

19.12.2013г.

Лекция

Линейни уравнения

$$L(x) = x^{(n)} + a_{n-1}(t)x^{(n-1)} + \dots + a_1(t)\dot{x} + a_0(t)x = f(t)$$

непрекъснати
 $a_j(t)$ и $f(t)$ -зададени функции

Тъ за $\exists$ и ! на задачата на Коши

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} L(x) = f(t), \\ x(t_0) = \xi_1 \\ \dot{x}(t_0) = \xi_2 \\ \vdots \\ x^{(n-1)}(t_0) = \xi_n \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{ДУ от} \\ n\text{-ти ред} \end{array}$$

(копкото е реда на y -ето)

Задачата (2) има единствено решение $x = x(t)$ и то е деф. за $\forall t \in \mathbb{R}$.

ξ_j -произволни const.

Линейно хомогенно уравнение
 $L(x) = 0$

→

! изпит
ДУ

Тк за структурата на $L(x)=0$

Множеството M от решения на $L(x)=0$ е изоморфно на линейното пространство $\mathbb{R}^n$.

Д-во. Първо, M е л. пространство.
Ако $x_1(t)$ и $x_2(t)$ са 2 решения,
~~ако~~ то
$$L(x_1 + x_2) = \sum a_k (x_1^{(k)} + x_2^{(k)}) =$$
$$= \sum a_k x_1^{(k)} + \sum a_k x_2^{(k)} =$$
$$= L(x_1) + L(x_2), \text{ т.е.}$$

сума на 2 решения е решение.
Ако $\lambda \in \mathbb{R}$, то $L(\lambda x_1) = \sum a_k \lambda x_1^{(k)}$

$$\begin{aligned} & \parallel \\ & \lambda \sum a_k x_1^{(k)} = \\ & = \lambda L(x_1) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \lambda L(x_1) = 0$$

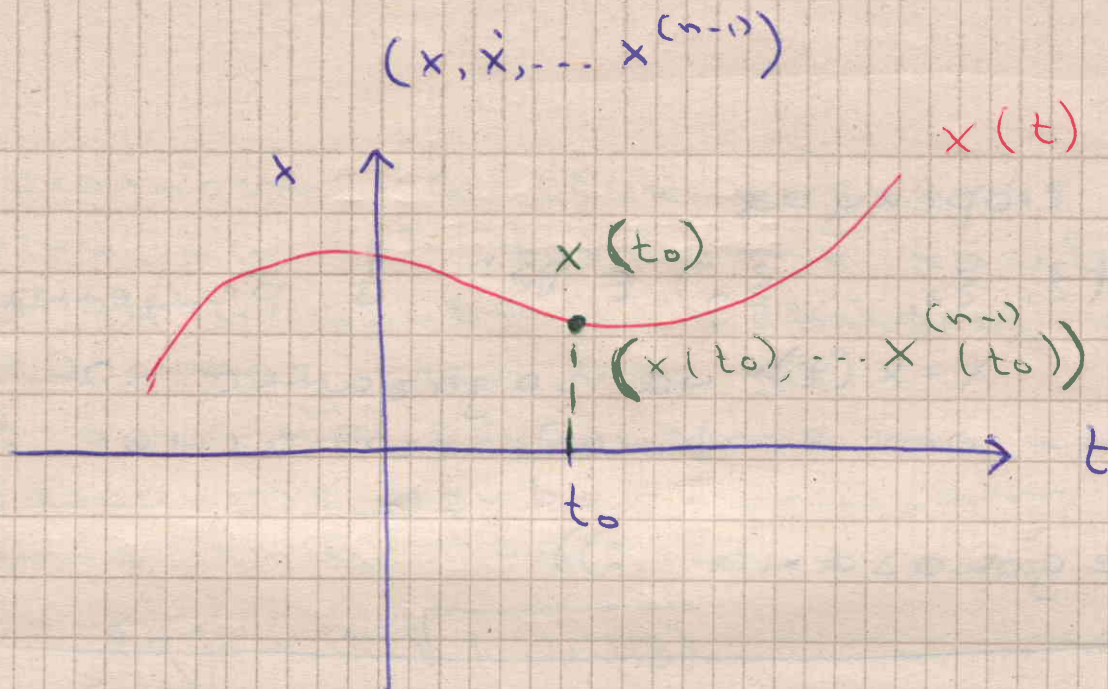
$\Rightarrow$ т.е. λ -решение е решение.

Второ, построяваме изобразе-
ние ~~ф~~ $f: M \rightarrow \mathbb{R}^n$

$$x \rightarrow (x(t_0), \dot{x}(t_0), \dots, x^{(n-1)}(t_0))^t$$

в-р отзвб,
т.е. за някоя произволна точка $t=t_0$.

С други думи, на $\forall$ решение
 $x=x(t)$ съпоставяме
началните му условия.



Изоморфизъм на лнн. п-ва

Това е линеен хомоморфизъм, който е ~~биекция~~ инекция и сюрекция.

- ϕ е линеен хомоморфизъм

~~$$\phi(x_1 + x_2) = \phi(x_1) + \phi(x_2)$$~~

$$\phi(\lambda x_1) = \lambda \phi(x_1)$$

$$x_1^{(k)}(t_0) + x_2^{(k)}(t_0) = x_1^{(k)}(t_0) + x_2^{(k)}(t_0)$$

$$(x_1^{(k)}(t) + x_2^{(k)}(t))_{t=t_0} = x_1^{(k)}(t_0) + x_2^{(k)}(t_0)$$

$$(\lambda x_1^{(k)}(t))_{t=t_0} = \lambda x_1^{(k)}(t_0)$$

- ϕ инекция, т.е. $\text{Ker } \phi = \{0\}$

Наистина, ако $x^{(k)}(t_0) = 0 \quad \forall k = 1 \div n-1$,
то $x(t) \equiv 0$ съгласно **Th** за единственост

• ϕ е сюрекция

$\forall (z_1, z_2, \dots, z_n) \in \mathbb{R}^n \exists$ решение

$x = x(t)$ на задачата на Коши съгласно

Th 3a $\exists$

$\Rightarrow$ Th е доказана :))

07.01.2014г.

Упражнение

Фазови портрети на
консервативни системи

Разглеждаме y -ето

$$(1) \ddot{x} = - \frac{du(x)}{dx} \quad \cdot = \frac{d}{dt}$$

или еквивалентна система

$$(2) \quad \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = - \frac{du(x)}{dx} \end{cases}$$

Особените точки на (2) са точките
 $(x, \dot{x}) = (z, 0)$, където $x = z$ е т.т.

$$\frac{d(u)}{dx}(z) = 0$$

- В околност на обикновените точки на (2) фазовите криви са гладки криви и пресичат оста $\dot{x} = 0$ под ъгъл от 90° .
- В ок-т на особените точки фазовите криви пресичат оста $\dot{x} = 0$ под ъгъл ψ , т.е.

