,\ v(1,3)=3,\ v(2,3)=2,\ v(1,2,3)=0.$$

Това е една съществена игра с нулева сума, която е еквивалентна на играта $\Gamma(v',3)$ с характеристична функция $v'(S)=rv(S)+\sum_{k\in S}\alpha_k$

при $r=\frac{1}{3}$, $\alpha_1=-\frac{1}{3}$, $\alpha_2=0$, $\alpha_3=\frac{1}{3}$.

Но $\Gamma(v',3)$ е единствената съществена игра на трима участници в редуцирана форма с модул $\gamma=-1$. Едно нейно НМ-решение бяха дележите (5.29). Следователно съгласно със следствие 5.3 множеството от дележите

$$D_1'=\left(-4,\frac{3}{2},\frac{5}{2}\right),\quad D_2'=\left(\frac{1}{2},-3,\frac{5}{2}\right),\ D_3'=\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2}-2\right)$$

е едно НМ-решение на първоначалната задача с характеристична функция v.

ГЛАВА 6 НЕПРЕКЪСНАТИ ИГРИ

6.1. ЕДИН КЛАС АНТАГОНИСТИЧНИ ИГРИ

Тук ще бъдат обобщени резултатите от глава първа, които се отнасят до антагонистичните игри с вдлъбнато-изпъкнала платежна функция. Тези резултати ще бъдат приложени по-нататък при изследването на равновесието на силите в един клас антагонистични игри, стратегиите на играчите на които не са краен брой и играчите не притежават оптимални стратегии. Най-напред ще докажем аналог на теорема 1.3 за случая, когато множествата от стратегиите на двамата играчи са подмножества на метрични пространства.

Теорема 6.1. *Нека M_1 и M_2 са компактни метрични пространства с метрични функционали съответно r_1 и r_2, всяко от които съдържа изпъкналите комбинации на своите елементи, а $\mathscr{P}(X,Y)$ е реална числова функция, дефинирана и непрекъсната за $(XY)\in M=M_1\times M_2$, която е вдлъбната по $X\in M_1$ при всяка фиксирана* точка *$Y\in M_2$ и изпъкнала по $Y\in M_2$ при всяка фиксирана точка $X\in M_1$. Тогава антагонистичната игра $\Gamma(\mathscr{P},M)$ с платежна функция $\mathscr{P}$ и множества от стратегиите M_1 и M_2 съответно за първия и втория играч притежава седлова точка.*

Доказателство. Най-напред ще докажем, че за всеки две крайни подмножества $M_1'=\{X,\ldots,X_n\}\subset M_1$ и $M_2'=\{Y_1,\ldots,Y_m\}\subset M_2$ е изпълнено неравенството

$$\min_{Y\in M_2}\max_{X\in M_1'}\mathscr{P}(X,Y)\leq\max_{X\in M_1}\min_{Y\in M_2'}\mathscr{P}(X,Y). \tag{6.1}$$

За тази цел да разгледаме матричната игра с n стратегии за първия играч и m стратегии за втория и платежна матрица $(\|\mathscr{P}(X_i,Y_j)\|)_{ij}$. Съгласно с теорема 2.1 тя притежава седлова точка в смесени стратегии, т. е. съществуват вектори

$(x_1,\ldots,x_n),\ \sum_{i=1}^{n} x_i=1,\ x_i\geqq 0, i=1,\ldots,n;\ (y_1,\ldots,y_m), \sum_{j=1}^{m} y_j, y_j\geqq 0,\ j=1,\ldots,m,$

за които е вярно неравенството

$$(6.2)\qquad \max_{1\leqq i\leqq n}\sum_{j=1}^{m} y_j\mathscr{P}(X_i,Y_j)\leqq \min_{1\leqq j\leqq m}\sum_{i=1}^{n} x_i\mathscr{P}(X_i,Y_j).$$

От свойствата на множествата M_1 и M_2 следва, че

$$X_0=\sum_{i=1}^{n} x_i X_i \in M_1,\quad Y_0=\sum_{j=1}^{m} y_j Y_j \in M_2.$$

Понеже функцията $\mathscr{P}(X, Y)$ е вдлъбната по X и изпъкнала по Y, то

$$(6.3)\quad \sum_{j=1}^{m} y_j\mathscr{P}(X, Y_j)\geqq \mathscr{P}(X, Y_0),\ \sum_{i=1}^{n} x_i\mathscr{P}(X_i, Y)\leqq \mathscr{P}(X_0, Y).$$

Тогава от (6.2) и (6.3) получаваме

$$\max_{1\leqq i\leqq n}\mathscr{P}(X_i,\ Y_0)\leqq \min_{1\leqq j\leqq m}\mathscr{P}(X_0,\ Y_j),$$

откъдето следва неравенството (6.1).

Да преминем към доказателството на теоремата. Нека ε е произволно положително число. От непрекъснатостта на функцията P следва съществуването на такова число $\delta>0$, че винаги когато точките $X,\ X'\in M_1;\ Y,\ Y'\in M_2$ и $r_1(X,\ X')+r_2(Y,\ Y')<\delta$, е изпълнено

$$(6.4)\qquad |\mathscr{P}(X,\ Y)-\mathscr{P}(X',\ Y')|<\varepsilon.$$

Тъй като множествата M_1 и M_2 са компактни, съществуват крайни подмножества съответно $M_1'\subset M_1$ и $M_2'\subset M_2$ такива, че за всяка точка $Y\in M_2$ и всяка точка $X\in M_1$ могат да се намерят точки $X'\in M_1'$ и $Y'\in M_2'$, за които $r_1(X,\ X')<\delta$ и $r_2(Y,\ Y')<\delta$. Да означим с X^* и Y^* точки, които удовлетворяват равенствата

$$(6.5)\qquad \begin{aligned}\max_{X\in M_1'}\mathscr{P}(X,\ Y^*)&=\min_{Y\in M_2}\max_{X\in M_1'}\mathscr{P}(X,\ Y),\\ \min_{Y\in M_2'}\mathscr{P}(X^*,Y)&=\max_{X\in M_1}\min_{Y\in M_2'}\mathscr{P}(X,\ Y).\end{aligned}$$

Нека X е произволна точка от M_1 и X_1 е такава точка от множеството M_1', за която $r_1(X,\ X_1)<\delta$. Но тогава от (6.4) следва, че е в сила неравенството $\mathscr{P}(X_1,\ Y^*)\geqq\mathscr{P}(X,\ Y^*)-\varepsilon$, от което като вземем пред вид (6.5), получаваме

$$(6.6)\qquad \min_{Y\in M_2}\max_{X_1\in M_1'}\mathscr{P}(X_1,\ Y)=\max_{X_1\in M_1'}\mathscr{P}(X_1,\ Y^*)\geqq$$
$$\geqq\max_{X\in M_1}\mathscr{P}(X,\ Y^*)-\varepsilon\geqq\min_{Y\in M_2}\max_{X\in M_1}\mathscr{P}(X,\ Y)-\varepsilon.$$

