Примерни задачи по Алгебра 1 за специалност Компютърни науки, II поток, 2012-2013 уч.г.

1 Задачи за контролна работа № 1

Задача 1. *Кои от следните подмножества на* $\mathbb{Q}^2$ *са подпространства:*

$$M_1 = \{(x, y) \in \mathbb{Q}^2 \quad | \quad x = 2y\},$$

$$M_2 = \{(x, y) \in \mathbb{Q}^2 \quad | \quad x = 2y, \quad 2x = y\},$$

$$M_3 = \{(x, y) \in \mathbb{Q}^2 \quad | \quad x = 2y + 1\},$$

$$M_4 = \{(x, y) \in \mathbb{Q}^2 \quad | \quad xy = 0\}.$$

Решение: Подмножеството M_1 е подпространство съгласно $(2y_1+2y_2, y_1+y_2) \in M_1$ за произволни $(2y_1, y_1), (2y_2, y_2) \in M_1$ и $q(2y_1, y_1) = (2(qy_1), qy_1) \in M_1$ за $\forall q \in \mathbb{Q}$, $\forall (2y_1, y_1) \in M_1$.

Подмножеството $M_2 = \{(0, 0)\} \subset \mathbb{Q}^2$ е подпространство.

Множеството M_3 не е подпространство на $\mathbb{Q}^2$, защото сумата на $(2y_1 + 1, y_1) \in M_3$ и $(2y_2 + 1, y_2) \in M_3$ е $(2(y_1 + y_2) + 2, (y_1 + y_2)) \not\in M_3$ и $q(2y_1 + 1, y_1) = (2(qy_1) + q, qy_1) \not\in M_3$ за $q \in \mathbb{Q} \setminus \{1\}$.

За $\forall (x, y) \in M_4$ и $\forall q \in \mathbb{Q}$ е в сила $q(x, y) = (qx, qy) \in M_4$, защото $(qx)(qy) = q^2(xy) = 0$. Но M_4 не е подпространство на $\mathbb{Q}^2$, защото $(1, 0), (0, 1) \in M_4$ и $(1, 0) + (0, 1) = (1, 1) \not\in M_4$.

Задача 2. *За кои стойности на реалния параметър* λ *векторите*

$$a_1 = (\lambda, -1, -1), \quad a_2 = (-1, \lambda, -1), \quad a_3 = (-1, -1, \lambda) \in \mathbb{R}^3$$

са линейно независими?

Решение: Векторите a_1, a_2, a_3 са линейно независими точно когато

$$\det \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & -1 \\ -1 & \lambda & -1 \\ -1 & -1 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda + 1)^2(\lambda - 2) \neq 0.$$

Задача 3. *(a) За кои стойности на параметъра* p *векторът* $b = (1, -1, p, 2p)$ *принадлежи на линейната обвивка на векторите*

$$a_1 = (1, -1, 2, 1), \quad a_2 = (3, 1, 2, -1), \quad a_3 = (1, -1, -1, 2).$$

(б) За кои стойности на параметъра p векторът $b = (1, 1, p, 1 - p)$ не принадлежи на линейната обвивка на векторите

$$a_1 = (1, 2, -2, 1), \quad a_2 = (1, -3, 1, -1), \quad a_3 = (1, 1, -1, -2).$$

Отговори: (а) $p = \frac{5}{7}$; (б) $p \neq -\frac{19}{11}$.

Задача 4. *Дадена е матрицата*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 5 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 8 & 11 & 19 & 0 & 11 \end{pmatrix} \in M_{4\times 5}(\mathbb{Q}).$$

Намерете базис на пространството на вектор-редовете на A и базис на пространството на вектор-стълбовете на A. Определете ранга на A.

Решение: С елементарни преобразувания по редове свеждаме A към

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

и определяме, че $\mathrm{rk}(A) = 4$. Четирите реда на A образуват базис на вектор-редовете.

За стълбовете $c_1, \ldots, c_5$ на A пресмятаме, че $c_1 - c_3 - 3c_4 + c_5 = \mathcal{O}$. Следователно кои и да са четири стълба на A, включващи c_2, образуват базис на пространството на вектор-стълбовете.

В задачи (5) - (**??**) да се пресметнат детерминантите:

Задача 5. *Пачи крак*

$$\Delta_{n+1} = \begin{vmatrix} a_0 & b_1 & b_2 & \ldots & b_{n-1} & b_n \\ c_1 & a_1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ c_2 & 0 & a_2 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{n-1} & 0 & 0 & \ldots & a_{n-1} & 0 \\ c_n & 0 & 0 & \ldots & 0 & a_n \end{vmatrix}.$$

Задача 6.

$$\Delta_{n+1} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 \\ 1 & x & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 2 & 2 & x & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ n-1 & n-1 & n-1 & \ldots & x & 0 \\ n & n & n & \ldots & n & x \end{vmatrix}.$$

Упътване: Представете Δ_{n+1} като сума спрямо първия ред, така че едното събираемо да има равни елементи в първи ред.

Задача 7.

$$\Delta_{n+1} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & -x_1 & x_2 & \dots & x_{n-1} & x_n \\ 1 & x_1 & -x_2 & \dots & x_{n-1} & x_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_1 & x_2 & \dots & -x_{n-1} & x_n \\ 1 & x_1 & x_2 & \dots & x_{n-1} & -x_n \end{vmatrix}.$$

Упътване: Умножете първи стълб с $-x_i$ и прибавете към $(i+1)$-ви стълб за $1 \le i \le n$.

Задача 8.

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} x+y & x & 0 & \dots & 0 & 0 \\ y & x+y & x & \dots & 0 & 0 \\ 0 & y & x+y & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x+y & x \\ 0 & 0 & 0 & \dots & y & x+y \end{vmatrix}.$$

Упътване: Изведете рекурентна зависимост от втора степен с постоянни коефициенти.

Задача 9.

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} x+y & 2x & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \frac{y}{2} & x+y & 2x & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{y}{2} & x+y & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x+y & 2x \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{y}{2} & x+y \end{vmatrix}.$$

Упътване: Изведете рекурентна зависимост от втора степен с постоянни коефициенти.

Задача 10. *Да се намери базис на пространството от решения на хомогенната линейна система*

$$\left| \begin{array}{lllll} x_1 & -x_2 & +x_3 & -x_4 & = 0 \\ x_1 & +x_2 & +2x_3 & +3x_4 & = 0 \end{array} \right. .$$

Да се определи за кои стойности на параметрите p и q векторът $(1, 2, p, q)$ принадлежи на пространството от решения на тази хомогенна линейна система.

Отговор: $p = 0$, $q = -1$.

Задача 11. *В линейното пространство $\mathbb{Q}^4$ са дадени пространството от решения U на хомогенната линейна система*

$$\left| \begin{array}{lllll} x_1 & +2x_2 & -6x_3 & +3x_4 & = 0 \\ x_1 & -2x_2 & +4x_3 & -3x_4 & = 0 \end{array} \right. \tag{1}$$

и пространството от решения W на хомогенната линейна система

$$\left| \begin{array}{lllll} x_1 & +x_2 & -2x_3 & & =0 \\ 2x_1 & -x_2 & -2x_3 & +x_4 & =0 \end{array} \right. . \tag{2}$$

Да се намерят базиси на сечението $U \cap W$ и сумата $U + W$.

Решение: Сечението $U \cap W$ е пространството от решения на хомогенната линейна система

$$\left| \begin{array}{lllll} x_1 & +2x_2 & -6x_3 & +3x_4 & =0 \\ x_1 & -2x_2 & +4x_3 & -3x_4 & =0 \\ x_1 & +x_2 & -2x_3 & & =0 \\ 2x_1 & -x_2 & -2x_3 & +x_4 & =0 \end{array} \right. , \tag{3}$$

получена чрез обединение на уравненията на системите (1) и (2). Пространството от решения на (3) е правата, породена от вектора $a_1 = (1, 1, 1, 1)$.

По Теоремата за размерност на сума и сечение,

$$\dim(U + W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W) = 2 + 2 - 1 = 3,$$

защото хомогенните линейни системи (1) и (2) са на 4 променливи и имат ранг 2. За намиране на базис на $U + W$ ни трябват фундаментални системи решения на (1) и (2). Например, $b_1 = (2, 5, 2, 0)$, $b_2 = (0, -3, 0, 2)$ е базис на U, а $c_1 = (-1, 1, 0, 3)$, $c_2 = (2, 0, 1, -2)$ е базис на W. Чрез елементарни преобразувания към редовете на матрицата $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$, анулиращи позиции под главния диагонал, намираме линейната зависимост

$$b_1 + b_2 - 2c_1 - 2c_2 = 0.$$

Всеки от векторите b_1, b_2, c_1, c_2 участва с ненулев коефициент в тази линейна зависимост и може да се изрази като линейна комбинация на останалите. Следователно кои и да са три вектора измежду b_1, b_2, c_1, c_2 образуват базис на $U + W$.

Задача 12. *В линейното пространство $\mathbb{Q}^4$ са дадени линейната обвивка $U = l(a_1, a_2)$ на векторите*

$$a_1 = (1, -1, 2, 3), \quad a_2 = (1, 1, 3, 2)$$

и линейната обвивка $W = l(b_1, b_2)$ на векторите

$$b_1 = (1, -2, 1, 1), \quad b_2 = (3, 1, 2, 4).$$

Да се намерят базиси на сечението $U \cap W$ и сумата $U + W$.

Отговор: За намиране на базис на $U \cap W$ представяме U и W като пространства от решения на хомогенни линейни системи. Разглеждаме хомогенната линейна система

$$\left| \begin{array}{lllll} x_1 & -x_2 & +2x_3 & +3x_4 & =0 \\ x_1 & +x_2 & +3x_3 & +2x_4 & =0 \end{array} \right. , \tag{4}$$

чиито уравнения имат за коефициенти координатите на a_1 и a_2. Един начин за представяне на общото решение на (4) е $x_1 = 5x_2 - 5x_4$, $x_3 = -2x_2 + x_4$. Векторите $c_1 = (5, 1, -2, 0)$ и $c_2 = (-5, 0, 1, 1)$ образуват фундаментална система решения на (4) и U е пространството от решения на

$$\left| \begin{array}{lllll} 5x_1 & +x_2 & -2x_3 & & = 0 \\ 5x_1 & & -x_3 & -x_4 & = 0 \end{array} \right. . \tag{5}$$

Аналогично, да разгледаме хомогенната система

$$\left| \begin{array}{lllll} x_1 & -2x_2 & +x_3 & +x_4 & = 0 \\ 3x_1 & +x_2 & +2x_3 & +4x_4 & = 0 \end{array} \right. , \tag{6}$$

чиито уравнения имат за коефициенти компонентите на b_1, b_2. Тя има фундаментална система решения $d_1 = (-5, 1, 7, 0)$, $d_2 = (-2, 0, 1, 1)$. Затова W е пространството от решения на

$$\left| \begin{array}{lllll} 5x_1 & -x_2 & -7x_3 & & = 0 \\ 2x_1 & & -x_3 & -x_4 & = 0 \end{array} \right. . \tag{7}$$

Сечението $U \cap W$ е пространството от решения на хомогенната линейна система

$$\left| \begin{array}{lllll} 5x_1 & +x_2 & -2x_3 & & = 0 \\ 5x_1 & & -x_3 & -x_4 & = 0 \\ 5x_1 & -x_2 & -7x_3 & & = 0 \\ 2x_1 & & -x_3 & -x_4 & = 0 \end{array} \right. , \tag{8}$$

получена чрез обединение на уравненията на (5) и (7). Системата (8) има нулево пространство от решения и $U \cap W = \{\mathcal{O}\}$ няма базис.