$$\operatorname{tg} \psi = \pm \sqrt{1 - u'(z)}$$

- Всяка фазова крива изцяло лежи в/у линията на ниво

$$\text{const} = E = \frac{\dot{x}^2}{2} + u(x) \quad (3)$$

Фазовите криви лежат във фазовото пространство $Ox\dot{x}$

От (3) имаме

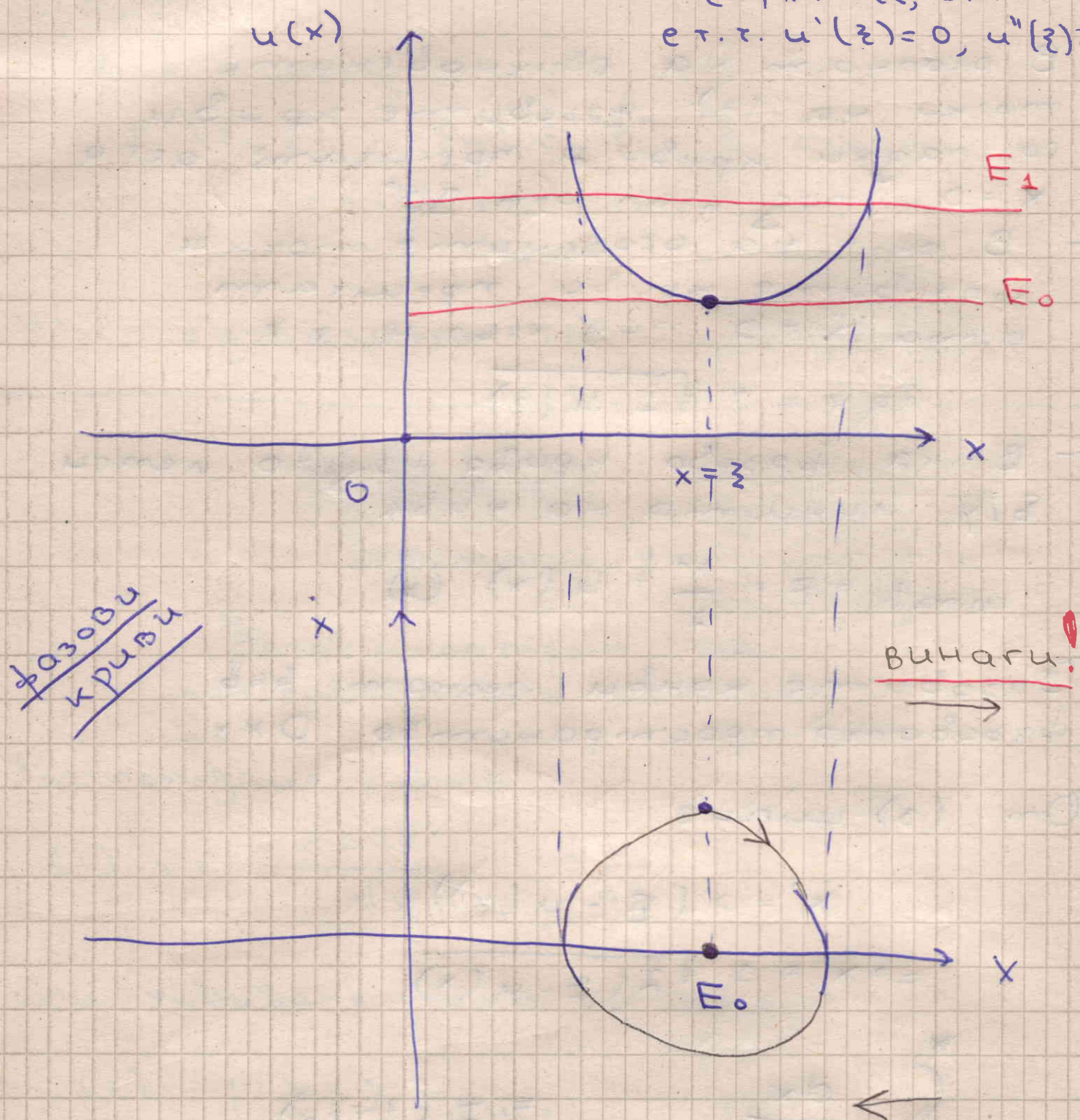
$$\dot{x}^2 = 2(E - u(x))$$

$$\Rightarrow \dot{x} = \pm \sqrt{2(E - u(x))}$$

$$\int_{x_0}^x \frac{dx}{\sqrt{2(E - u(x))}} = \pm (t - t_0)$$

Локални фазови портрети

① Особена точка $(x, \dot{x}) = (z, 0)$ на (2) е т.т. $u'(z) = 0, u''(z) > 0$

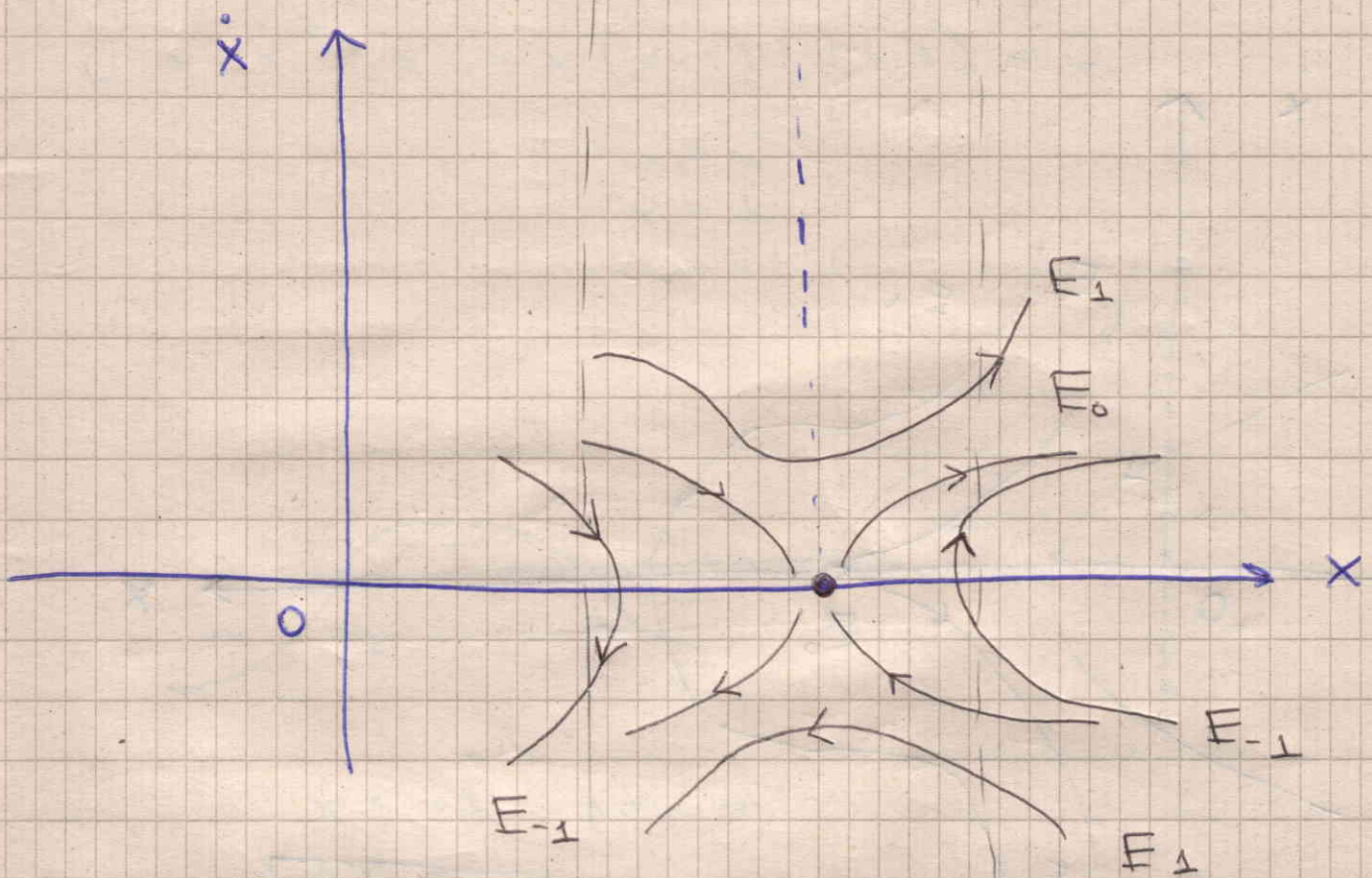
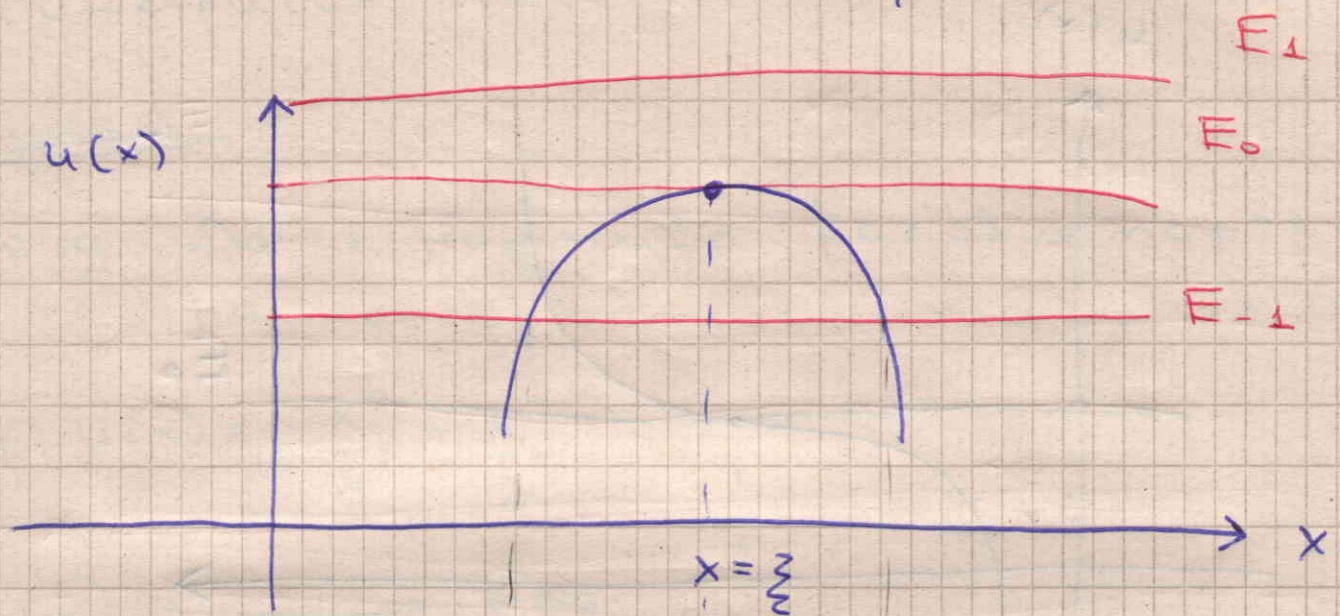