Аналогично се доказва, че

$$(6.7)\qquad \max_{X\in M_1}\min_{Y_2\in M_2'}\mathscr{P}(X,\ Y_2)\leqq\max_{X\in M_1}\min_{Y\in M_2}\mathscr{P}(X,\ Y)+\varepsilon.$$

Съгласно с първата част от доказателството на настоящата теорема за крайните множества M_1' и M_2' е изпълнено неравенството (6.1). Тогава от (6.1), (6.6) и (6.7) следва, че

$$\min_{Y\in M_2}\max_{X\in M_1}\mathscr{P}(X,\ Y)-\varepsilon\leqq\max_{X\in M_1}\min_{Y\in M_2}\mathscr{P}(X,\ Y)+\varepsilon.$$

Но тъй като ε е произволно положително число, горното неравенство ще е вярно само ако

$$(6.8)\qquad \min_{Y\in M_2}\max_{X\in M_2}\mathscr{P}(X,\ Y)\leqq\max_{X\in M_1}\min_{Y\in M_2}\mathscr{P}(X,\ Y).$$

От (6.8) и лема 1.1 (доказателството на лемата при предположенията на теоремата 6.1 остава същото) следва равенството

$$\min_{Y\in M_2}\max_{X\in M_1}\mathscr{P}(X,\ Y)=\max_{X\in M_1}\min_{Y\in M_2}\mathscr{P}(X,\ Y).$$

С това теоремата е доказана.

Нека множествата M_1 и M_2 от теорема 6.1 са фиксирани и $M=M_1\times M_2$. С $\mathfrak{S}$ да означим множеството от всички антагонистични игри $\Gamma(\mathscr{P},\ M)$ с множества от стратегиите M_1 и M_2 и произволна платежна функция $\mathscr{P}$, удовлетворяваща предположенията на теорема 6.1, Ако $\Gamma(\mathscr{P},\ M)\in\mathfrak{S}$, то с $v(\mathscr{P})$ да означим нейната цена, а с $S(\mathscr{P})$ — множеството от седловите ѝ точки. Повтаряйки доказателството на теорема 1.4, получаваме следната

Теорема 6.2 *За всяка игра* $\Gamma(\mathscr{P}_0,\ M)\in\mathfrak{S}$ *и всяко число* $\varepsilon>0$ *съществува такова число* $\delta>0$. *че ако играта* $\Gamma(\mathscr{P},\ M)\in\mathfrak{S}$ *и е изпълнено*

$$\max_{X\in M_1}\min_{Y\in M_2}|\mathscr{P}(X,\ Y)-\mathscr{P}_0(X,\ Y)|<\delta,$$

то $|v(\mathscr{P})-v(\mathscr{P}_0)|<\varepsilon$ *и за всяка седлова точка* $(X,\ Y)\in S(\mathscr{P})$ *ще се намери седлова точка* $(X_0,\ Y_0)\in S(\mathscr{P}_0)$, *за която*

$$r_1(X,\ X_0)+r_2(Y,\ Y_0)<\varepsilon.$$

6.2. НЯКОИ СВОЙСТВА НА МНОЖЕСТВОТО ОТ МОНОТОННИТЕ ФУНКЦИИ

За измерване на разстоянието между две подмножества на едно метрично пространство е въведена метрика от немския математик Ф. Хаусдорф. Ако графиките на функциите се разглеждат като множества от точки в равнината, използувайки идеята на Хаусдорф, за измерване на разстоянието между две функции може да се въведе метрика от хаусдорфов тип. Такива метрики за разнообразни класове функции са използувани от различни автори, между които следва да се отбележат Р. Леви (вж. [7]) и Бл. Сендов (вж. [23]). По-нататъшното изложение се основава на цитираните работи [7,23].

Нека функцията $\varphi(t)$, $a \leqq t \leqq b$ е монотонно растяща. Допълнена графика на тази функция се нарича множеството от точки

$$\bar{\varphi} = \{(t,\ z) \mid t \in [a,\ b],\ z \in [I_\varphi(t),\ S_\varphi(t)]\},$$

където

$$I_\varphi(t) = \begin{cases} \varphi(a),\ t = a, \\ \sup\limits_{\tau<t} \varphi(\tau),\ t \in [a, b], \end{cases} \quad S_\varphi(t) = \begin{cases} \inf\limits_{\tau>t} \varphi(\tau),\ t \in [a,\ b], \\ \varphi(b),\ t = b. \end{cases}$$

Ще отбележим, че ако монотонно растящата функция $\varphi(t)$ е непрекъсната, то имаме $\bar{\varphi} = \{(t,\ \varphi(t)) \mid t \in [a,\ b]\}$, т. е. множеството $\bar{\varphi}$ съвпада с графиката на функцията φ. Ако $\varphi(t)$ има вида от фиг. 6.1, на $\bar{\varphi}$ ще принадлежат всички точки $(t,\ \varphi(t))$ за $t \in [a,\ b]$ и точките от отсечката AB. В този случай $\bar{\varphi}$ се състои от графиката на функцията φ, която е допълнена от вертикалната отсечка, свързваща точките $\left(t_0,\ \sup\limits_{\tau<t_0} \varphi(\tau)\right)$ и $\left(t_0,\ \inf\limits_{\tau>t_0} \varphi(\tau)\right)$.

Ако $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$ са две монотонно растящи функции за $t \in [a,\ b]$, да въведем означението

$$(6.9)\quad \varphi_i(t) \dot{-} \varphi_j = \min_{(\tau,\ t) \in \bar{\varphi}_j} \max\left[\,|t-\tau|,\ |\varphi_i(t) - z|\,\right];\ i,\ j = 1,2,\ i \neq j.$$

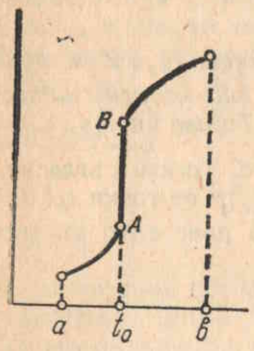
От (6.9) следва, че $\varphi_1(t) \dot{-} \varphi_2$ се равнява на половината от дължината на страната на най-малкия квадрат със страни, успоредни на координатните оси, и център точката $(t,\ \varphi_1(t))$, който има обща точка с допълнената графика на функцията φ_2. Това е показано на фиг. 6.2.

Хаусдорфово разстояние между монотонно растящите функции $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$, $t \in [a,\ b]$ се нарича числото

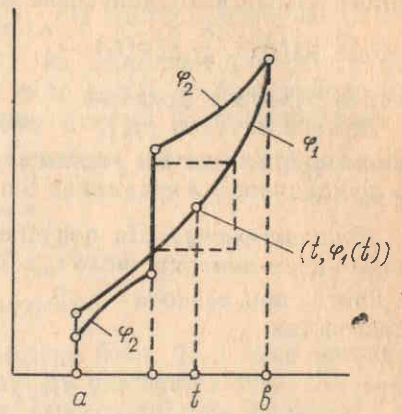
$$(6.10)\qquad r(\varphi_1,\ \varphi_2) = \sup_{t \in [a,\ b]} \max\left[\varphi_1(t) \dot{-} \varphi_2,\ \varphi_2(t) \dot{-} \varphi_1\right].$$

Разстоянието между функциите φ_1 и φ_2 от (6.10) по същество е разстоянието между допълнените графики на двете функции.