По Теоремата за размерност на сума и сечение,

$$\dim(U + W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W) = 2 + 2 - 0 = 4,$$

така че $U + W = \mathbb{Q}^4$ и всеки базис на $\mathbb{Q}^4$ е базис на $U + W$.

Задача 13. *В линейното пространство $\mathbb{Q}^4$ са дадени пространството от решения U на хомогенната линейна система*

$$\left| \begin{array}{lllll} x_1 & +3x_2 & +4x_3 & -6x_4 & = 0 \\ 2x_1 & -3x_2 & -4x_3 & +3x_4 & = 0 \end{array} \right. \tag{9}$$

и линейната обвивка $W = l(a_1, a_2, a_3, a_4)$ на векторите

$$a_1 = (1, -1, 2, 1), \quad a_2 = (1, 3, -1, 1), \quad a_3 = (2, 3, 1, 1), \quad a_4 = (1, 2, -1, 2).$$

Да се намерят базиси на сечението $U \cap W$ и сумата $U + W$.

Решение: За да намерим базис на $U \cap W$, представяме W като пространство от решения на хомогенна линейна система. Ако

$$\left| \begin{array}{lllll} x_1 & -x_2 & +2x_3 & +x_4 & = 0 \\ x_1 & +3x_2 & -x_3 & +x_4 & = 0 \\ 2x_1 & +3x_2 & +x_3 & +x_4 & = 0 \\ x_1 & +2x_2 & -x_3 & +2x_4 & = 0 \end{array} \right. \tag{10}$$

е хомогенната линейна система с матрица от коефициенти $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix}$, а $(8, -3, -4, -3)$ е нейна фундаментална система решния, то W е пространството от решения на хомогенното линейно уравнение

$$8x_1 - 3x_2 - 4x_3 - 3x_4 = 0. \tag{11}$$

Сечението $U \cap W$ е пространството от решения на хомогенната линейна система

$$\left| \begin{array}{lllll} x_1 & +3x_2 & +4x_3 & -6x_4 & = 0 \\ 2x_1 & -3x_2 & -4x_3 & +3x_4 & = 0 \\ 8x_1 & -3x_2 & -4x_3 & -3x_4 & = 0 \end{array} \right. , \tag{12}$$

получена чрез обединение на уравненията на (9) и (11). Системите (9) и (12) имат пространства от решения $U \supseteq U \cap W$ и един и същи ранг 2, така че $U = U \cap W$. Един базис на $U = U \cap W$ е $b_1 = (3, 5, 0, 3)$, $b_2 = (4, 0, 5, 4)$.

По Теоремата за размерност на сума и сечение,

$$\dim(U + W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W) = \dim(W),$$

така че включването $W \subseteq U + W$ е съвпадение, $W = U + W$. Съгласно линейната зависимост $a_1 + 2a_2 - a_3 - a_4 = \mathcal{O}$, всяка тройка вектори измежду $a_1, \ldots, a_4$ е базис на $W = U + W$.

2 Задачи за контролна работа № 2

Задача 14. *Спрямо базиса e_1, e_2, e_3 на линейното пространство U е даден линейният оператор $\varphi : U \longrightarrow U$,*

$$\varphi(x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3) =$$
$$= (x_1 + x_2 + 2x_3)e_1 + (2x_1 - x_2 + x_3)e_2 + (-2x_1 + x_2 - x_3)e_3.$$

Да се намерят:

(а) базиси на ядрото $\ker(\varphi)$ и образа $\mathrm{im}(\varphi)$;

(б) вектори $u_1, \ldots, u_k \in U$, за които $\varphi(u_1), \ldots, \varphi(u_k)$ е базис на $\mathrm{im}(\varphi)$.

Решение: Матрицата на φ спрямо базиса e_1, e_2, e_3 на U е

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Координатните стълбове $X \in M_{3,1}(F)$ на векторите от ядрото $\ker(\varphi)$ на φ образуват пространството от решения на хомогенната линейна система

$$AX = 0_{3\times 1}.$$

В случая, $\ker(\varphi)$ е правата през началото в U, породена от вектора $e_1 + e_2 - e_3$. Образът $\mathrm{im}(\varphi)$ е двумерен съгласно Теоремата за ранга и дефекта на линейния оператор φ на тримерното пространство U. Произволни два различни стълба на A са непропорционални и задават координатите на базис на $\mathrm{im}(\varphi)$ спрямо e_1, e_2, e_3.

По определение, стълбовете на матрицата A на φ спрямо базиса e_1, e_2, e_3 на U представляват координатите на $\varphi(e_1), \varphi(e_2), \varphi(e_3)$ спрямо базиса e_1, e_2, e_3 на U. В случая, за произволни $1 \leq i < j \leq 3$ векторите $e_i, e_j \in U$ са такива, че $\varphi(e_i), \varphi(e_j)$ е базис на образа $\mathrm{im}(\varphi)$ на φ.

Задача 15. *Да се намери линеен оператор $\varphi : \mathbb{Q}^4 \longrightarrow \mathbb{Q}^4$ с образ $\mathrm{im}(\varphi) = W$, ако:*

(а) $W = l(a_1, a_2, a_3)$ е линейната обвивка на векторите

$$a_1 = (1, -1, 2, 1), \quad a_2 = (2, 1, -1, 1), \quad a_3 = (0, 1, -1, 2);$$

(б) W е пространството от решения на хомогенната линейна система

$$\left| \begin{array}{cccccc} x_1 & -x_2 & +2x_3 & +x_4 & -3x_5 & = 0 \\ & x_2 & -x_3 & +2x_4 & +x_5 & = 0 \\ x_1 & +3x_2 & -2x_3 & +x_4 & +x_5 & = 0 \end{array} \right. \tag{13}$$

Във всеки от случаите да се намери дефекта $d(\varphi)$ на φ.

Упътване: (а) Векторите a_1, a_2, a_3 са линейно независими, така че операторът φ има ранг $\mathrm{rk}(\varphi) = \dim \mathrm{im}(\varphi) = \dim(W) = 3$ и дефект $d(\varphi) = 4 - \mathrm{rk}(\varphi) = 1$. Избираме произволен базис $e_1, \ldots, e_4$ на $\mathbb{Q}^4$ и разглеждаме еднозначно определения линеен оператор $\varphi : \mathbb{Q}^4 \to \mathbb{Q}^4$ с $\varphi(e_i) = a_i$ за $1 \leq i \leq 3$ и $\varphi(e_4) = 0_{1\times 4}$. Образът $\mathrm{im}(\varphi) = l_{\mathbb{Q}}(\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_4)) = l_{\mathbb{Q}}(a_1, a_2, a_3, 0_{1\times 4}) = l_{\mathbb{Q}}(a_1, a_2, a_3) = W$.

(б) Избираме фундаментална система решения

$$b_1 = (-1, 1, 1, 0, 0), \quad b_2 = (2, -1, 0, 0, 1)$$

на (13) и базис $f_1, \ldots, f_4$ на $\mathbb{Q}^4$. Линейният оператор $\varphi : \mathbb{Q}^4 \to \mathbb{Q}^4$ с $\varphi(f_i) = b_i$ за $1 \leq i \leq 2$, $\varphi(f_i) = 0_{1\times 4}$ за $3 \leq i \leq 4$ има образ $\mathrm{im}(\varphi) = l_{\mathbb{Q}}(\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_4)) = l_{\mathbb{Q}}(b_1, b_2) = W$. Рангът на φ е $\mathrm{rk}(\varphi) = \dim \mathrm{im}(\varphi) = 2$, а дефектът на φ е $d(\varphi) = 4 - \mathrm{rk}(\varphi) = 2$.

Задача 16. *Да се намери линеен оператор $\psi : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ с ядро W, ако:*

(а) $W = l(a_1, a_2, a_3)$ е линейната обвивка на векторите

$$a_1 = (1, 1, -2, 1), \quad a_2 = (2, 3, -1, 0), \quad a_3 = (1, 1, -1, 1);$$

(б) W е пространството от решения на хомогенното линейно уравнение

$$x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0. \tag{14}$$

Упътване: (а) Проверяваме, че $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}^4$ са линейно независими и допълваме до базис $a_1, a_2, a_3, a_4 = (0, 0, 0, 1)$ на $\mathbb{R}^4$. Ако линейният оператор $\psi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ има ядро $\ker(\psi) = W = l_{\mathbb{R}}(a_1, a_2, a_3)$, то дефектът на ψ е $d(\psi) = \dim \ker(\psi) = 3$, а рангът на ψ е $\mathrm{rk}(\psi) = \dim \mathrm{im}(\psi) = 4 - d(\psi) = 1$. За произволен ненулев вектор $b \in \mathbb{R}^4$ линейният оператор $\psi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ с $\psi(a_i) = 0_{1\times 4}$ за $1 \leq i \leq 3$, $\psi(a_4) = b$ има ядро $\ker(\psi) = W$, защото

$$0_{1\times 4} = \psi\left(\sum_{i=1}^{4} x_u a_i\right) = \sum_{i=1}^{4} x_i \psi(a_i) = x_4 b$$

е еквивалентно на $x_4 = 0$.

(б) Избираме фундаментална система решения

$$b_1 = (1,1,0,0), \quad b_2 = (-1,0,1,0), \quad b_3 = (1,0,0,1)$$

на (14). Допълваме до базис $b_1, b_2, b_3, b_4 = (1,0,0,0)$ на $\mathbb{R}^4$ и разглеждаме линейния оператор $\psi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ с $\psi(b_i) = 0_{1\times 4}$ за $1 \leq i \leq 3$, $\psi(b_4) \in \mathbb{R}^4 \setminus \{(0,0,0)\}$. Тогава

$$0_{1\times 4} = \psi\left(\sum_{i=1}^{4} y_i b_i\right) = \sum_{i=1}^{4} y_i \psi(b_i) = y_4 \psi(b_4)$$

е равносилно на $y_4 = 0$ и ядрото $\ker(\psi) = l_{\mathbb{R}}(b_1, b_2, b_3) = W$. Дефектът на ψ е $d(\psi) = \dim \ker(\psi) = 3$, а рангът е $\operatorname{rk}(\psi) = 4 - d(\psi) = 1$.

Задача 17. *Нека $E_{ij} \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ са матриците с единствен ненулев елемент 1 в i-ти ред и j-ти стълб, $1 \leq i, j \leq n$. (E_{ij} се наричат матрични единици.) Да се докаже, че:*

(а) $\{E_{ij} \mid 1 \leq i, j \leq n\}$ е базис на $M_{n\times n}(\mathbb{C})$;

(б) $E_{ij}E_{kl} = \delta^j_k E_{il} = \begin{cases} E_{il} & \text{за } j = k \\ 0 & \text{за } j \neq k. \end{cases}$

(в) ако $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ и $A_{ij} = 0$ за $\forall n \geq i \geq j \geq 1$, то $A^n = 0_{n\times n}$.