2. Особена точка $(x, \dot{x}) = (z, 0)$ на (2) е т.т.е

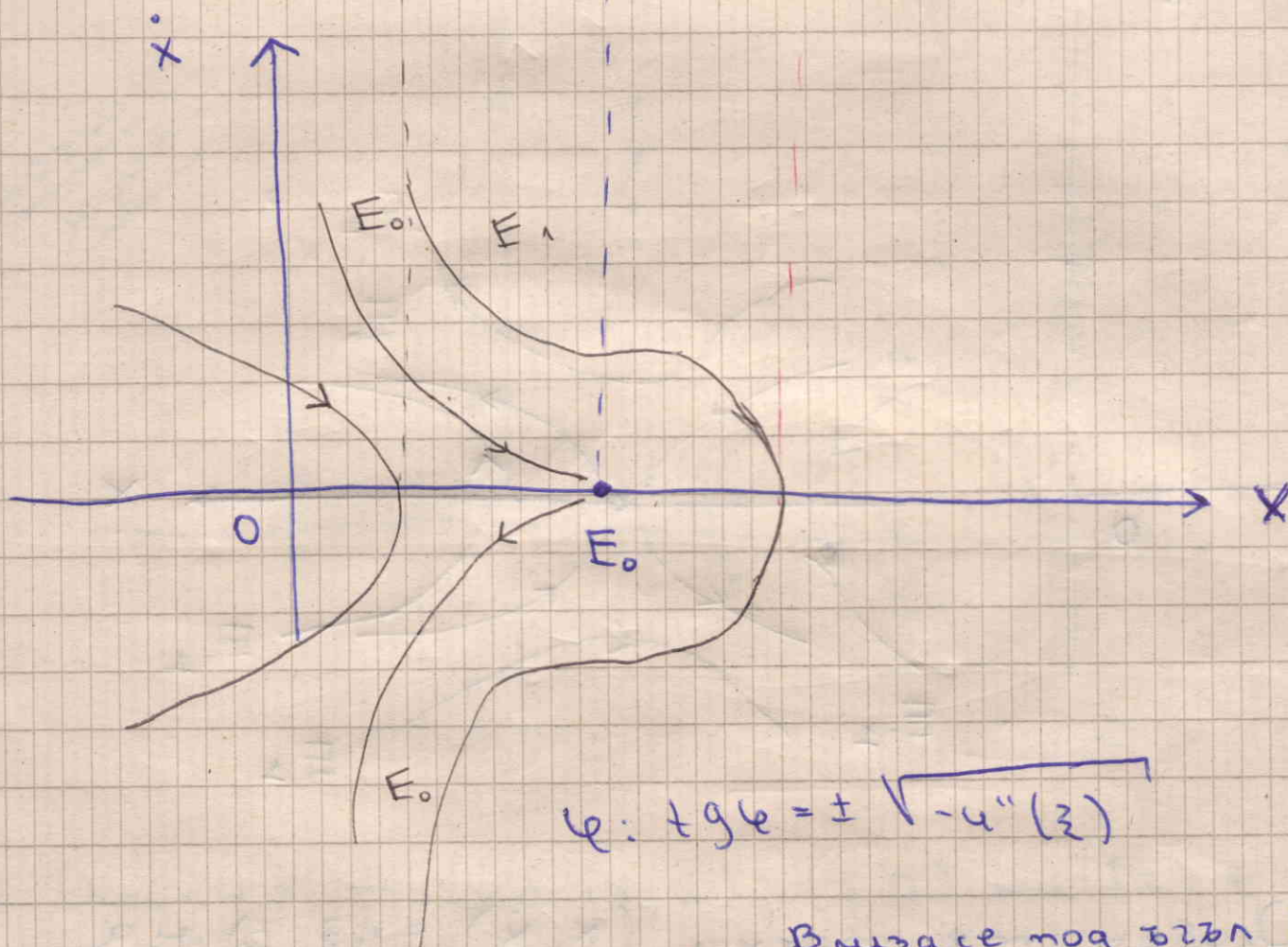
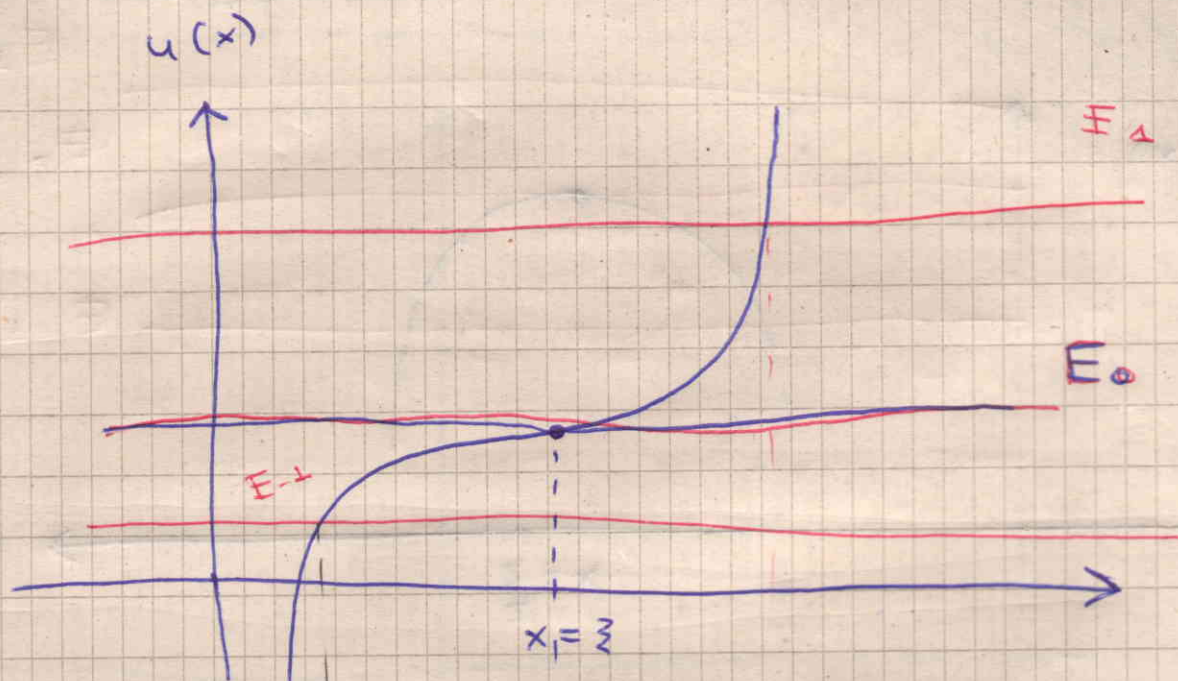
$$u'(z) = 0, u''(z) < 0$$

лок. max

неустойчиво



3. Особенните точки $(x, \dot{x}) = (z, 0)$ на (2) са т.т.
 $u'(z) = u''(z) = 0$



$$\varphi: \dot{x} = \pm \sqrt{-u''(3)}$$

Вмещае погъзъл 0

$$4x^2(x^2+1) - x^4 - 3x^2$$

! симетричен относно Ox

Задачи

I зад. Да се нарисува фазовия портрет на консервативната система:

$$a) u(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}$$

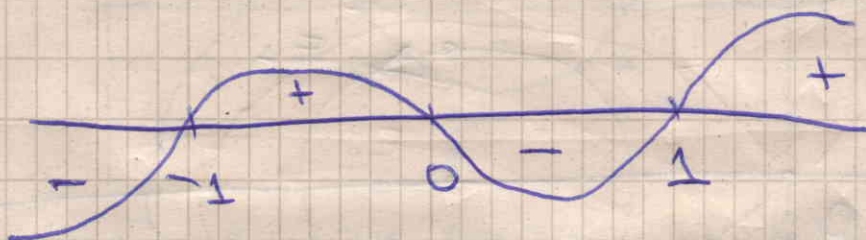
$$u(x) \xrightarrow{x \rightarrow \pm \infty} +\infty$$