С $\mathscr{L}$ да означим множеството от дефинираните в интервала [0,1] функции $\varphi(t)$, за които:



Фиг. 6.1



Фиг. 6.2

1) $\varphi(0) = 0,\ \varphi(1) = 1$;
2) $\varphi(t)$ е монотонно растяща функция (не непременно строго);
3) $\varphi(t)$ е непрекъсната отдясно в интервала (0,1).

Лесно се показва, че ако разстоянието между две функции от $\mathscr{L}$ определим по формулата (6.10), това множество се превръща в метрично пространство, т. е. изпълнени са аксиомите:

1) $r(\varphi_1,\ \varphi_2) = 0$ тогава и само тогава, когато $\varphi_1 = \varphi_2$;
2) $r(\varphi_1,\ \varphi_2) = r(\varphi_2,\ \varphi_1)$;
3) $r(\varphi_1,\ \varphi_2) + r(\varphi_1,\ \varphi_3) \leqq r(\varphi_3,\ \varphi_2)$.

По-нататък ще предполагаме, че множеството $\mathscr{L}$ е снабдено с тази метрика. Ще напомним, че функциите от $\mathscr{L}$ имат не повече от изброимо много точки на прекъсване.

Лема 6.1. *Нека редицата от функции* $\{\varphi_k\}_1^\infty$, $\varphi_k \in \mathscr{L}$ *е сходяща във всяка точка на множеството* $\Delta \subset [0,1]$ *към функцията* φ. *Тогава функцията* φ *е монотонно растяща в множеството* Δ.

Доказателство. Да допуснем, че съществуват две точки $t_1 < t_2$, принадлежащи на Δ, за които $\varphi(t_1) - \varphi(t_2) = c > 0$. От равенствата

$$\lim_{k\to\infty} \varphi_k(t_1) = \varphi(t_1),\ \lim_{k\to\infty} \varphi_k(t_2) = \varphi(t_2)$$

следва съществуването на такова k_0, че за всяко $k \geqq k_0$ ще бъде изпълнено

$$\varphi(t_1) < \varphi_k(t_1) + \frac{c}{4}, \quad \varphi(t_2) > \varphi_k(t_2) - \frac{c}{4}.$$

Тогава направеното допускане ни довежда до противоречието

$$\varphi_k(t_2) < \varphi(t_2) + \frac{c}{4} < \varphi(t_1) - \frac{c}{2} + \frac{c}{4} < \varphi_k(t_1) + \frac{c}{4} - \frac{c}{2} + \frac{c}{4} = \varphi_k(t_1).$$

С това лемата е доказана.

Лема 6.2. *Нека $\{\varphi_k\}_1^\infty$ е редица от функции $\varphi_k \in \mathscr{L}$ и функцията $\varphi \in \mathscr{L}$, като във всяка точка $t \in (0,1)$ на непрекъснатост на функцията φ е изпълнено $\lim\limits_{k\to\infty} \varphi_k(t) = \varphi(t)$. Тогава $\lim\limits_{k\to\infty} r(\varphi_k, \varphi) = 0$.*

Доказателство. Да допуснем противното. Тогава съгласно с (6.10) ще се намерят число $\varepsilon_0 > 0$ и редица $\{t_k\}_1^\infty$ от точки $t_k \in (0,1)$, за които при всяко $k=1, 2, \ldots$ е изпълнено поне едно от двете неравенства

(6.11) $$\varphi_k(t_k) \dot{-} \varphi > \varepsilon_0,$$

(6.12) $$\varphi(t_k) \dot{-} \varphi_k > \varepsilon_0.$$

Без ограничение на общността можем да считаме, че $\lim\limits_{k\to\infty} t_k = t^*$ и $|t_k - t^*| < \frac{\varepsilon_0}{8}$. Да предположим най-напред, че за всяко $k=1, 2, \ldots$ е изпълнено неравенството (6.11). Това означава, че при $k=1, 2, \ldots$ квадратът със страни, успоредни на координатните оси, с дължина $2\varepsilon_0$ и център точката $(t_k, \varphi_k(t_k))$ не съдържа точки от допълнената графика на функцията φ. Следователно за всяка точка $\tau \in \left(t^* - \frac{\varepsilon_0}{2}, t^* + \frac{\varepsilon_0}{2}\right) \cap [0,1]$ е изпълнено точно едно от следните неравенства:

(6.13) $$\varphi(\tau) < \varphi_k(t_k) - \varepsilon_0, \quad \varphi(\tau) > \varphi_k(t_k) + \varepsilon_0.$$

Да разгледаме случая, когато за всяко $k=1, 2, \ldots$ е изпълнено неравенството (6.13). Другият случай се разглежда аналогично. Нека t_0 е точка на непрекъснатост на φ в интервала $\left(t^*, t^* + \frac{\varepsilon_0}{4}\right) \cap [0,1]$, ако $t^* < 1$, и $t_0 = 1$, ако $t^* = 1$. Тъй като $t_k \leqq t_0$ за всички достатъчно големи k, от свойствата на функцията φ_k имаме

(6.14) $$\varphi_k(t_k) \leqq \varphi_k(t_0).$$

От (6.13) за $\tau = t_0$ и от (6.14) получаваме

$$\varphi(t_0) < \varphi_k(t_k) - \varepsilon_0 \leqq \varphi_k(t_0) - \varepsilon_0.$$

Но това противоречи на сходимостта на редицата $\{\varphi_k\}_1^\infty$ към φ в точката t_0 на непрекъснатост на функцията φ. Следователно неравенството (6.11) не може да има място за безброй много индекси k.

Да допуснем, че за всички $k=1, 2, \ldots$ е изпълнено (6.12). Нека $\lim\limits_{k\to\infty} \varphi(t_k) = z$ и $|z - \varphi(t_k)| \leqq \frac{\varepsilon_0}{4}$. От (6.12) получаваме, че в квадрата със страни, успоредни на координатните оси, с дължина ε_0 и център точката (t^*, z) няма точки от допълнените графики на φ_k за всички достатъчно големи k. Следователно за $\tau \in \left(t^* - \frac{\varepsilon_0}{4}, t^* + \frac{\varepsilon_0}{4}\right) \cap [0,1]$ е изпълнено точно едно от неравенствата

(6.15) $$\varphi_k(\tau) < z - \frac{\varepsilon_0}{2}, \quad \varphi_k(\tau) > z + \frac{\varepsilon_0}{2}.$$

Да разгледаме случая, когато за всяко $k=1, 2, \ldots$ има място неравенството (6.15). Другият случай се разглежда аналогично. Избираме произволна точка τ_0 на непрекъснатост на функцията φ в интервала $\left(t^* - \frac{\varepsilon_0}{4}, t^*\right) \cap [0,1]$, ако $t^* > 0$, и $\tau_0 = 0$, ако $t^* = 0$. Тогава за всички достатъчно големи k имаме $\tau_0 \leqq t_k$ и от (6.15) за $\tau = \tau_0$ и монотонността на φ достигаме до

$$\varphi(\tau_0) \leqq \varphi(t_k) \leqq z + \frac{\varepsilon_0}{4} < \varphi_k(\tau_0) - \frac{\varepsilon_0}{4},$$

което противоречи на сходимостта на редицата $\{\varphi_k(\tau_0)\}_1^\infty$ към $\varphi(\tau_0)$. Следователно за подредица на редицата $\{\varphi_k\}_1^\infty$ неравенството (6.12) също не може да бъде изпълнено. Достигнатото противоречие доказва лемата.