Задача 18. *Ако $e_1, \ldots, e_n$ е базис на линейното пространство V, а $\varphi : V \to V$ е линеен оператор с $\varphi(e_s) \in l(e_{s+1}, \ldots, e_n)$ за $\forall 1 \leq s \leq n$ ($\varphi(e_n) = \mathcal{O}$), да се докаже, че $\varphi^n = \mathcal{O}$ е нулевият оператор.*

Упътване: Матрицата $A \in M_{n,n}(F)$ на φ спрямо базиса $e_1, \ldots, e_n$ има елементи $a_{ij} = 0$ за $\forall 0 \leq i \leq j \leq n$, така че

$$A = \sum_{i>j} a_{ij}E_{ij} = \sum_{i=j+1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}E_{ij} \in l_F(E_{ij} \mid j+1 \leq i \leq n, \quad 1 \leq j \leq n),$$

където E_{ij} са матричните единици от задача 17. С индукция по $1 \leq k \leq n$, оттук следва $A^k = l_F(E_{ij} \mid j+k \leq i \leq n, \quad 1 \leq j \leq n)$.

Задача 19. *В тримерното линейно пространство U са дадени линейните оператори $\varphi_1, \varphi_2, \psi_1$ с матрици*

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}, \quad B_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

спрямо някакков базис e_1, e_2, e_3 на U.

(а) Да се намерят матриците на операторите $\varphi_1 + \varphi_2$ и $\psi_1(\varphi_1 + \varphi_2)$ спрямо базиса e_1, e_2, e_3.

(б) Да се опишат линейните оператори $\psi_2 : U \to U$, за които $(\psi_1 + \psi_2)(\varphi_1 + \varphi_2) = \mathbb{O}$ е нулевото изображение.

(в) Да се докаже, че $(\psi_1 + \psi_2)(\varphi_1 + \varphi_2) = \mathbb{O}$ тогава и само тогава, когато

$$\psi_2(2e_1 + e_2) = -e_1 + e_2 - 5e_3, \quad \psi_2(2e_3 + e_2) = -e_1 - 3e_2 - 3e_3. \tag{15}$$

Решение: (а) Матрицата на $\varphi_1 + \varphi_2$ спрямо базиса e_1, e_2, e_3 е

$$A_1 + A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

а матрицата на $\psi_1(\varphi_1 + \varphi_2)$ спрямо базиса e_1, e_2, e_3 е

$$B_1(A_1 + A_2) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & -4 & 5 \end{pmatrix}.$$

(б) Ако ψ_2 има матрица B_2 спрямо e_1, e_2, e_3, то условието $(\psi_1 + \psi_2)(\varphi_1 + \varphi_2) = \mathbb{O}$ е еквивалентно на условието $(B_1 + B_2)(A_1 + A_2) = 0_{3\times 3}$, съгласно взаимната еднозначност на съответствието между линейните оператори в U и техните матрици спрямо базиса e_1, e_2, e_3. Матрицата $B = B_1 + B_2 \in M_{3\times 3}(F)$ изпълнява условието $B(A_1 + A_2) = 0_{3\times 3}$ точно когато редовете (b_{i1}, b_{i2}, b_{i3}), $1 \leq i \leq 3$ на B са решения на хомогенната система линейни уравнения

$$\left| \begin{array}{llll} x_1 & +x_2 & +x_3 & = 0 \\ -x_1 & -x_2 & -x_3 & = 0 \\ 2x_1 & +x_2 & & = 0 \end{array} \right. .$$

Следователно търсените матрици B са от вида

$$B = \begin{pmatrix} b_{13} & -2b_{13} & b_{13} \\ b_{23} & -2b_{23} & b_{23} \\ b_{33} & -2b_{33} & b_{33} \end{pmatrix} \tag{16}$$

за произволни $b_{13}, b_{23}, b_{33} \in F$. Оттук следва, че линейният оператор $\psi_2 : U \to U$ изпълнява условието $(\psi_1 + \psi_2)(\varphi_1 + \varphi_2) = \mathbb{O}$ тогава и само тогава, когато има матрица

$$B_2 = B - B_1 = \begin{pmatrix} b_{13} - 1 & -2b_{13} + 1 & b_{13} - 1 \\ b_{23} + 1 & -2b_{23} - 1 & b_{23} - 1 \\ b_{33} - 2 & -2b_{33} - 1 & b_{33} - 1 \end{pmatrix} \tag{17}$$

за някои $b_{13}, b_{23}, b_{33} \in F$ спрямо базиса e_1, e_2, e_3.

(в) Ако $(\psi_2 + \psi_1)(\varphi_1 + \varphi_2) = \mathbb{O}$, то матрицата B_2 на ψ_2 спрямо базиса e_1, e_2, e_3 е от вида (17) и

$$\psi_2(e_1) = (b_{13} - 1)e_1 + (b_{23} + 1)e_2 + (b_{33} - 2)e_3,$$

$$\psi_2(e_2) = (-2b_{13} + 1)e_1 + (-2b_{23} - 1)e_2 + (-2b_{33} - 1)e_3,$$

$$\psi_2(e_3) = (b_{13} - 1)e_1 + (b_{23} - 1)e_2 + (b_{33} - 1)e_3.$$

Оттук следва, че $\psi_2(2e_1 + e_2) = 2\psi_2(e_1) + \psi_2(e_2) = -e_1 + e_2 - 5e_3$, $\psi_2(2e_3 + e_2) = 2\psi_2(e_3) + \psi_2(e_2) = -e_1 - 3e_2 - 3e_3$.

Обратно, ако са изпълнени условията (15), то

$$\psi_2(e_1) = \frac{1}{2}[-e_1 + e_2 - 5e_3 - \psi_2(e_2)], \quad \psi_2(e_3) = \frac{1}{2}[-e_1 - 3e_2 - 3e_3 - \psi_2(e_1)].$$

Полагаме $\psi_2(e_2) = pe_1 + qe_2 + re_3$ за някакви $p, q, r \in F$ и получаваме, че матрицата B_2 на ψ_2 спрямо базиса e_1, e_2, e_3 е

$$B_2 = \begin{pmatrix} \frac{-p-1}{2} & p & \frac{-p-1}{2} \\ \frac{-q+1}{2} & q & \frac{-q-3}{2} \\ \frac{-r-5}{2} & r & \frac{-r-3}{2} \end{pmatrix}.$$

Следователно операторът $\psi_1 + \psi_2$ има матрица

$$B = B_1 + B_2 = \begin{pmatrix} \frac{-p+1}{2} & p-1 & \frac{-p+1}{2} \\ \frac{-q-1}{2} & q+1 & \frac{-q-1}{2} \\ \frac{-r-1}{2} & r+1 & \frac{-r-1}{2} \end{pmatrix}$$

от вида (16) спрямо базиса e_1, e_2, e_3. Оттук $0_{3\times 3} = B(A_1 + A_2) = (B_1 + B_2)(A_1 + A_2)$ и операторът ψ_2 изпълнява условието $(\psi_1 + \psi_2)(\varphi_1 + \varphi_2) = \mathbb{O}$.

Задача 20.

$$\Delta_n = \det(\sin(\alpha_i + \beta_j))_{i,j=1}^n.$$

Упътване: Представете като произведение на детерминанти.

Задача 21.

$$\Delta_n = \det\left(\frac{1 - a_i^n b_j^n}{1 - a_i b_j}\right)_{i,j=1}^n.$$

Упътване: Представете като произведение на детерминанти.

Задача 22.

$$\Delta_{n+1} = \det((a_i + b_j)^n)_{i,j=0}^n.$$

Упътване: Представете като произведение на детерминанти.

Задача 23. *Нека U е n-мерно линейно пространство, а $\varphi : U \to U$ и $\psi : U \to U$ са линейни оператори в U с обратимо произведение $\psi\varphi : U \to U$. Да се намери рангът на оператора φ и рангът на оператора ψ.*

Задача 24. *Линейният оператор $\varphi : U \longrightarrow U$ в крайномерно пространство U има квадрат $\varphi^2 = \mathrm{Id}_U$. Да се докаже, че за всяко естествено число k поне един от операторите $\varphi^k - \mathrm{Id}_U$ или $\varphi^k + \mathrm{Id}_U$ не е обратим.*

Упътване: Използвайте, че произведението на обратими матрици е обратима матрица.

Задача 25. *Да се решат матричните уравнения:*

$$(а)\quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix};$$

$$(б)\ \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -5 \end{pmatrix} Y = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix};$$

$$(в)\ \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -5 \end{pmatrix} Z = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix};$$

Упътване: Когато матричният коефициент е необратим, разпишете матричното уравнение като система линейни уравнения за елементите на неизвестната матрица.

Отговор: (а) $X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -6 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$;

(б) Матричното уравнение е еквивалентно на

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \\ y_{31} & y_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$

и има решение

$$Y = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4}y_{31} + \frac{3}{4} & -\frac{1}{4}y_{32} \\ \frac{7}{4}y_{31} - \frac{1}{4} & \frac{7}{4}y_{32} + 1 \\ y_{31} & y_{32} \end{pmatrix}$$

за произволни y_{31}, y_{32}.

(в) Матричното уравнение е еквивалентно на

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & -7 \\ 0 & 4 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \\ y_{31} & y_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$

и няма решение, защото вторият и третият ред на лявата страна съвпадат, докато вторият ред е различен от третия в дясната страна.

Задача 26. *Да се намери обратната A^{-1} на матрицата*

$$(i)\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \in M_{4\times 4}(\mathbb{Q}); \qquad (ii)\quad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \in M_{4\times 4}(\mathbb{Q});$$

$$(iii) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_{n\times n}(\mathbb{Q}).$$

Отговор:

$$(i) \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}; \quad (ii) \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 4 & -1 & -8 & 13 \\ 1 & 0 & -2 & 3 \\ -3 & 1 & 5 & -8 \end{pmatrix};$$

(iii) Ако редовете на A от втори до n-ти се заменят с разликите на първия ред с тези редове, а така модифицираните редове се извадят от първия, получаваме единичната матрица. Прилагането на същите елементарни преобразувания към единичната матрица дава

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2-n & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Задача 27. *Нека* $\varphi : \mathbb{R}^{n+1}[x] \longrightarrow \mathbb{R}^n[x]$,

$$\varphi\left(\sum_{i=0}^{n} a_i x^i\right) = \sum_{i=1}^{n} i a_i x^{i-1}$$

е диференцирането на полиноми с реални коефициенти от степен не по-голяма от n.

(а) Да се докаже, че съществува единствено линейно изображение

$$\psi : \mathbb{R}^n[x] \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}[x]$$

с $\varphi\psi = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n[x]}$.

(б) Да се намерят всички (необезателно линейни) изображения

$$\Psi : \mathbb{R}^n[x] \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}[x]$$

с $\varphi\Psi = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n[x]}$. *Съвкупността на тези* Ψ *се нарича определен интеграл.*

Упътване: Ако $\varphi\Psi = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n[x]}$ за някакво изображение $\Psi\left(\sum\limits_{i=0}^{n-1} a_i x^i\right) = \sum\limits_{j=0}^{n} b_j x^j$, то $\sum\limits_{j=1}^{n} j b_j x^{j-1} = \sum\limits_{i=0}^{n-1} a_i x^i$ и $b_{s+1} = \frac{a_s}{s+1}$ за $\forall 0 \leq s \leq n-1$. С други думи,

$$\Psi\left(\sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i\right) = b_0 + \sum_{i=0}^{n-1} a_i \frac{x^{i+1}}{i+1}$$

с произволно $b_0 \in \mathbb{R}$ е интегрирането на полиноми.

Ако $\psi : \mathbb{R}^n[x] \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}[x]$ е линейно изображение, то $\psi(0) = 0$ за тъждествено нулевия полином $0 \in \mathbb{R}^n[x]$ и $\psi\left(\sum\limits_{i=0}^{n-1} a_i x^i\right) = \sum\limits_{i=0}^{n-1} a_i \frac{x^{i+1}}{i+1}$.