$$u' = x^3 - x = x(x-1)(x+1) = 0$$

$$x_1 = 0$$

$$x_2 = 1$$

$$x_3 = -1$$



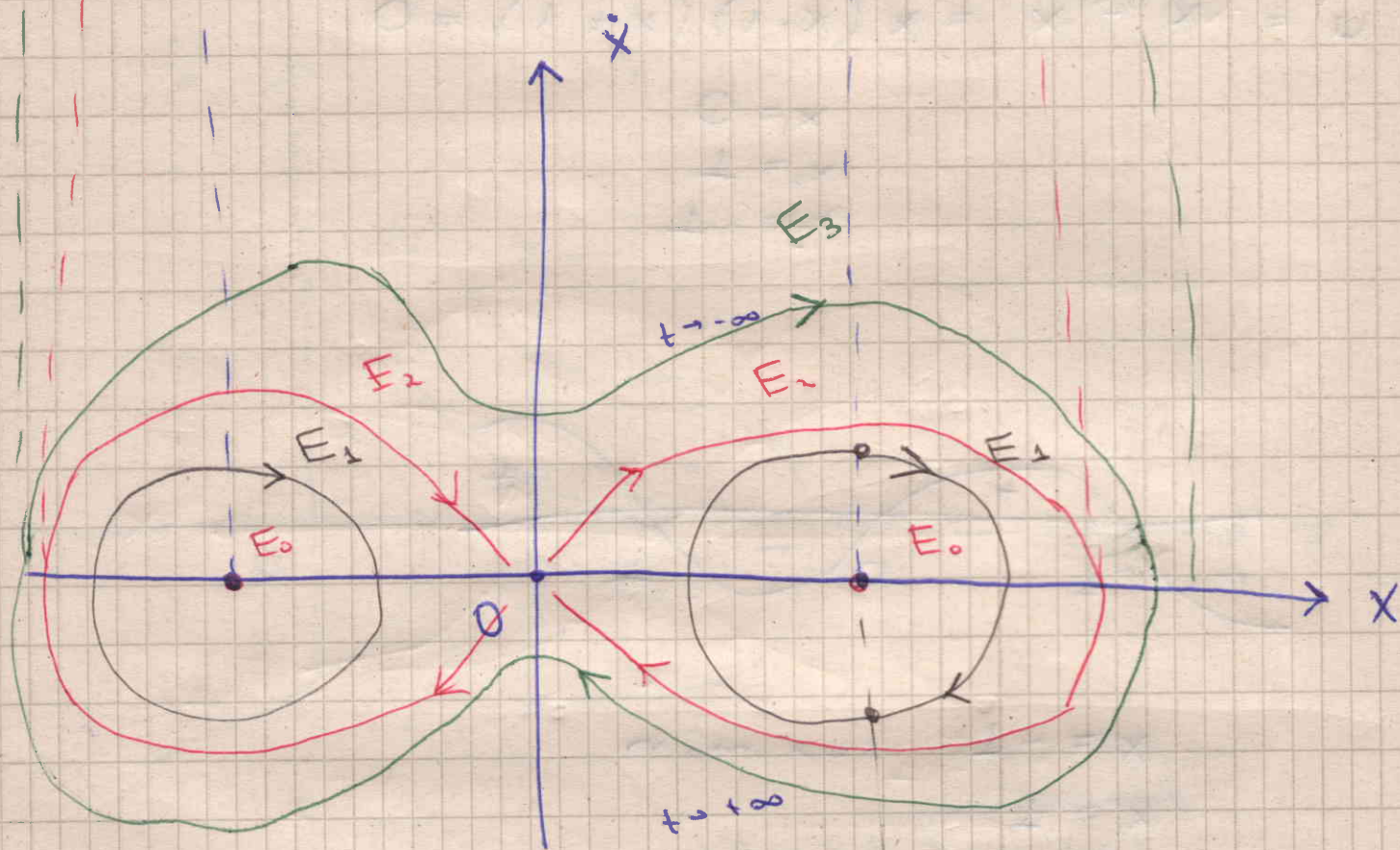
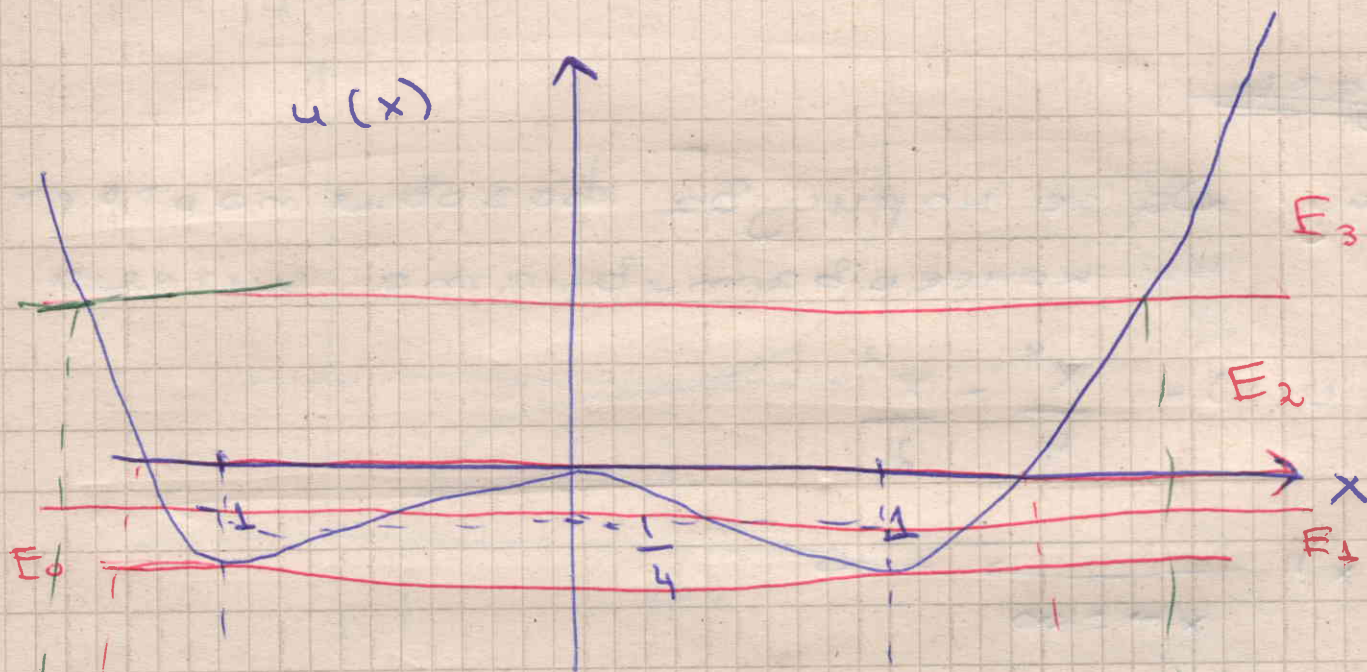
$$x = -1 \quad \text{лок. max}$$

$$x = 1$$

$$u(\pm 1) = -\frac{1}{4}$$

$$u(0) = 0$$

$$x = 0 \quad \text{лок. min}$$



$$\dot{x} = \dot{x}(t)$$

$$x = x(t)$$

Нам нужно найти
самые маленькие значения x и $\dot{x}$

$$E = \frac{\dot{x}^2}{2} + u(x)$$

8) $u(x) = \pm \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} \right)$

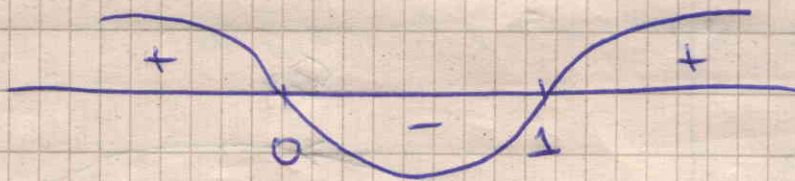
$$u(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}$$