Лема 6.3. *Нека $\{\varphi_k\}_1^\infty$ е една редица от функции $\varphi_k \in \mathscr{L}$ и функцията $\varphi \in \mathscr{L}$. Тогава, ако $\lim\limits_{k\to\infty} r(\varphi_k, \varphi) = 0$, във всяка точка $t \in (0,1)$ на непрекъснатост на функцията φ е изпълнено $\lim\limits_{k\to\infty} \varphi_k(t) = \varphi(t)$.*

Доказателство. Да допуснем противното. Тогава ще се намерят число $\varepsilon_0 > 0$ и точка $t_0 \in (0,1)$ на непрекъснатост на функцията φ такива, че за всяко k е изпълнено точно едно от неравенствата

(6.16) $$\varphi_k(t_0) < \varphi(t_0) - \varepsilon_0, \quad \varphi_k(t_0) > \varphi(t_0) + \varepsilon_0.$$

Да предположим, че е изпълнено (6.16). Другият случай се разглежда аналогично. Тогава има число $\delta \in (0, \varepsilon_0)$ такова, че $t_0 - \delta \in (0,1)$ и $\varphi\left(t_0 - \frac{\delta}{2}\right) \geqq \varphi(t_0) - \frac{\varepsilon_0}{2}$. Следователно, като вземем пред вид (6.16) за точките $t \in (t_0 - \delta, t_0)$, получаваме

$$\varphi_k(t) \leqq \varphi_k(t_0) < \varphi(t_0) - \varepsilon_0 \leqq \varphi\left(t_0 - \frac{\delta}{2}\right) - \frac{\varepsilon_0}{2}.$$

Но това неравенство означава, че в квадрата със страни, успоредни на координатните оси, с дължина δ и център точката $\left(t_0 - \frac{\delta}{2}, \varphi\left(t_0 - \frac{\delta}{2}\right)\right)$, няма точка от допълнената графика на функцията φ_k, откъдето следва, че $r(\varphi_k, \varphi) \geqq \varphi\left(t_0 - \frac{\delta}{2}\right) - \varphi_k > \frac{\delta}{2}$. Достигнатото противоречие доказва лемата.

Основна в тази точка се явява следната

Теорема 6.3. *От всяко безкрайно подмножество $\mathscr{L}'$ с $\mathscr{L}$ може да се избере редица, сходяща относно метричния функционал r към функция $\varphi \in \mathscr{L}$. Множеството $\mathscr{L}$ е компактно.*

Доказателство. Нека $\Delta = \{\tau_1, \ldots, \tau_m, \ldots\}$ е множество от всички рационални числа в интервала $[0,1]$. Тъй като множеството от числа $\{\varphi(\tau_1) / \varphi \in \mathscr{L}'\}$ е ограничено, можем да изберем подредица $\{\varphi_k^1\}_1^\infty$, която да е сходяща в точката τ_1. От редицата $\{\varphi_k^1\}_1^\infty$ избираме подредица $\{\varphi_k^2\}_1^\infty$, която е сходяща в точката $\tau_2 \in \Delta$. По-нататък от редицата $\{\varphi_k^2\}_1^\infty$ избираме подредица, която е сходяща в точката $\tau_3 \in \Delta$, и т. н. Диагоналната редица $\{\varphi_k^k\}_1^\infty$ ще се схожда във всички рационални точки от Δ. Ако граничната функция означим с v, съгласно с лема 6.1 тя ще бъде монотонно растяща в множеството Δ. Да положим $\varphi(0) = 0$, $\varphi(1) = 1$ и за $t \in (0, 1)$ нека $\varphi(t) = \inf\limits_{t < \tau_s} v(\tau_s)$. Функцията $\varphi(t)$ е монотонно растяща и непрекъсната отдясно за $t \in (0, 1)$. Следователно $\varphi \in \mathscr{L}$.

Нека $t_0 \in (0, 1)$ е точка на непрекъснатост на функцията φ. Избираме произволно число $\varepsilon > 0$. От непрекъснатостта на φ в точката t_0 следва, че може да се намери такова число $\delta > 0$, че винаги когато $t \in (0, 1)$ и $|t - t_0| < \delta$, ще бъде изпълнено

$$|\varphi(t) - \varphi(t_0)| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{6.17}$$

Избираме рационално число $\tau'' \in (t_0, t_0 + \delta)$, за което от дефиницията на функцията φ в точката t_0 е изпълнено неравенството

$$\varphi(\tau'') - \varphi(t_0) < \frac{\varepsilon}{2} \tag{6.18}$$

и рационално число $\tau' \in \left(t_0 - \frac{\delta}{2}, t_0\right)$. Нека числото k_0 е толкова голямо, че за $k > k_0$ да са верни неравенствата

$$|\varphi_k(\tau') - v(\tau')| < \frac{\varepsilon}{2},$$

$$|\varphi_k(\tau'') - v(\tau'')| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Тогава от (6.17), (6.18) и от горните неравенства се получава

$$\varphi_k(t_0) - \varphi(t_0) \leqq \varphi_k(\tau'') - \varphi(t_0) \leqq |\varphi_k(\tau'') - v(\tau'')| + v(\tau'') - \varphi(t_0) < \varepsilon,$$

$$\varphi_k(t_0) - \varphi(t_0) \geqq -|\varphi_k(\tau') - v(\tau')| + v(\tau') - \varphi\left(t_0 - \frac{\delta}{2}\right) - \left|\varphi\left(t_0 - \frac{\delta}{2}\right) - \varphi(t_0)\right| > \varepsilon.$$

Получените неравенства означават, че диагоналната редица $\{\varphi_k^k\}_1^\infty$ се схожда към φ в произволно избраната точка t на непрекъснатост на функцията φ. Но оттук съгласно лема 6.2 получаваме, че $\lim\limits_{k \to \infty} r(\varphi_k^k, \varphi) = 0$. С това доказателството на теоремата е завършено.

6.3. ИНТЕГРАЛ НА СТИЛТЕС

Да се спрем на някои свойства на интеграла на Стилтес, който представлява едно от многобройните обобщения на интеграла на Риман (вж. [14]). Основните резултати (теоремите 6.4, 6.5, 6.6), които в по-обща форма могат да бъдат намерени в [14], се привеждат без доказателство. Доказват се само необходимите по-нататък при изучаването на непрекъснатите игри по-малко известни твърдения.