Задача 28. *Дадени са обратимите линейни оператори $\alpha : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $\beta : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$ и линейният оператор $\varphi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$. Да се докаже, че линейните оператори φ, $\varphi\alpha$, $\beta\varphi$ и $\beta\varphi\alpha$ имат един и същи ранг и дефект.*

Задача 29. *Да се докаже, че за всяко просто p съществуват $(p^3-1)(p^3-p)(p^3-p^2)$ обратими линейни оператора в пространството $\mathbb{Z}_p^3$ на наредените тройки с елементи от полето $\mathbb{Z}_p$ на остатъците при деление с p.*

Упътване: Всеки обратим линеен оператор $\varphi : \mathbb{Z}_p^3 \longrightarrow \mathbb{Z}_p^3$ се определя еднозначно от образите $\varphi(e_1), \varphi(e_2), \varphi(e_3)$ на стандартните базисни вектори $e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1)$. Операторът φ е обратим тогава и само тогава, когато векторите $\varphi(e_1), \varphi(e_2), \varphi(e_3)$ са линейно независими. Векторът $\varphi(e_1) \in M_{3,1}(\mathbb{Z}_p)$ е линейно независим точно когато е ненулев, така че съществуват p^3-1 възможности за $\varphi(e_1) \in M_{3,1}(\mathbb{Z}_p)$. За фиксирано $\varphi(e_1) \in M_{3,1}(\mathbb{Z}_p)$, векторите $\varphi(e_1), \varphi(e_2) \in M_{3,1}(\mathbb{Z}_p)$ са линейно независими тогава и само тогава, когато $\varphi(e_2)$ е извън линейната обвивка $l_{\mathbb{Z}_p}(\varphi(e_1))$ на $\varphi(e_1)$. Понеже $l_{\mathbb{Z}_p}(\varphi(e_1))$ съдържа p елемента, броят на $\varphi(e_2) \in M_{3,1}(\mathbb{Z}_p)$, за които $\varphi(e_1), \varphi(e_2)$ са линейно независими е $p^3 - p$. За фиксирани $\varphi(e_1), \varphi(e_2) \in M_{3,1}(\mathbb{Z}_p)$, векторите $\varphi(e_1), \varphi(e_2), \varphi(e_3) \in M_{3,1}(\mathbb{Z}_p)$ са линейно независими точно когато $\varphi(e_3)$ е извън линейната обвивка $l_{\mathbb{Z}_p}(\varphi(e_1), \varphi(e_2))$ на $\varphi(e_1)$ и $\varphi(e_2)$. За фиксирани $\varphi(e_1), \varphi(e_2)$ множеството $l_{\mathbb{Z}_p}(\varphi(e_1), \varphi(e_2))$ съдържа p^2 елемента, така че векторите $\varphi(e_3)$ извън $l_{\mathbb{Z}_p}(\varphi(e_1), \varphi(e_2))$ са $p^3 - p^2$ на брой.

Задача 30. *В линейното пространство $M_{4\times 1}(\mathbb{Q})$ на наредените четворки рационални числа е дадено изображението $\varphi : M_{4\times 1}(\mathbb{Q}) \longrightarrow M_{4\times 1}(\mathbb{Q})$, $\varphi(x) = Ax$ за някаква матрица $A \in M_{4\times 4}(\mathbb{Q})$. Да се докаже, че φ е линейно изображение и да се намери $\varphi(x)$ за*

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad A = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & c & d & a \\ c & d & a & b \\ c & d & a & b \end{pmatrix},$$

където a, b, c, d са последните четири цифри на факултетния Ви номер.

Задача 31. *Спрямо базиса e_1, e_2, e_3 на линейното пространство U е зададен линейният оператор $\varphi : U \longrightarrow U$,*

$$\varphi(x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3) =$$

$$= (2x_1 - x_2 + x_3)e_1 + (x_1 + x_2 - 2x_3)e_2 + (2x_1 - x_2)e_3.$$

Да се намери матрицата B на φ спрямо базиса

$$e_1' = e_1 + 2e_2 + e_3, \quad e_2' = -e_1 + e_2 + e_3, \quad e_3' = 2e_1 - e_2 - e_3,$$

на U.

Отговор: Матрицата A на φ спрямо базиса e_1, e_2, e_3 на U и базиса $f_1, \dots, f_4$ на V е

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Матрицата на прехода T от базиса e_1, e_2, e_3 към базиса e'_1, e'_2, e'_3 е

$$T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{с} \quad T^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 5 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Следователно

$$B = T^{-1}AT = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -2 & -11 & 20 \\ -1 & -7 & 13 \end{pmatrix}.$$

Задача 32. *В линейното пространство V с размерност $\dim V \geq n \geq 2$ да се построи линеен оператор $\varphi : V \longrightarrow V$ с $\dim(\ker(\varphi) \cap \operatorname{im}(\varphi)) \geq 1$.*

Упътване: Избираме базис $e_1, \dots e_k$ на сечението $\ker(\varphi) \cap \operatorname{im}(\varphi)$. Допълваме до базис $e_1, \dots, e_k, e_{k+1}, \dots, e_m$ на $\ker(\varphi)$, базис $e_1, \dots, e_k, f_{k+1}, \dots, f_l$ на $\operatorname{im}(\varphi)$ и базис $e_1, \dots, e_k, e_{k+1}, \dots, e_m, e_{m+1}, \dots, e_n$ на V. По Теоремата за ранга и дефекта на φ имаме $m + l = d(\varphi) + \operatorname{rk}(\varphi) = \dim V = n$. Линейният оператор $\varphi : V \to V$ с $\varphi(e_i) = \mathcal{O}$ за $1 \leq i \leq m$, $\varphi(e_j) = e_{j-m}$ за $m+1 \leq j \leq m+k$ и $\varphi(e_p) = f_{p-m}$ за $m+k+1 \leq p \leq m+l = n$ изпълнява необходимите условия.

Задача 33. *В n-мерното линейно пространство V да се построи линеен оператор $\psi : V \longrightarrow V$ с $\dim(\ker(\psi) + \operatorname{im}(\psi)) \leq n - 1$.*

Упътване: Оценете $\dim(\ker(\psi) \cap \operatorname{im}(\psi))$.

Задача 34. *Нека $\varphi : U \to V$ е линейно изображение на n-мерно пространство U в m-мерно пространство V. Да се докаже, че съществуват базис $e_1, \dots, e_n$ на U и базис $f_1, \dots f_m$ на V, относно които φ има матрица*

$$\begin{pmatrix} E_r & 0_{r \times (n-r)} \\ 0_{(m-r) \times r} & 0_{(m-r) \times (n-r)} \end{pmatrix},$$

където E_r е единичната матрица от ред $r = \operatorname{rk}(\varphi)$.

Упътване: Изберете базис $e_{r+1}, \dots, e_n$ на ядрото $\ker(\varphi)$ на φ и допълнете до базис $e_1, \dots, e_r, e_{r+1}, \dots, e_n$ на U. Тогава $f_1 = \varphi(e_1), \dots, f_r = \varphi(e_r)$ образуват базис на $\operatorname{im}(\varphi)$. Допълнете линейно независимите вектори $f_1, \dots, f_r \in V$ до базис $f_1, \dots, f_r, f_{r+1}, \dots, f_m$ на линейното пространство V.

Задача 35. *Сумата на елементите във всеки стълб на матрицата $A \in M_{n \times n}(\mathbb{Q})$ е 1. Да се докаже, че $\lambda = 1$ е характеристичен корен на A.*

Решение: Трябва да проверим, че $\det(A - E_n) = f_A(1) = 0$. Сумата на елементите на всеки стълб на $A - E_n$ е 0, така че сумата на вектор-редовете на $A - E_n$ е наредената n-торка $0_{1\times n}$ и $A - E_n$ е от ранг $\leq n-1$. Еквивалентно, $\det(A - E_n) = 0$.

Задача 36. *Спрямо базиса $e_1, \ldots, e_n$ на пространството $\mathbb{R}^n$ операторът $\varphi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ има матрица*

$$(а)\ A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}; \quad (б)\ A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$$(в)\ A = \begin{pmatrix} a & b & b & \ldots & b & b \\ b & a & b & \ldots & b & b \\ b & b & a & \ldots & b & b \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b & b & b & \ldots & a & b \\ b & b & b & \ldots & b & a \end{pmatrix} \quad с \quad b \neq 0.$$

Да се намери базис на V, в който φ има диагонална матрица D, както и тази матрица D.

Да се провери, че не съществува базис на V, съставен от собствени вектори за линейния оператор

$$\psi : V \longrightarrow V,$$

$$\varphi(x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3) = (-x_2 + 2x_3)e_1 + (-x_1 - 3x_2 + 5x_3)e_2 + (-x_1 - 3x_2 + 5x_3)e_3.$$

Решение: (а) Характеристичният полином

$$f_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & -1 \\ -2 & -1-\lambda & 2 \\ 0 & -1 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(1-\lambda)(-1-\lambda) - 2 + 2\lambda + 2(1-\lambda) =$$

$$= -\lambda^3 + \lambda = -\lambda(\lambda+1)(\lambda-1).$$

Характеристичните корени $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 1$ са реални. Следователно те съвпадат със собствените стойности на оператора.

Собствените вектори, отговарящи на собствената стойност $\lambda_1 = -1$ са ненулевите решения на

$$(A + E_3)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Те са пропорционални на $v_1 = (1, 1, 1)$.

Ненулевите решения на

$$A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

са собствените вектори, отговарящи на съвствената стойност $\lambda_2 = 0$. Например, $v_2 = (1, 0, 1)$.

Собствените вектори, отговарящи на собствената стойност $\lambda_3 = 1$ са ненулевите решения на

$$(A - E_3)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -2 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Те са пропорционални на $v_3 = (2, -1, 1)$.

По този начин, операторът има диагонална матрица

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

спрямо базиса $v_1 = (1, 1, 1)$, $v_2 = (1, 0, 1)$, $v_3 = (2, -1, 1)$.

(б) Характеристичният полином

$$f_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & -2 \\ -2 & 1-\lambda & 2 \\ 4 & 0 & -3-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(3-\lambda)(-3-\lambda) + 8(1-\lambda) =$$

$$= (1-\lambda)(\lambda^2 - 1) = -(\lambda+1)(\lambda-1)^2.$$

Характеристичните корени $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ и $\lambda_3 = -1$ са реални и съвпадат със собствените стойности на оператора.

Характеристичният корен $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ е двукратен. Собствените вектори, отговарящи на тази собствена стойност са решения на хомогенната линейна система

$$(A - E_3)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ -2 & 0 & 2 \\ 4 & 0 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x_1 = x_3$$

с двумерно пространство от решения $\{(p, q, p) \mid p, q \in \mathbb{R}\}$. Избираме линейно независими собствени вектори $v_1 = (1, 0, 1)$ и $v_2 = (0, 1, 0)$, отговарящи на $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$.

Ненулевите решения на

$$(A + E_3)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ -2 & 2 & 2 \\ 4 & 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

са собствените вектори със собствена стойност $\lambda_3 = -1$. Те са пропорционални на $v_3 = (1, -1, 2)$.

В резултат, операторът има диагонална матрица

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

спрямо базиса $v_1 = (1, 0, 1)$, $v_2 = (0, 1, 0)$, $v_3 = (1, -1, 2)$.