$$u(x) \xrightarrow{x \rightarrow \pm \infty} \pm \infty$$

$$u' = x^2 - x = x(x-1)$$

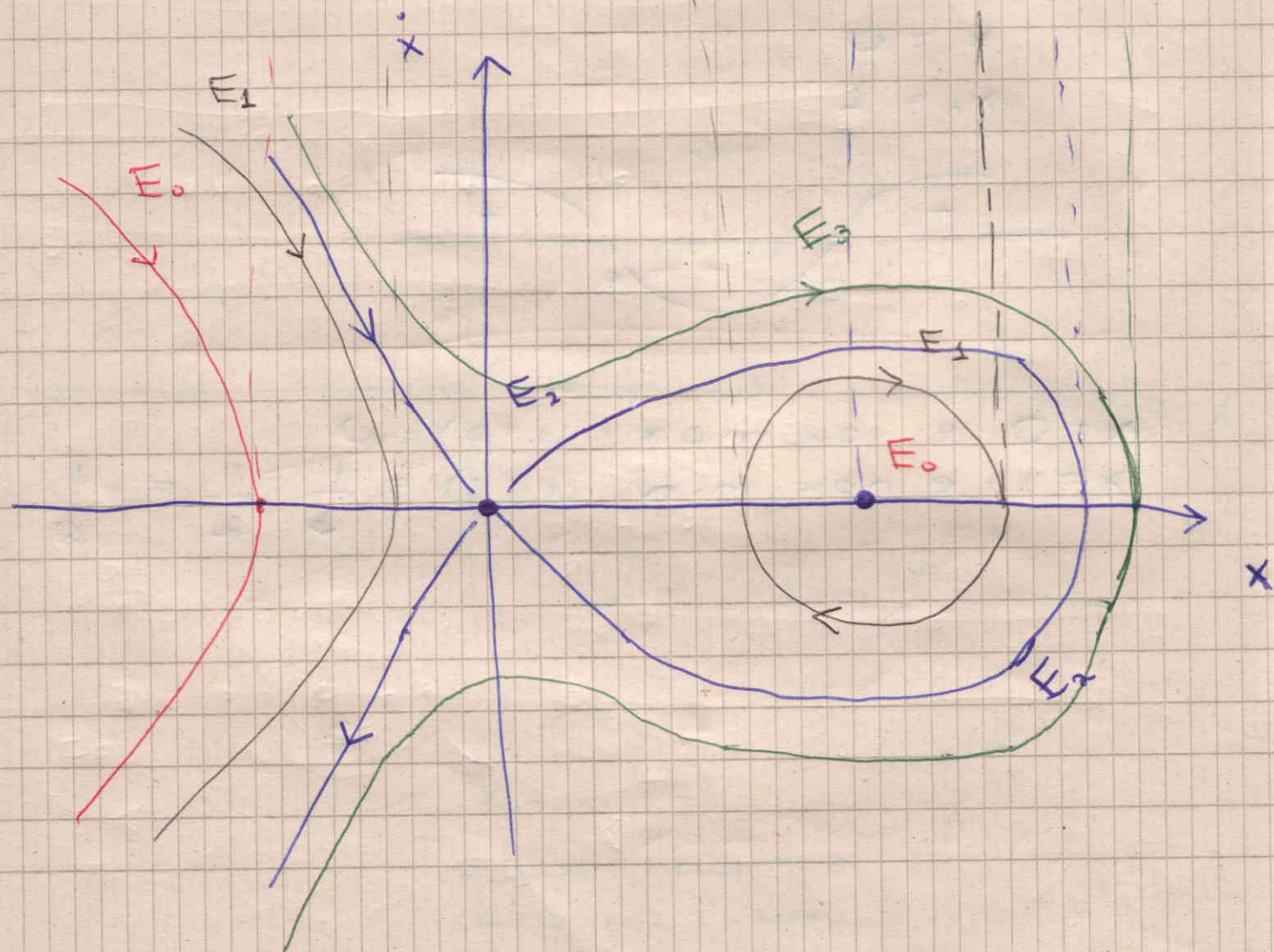
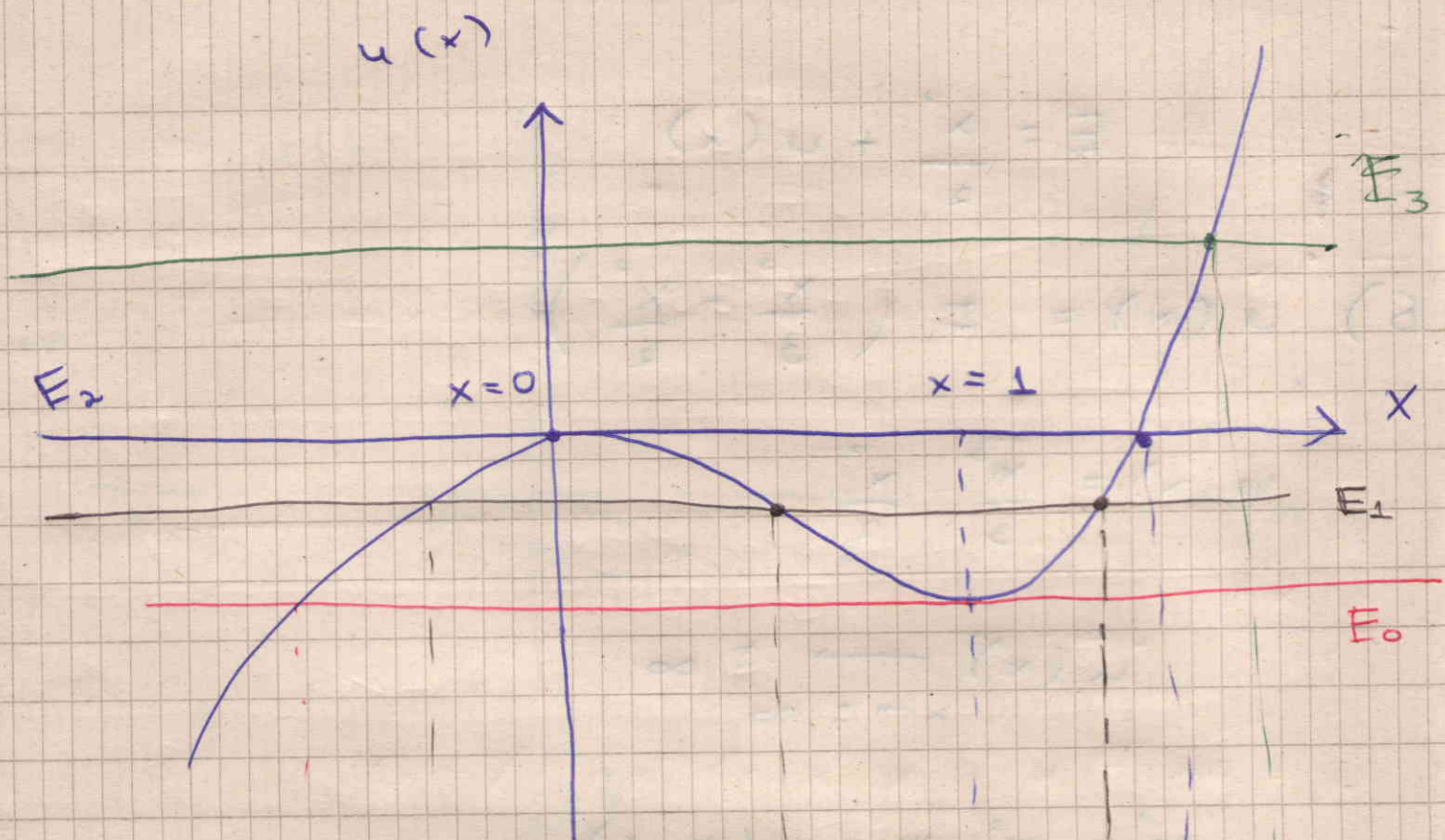
$$x_1 = 0$$

$$x_2 = 1$$



$$x=0 \text{ e nok. max } u(0)=0$$

$$x=1 \text{ e nok. min } u(1) = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{6}$$



$$\int \frac{dx}{\sqrt{2\left(E - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\right)}}$$

эмпиричен
интеграл

$$\boxed{\text{Дан. - c -}}$$

$$b) u(x) = \pm \left(\frac{x^6}{6} - \frac{5x^4}{2} + \frac{9x^2}{2} \right)$$

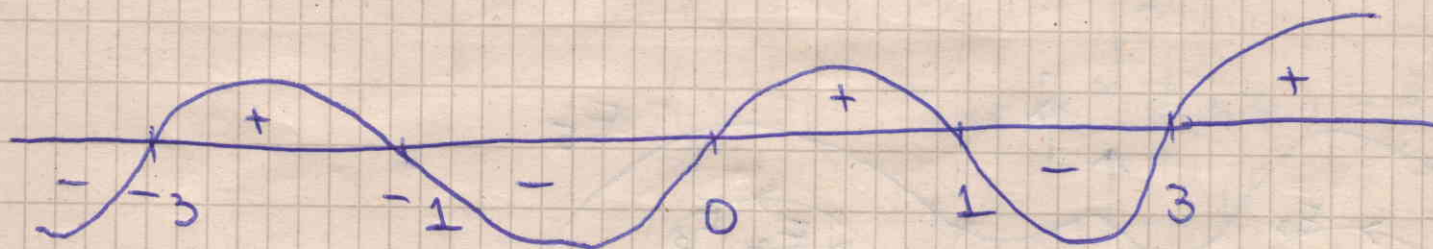
$$u(x) = \frac{x^6}{6} - \frac{5x^4}{2} + \frac{9x^2}{2}$$

$$u(x) \rightarrow +\infty \\ x \rightarrow \pm\infty$$

$$u'(x) = x^5 - 10x^3 + 9x = \\ = x(x^4 - 10x^2 + 9)$$

$$x_{1,2} = \pm 1, 9$$

$$x(x-1)(x+1)(x-3)(x+3)$$



$$x_{1,2} = \pm 1 \text{ ca лок. max}$$

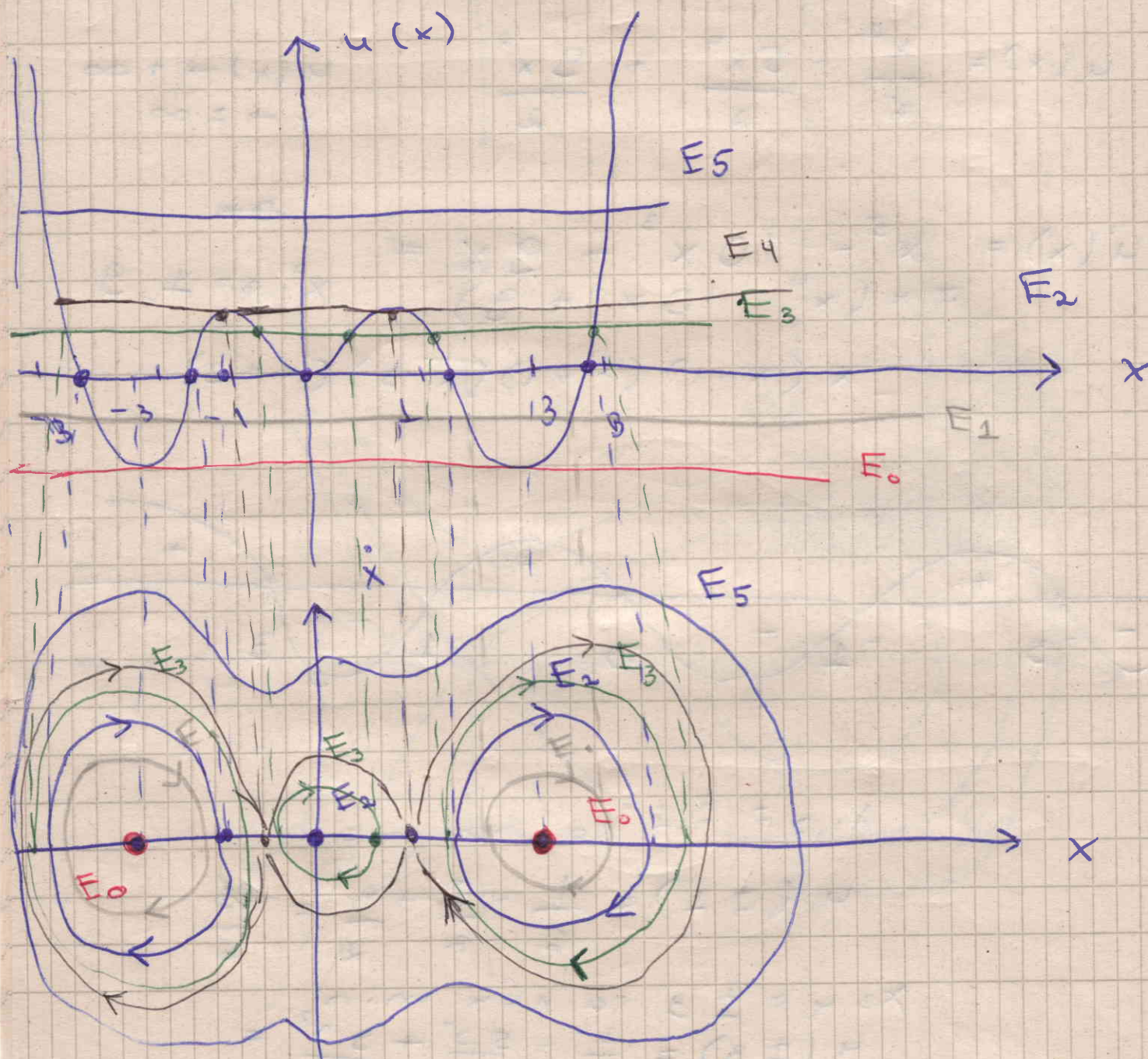
$$u(\pm 1) = \frac{1}{6} - \frac{5}{2} + \frac{9}{2} = \frac{13}{6}$$