Нака $f(t)$, $0 \leqq t \leqq 1$ е непрекъсната функция и $\varphi \in \mathscr{L}$ (множеството $\mathscr{L}$ е определено в т. 6.2). Избираме едно деление $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = 1$ на интервала $[0, 1]$ и произволна точка $\tau_i \in [t_{i-1}, t_i]$, $i = 1, \ldots, n$. Да съставим сумата

$$\sum_{i=1}^{n} f(\tau_i)(\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1})). \tag{6.19}$$

Ако сумите (6.19), които съответствуват на произволни деления $\{t_i\}$ на интервала $[0, 1]$, клонят към определена граница, когато $\max\limits_i (t_i - t_{i-1})$ клони към нула и тази граница не зависи от начина на деление и от избора на точките τ_i, границата на сумите (6.19) се нарича *интеграл на Стилтес от функцията f по отношение на функцията φ* и се означава

$$\int_0^1 f(t)\,d\varphi(t).$$

Едно достатъчно условие за съществуване на интеграла на Стилтес се дава от следната

Теорема 6.4. *Ако функцията $f(t)$, $0\leqq t\leqq 1$ е непрекъсната, то за всяка функция $\varphi\in\mathscr{L}$ съществува интеграл на Стилтес от функцията f по отношение на функцията φ.*

Следващата теорема дава едно достатъчно условие за извършване на граничен преход в интеграла на Стилтес.

Теорема 6.5. *Нека $\{\varphi_k\}_1^\infty$ е редица от функции $\varphi_k\in\mathscr{L}$, която се схожда към функцията $\varphi\in\mathscr{L}$ във всяка точка на непрекъснатост на φ. Тогава за всяка непрекъсната функция $f(t)$, $0\leqq t\leqq 1$ е изпълнено равенството*

$$\lim_{k\to\infty}\int_0^1 f(t)\,d\varphi_k(t)=\int_0^1 f(t)\,d\varphi(t).$$

По-нататък ще бъдат необходими следните помощни твърдения.

Лема 6.4. *Ако функцията $f(t)$ е непрекъсната за $t\in[0, 1$ и функцията $\varphi\in\mathscr{L}$, то е справедлива оценката*

$$\left|\int_0^1 f(t)\,d\varphi(t)\right|\leqq\max_{0\leqq t\leqq 1}|f(t)|.$$

Доказателство. При произволно деление $0=t_0<t_1<\ldots<t_n='$, ако $\tau_i\in[t_{i-1}, t_i]$, то

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(\tau_i)(\varphi(t_i)-\varphi(t_{i-1}))\right|\leqq\sum_{i=1}^{n}|f(\tau_i)|(\varphi(t_i)-\varphi(t_{i-1}))\leqq$$
$$\leqq\max_{0\leqq t\leqq 1}|f(t)|(\varphi(1)-\varphi(0))=\max_{0\leqq t\leqq 1}|f(t)|.$$

Преминавайки в това неравенство от интегралните суми към тяхната граница, получаваме исканото неравенство.

Лема 6.5. *Нека $F(X, Y)$ е непрекъсната функция за $(X, Y)\in[0, 1]\times[0, 1]$. Тогава, ако $\varphi\in\mathscr{L}$ и $\psi\in\mathscr{L}$, то функциите*

$$(6.20)\quad g_1(Y)=\int_0^1 F(X, Y)\,d\varphi(X),\quad g_2(X)=\int_0^1 F(X,Y)\,d\psi(Y)$$

са непрекъснати в интервала [0, 1].

Доказателство. Нека ε е произволно положително число. От непрекъснатостта на функцията F следва съществуването на такова число $\delta>0$, че винаги когато точките X, X', Y, Y' принадлежат на интервала [0, 1] и $|X-X'|+|Y-Y'|<\delta$, то

$$|F(X, Y)-F(X', Y')|<\varepsilon.$$

Ако Y_1 и Y_2 са две точки от интервала [0, 1], за които $|Y_1-Y_2|<\delta$, то от лема 6.4 следва, че

$$|g_1(Y_1)-g_1(Y_2)|=\left|\int_0^1 F(X, Y_1)\,d\varphi(X)-\int_0^1 F(X, Y_2)\,d\varphi(X)\right|\leqq$$
$$\leqq\max_{0\leqq X\leqq 1}|(F\ X, Y_1)-F(X, Y_2)<\varepsilon.$$

С това непрекъснатостта на първата от функциите (6.20) е доказана. Аналогично се доказва и непрекъснатостта на втората.

От лема 6.5 и теорема 6.4 следва, че ако $F(X, Y)$ е непрекъсната функция за $(X, Y)\in[0, 1]\times[0, 1]$ и функциите φ, ψ принадлежат на множеството $\mathscr{L}$, съществуват интегралите

$$\int_0^1\left(\int_0^1 F(X, Y)\,d\varphi(X)\right)d\psi(Y),\quad\int_0^1\left(\int_0^1 F(X, Y)\,d\psi(Y)\right)d\varphi(X).$$

Тук има място следната

Теорема 6.6. *Ако фунцията $F(X, Y)$ е непрекъсната за $(X, Y)\in[0, 1]\times[0, 1]$ и функциите $\varphi\in\mathscr{L}$, $\psi\in\mathscr{L}$, то*

$$\int_0^1\left(\int_0^1 F(X, Y)\,d\varphi(X)\right)d\psi(Y)=\int_0^1\left(\int_0^1 F(X, Y)\,d\psi(Y)\right)d\varphi(X).$$

Общата стойност на двата интеграла се означава

$$\int_0^1\int_0^1 F(X, Y)\,d\varphi(X)\,d\psi(Y).$$

Лема 6.6. *Нека $F(X, Y)$ е непрекъсната функция за $(X, Y)\in[0,1]\times[0,1]$. Тогава, ако редицата $\{\varphi_k\}_1^\infty$ от функции*

$\varphi_k \in \mathscr{L}$ *се схожда към функцията* $\varphi \in \mathscr{L}$ *във всяка точка на непрекъснатост на* φ, *то равномерно за* $Y \in [0, 1]$

$$\lim_{k\to\infty}\int_0^1 F(X, Y)\, d\varphi_k(X) = \int_0^1 F(X, Y)\, d\varphi(X).$$

Доказателство. Да допуснем противното. Тогава ще се намерят число $\varepsilon_0 > 0$ и редица $\{Y_s\}_1^\infty$ от такива точки $Y_s \in [0, 1]$, че за всяко $s = 1, 2, \ldots$ да бъде изпълнено неравенството

$$(6.21)\qquad \left|\int_0^1 F(X, Y_s)\, d\varphi_{k_s}(X) - \int_0^1 F(X, Y_s)\, d\varphi(X)\right| > \varepsilon_0.$$

Без ограничаване на общността можем да считаме, че $\lim\limits_{s\to\infty} Y_s = Y^*$. От непрекъснатостта на функцията F и от теорема 6.5 следва, че за всички достатъчно големи s имаме

$$\max_{0\leq X\leq 1} |F(X, Y_s) - F(X, Y^*)| < \frac{\varepsilon_0}{3},$$

$$\left|\int_0^1 F(X, Y^*)\, d\varphi_{k_s}(X) - \int_0^1 F(X, Y^*)\, d\varphi(X)\right| < \frac{\varepsilon_0}{3}.$$

Като използуваме неравенството на триъгълника, лема 6.4 и неравенството (6.21), достигаме до противоречието

$$\varepsilon_0 < \left|\int_0^1 F(X, Y_s)\, d\varphi_{k_s}(X) - \int_0^1 F(X, Y_s)\, d\varphi(X)\right| \leq \left|\int_0^1 (F(X, Y_s) - \right.$$

$$\left. - F(X, Y^*)\, d\varphi_{k_s}(X)\right| + \left|\int_0^1 (F(X, Y^*) - F(X, Y_s))\, d\varphi(X)\right| +$$

$$+ \left|\int_0^1 F(X, Y^*)\, d\varphi_{k_s}(X) - \int_0^1 F(X, Y^*)\, d\varphi(X)\right| \leq$$

$$\leq 2 \max_{0\leq X\leq 1} |F(X, Y_s) - F(X, Y^*)| + \frac{\varepsilon_0}{3} < \varepsilon_0.$$

С това лемата е доказана.