(в) Извадете първия ред на $A - \lambda E_n$ от всички останали, а после прибавете стълбовете от втори до n-ти към първия, за да пресметнете характеристичния полином $f_A(\lambda) = [a - \lambda + (n-1)b](a - \lambda - b)^{n-1}$. За $b \neq 0$ той има прост корен $\lambda_1 = a + (n-1)b$ и $(n-1)$-кратен корен $\lambda_2 = \ldots = \lambda_n = a - b \neq \lambda_1$.

Собствен вектор, отговарящ на собствената стойност $\lambda_1 = a + (n-1)b$ е $v_1 = (1, 1, \ldots, 1, 1)$.

Собствените вектори, отговарящи на $\lambda_2 = \ldots = \lambda_n = a - b$ с $b \neq 0$ са ненулевите решения на хомогенното линейно уравнение

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1} + x_n = 0.$$

Един базис на пространството от решения е

$$v_2 = (1, -1, 0, \ldots, 0),$$

$$v_3 = (1, 0, -1, \ldots, 0),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$v_n = (1, 0, 0, \ldots, -1),$$

където v_i има първа компонента 1 и i-та компонента -1 за $2 \leq i \leq n$.

Матрицата на φ спрямо базиса от собствени вектори $v_1, v_2, \ldots, v_n$ е

$$D = \begin{pmatrix} a+(n-1)b & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & a-b & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a-b & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a-b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & a-b \end{pmatrix}.$$

Матрицата на ψ спрямо базиса e_1, e_2, e_3 е

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -1 & -3 & 5 \\ -1 & -3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Характеристичният полином е

$$f_A(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & -1 & 2 \\ -1 & -3-\lambda & 5 \\ -1 & -3 & 5-\lambda \end{vmatrix}.$$

Изваждаме втория ред от третия и получаваме

$$f_A(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & -1 & 2 \\ -1 & -3-\lambda & 5 \\ 0 & \lambda & -\lambda \end{vmatrix}.$$

Изнасяме λ от третия ред и прибавяме третия стълб към втория, за да пресметнем

$$f_A(\lambda) = \lambda \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 2 \\ -1 & 2-\lambda & 5 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -\lambda[-\lambda(2-\lambda)+1] = -\lambda(\lambda-1)^2.$$

Храктеристичните корени $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 0$ са реални и съвпадат със собствените стойности на ψ.

Собствените вектори, отговарящи на собствената стойност 1 са ненулевите решения на хомогенната линейна система

$$(A - E_3) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -1 & -4 & 5 \\ -1 & -3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Всички те са пропорционални на $v_1 = (1,1,1)$.

Собствените вектори, отговарящи на $\lambda_3 = 0$ са ненулевите решения на

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -1 & -3 & 5 \\ -1 & -3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Това са векторите, пропорционални на $v_2 = (-1,2,1)$.

Операторът ψ не притежава базис от собствени вектори или ψ няма диагонална матрица спрямо нито един базис на V.

3 Още задачи за изпита

Задача 37. *Нека $e_1, \dots, e_n$ е ортонормиран базис на евклидовото пространство V. За всяко естествено $1 \leq k \leq n$ да се докаже, че*

$$l(e_1, \dots, e_k)^\perp = l(e_{k+1}, \dots, e_n).$$

Решение: Условието $v = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i \in l(e_1, \dots, e_k)^\perp$ е еквивалентно на $0 = (v, e_i) = x_i$ за $\forall 1 \leq i \leq k$. Следователно $v = \sum\limits_{i=k+1}^{n} x_i e_i$ и $l(e_1, \dots, e_k)^\perp \subseteq l(e_{k+1}, \dots, e_n)$.

Обратно, $l(e_{k+1}, \dots, e_n) \subseteq l(e_1, \dots, e_k)^\perp$, защото от $(e_i, e_j) = 0$ за $\forall 1 \leq i \leq k < j \leq n$ следва $e_j \in l(e_1, \dots, e_k)^\perp$ за $\forall k+1 \leq j \leq n$, а оттам и $l(e_{k+1}, \dots, e_n) \subseteq l(e_1, \dots, e_k)^\perp$.

Задача 38. *Спрямо ортонормиран базис на евклидовото пространство $\mathbb{R}^4$ са дадени векторите*

(i) $a_1 = (1,-1,1,-1)$, $a_2 = (-2,1,-5,4)$, $a_3 = (0,-1,5,-2)$;

(ii) $a_1 = (1,1,1,1)$, $a_2 = (2,4,0,-2)$, $a_3 = (1,-3,5,9)$.

Да се ортогонализират a_1, a_2, a_3 по метода на Грам-Шмид и да се определи размерността на линейната обвивка $l(a_1, a_2, a_3)$.

Решение: (i) Полагаме $b_1 = a_1$. Търсим $b_2 = a_2 + \lambda b_1$ така, че

$$0 = (b_2, b_1) = (a_2, b_1) + \lambda(b_1, b_1).$$

Оттук $\lambda = -\frac{(a_2,b_1)}{(b_1,b_1)} = -\frac{(-12)}{4} = 3$ и

$$b_2 = a_2 + 3b_1 = (1, -2, -2, 1).$$

На следващата стъпка полагаме $b_3 = a_3 + \alpha b_1 + \beta b_2$ и определяме $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ от равенствата

$$0 = (b_3, b_1) = (a_3, b_1) + \alpha(b_1, b_1),$$

$$0 = (b_3, b_2) = (a_3, b_2) + \beta(b_2, b_2),$$

вземайки предвид $(b_1, b_2) = 0$. Пресмятаме

$$\alpha = -\frac{(a_3, b_1)}{(b_1, b_1)} = -\frac{8}{4} = -2, \quad \beta = -\frac{(a_3, b_2)}{(b_2, b_2)} = -\frac{(-10)}{10} = 1$$

и намираме

$$b_3 = a_3 - 2b_1 + b_2 = (-1, -1, 1, 1).$$

Ненулевите ортогонални вектори b_1, b_2, b_3 са линейно независими, така че подпространството $l(a_1, a_2, a_3) = l(b_1, b_2, b_3)$ е тримерно.

(ii) Избираме $b_1 = a_1$. Търсим $b_2 = a_2 + \lambda b_1$ така, че $0 = (b_2, b_1) = (a_2, b_1) + \lambda(b_1, b_1)$. По-точно, $\lambda = -\frac{(a_2,b_1)}{(b_1,b_1)} = -\frac{4}{4} = -1$ и

$$b_2 = a_2 - b_1 = (1, 3, -1, -3).$$

Сега $b_3 = a_3 + \alpha b_1 + \beta b_2$ има коефициенти

$$\alpha = -\frac{(a_3, b_1)}{(b_1, b_1)} = -\frac{12}{4} = -3, \quad \beta = -\frac{(a_3, b_2)}{(b_2, b_2)} = -\frac{(-40)}{20} = 2$$

и

$$b_3 = a_3 - 3b_1 + 2b_2 = (0, 0, 0, 0).$$

При ортогонализация на a_1, a_2, a_3 по метода на Грам-Шмид получихме ненулеви ортогонални b_1, b_2 и $b_3 = \mathcal{O}$. Следователно a_1, a_2 са линейно независими, а $a_3 \in l(a_1, a_2)$, така че $\dim l(a_1, a_2, a_3) = \dim l(a_1, a_2) = 2$.

Задача 39. *Спрямо ортонормиран базис на евклидовото пространство $\mathbb{R}^4$ са дадени линейната обвивка $U = l(a_1, a_2, a_3)$ на векторите*

$$a_1 = (1, 2, -1, 0), \quad a_2 = (-1, -5, 1, 1), \quad a_3 = (0, 9, 0, 1)$$

и векторът $v = (1, 1, 1, 1)$. Да се намерят:

(а) ортогонални базиси на подпространството U и на ортогоналното му допълнение $U^{\perp}$;

(б) ортогоналната проекция v_1 и перпендикулярът h_1 от v към U;

Решение: (а) Прилагаме ортогонализация по метода на Грам-Шмид към векторите a_1, a_2, a_3 и получаваме ортогонален базис

$$b_1 = a_1 = (1, 2, -1, 0),$$

$$b_2 = a_2 - \frac{(a_2, b_1)}{(b_1, b_1)} b_1 = a_2 + 2b_1 = (1, -1, -1, 1),$$

$$b_3 = a_3 - \frac{(a_3, b_1)}{(b_1, b_1)} b_1 - \frac{(a_3, b_2)}{(b_2, b_2)} = a_3 - 3b_1 + 2b_2 = (-1, 1, 1, 3)$$

на подпространството U.

Ако x е стълб от четири числа, то умножението на матрици $\left(\begin{array}{c} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{array} \right) x$ съвпада със скаларното произведение спрямо ортонормиран базис, $\left(\begin{array}{c} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{array} \right) x = \left(\begin{array}{c} (a_1, x) \\ (a_2, x) \\ (a_3, x) \end{array} \right)$. Затова ортогоналното допълнение $U^{\perp}$ е пространството от решения на хомогенната линейна система

$$\left| \begin{array}{ccccc} x_1 & +2x_2 & -x_3 & & = 0 \\ x_1 & +5x_2 & -x_3 & -x_4 & = 0 \\ & 9x_2 & & +x_4 & = 0 \end{array} \right. ,$$

чиято матрица от коефициенти е образувана по редове от координатите на a_1, a_2, a_3. Използвайки $l(a_1, a_2, a_3) = l(b_1, b_2, b_3)$, можем да зададем $U^{\perp}$ като пространството от решения на хомогенната линейна система

$$\left| \begin{array}{ccccc} x_1 & +2x_2 & -x_3 & & = 0 \\ x_1 & -x_2 & -x_3 & +x_4 & = 0 \\ -x_1 & +x_2 & +x_3 & +3x_3 & = 0 \end{array} \right. .$$

Общото решение на тази система е $x_1 = x_3$, $x_2 = x_4 = 0$ и $U^{\perp} = l(c)$ за $c = (1, 0, 1, 0)$.

(б) Търсим вектор $v_1 = x_1 b_1 + x_2 b_2 + x_3 b_3 \in U$ с реални x_1, x_2, x_3, така че $v - v_1$ да принадлежи на ортогоналното допълнение $U^{\perp}$. За $U = l(a_1, a_2, a_3) = l(b_1, b_2, b_3)$ условието $v - v_1 \in U^{\perp}$ е еквивалентно на $0 = (v - v_1, b_i) = (v, b_i) - x_i(b_i, b_i)$ за $1 \leq i \leq 3$. Оттук

$$x_1 = \frac{(v, b_1)}{(b_1, b_1)} = \frac{1}{3}, \quad x_2 = \frac{(v, b_2)}{(b_2, b_2)} = 0, \quad x_3 = \frac{(v, b_3)}{(b_3, b_3)} = \frac{1}{3}$$

или

$$v_1 = \frac{1}{3} b_1 + \frac{1}{3} b_3 = (0, 1, 0, 1), \quad h_1 = v - v_1 = (1, 0, 1, 0).$$

По друг начин, търсим перпендикуляра $h_1 = xc \in U^{\perp}$, така че $v_1 = v - h_1 = v - xc \in U = (U^{\perp})^{\perp}$. С други думи, $0 = (v_1, c) = (v, c) - x(c, c)$ или $x = \frac{(v,c)}{(c,c)} = 1$ и

$$h_1 = c, \quad v_1 = v - c = (0, 1, 0, 1).$$

Задача 40. *Спрямо ортонормиран базис на евклидовото пространство $\mathbb{R}^4$ са дадени пространството от решения U на хомогенното линейно уравнение*

$$x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 = 0$$

и векторът $v = (1,1,1,1)$. Да се намерят:

(а) ортогонален базис на подпространството U;

(б) ортогоналната проекция v_1 и перпендикулярът h_1 от v към U;

Решение: (а) Пространството от решения U на хомогенна линейна система с ранг 1 в $\mathbb{R}^4$ е тримерно. Избираме $c_1 = (1,0,0,1)$. Търсим c_2 като ненулево решение на

$$\left| \begin{array}{lllll} x_1 & +x_2 & -2x_3 & -x_4 & =0 \\ x_1 & & & +x_4 & =0 \end{array} \right. .$$

Например, $c_2 = (0,2,1,0) \in U$. Накрая определяме вектора $c_3 \in U$, ортогонален на c_1 и c_2 като ненулево решение на хомогенната линейна система

$$\left| \begin{array}{lllll} x_1 & +x_2 & -2x_3 & -x_4 & =0 \\ x_1 & & & +x_4 & =0 \\ & 2x_2 & +x_3 & & =0 \end{array} \right. .$$

С точност до пропорционалност $c_3 = (5,-2,4,-5)$. Векторите c_1, c_2, c_3 образуват ортогонален базис на U.