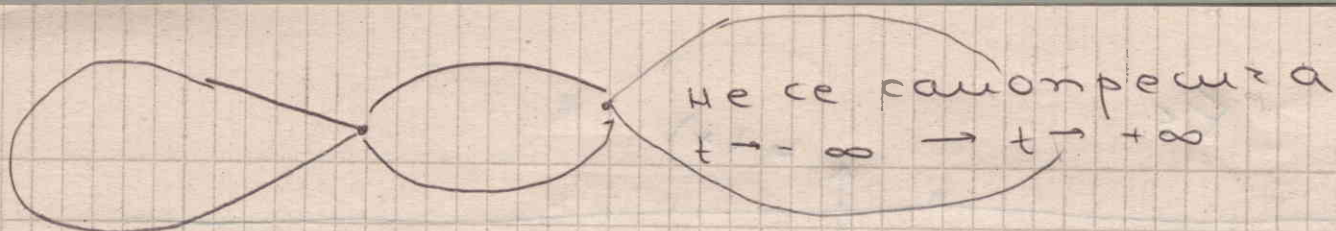
$$x_{3,4} = \pm 3 \text{ ca лок. min}$$

$$u(\pm 3) = \frac{3^6}{6} - \frac{5 \cdot 3^4}{2} + \frac{9 \cdot 3^2}{2} =$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{3^2}{6} \left[3^4 - \frac{1}{15} \cdot 3^2 + 27 \right] = \\
 &= \frac{3}{2} \left[81 - 135 + 27 \right] = \\
 &= \frac{3}{2} \cdot (-27) = -\frac{81}{2}
 \end{aligned}$$

$x=0$ e lok. min
 $u(0) = 0$



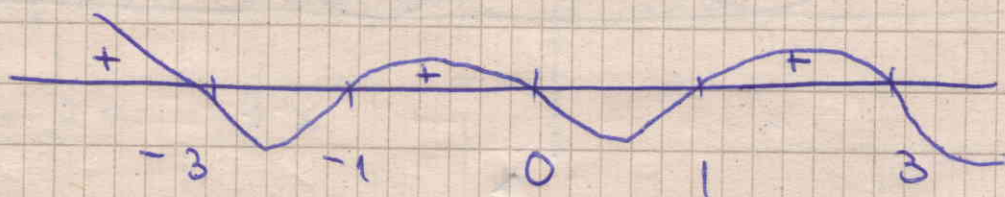


11 сн.
 /

$$u(x) = -\frac{x^6}{6} + \frac{5x^4}{2} - \frac{9x^2}{2}$$

$$u(x) \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} -\infty$$

$$u'(x) = -x(x+3)(x+1)(x-1)(x-3)$$



$$x_{1,2} = \pm 3 \text{ локал. max}$$

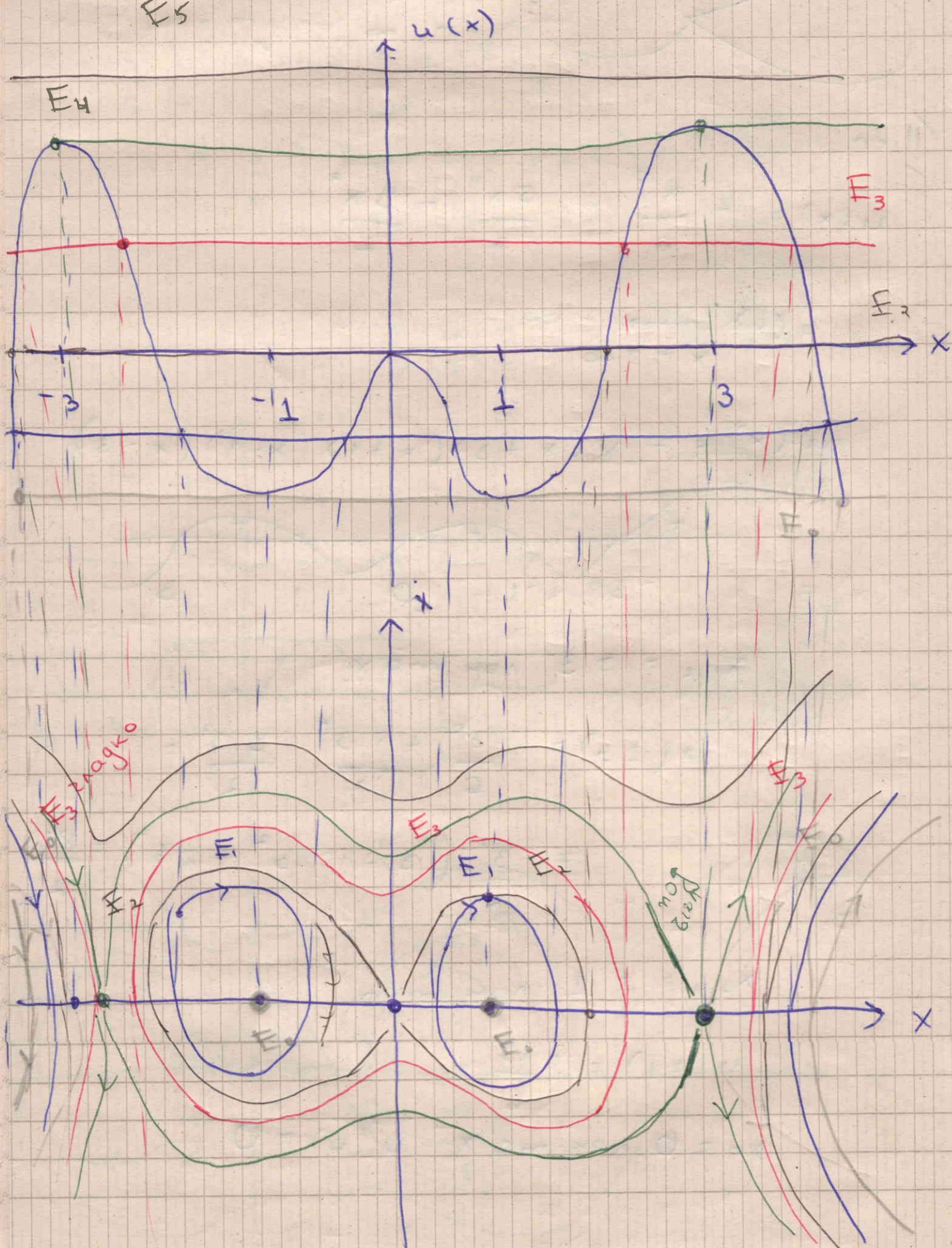
$$u(\pm 3) = -\frac{3^6}{6} + \frac{5 \cdot 3^4}{2} - \frac{9 \cdot 3^2}{2} =$$