6.4. ОСНОВНА ТЕОРЕМА ЗА НЕПРЕКЪСНАТИТЕ ИГРИ

Непрекъсната игра се нарича антагонистичната игра $\Gamma(F)$ с множества от стратегиите $M_1 = [0, 1]$ и $M_2 = [0, 1]$, съответно за първия и втория играч и с платежна функция $F(X, Y)$, дефинирана и непрекъсната за $(X, Y) \in M = M_1 \times M_2$. Тъй като за тази игра не са изпълнени достатъчните условия на теоремите 1.3 и 6.1, не може да се твърди, че тя притежава седлова точка. За изследване на равновесието на силите в нея отново се налага да се използуват смесени стратегии. При непрекъснатите игри смесените стратегии на двамата играчи представляват функциите на разпределение в интервала [0,1]. Известно е (вж. [20]), че функция на *разпределение* в интервала [0, 1] е всяка функция $\varphi(t)$, дефинирана за $t \in [0, 1]$, за която са изпълнени следните условия:

1) $\varphi(0) = 0, \quad \varphi(1) = 1$;
2) $\varphi(t)$ е монотонно растяща функция;
3) $\varphi(t)$ е непрекъсната отдясно в интервала (0,1).

Така че множеството от функциите на разпределение в интервала [0, 1] съвпада с множеството $\mathscr{L}$, въведено в т. 6.2.

Ако първият играч избере своята смесена стратегия $x \in \mathscr{L}$, а вторият — смесената си стратегия $y \in \mathscr{L}$, математическото очакване за резултата от така фиксираната партия за първия играч се дава с формулата

$$(6.22)\qquad P(x, y) = \int_0^1 \int_0^1 F(X, Y)\, dx(X)\, dy(Y).$$

С $\Gamma_c(F)$ да означим антагонистичната игра с платежна функция $P(x, y)$ и с множества от стратегиите на двамата играчи — множеството от вероятностните разпределения $\mathscr{L}$. Тази игра се нарича игра в смесени стратегии, съответствуваща на играта $\Gamma(F)$. Ще докажем следната основна теорема на непрекъснатите игри.

Теорема 6.7. *Играта в смесени стратегии* $\Gamma_c(F)$ *притежава седлова точка.*

Доказателство. Да проверим, че играта $\Gamma_c(F)$ удовлетворява условията на теорема 6.1. Тъй като множествата от стратегиите в играта $\Gamma_c(F)$ съвпадат с $\mathscr{L}$, съгласно теорема 6.3 тези множества са компактни. Ясно е, че те са и изпъкнали. Ще докажем, че функцията P от (6.22) е непрекъсната в множеството $\mathscr{L} \times \mathscr{L}$. Нека $\{\varphi_k\}_1^\infty$ и $\{\psi_k\}_1^\infty$ са две редици от функции $\varphi_k \in \mathscr{L}$, $\psi_k \in \mathscr{L}$ и φ, ψ са функции от $\mathscr{L}$ такива, че

$$\lim_{k\to\infty} (r(\varphi_k, \varphi) + r(\psi_k, \psi)) = 0.$$

Съгласно с лема 6.3 във всяка точка на непрекъснатост на функцията φ редицата $\{\varphi_k\}_1^\infty$ е сходяща към φ. Аналогично във всяка точка на непрекъснатост на функцията ψ редицата $\{\psi_k\}_1^\infty$ е сходяща към ψ. От лема 6.5 следва, че интегралите

$$\int_0^1 F(X, Y)\, d\varphi_k(X), \quad \int_0^1 F(X, Y)\, d\varphi(X),$$

са непрекъснатите функции на $Y \in [0, 1]$, а от лема 6.6 имаме, че равномерно за $Y \in [0, 1]$

$$\lim_{k\to\infty} \int_0^1 F(X, Y)\, d\varphi_k(X) = \int_0^1 F(X, Y)\, d\varphi(X).$$

Като приложим лема 6.4, получаваме

$$(6.23) \qquad \lim_{k\to\infty} \left| \int_0^1 \left(\int_0^1 F(X, Y)\, d\varphi_k(X)\right) d\psi_k(Y) - \int_0^1 \left(\int_0^1 F(X, Y)\, d\varphi(X) \right) d\psi_k(Y) \right| \leqq$$

$$\leqq \lim_{k\to\infty} \max_{0\leqq Y \leqq 1} \left| \int_0^1 F(X, Y)\, d\varphi_k(X) - \int_0^1 F(X, Y)\, d\varphi(X) \right| = 0.$$

От теорема 6.5 следва, че

$$(6.24) \qquad \lim_{k\to\infty} \left| \int_0^1 \left(\int_0^1 F(X, Y)\, d\varphi(X) \right) d\psi_k(Y) - \int_0^1 \left(\int_0^1 F(X, Y)\, d\varphi(X) \right) d\psi(Y) \right| = 0.$$

Но тогава от (6.23), (6.24) и неравенството на триъгълника получаваме

$$\lim_{k\to\infty} |P(\varphi_k, \psi_k) - P(\varphi, \psi)| =$$

$$= \lim_{k\to\infty} \left| \int_0^1 \int_0^1 F(X, Y) d\varphi_k(X)\, d\psi_k(Y) - \int_0^1 \int_0^1 F(X, Y) d\varphi(X) d\psi(Y) \right| \leqq$$

$$\leqq \lim_{k\to\infty} \left| \int_0^1 \left(\int_0^1 F(X, Y) d\varphi_k(X) \right) d\psi_k(Y) - \int_0^1 \left(\int_0^1 F(X, Y) d\varphi(X) \right) d\psi_k(Y) \right| +$$

$$+ \left| \int_0^1 \left(\int_0^1 F(X, Y) d\varphi(X) \right) d\psi_k(Y) - \int_0^1 \left(\int_0^1 F(X, Y) d\varphi(X) \right) d\psi(Y) \right| = 0.$$

Следователно всички предположения на теорема 6.1 са изпълнени и можем да твърдим , че играта $\Gamma_c(F)$ притежава седлова точка. С това теоремата е доказана.