(б) Ортогоналната проекция $v_1 = x_1c_1 + x_2c_2 + x_3c_3 \in U$, така че $v - v_1 \in U^\perp$ или $0 = (v - v_1, c_i) = (v, c_i) - x_i(c_i, c_i)$ за $1 \leq i \leq 3$. Пресмятаме

$$x_1 = \frac{(v,c_1)}{(c_1,c_1)} = 1, \quad x_2 = \frac{(v,c_2)}{(c_2,c_2)} = \frac{3}{5}, \quad x_3 = \frac{(v,c_3)}{(c_3,c_3)} = \frac{1}{35}$$

и получаваме

$$v_1 = c_1 + \frac{3}{5}c_2 + \frac{1}{35}c_3 = \left(\frac{8}{7}, \frac{8}{7}, \frac{5}{7}, \frac{6}{7}\right), \quad h = v - v_1 = \left(-\frac{1}{7}, -\frac{1}{7}, \frac{2}{7}, \frac{1}{7}\right).$$

По друг начин, $U^\perp = l(c)$ за $c = (1,1,-2,-1)$ и търсим $h_1 = xc$ така че $v_1 = v - h_1 = v - xc \in U = (U^\perp)^\perp$. Еквивалентно, $0 = (v_1, c) = (v, c) - x(c, c)$ и $x = \frac{(v,c)}{(c,c)} = -\frac{1}{7}$. В резултат,

$$h_1 = \left(-\frac{1}{7}, -\frac{1}{7}, \frac{2}{7}, \frac{1}{7}\right), \quad v_1 = v - h_1 = \left(\frac{8}{7}, \frac{8}{7}, \frac{5}{7}, \frac{6}{7}\right).$$

Задача 41. *Спрямо ортонормиран базис на евклидовото пространство $\mathbb{R}^n$, $n = 3, 4$, линейният оператор $\varphi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ има матрица*

$$(i) M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad (ii) N = \begin{pmatrix} 4 & 4 & -2 \\ 4 & -2 & 4 \\ -2 & 4 & 4 \end{pmatrix};$$

$$(iii) P = \begin{pmatrix} 2 & -10 & -2 \\ -10 & 5 & -8 \\ -2 & -8 & 11 \end{pmatrix}; \quad (iv) A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix};$$

$$(v)B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad (vi)C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Да се намери ортонормиран базис на $\mathbb{R}^4$, в който матрицата D на φ е диагонална, както и тази матрица D.

Решение: (i) Характеристичният полином

$$f_M(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & -3 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ -3 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda+2)(\lambda-2)(\lambda-4) = 0.$$

Решението $e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1)$ на хомогенната линейна система уравнения $(M+2E_3)x = 0_{3\times 1}$ е единичен собствен вектор, отговарящ на собствената стойност $\lambda_1 = -2$. Решаваме хомогенната линейна система $(M-2E_3)x = 0_{3\times 1}$ и намираме единичен собствен вектор $e_2 = (0,1,0)$, отговарящ на собствената стойност $\lambda_2 = 2$. Некрая избираме единичния собствен вектор, отговарящ на собствената стойност $\lambda_3 = 4$ като ненулево решение на хомогенната линейна система $(M-4E_3)x = 0_{3\times 1}$. Операторът φ е симетричен, защото има симетрична матрица M относно ортонормиран базис на $\mathbb{R}^3$. Векторите e_1, e_2, e_3 образуват ортонормиран базис на $\mathbb{R}^3$, съставен от собствени вектори на φ, в който φ има диагонална матрица

$$D_1 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

(ii) Характеристичният полином

$$f_N(\lambda) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 4 & -2 \\ 4 & -2-\lambda & 4 \\ -2 & 4 & 4-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda+6)(\lambda-6)^2 = 0.$$

Решението $e_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,-2,1)$ на хомогенната линейна система $(N+6E_3)x = 0_{3\times 1}$ е единичен собствен вектор, отговарящ на собствената стойност $\lambda_1 = -6$. Собствените вектори, отговарящи на двукратната собствена стойност $\lambda_2 = \lambda_3 = 6$ са решения на хомогенното линейно уравнение $x_1 - 2x_2 + x_3 = 0$. Избираме единичен собствен вектор $e_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}(2,1,0)$, отговарящ на собствената стойност $\lambda_2 = 6$. Търсим e_3 като ненулево единично решение на хомогенната линейна система

$$\left| \begin{array}{llll} x_1 & -2x_2 & +x_3 & = 0 \\ 2x_1 & +x_2 & & = 0 \end{array} \right.,$$

така че e_3 да е единичен собствен вектор, отговарящ на собствената стойност $\lambda_3 = 6$ и да е перпендикулярен на e_2. Избираме $e_3 = \pm\frac{1}{\sqrt{30}}(1,-2,-5)$ и получаваме ортонорчиран базис e_1, e_2, e_3 на $\mathbb{R}^3$, в който φ има диагонална матрица

$$D_2 = \begin{pmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

(iii) Характеристичният полином

$$f_P(\lambda) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -10 & -2 \\ -10 & 5-\lambda & -8 \\ -2 & -8 & 11-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda+9)(\lambda-9)(\lambda-18) = 0.$$

Решението $e_1 = \frac{1}{3}(2,2,1)$ на хомогенната линейна система $(P+9E_3)x = 0_{3\times 1}$ е единичен собствен вектор, отговарящ на собствената стойност $\lambda_1 = -9$. Избираме единичен собствен вектор $e_2 = \frac{1}{3}(-2,1,2)$, отговарящ на собствената стойност $\lambda_2 = 9$ като решение на хомогенната линейна система $(P-9E_3)x = 0_{3\times 1}$. Единичният собствен вектор $e_3 = \frac{1}{3}(1,-2,2)$, отговарящ на собствената стойност $\lambda_3 = 18$ е решение на хомогенната линейна система $(P-18E_3)x = 0_{3\times 1}$. Операторът φ е симетричен, защото има симетрична матрица P спрямо ортонормиран базис на $\mathbb{R}^3$. Следователно собствените вектори e_1, e_2, e_3, отговарящи на различните собствени стойности $\lambda_1 = -9$, $\lambda_2 = 9$, $\lambda_3 = 18$ са ортогонални помежду си и образуват ортонормиран базис на $\mathbb{R}^3$, съставен от собствени вектори на φ. Матрицата на φ спрямо базиса $e_1, e_@, e_3$ е

$$D_3 = \begin{pmatrix} -9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 18 \end{pmatrix}.$$

(iv) Характеристичният полином

$$f_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -2 & 0 & 1 \\ -2 & 2-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2-\lambda & -2 \\ 1 & 0 & -2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda+1)(\lambda-1)(\lambda-3)(\lambda-5) = 0,$$

Решението $e_1 = \frac{1}{2}(1,1,-1,-1)$ на хомогенната линейна система $(A+E_4)X = 0_{4\times 1}$ е единичен собствен вектор, отговарящ на собствената стойност $\lambda_1 = -1$. Решението $e_2 = \frac{1}{2}(1,1,1,1)$ на хомогенната линейна система $(A-E_4)X = 0_{4\times 1}$ е единичен собствен вектор, отговарящ на собствената стойност $\lambda_2 = 1$. Аналогично, решението $e_3 = \frac{1}{2}(1,-1,1,-1)$ на $(A-3E_4)X = 0_{4\times 1}$ е единичен собствен вектор, отговарящ на $\lambda_3 = 3$, а $e_4 = \frac{1}{2}(1,-1,-1,1)$ е единичен собствен вектор, отговарящ на $\lambda_4 = 5$. Матрицата на φ спрямо ортонормиран базис на $\mathbb{R}^4$ е симетрична, така че φ е симетричен оператор. Следователно собствените вектори, отговарящи на различни собствени стойности са ортогонални помежду си и e_1, e_2, e_3, e_4 е ортонормиран базис на $\mathbb{R}^4$. Матрицата на φ спрямо този базис е

$$D_4 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

(v) Характеристичният полином

$$f_B(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = (\lambda+1)^2(\lambda-1)^2 = 0.$$

Избираме собствените вектори e_1, e_2, отговарящи на собствените стойности $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$ като ортонормиран базис на пространството от решения на хомогенната линейна система

$$(B+E_4)X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} X = 0_{4\times 1}.$$

Например, $e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,0,-1)$, $e_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,-1,0)$. Аналогично, собствените вектори $e_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,0,1)$, $e_4 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,1,0)$, отговарящи на собствените стойности $\lambda_3 = \lambda_4 = 1$ са ортонормиран базис на пространството от решения на

$$(B-E_4)X = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} X = 0_{4\times 1}.$$

Операторът φ е симетричен, защото има симетрична матрица спрямо ортонормиран базис на $\mathbb{R}^4$. Следователно, собствените вектори на φ, отговарящи на различни собствени стойности са ортогонални помежду си и e_1, e_2, e_3, e_4 е ортонормиран базис на $\mathbb{R}^4$. Матрицата на φ спрямо този базис е

$$D_5 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(vi) Характеристичният полином

$$f_C(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda+2)(\lambda-2)^3.$$

Решението $e_1 = \frac{1}{2}(-1,1,1,1)$ на $(C+2E_4)X = 0_{4\times 1}$ е единичен собствен вектор, отговарящ на собствената стойност $\lambda_1 = -2$. Собствените вектори e_2, e_3, e_4, отговарящи на трикратната собствена стойност $\lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 2$ се избират като ортонормиран базис на пространството от решения на

$$(C-2E_4)X = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} X = 0_{4\times 1}.$$

Тази система се свежда до $x_1 = x_2 + x_3 + x_4$. Нека $e_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0,0)$ е едно ненулево решение. Търсим e_3 като единичен вектор, изпълняващ хомогенната линейна система

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} X = 0_{4\times 1}.$$

Например $e_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,-1,0,2)$. Накрая, $e_4 = \frac{1}{2\sqrt{3}}(-1,1,-3,1)$ е единично решение на

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} X = 0_{4\times 1}.$$

Операторът φ е симетричен, така че собствените вектори, отговарящи на различни собствени стойности са ортогонални помежду си и e_1, e_2, e_3, e_4 е ортонормиран базис на $\mathbb{R}^4$. Матрицата на φ в този базис е

$$D_6 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Задача 42. *Нека V е n-мерно евклидово пространство, а U и W са k-мерни подпространства на V. Да се докаже, че:*
(i) съществува ортогонален оператор $\varphi : V \longrightarrow V$ с $\varphi(U) = W$;
(ii) всеки ортогонален оператор $\varphi : V \longrightarrow V$ с $\varphi(U) = W$ изпълнява $\varphi(U^\perp) = W^\perp$.