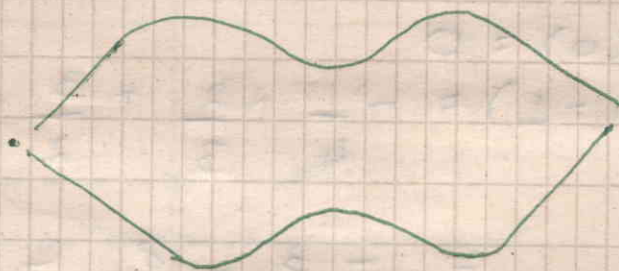
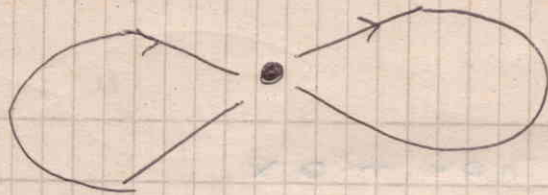
$$= -\frac{3^2}{2} (3^4 - 15 \cdot 3^2 + 27) = \frac{81}{2}$$

$$x_{3,4} = \pm 1 \text{ локал. min}$$

$$u(\pm 1) = -\frac{13}{6}$$

$$x_5 = 0 \text{ локал. max} \quad u(0) = 0$$

$u(x)$ 



заг. Нарисувайте фазовия портрет на консервативната система

$$\ddot{x} = x^3 - 2x^2 - 3x$$

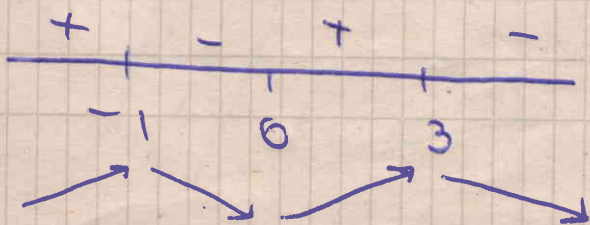
$$! \quad \ddot{x} = - \frac{dU}{dx}$$

$$U' = -x^3 + 2x^2 + 3x$$

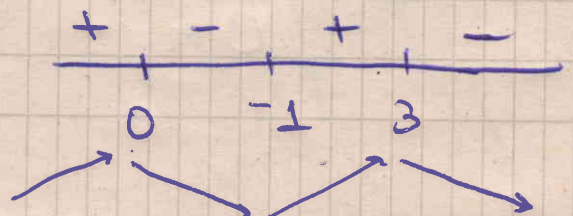
$$U(x) = -\frac{x^4}{4} + \frac{2x^3}{3} + \frac{3x^2}{2}$$

$$\begin{aligned} U' &= -x^3 + 2x^2 + 3x = \\ &= -x(x^2 - 2x - 3) = \\ &= -x(x+1)(x-3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D &= 16 \\ x_{1,2} &= \frac{2 \pm 4}{2} \rightarrow 3, -1 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} x &= 0 \\ x &= -1 \\ x &= 3 \end{aligned}$$



-1

$$x = 3 \text{ lok. max}$$

$$x = 0 \text{ lok. min}$$

$$u(0) = 0$$

$$u(-1) = -\frac{1}{4} - \frac{2}{3} + \frac{3}{2} =$$

$$= -\frac{3}{12} - \frac{8}{12} + \frac{18}{12} =$$

$$= \frac{7}{12}$$

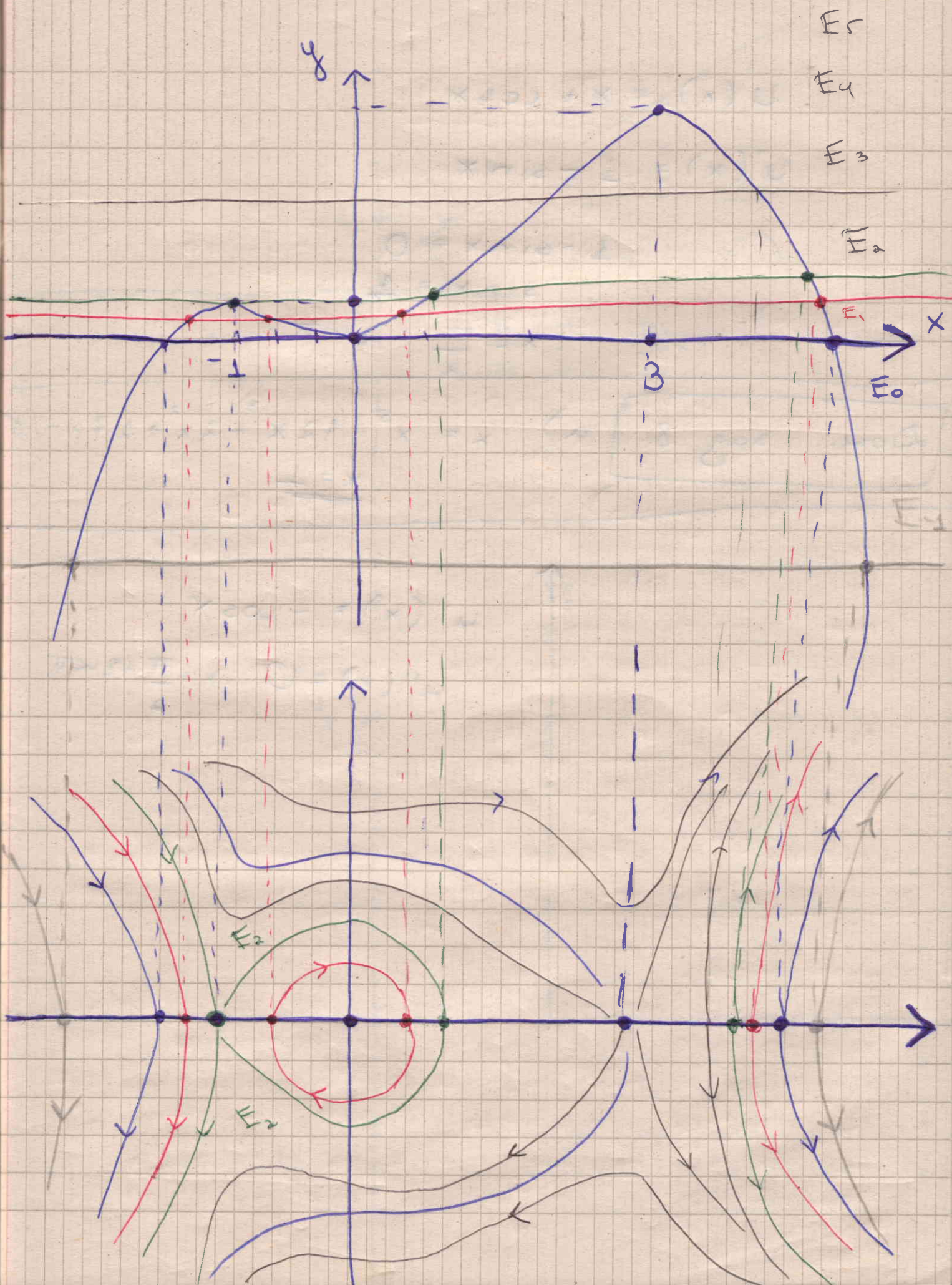
$$u(3) = -\frac{81}{4} + 2 \cdot \frac{27}{3} + \frac{3 \cdot 9}{2} =$$

$$= -\frac{81}{4} + 18 + \frac{54}{2} =$$

$$= 18 - \frac{27}{4} = \frac{72 - 27}{4} = \frac{45}{4}$$

$$= 11 \frac{1}{4}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} u(x) = -\infty$$