Цената на играта $\Gamma_c(F)$ се нарича цена на играта $\Gamma(F)$, а всяка седлова точка на играта $\Gamma_c(F)$ — седлова точка в смесени стратегии на играта $\Gamma(F)$.

Нека $\mathfrak{G}$ е множеството от непрекъснатите игри $\Gamma(F)$, където $F(X, Y)$ е непрекъсната функция за $(X, Y) \in [0, 1] \times [0, 1]$. С $v(F)$ да означим цената на играта $\Gamma(F) \in \mathfrak{G}$, а с $S(F)$ — множеството от нейните седлови точки в смесени стратегии. Непосредствено от теорема 6.2 получаваме следната

Теорема 6.8. *За всяка игра $\Gamma(F_0) \in \mathfrak{G}$ и всяко число $\varepsilon > 0$ съществува такова число $\delta > 0$, че ако за играта $\Gamma(F) \in \mathfrak{G}$ е изпълнено*

$$\max_{0\leqq X\leqq 1} \max_{0\leqq Y\leqq 1} |F(X, Y) - F_0(X, Y)| < \delta,$$

то $|v(F) - v(F_0)| < \varepsilon$ и за всяка седлова точка $(x, y) \in S(F)$ ще се намери седлова точка $(x_0, y_0) \in S(F_0)$ такава, че

$$r(x_0\, x) + r(y_0,\, y) < \varepsilon.$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Изложените въпроси от теорията на игрите бяха обединени около проблемата за намиране на равновесното състояние в разглежданите „общества“. На равновесното състояние в различните случаи съответствуваше определена „норма на поведение“. „Нормата на поведение“ в различните „общества“ се формира от базата на условията в тях, като се спазват приетите правила, определящи правата и задълженията на отделните членове на тези „общества“. Основните изисквания към принципите, които постулират „нормите на поведение“, могат да се формулират по следния начин. На първо място те трябва да са вътрешно непротиворечиви. На второ място тези принципи трябва да гарантират устойчивостта на равновесното състояние по отношение на отклонения, които, разбира се, са разрешени от правилата в конкретното „общество“. При безкоалиционните игри „нормата на поведение“, определена от точките на равновесие, притежаваше устойчивост само по отношение на разрешените от правилата на играта индивидуални действия на отделните играчи. При кооперативните игри бяха разгледани две различни „норми на поведение“. Първата от тях беше определена с помощта на ядрото, а второто — с помощта на НМ-решението.

Съгласно казаното тази книга може да се разглежда като увод в теорията на равновесието в различни „общества“. Бяха споменати само някои резултати в тази теория, които са станали вече класически и лежат в основата на много подходи, прилагани при анализирането на различни модели. Ще споменем само, че главно според математическия апарат, който се използува, възможно е,

макар и твърде условно, изследванията в това направление да бъдат обединени в следните групи:

класическа теория на игрите;

диференциални игри;

икономически модели.

Няма да даваме подробна библиография по тези раздели на математиката и нейните приложения, станали вече твърде обширни, а ще си позволим да посочим няколко заглавия на монографии, които биха били полезни по наше мнение при по-нататъшното запознаване с теорията на равновесието.

Към споменатите вече книги за първия раздел ще добавим книгите [5, 9, 10, 17, 21, 22]. Диференциалните игри твърде подробно се изучават в [1, 15, 16], където е дадена обширна библиография. Икономически модели се разглеждат в [13, 18].

ЛИТЕРАТУРА

1. Айзекс, Р., Дифференциальные игры, изд. Мир, М., 1967.
2. Ауман, Р., Л. Шепли, Значения для неатомических игр, изд. Мир, М., 1977.
3. Бесконечные антогонистические игры, Физматгиз, М., 1963.
4. Вентцел, Е. С., Елементи от теория на игрите, изд. Наука и изкуство, С., 1965.
5. Воробьев, Н. Н., Теория игр. Лекции для экономистов — кибернетиков, изд. Ленинградского Университета, Л., 1974.
6. Гермейр, Ю. Б., Игры с непротивоположными интересами, изд. Наука, М., 1976.
7. Гнеденко, Б. В., А. Н. Колмогоров, Предельные распределения для сумм независимых случайных величин, М.—Л., 1949.
8. Гольштейн, Е. Г., Д. Б. Юдин, Новые направления в линейном программировании, изд. Советское радио, М., 1966.
9. Давыдов, Э. Г., Методы и модели теории антогонистических игр, М., 1978.
10. Дрешер, М., Стратегические игры — теория и приложения, изд. Советское радио, М., 1964.
11. Итеративные методы в теории игр и программировании, изд. Наука, М., 1974.
12. Кантарович, Л. В., Г. П. Акилов, Функциональный анализ, изд. Наука, М., 1977.
13. Карлин, С., Математические методы в теории игр, программировании и экономике, изд. Мир., М., 1964.
14. Колмогоров, А. Н., С. В. Фомин, Элементы теории функции и функционального анализа, изд. Наука, М., 1968.
15. Красовский, Н. Н., Игровые задачи о встрече движений, изд. Наука, М., 1970.
16. Красовский, Н. Н., А. И. Субботин, Позиционные дифференциальные игры, изд. Наука, М., 1974.
17. Мак-Кинси, Дж., Введение в теорию игр, Физматгиз, М., 1960.
18. Макаров, В. Л., А. М. Рубинов, Математическая теория экономической динамики и равновесия, изд. Наука, М., 1973.
19. фон Нейман, Дж., О. Моргенштерн, Теория игр и экономическое поведение, изд. Наука, М.. 1970.
20. Обретенов, А., Теория на вероятностите, Изд. Наука и изкуство, С., 1974.

21. Оуэн, Г., Теория игр, изд. Мир, М., 1971.
22. Партхасаратхи, Т., Т., Рагхаван, Некоторые вопросы теории игр двух лиц, изд. Мир, М., 1974.
23. Сендов, Б., Хаусдорфовые приближения, изд. БАН, С., 1979.
24. Спиридонов, В., Изследване на операциите, изд. Наука и изкуство, С., 1973.
25. Хаусдорфф, Ф., Теория множеств. М., 1936.
26. Христов, Г., Р. Калтинска, Математическо оптимиране, линейно оптимиране, изд. Наука и изкуство, С., 1972.