Решение: (i) Избираме ортонормиран базис $e_1, \ldots, e_k$ на U и допълваме до ортонормиран базис $e_1, \ldots, e_k, e_{k+1}, \ldots, e_n$ на V. Аналогично, избираме ортонормиран базис $f_1, \ldots, f_k$ на W и допълваме да ортонормиран базис $f_1, \ldots, f_k, f_{k+1}, \ldots, f_n$ на V. Линейният оператор $\varphi : V \longrightarrow V$ с $\varphi(e_i) = f_i$ за $\forall 1 \leq i \leq n$ е ортогонален, защото трансформира ортонормиран базис на V в ортонормиран базис на V. Още повече,

$$\varphi(U) = \varphi(l(e_1, \ldots, e_k)) = l(\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_k)) = l(f_1, \ldots, f_k) = W.$$

(ii) От една страна, ортогоналните допълнения имат една и съща размерност,

$$\dim(U^\perp) = \dim(V) - \dim(U) = n - k = \dim(V) - \dim(W) = \dim(W^\perp).$$

От друга страна, ортогоналният оператор φ в крайномерно пространство V е обратим, така че $\dim(\varphi(U^\perp)) = \dim(U^\perp) = \dim(W^\perp)$. Достатъчно е да проверим, че $\varphi(U^\perp) \subseteq W^\perp$, за да твърдим съвпадението $\varphi(U^\perp) = W^\perp$. Наистина, $\forall w \in W$ е образ на $u \in U$, $w = \varphi(u)$. За произволно $x \in U^\perp$ е в сила $(\varphi(x), w) = (\varphi(x), \varphi(u)) = (x, u) = 0$, така че $\varphi(U^\perp) \subseteq W^\perp$.

Втори начин, избираме ортонормиран базис $e_1, \ldots, e_k$ на U и допълваме до ортонормиран базис $e_1, \ldots, e_k, e_{k+1}, \ldots, e_n$ на V. Съгласно задача 37, $e_{k+1}, \ldots, e_n$ е ортонормиран базис на $U^\perp$. Под действие на ортогоналния оператор φ получаваме ортонормиран базис $\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_k), \varphi(e_{k+1}), \ldots, \varphi(e_n)$ на V. Векторите $\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_k)$ образуват ортонормиран базис на W. Отново от Задача 37, $\varphi(e_{k+1}), \ldots, \varphi(e_n)$ е ортонормиран базис на $W^\perp$. Накрая,

$$\varphi(U^\perp) = \varphi(l(e_{k+1}, \ldots, e_n)) = l(\varphi(e_{k+1}), \ldots, \varphi(e_n)) = W^\perp.$$

Задача 43. *Да се докаже, че множеството L на онези $\mathbb{Q}$-линейните изображения $\varphi : \mathbb{Q}^3 \longrightarrow \mathbb{Q}^2$, чиито ядра съдържат вектора $(2,1,3)$ е 4-мерно линейно пространство над $\mathbb{Q}$ и да се намери базис на L над $\mathbb{Q}$.*

Решение: Нека $A \in M_{2\times 3}(\mathbb{Q})$ е матрицата на φ спрямо стандартния базис $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$, $e_3 = (0,0,1)$ на $\mathbb{Q}^3$ и стандартния базис $f_1 = (1,0)$, $f_2 = (0,1)$ на $\mathbb{Q}^2$. Тогава условието $(2,1,3) = 2e_1 + e_2 + 3e_3 \in \ker(\varphi)$ е еквивалентно на

$$\left(\begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array}\right) = A \left(\begin{array}{c} 2 \\ 1 \\ 3 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{array}\right) \left(\begin{array}{c} 2 \\ 1 \\ 3 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} 2a_{11} + a_{12} + 3a_{13} \\ 2a_{21} + a_{22} + 3a_{23} \end{array}\right).$$

Матриците $A = (a_{ij})$ на търсените линейни изображения образуват 4-мерното пространство от решения L_1 на хомогенната линейна система

$$\left| \begin{array}{llll} 2a_{11} & +a_{12} & +3a_{13} & = 0 \\ 2a_{21} & +a_{22} & +3a_{23} & = 0 \end{array} \right.$$

с шест променливи a_{ij}, $1 \leq i \leq 2$, $1 \leq j \leq 3$. Общото решение на тази система е

$$\left| \begin{array}{lll} a_{12} = & -2a_{11} & -3a_{13} \\ a_{22} = & -2a_{21} & -3a_{23} \end{array} \right. .$$

Избираме фундаментална система решения

$$A_1 = \left(\begin{array}{ccc} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right), \quad A_2 = \left(\begin{array}{ccc} 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right), \quad A_3 = \left(\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \end{array}\right), \quad A_4 = \left(\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{array}\right)$$

или базис на L_1. Той отговаря на базиса $\varphi_1, \ldots, \varphi_4$ на L, съставен от линейните изображения $\varphi_j : \mathbb{Q}^3 \longrightarrow \mathbb{Q}^2$ с матрици A_j спрямо e_1, e_2, e_3 и f_1, f_2.

Задача 44. *За произволни матрици $A, B \in M_{m\times n}(F)$ с елементи от поле F да се докаже, че рангът на сумата не надминава сумата на ранговете,*

$$\mathrm{rk}(A+B) \leq \mathrm{rk}(A) + \mathrm{rk}(B).$$

Решение: Нека $\varphi : F^n \longrightarrow F^m$ и $\psi : F^n \longrightarrow F^m$ са линейните изображения с матрици A, съответно B, спрямо някакъв базис $e = (e_1, \ldots, e_n)$ на F^n и някакъв базис $f = (f_1, \ldots, f_m)$ на F^m. Тогава $A + B$ е матрицата на $\varphi + \psi : F^n \longrightarrow F^m$ спрямо базиса e на F^n и базиса f на F^m. Но образът на сумата $\varphi + \psi$

$$\mathrm{im}(\varphi + \psi) = \{(\varphi + \psi)(x) = \varphi(x) + \psi(x) \mid x \in F^n\}$$

е подпространство на сумата на образите

$$\mathrm{im}(\varphi) + \mathrm{im}(\psi) = \{\varphi(y) \mid y \in F^n\} + \{\psi(z) \mid z \in F^n\} = \{\varphi(y) + \psi(z) \mid y, z, \in F^n\},$$

така че
$$\mathrm{rk}(\varphi+\psi)=\dim\mathrm{im}(\varphi+\psi)\leq\dim[\mathrm{im}(\varphi)+\mathrm{im}(\psi)]=$$
$$=\dim\mathrm{im}(\varphi)+\dim\mathrm{im}(\psi)-\dim[\mathrm{im}(\varphi)\cap\mathrm{im}(\psi)]\leq\dim\mathrm{im}(\varphi)+\dim\mathrm{im}(\psi)=\mathrm{rk}(\varphi)+\mathrm{rk}(\psi).$$
Остава да приложим, че $\mathrm{rk}(\varphi+\psi)=\mathrm{rk}(A+B)$, $\mathrm{rk}(\varphi)=\mathrm{rk}(A)$ и $\mathrm{rk}(\psi)=\mathrm{rk}(B)$.

Задача 45. *Ако $X,Y\in M_{n\times n}(F)$ са квадратни матрици с произведение $XY=0_{n\times n}$, да се докаже, че*
$$\mathrm{rk}(X)+\mathrm{rk}(Y)\leq n.$$

Решение: Нека $e_1,\ldots,e_n$ е базис на F^n, $\varphi:F^n\longrightarrow F^n$ е операторът с матрица X спрямо този базис, а $\psi:F^n\longrightarrow F^n$ е операторът с матрица Y спрямо този базис. Тогава от $XY=0_{n\times n}$ следва $\varphi\psi=\mathcal{O}$ за нулевия оператор $\mathcal{O}:F^n\longrightarrow F^n$ с $\mathcal{O}(x)=0_{n\times 1}$ за $\forall x\in F^n$. С други думи, $\mathrm{im}(\psi)\subseteq\ker(\varphi)$ и по Теоремата за ранга и дефекта на линейно изображение получаваме
$$\mathrm{rk}(\psi)=\dim\mathrm{im}(\psi)\leq\dim\ker(\varphi)=\dim F^n-\dim\mathrm{im}(\varphi)=n-\mathrm{rk}(\varphi).$$

Задача 46. *Нека $A=(a_{ij})_{i,j=1}^n\in M_{n\times n}(F)$ е квадратна матрица от ранг r, а $A^*=(A_{ij})_{i,j=1}^n\in M_{n\times n}(F)$ е матрицата, съставена от адюнгираните количества A_{ij} на елементите a_{ij} на A. За ранга r^* на A^* да се докаже, че:*

(i) $r^*=n$ за $r=n$;

(ii) $r^*=0$ за $0\leq r\leq n-2$;

(iii) $r^*=1$ за $r=n-1$.

Решение: Ако $r=n$, то $\det(A)\neq 0$ и $A(A^*)^t=(A^*)^tA=\det(A)E_n$. Оттук $\det(A^*)^t=\det(A^*)\neq 0$ и $r^*=n$.

При $r\leq n-2$ всички адюнгирани количества $A_{ij}=0$ се анулират и $A^*=0_{n\times n}$, $r^*=0$.

В случая $r=n-1$ използваме $A(A^*)^t=\det(A)E_n=0_{n\times n}$, за да разглеждаме вектор-стълбовете $c_1,\ldots,c_n$ на $(A^*)^t$ като вектори от пространството U на решенията на хомогенната линейна система $AX=0_{n\times 1}$ с ранг $r=n-1$. За вектор-редовете $c_1^t,\ldots,c_n^t$ на A^* имаме
$$r^*=\mathrm{rk}(A^*)=\mathrm{rk}(c_1^t,\ldots,c_n^t)=\mathrm{rk}(c_1,\ldots,c_n)=\dim l(c_1,\ldots,c_n)\leq\dim U=n-(n-1)=1.$$
Но $r=n-1$ означава съществуването на $A_{ij}\neq 0$, така че $r^*\geq 1$, а оттам и $r^*=1$.

Задача 47. (Неравенство на Силвестър - давана на писмен изпит по Алгебра 1 за специалност Компютърни Науки през 2006г.) *За произволни квадратни матрици $A,B\in M_{n\times n}(F)$ да се докаже, че*
$$\mathrm{rk}(A)+\mathrm{rk}(B)-n\leq\mathrm{rk}(AB)\leq\min(\mathrm{rk}(A),\mathrm{rk}(B)).$$

Решение: Нека $e_1,\ldots,e_n$ е базис на F^n, $\varphi:F^n\longrightarrow F^n$ е линейният оператор с матрица A спрямо този базис, а $\psi:F^n\longrightarrow F^n$ е линейният оператор с матрица B спрямо този базис. Неравенството на Силвестър е еквивалентно на
$$\mathrm{rk}(\varphi)+\mathrm{rk}(\psi)-n\leq\mathrm{rk}(\varphi\psi)\leq\min(\mathrm{rk}(\varphi),\mathrm{rk}(\psi)).$$

За удобство да означим $r = \mathrm{rk}(\varphi)$, $s = \mathrm{rk}(\psi)$.