АЗБУЧЕН УКАЗАТЕЛ

вариационно смятане 8

дележ 147
доминиране 57

игра 8
— антагонистична 12
— безкрайна 12
— крайна 12
— безкоалиционна 11, 12, 117
— безкрайна 12
— в нормална форма 117
— крайна 12
— с ненулева сума 12
— с нулева сума 12
— биматрична 12, 128
— в редуцирана форма 150
— в смесени стратегии 42, 133, 179
— „герб-стотинка“ 14
— „двама престъпници“ 130
— диференциална 183
— еквивалентна 148
— кооперативна 10, 140
— в нормална форма 140
— несъществена 145
— с нулева сума 140
— с постоянна сума 146
— съществена 145
— матрична 13, 27
— симетрична 63
— непрекъсната 167
— „пазар“ 146
— позиционна 14, 117, 118
— „семеен спор“ 131
— шахматна 118
играчи 8
икономически модели 183
интеграл на Стилтес 175

квадратично оптимиране 108
коалиция 140

конфликтна ситуация 8
крайно дърво 119
линейно оптимиране 89

математическо оптимиране 8, 137
метод графичен 78
— на Браун 101
— на Джон фон Нойман 107
модул 150

НМ—решение 157

оптимално управление 8

партия 11, 118
платежна матрица 27
платежна функция 12
позиция 118

седлова точка 17, 28, 43, 179
— в смесени стратегии 42

случаен механизъм 118
стратегия 11
— оптимална 18
— смесена 42, 133, 179
— — оптимална 43
— чиста 43, 133

теорема на Брауер 137
точка на равновесие 13, 18, 125, 134

участник в играта 8

характеристична функция 140, 145
хаусдорфово разстояние 170
ход 118

цена на играта 16, 43

ядро 155

СЪДЪРЖАНИЕ

Предговор 5
Въведение 7

Глава 1. АНТАГОНИСТИЧНИ ИГРИ

1.1. Основни понятия и класификация на безкоалиционните игри 11
1.2. Антагонистични игри, седлови точки 14
1.3. Съществуване на седлова точка 20
1.4. Зависимост на решението на антагонистичните игри от началните данни 23

Глава 2. МАТРИЧНИ ИГРИ

2.1. Основни свойства, седлови точки 27
2.2. Примери на матрични игри 31
2.3. Смесени стратегии 40
2.4. Доминиране 57
2.5. Симетрични игри 63

Глава 3. МЕТОДИ ЗА РЕШАВАНЕ НА МАТРИЧНИ ИГРИ

3.1. Крайни методи 75
3.2. Итеративни методи 100

Глава 4. КРАЙНИ БЕЗКОАЛИЦИОННИ ИГРИ

4.1. Позиционни игри 117
4.2. Биматрични игри 128
4.3. Смесени стратегии 133

Глава 5. КООПЕРАТИВНИ ИГРИ

5.1. Кооперативни игри в нормална форма 140
5.2. Характеристични функции и дележи 145
5.3. Еквивалентни игри 148
5.4. Ядро и НМ-решение 154
5.5. Кооперативни игри с трима участници 159

Глава 6. НЕПРЕКЪСНАТИ ИГРИ

6.1. Един клас антагонистични игри 167
6.2. Някои свойства на множеството от монотонните функции 170
6.3. Интеграл на Стилтес 175
6.4. Основна теорема за непрекъснатите игри 178

Заключение 182

Литература 184

Азбучен указател 186

ТЕОРИЯ
НА ИГРИТЕ

ТОДОР ГИЧЕВ
ЗДРАВКА КАРАМИТЕВА

Рецензенти:
Асен Любомиров Дончев,
Веселин Стефанов Спиридонов
Редактор
Веселин Стефанов Спиридонов
Художник
Жеко Алексиев
Художествен редактор
Таня Николова
Технически редактор
Правда Колева
Коректор
Теменужка Балабанова

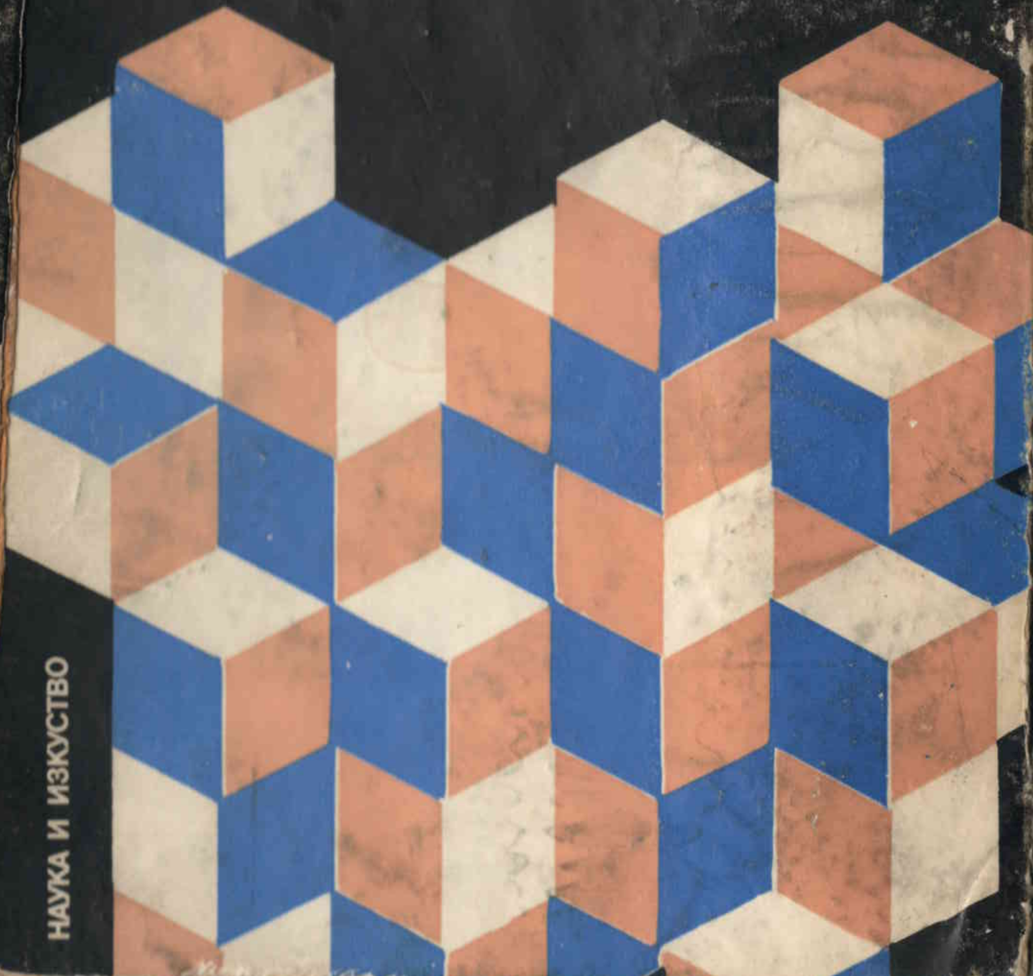
Дадена за набор на 7 V 1980 г.
Подписана за печат на 5 IX 1980 г.
Излязла от печат на 30 IX 1980 г.
Формат 60/84/16
Печатни коли 11,75
Издателски коли 10,96
Усл. изд. коли 10,84
Издателски № 24793
Литературна група III-4
КОД 02/95322/43311/2218—9—80
Тираж 4004
Цена 1,71 лв.

ДИ „Наука и изкуство" — София
ДП „Георги Димитров" — Ямбол

14 СЪВРЕМЕННА МАТЕМАТИКА

ТОДОР ГИЧЕВ
ЗДРАВКА КАРАМИТЕВА

ТЕОРИЯ НА ИГРИТЕ



НАУКА И ИЗКУСТВО

ТЕОРИЯ НА ИГРИТЕ

СЪВРЕМЕННА МАТЕМАТИКА

ЦЕНА 1,71 ЛВ.