Избираме базис $b_1, \ldots, b_s$ на образа $\mathrm{im}(\psi) = l(\psi(e_1), \ldots, \psi(e_n))$ на ψ. В резултат, $\varphi\psi(e_j) \in l(\varphi(b_1), \ldots, \varphi(b_s))$ за $\forall 1 \leq j \leq n$ и $\mathrm{im}(\varphi\psi) = l(\varphi\psi(e_1), \ldots, \varphi\psi(e_n))$ е подпространство на $W = l(\varphi(b_1), \ldots, \varphi(b_s))$. Оттук,

$$\mathrm{rk}(\varphi\psi) = \dim \mathrm{im}(\varphi\psi) \leq \dim W \leq s = \mathrm{rk}(\psi).$$

За $\mathrm{rk}(\varphi\psi) \leq \mathrm{rk}(\varphi)$ използваме, че $\psi(e_j) \in l(e_1, \ldots, e_n) = F^n$, откъдето $\varphi\psi(e_j) \in l(\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_n)) = \mathrm{im}(\varphi)$ за $\forall 1 \leq j \leq n$. Следователно $\mathrm{im}(\varphi\psi) = l(\varphi\psi(e_1), \ldots, \varphi\psi(e_n))$ е подпространство на $\mathrm{im}(\varphi)$ и

$$\mathrm{rk}(\varphi\psi) = \dim \mathrm{im}(\varphi\psi) \leq \dim \mathrm{im}(\varphi) = \mathrm{rk}(\varphi).$$

За $\mathrm{rk}(\varphi\psi) \geq r + s - n$ разглеждаме φ като линейно изображение

$$\varphi : \mathrm{im}(\psi) = l(\psi(e_1), \ldots, \psi(e_n)) \longrightarrow F^n$$

на образа $\mathrm{im}(\psi) \simeq F^s$ на ψ. Образът на линейния оператор $\varphi\psi : F^n \longrightarrow F^n$ съвпада с образа на $\varphi : \mathrm{im}(\psi) \longrightarrow F^n$, така че

$$\mathrm{rk}(\varphi\psi) = \dim \mathrm{im}(\psi) - \dim \ker\left(\varphi|_{\mathrm{im}(\psi)}\right) = \mathrm{rk}(\psi) - \dim(\ker(\varphi) \cap \mathrm{im}(\psi)).$$

Съгласно $\mathrm{rk}(\varphi) = r$, ядрото $\ker(\varphi)$ на φ е с $\dim \ker(\varphi) = n - r$. Подпространството $\ker(\varphi) \cap \mathrm{im}(\psi)$ на $\ker(\varphi)$ е с размерност $\dim(\ker \cap \mathrm{im}(\psi)) \leq n - r$ и

$$\mathrm{rk}(\varphi\psi) \geq \mathrm{rk}(\psi) - (n - r) = \mathrm{rk}(\psi) + \mathrm{rk}(\varphi) - n.$$

Задача 48. *Нека $\varphi : V \longrightarrow V$ е линеен оператор със собствен вектор $\mathcal{O} \neq v \in V$, отговарящ на собствена стойност λ, а $g(x) = \sum\limits_{i=0}^{n} a_i x^i \in F[x]$ е полином с коефициенти от F. Да се докаже, че v е собствен вектор за оператора $g(\varphi)$, отговарящ на собствена стойност $g(\lambda)$.*

Решение: Операторът $g(\varphi) = \sum\limits_{i=0}^{n} a_i \varphi^i$ с $\varphi^0 = \mathrm{Id}_V$ действа върху v по правилото

$$g(\varphi)(v) = \sum_{i=0}^{n} (a_i \varphi^i)(v) = \sum_{i=0}^{n} a_i \varphi^i(v),$$

съгласно определението за сума на линейни оператори и произведение на линеен оператор с $\lambda \in F$. С индукция по $0 \leq i \leq n$ проверяваме, че $\varphi^i(v) = \lambda^i v$, откъдето $g(\varphi)(v) = \sum\limits_{i=0}^{n} a_i \lambda^i v = g(\lambda) v$.

Задача 49. *Да се докаже, че:*

(i) ако линейният оператор $\varphi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ в евклидовото пространство $\mathbb{R}^n$ запазва дължините,

$$||\varphi(x)|| = \sqrt{(\varphi(x), \varphi(x))} = \sqrt{(x, x)} = ||x|| \quad \textit{за} \quad \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

то φ е ортогонален оператор.

(ii) ако изображението $\psi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ на евклидовото пространство $\mathbb{R}^n$ изпълнява

$$(\psi(x), \psi(y)) = (x, y) \quad \text{за} \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n,$$

то ψ е линеен оператор, а оттам и ортогонален линеен оператор.

Решение: (i) От

$$(\varphi(x), \varphi(x)) + (\varphi(x), \varphi(y)) + (\varphi(y), \varphi(x)) + (\varphi(y), \varphi(y)) =$$

$$= (\varphi(x + y), \varphi(x + y)) = (x + y, x + y) =$$

$$(x, x) + (x, y) + (y, x) + (y, y)$$

с $(\varphi(x), \varphi(x)) = (x, x)$, $(\varphi(y), \varphi(y)) = (y, y)$ и от симетричността на скаларното произведение в евклидово пространство, $(\varphi(y), \varphi(x)) = (\varphi(x), \varphi(y))$, $(y, x) = (x, y)$ следва

$$(\varphi(x), \varphi(y)) = (x, y) \quad \text{за} \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n.$$

(ii) За произволни $v_1, \ldots, v_m \in \mathbb{R}^n$ и $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ трябва да докажем, че векторът

$$v = \psi(\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_m v_m) - \lambda_1 \psi(v_1) - \ldots - \lambda_m \psi(v_m)$$

е нулев. Скаларният квадрат

$$(v, v) = \left(\psi\left(\sum_{i=1}^m \lambda_i v_i \right), \psi\left(\sum_{j=1}^m \lambda_j v_j \right) \right) - \left(\psi\left(\sum_{i=1}^m \lambda_i v_i \right), \sum_{j=1}^m \lambda_j \psi(v_j) \right) -$$

$$- \left(\sum_{i=1}^m \lambda_i \psi(v_i), \psi\left(\sum_{j=1}^m \lambda_j v_j \right) \right) + \left(\sum_{i=1}^m \lambda_i \psi(v_i), \sum_{j=1}^m \lambda_j \psi(v_j) \right) =$$

$$= \left(\sum_{i=1}^m \lambda_i v_i, \sum_{j=1}^m \lambda_j v_j \right) - \sum_{j=1}^m \lambda_j \left(\psi\left(\sum_{i=1}^m \lambda_i v_i \right), \psi(v_j) \right) -$$

$$- \sum_{i=1}^m \lambda_i \left(\psi(v_i), \psi\left(\sum_{j=1}^m \lambda_j v_j \right) \right) + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \lambda_i \lambda_j (\psi(v_i), \psi(v_j)) =$$

$$= \left(\sum_{i=1}^m \lambda_i v_i, \sum_{j=1}^m \lambda_j v_j \right) - \sum_{j=1}^m \lambda_j \left(\sum_{i=1}^m \lambda_i v_i, v_j \right) -$$

$$- \sum_{i=1}^m \lambda_i \left(v_i, \sum_{j=1}^m \lambda_j v_j \right) + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \lambda_i \lambda_j (v_i, v_j) = 0.$$

Приложение 50. *При пресмятане на границата $\lim_{n \to \infty} A^n$ за матрица A се използват характеристичните корени на A.*

Обяснение: Например,

$$A = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.8 \\ 0.4 & 0.2 \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$$

се представя като

$$A = TDT^{-1},$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -0.2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

Следователно

$$A^n = (TDT^{-1})(TDT^{-1})\dots(TDT^{-1}) = TD^nT^{-1},$$

$$A^n = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (-0.2)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix},$$

$$A^n = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} + \frac{1}{3}(-0.2)^n & \frac{2}{3} - \frac{2}{3}(-0.2)^n \\ \frac{1}{3} - \frac{1}{3}(-0.2)^n & \frac{1}{3} + \frac{2}{3}(-0.2)^n \end{pmatrix}$$

и границата

$$\lim_{n\to\infty} A^n = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Приложение 51. *Решенията на хомогенно линейно диференциално уравнение образуват линейно пространство.*

Например, множеството от решения $y = y(t)$ на диференциалното уравнение

$$y'' + 4y' + y = 0$$

е линейно пространство над $\mathbb{R}$.

Обяснение: Използваме наготово, че множеството $\mathcal{V}$ на функциите $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ с поточково определени събиране $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ и умножение с реално число, $(rf)(x) = rf(x)$ е линейно пространство над $\mathbb{R}$. Ще проверим, че множеството $\mathcal{U}$ от решенията $y = y(t)$ на даденото диференциално уравнение е подпространство на $\mathcal{V}$, а оттам и линейно пространство над $\mathbb{R}$. По-точно, за $\forall y_1, y_2 \in U$ и $\forall r \in \mathbb{R}$ е в сила $y_1 + y_2, ry_1 \in \mathcal{U}$ съгласно

$$(y_1+y_2)'' + 4(y_1+y_2)' + (y_1+y_2) = (y_1'' + 4y_1' + y_1) + (y_2'' + 4y_2' + y_2) = 0,$$

$$(ry_1)'' + 4(ry_1)' + ry_1 + r(y_1'' + 4y_1' + y_1) = 0.$$

Приложение 52. *Ако система диференциални уравнения*

$$\left| \begin{array}{lll} \frac{dx_1}{dt} = & \alpha x_1 & +\beta x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} = & \gamma x_1 & +\delta x_2 \end{array} \right.$$

има матрица от коефициенти

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = SDS^{-1} = S \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} S^{-1},$$

с прост спектър, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$, *то решенията на системата имат вида*

$$x_1(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t},$$

$$x_2(t) = C_3 e^{\lambda_1 t} + C_4 e^{\lambda_2 t},$$

за подходящи реални константи $C_1, \ldots, C_4$.

Обяснение: Полагаме

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = X = SY = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

или въвеждаме нови променливи $Y = S^{-1}X$ чрез обратима матрица $S \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ с постоянни елементи. Тогава от

$$S\frac{dY}{dt} = \frac{dX}{dt} = AX = A(SY) = (AS)Y$$

следва

$$\frac{dY}{dt} = (S^{-1}AS)Y = DY = \begin{pmatrix} \lambda_1 y_1 \\ \lambda_2 y_2 \end{pmatrix}.$$

Диференциалните уравнения

$$\frac{dy_j}{dt} = \lambda_j y_j$$

се представят във вида

$$\frac{d}{dt}\ln(y_j) = \frac{dy_j}{y_j} = \lambda_j dt$$

и се интегрират до $\ln(y_j) = \lambda_j t + \ln(y_j(0))$ или $y_j(t) = y_j(0)e^{\lambda_j t}$. Решенията на първоначалната система са

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = X = SY = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(0)e^{\lambda_1 t} \\ y_2(0)e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} x_1(t) &= s_{11}y_1(0)e^{\lambda_1 t} + s_{12}y_2(0)e^{\lambda_2 t} \\ x_2(t) &= s_{21}y_1(0)e^{\lambda_1 t} + s_{22}y_2(0)e^{\lambda_2 t} \end{aligned}.$$

Задачите са взети от

1. Божилов А., Кошлуков Пл., Сидеров Пл., "Задачи по алгебра - линейна алгебра Изд. Веди.

2. Kazdan J. L., "Linear Algebra Problems for Math 504-505".

3. Matthews K. R., "Elementary Linear Algebra".