$$! u(x) = x + \cos x$$

$$u'(x) = 1 - \sin x$$

$$1 - \sin x = 0$$

$$\sin x = 1$$

$$x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

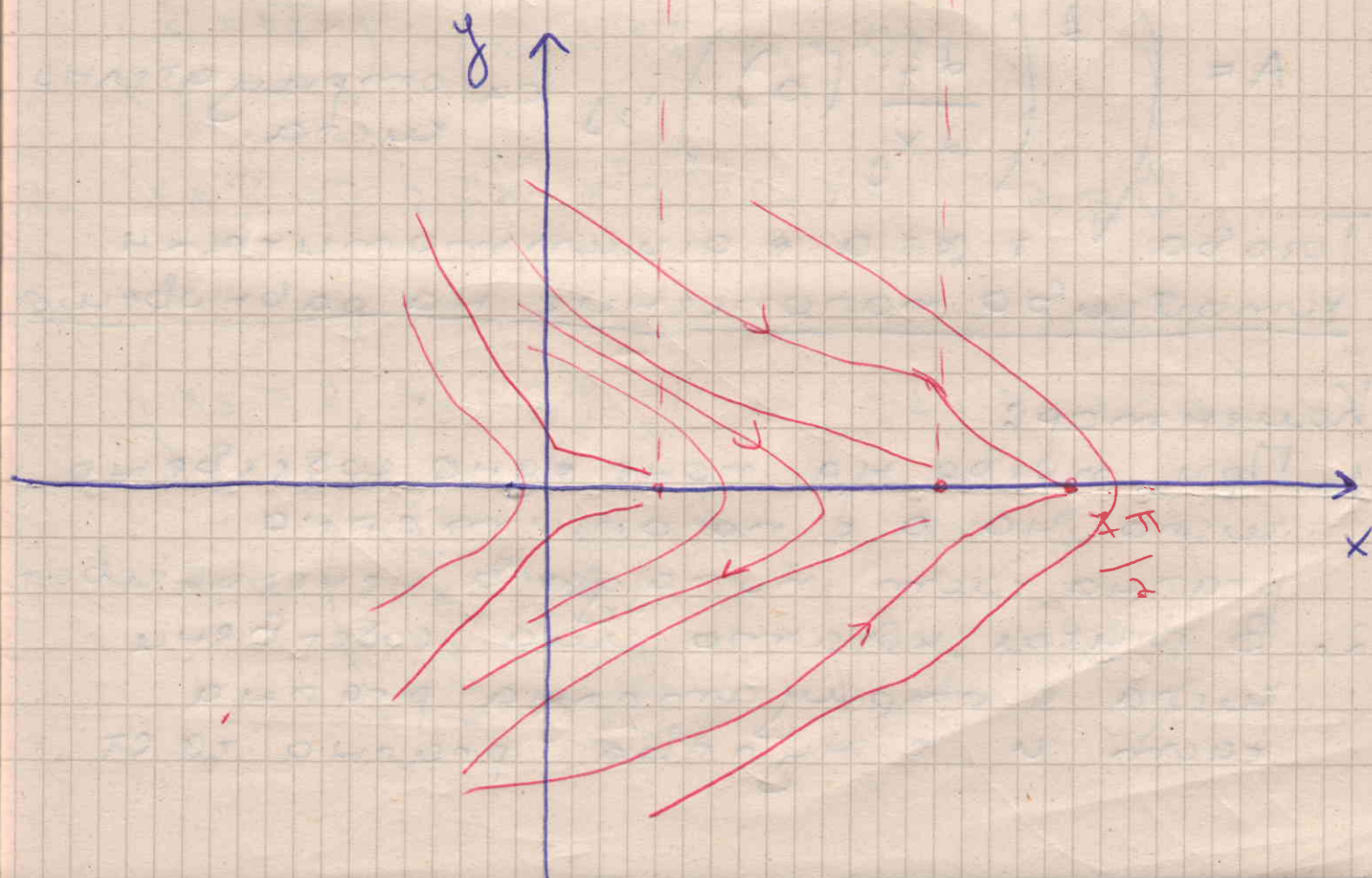
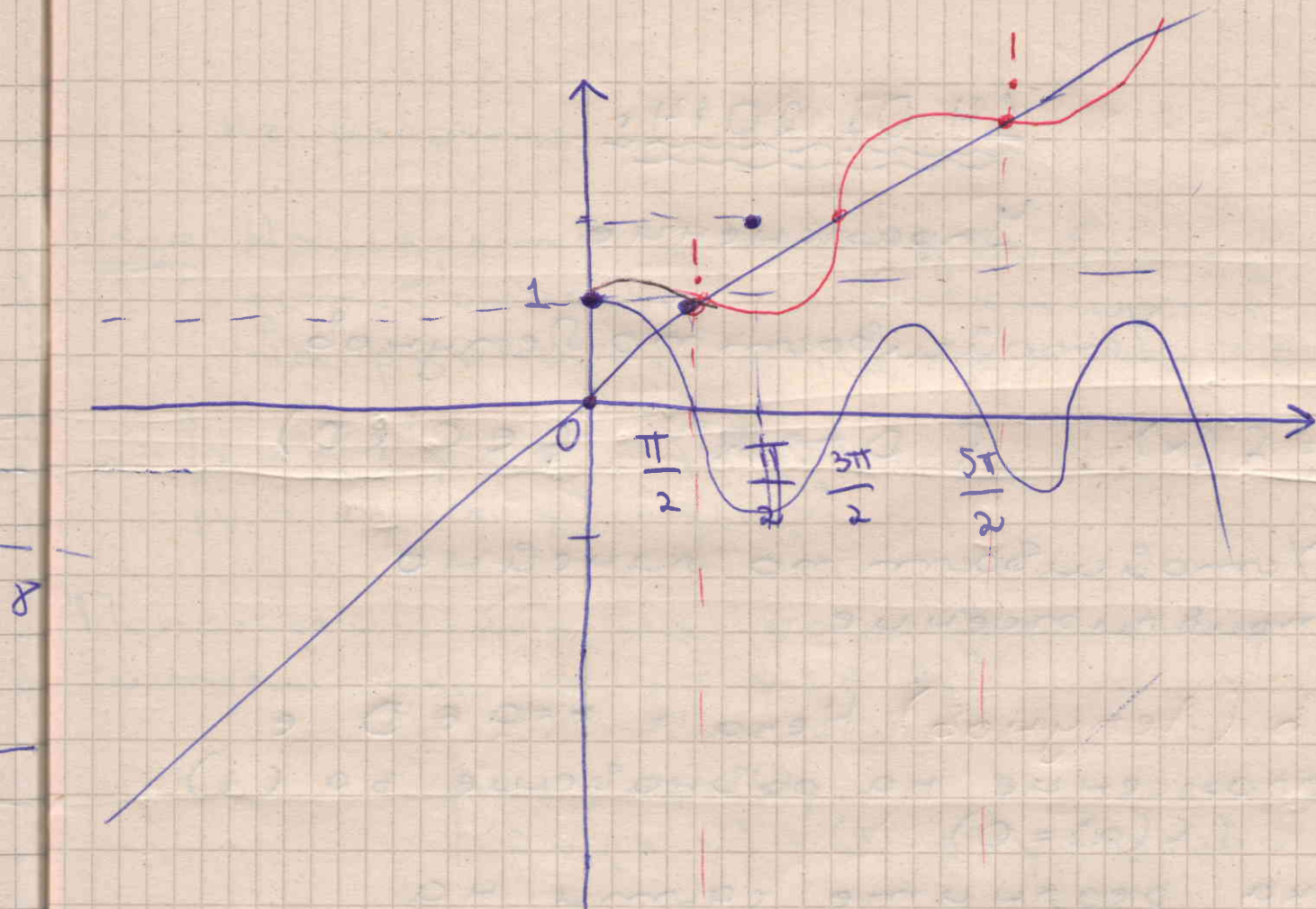
Dom.: zag. 8

$$a) \ddot{x} = x^5 - 12x^3 + 2x^2 + 27x - 18$$

$$\underline{x = 1}$$

$$u''(x) = -\cos x$$

$$u''(x) = 0 \quad x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$



14.01.2014г.

Упражнение

Устойчивост по Лепунов

$$(1) \dot{x} = f(x) \quad f: D \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad f \in C^1(D)$$

II Устойчивост по линейно приближение

Th (Лепунов) Нека т. $x=a \in D$ е положение на равновесие за (1) ($f(a)=0$).

Нека реалните части на собствените числа на Якобиана

$$A = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a) \right)_{i,j} \text{ са отрицателни числа.}$$

Тогава т. $x=a$ е асимптотически устойчиво положение на равновесие.

Коментар:

1. При това на поне едно собствено число на A с положителна реална част попада във неустойчивост
2. В случая, когато има собствени числа с отрицателна реална част и с нулева реална част,

Th не работи

18заг. Намерете и изследвайте за устойчивост положението на равновесие на системите:

$$a) \begin{cases} \dot{x} = 2 + y - x^2 = f(x, y) \\ \dot{y} = 2y(x - y) = g(x, y) \end{cases}$$

Положенията на равновесие на системата са $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{cases} 2 + y - x^2 = 0 \\ 2y(x - y) = 0 \Rightarrow y = 0 \text{ или } x = y \end{cases}$$

1. $y = 0 \Rightarrow 2 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x = \pm \sqrt{2}$
 $\begin{pmatrix} x_1 = \sqrt{2} \\ y_1 = 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 = -\sqrt{2} \\ y_2 = 0 \end{pmatrix}$

2. $x = y \Rightarrow 2 + x - x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0$
 $x_3 = 2$
 $x_4 = -1$

$$(x_3 = 2, y_3 = 2), (x_4 = -1, y_4 = -1)$$

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x & 1 \\ 2y & 2x - 4y \end{pmatrix}$$

$$A(-2, 0) \quad A(\sqrt{2}, 0)$$

$$1) \quad A = \begin{pmatrix} -2\sqrt{2} & 1 \\ 0 & 2\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 = -2\sqrt{2}$$

$$\lambda_2 = 2\sqrt{2} > 0$$

$\Rightarrow$ неустойчивость

т. $(x = \sqrt{2}, y = 0)$ — неуст. положение на равновесии

$$2) \quad A(x = -\sqrt{2}, y = 0) =$$

$$= \begin{pmatrix} 2\sqrt{2} & 1 \\ 0 & -2\sqrt{2} \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \lambda_1 = 2\sqrt{2} > 0 \\ \lambda_2 = -2\sqrt{2} \end{matrix}$$

$\Rightarrow$ т. $(x = -\sqrt{2}, y = 0)$ — неуст.

положение на равновесии

$$3) \quad A(x = y = 2) = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = \text{tr } A = -8 \\ \lambda_1 \cdot \lambda_2 = \det A = 12 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\text{Re } \lambda_1, \lambda_2 < 0$$

$(x=y=2)$ е асимптотически
устойчиво положение на равновесие

$$4) A(x=y=1) = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 = \text{tr } A = -4$$

$$\lambda_1 \cdot \lambda_2 = 2 > 0$$

$$\Rightarrow \text{Re } \lambda_{1,2} < 0$$

$\Rightarrow (x=y=1)$ е асимптотически

устойчиво поп. на равновесие

Изпит 3, 4, 2, конс. с-ма, 11, 13, 18 21
от 16 до
устойчивост

$$8) \begin{cases} \dot{x} = x^2 + y^2 - 5 \\ \dot{y} = (x-1)(x+3y-5) \end{cases}$$

$$(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ (x-1)(x+3y-5) = 0 \end{cases}$$

$$x = 1$$

$$3y = 5 - x$$

$$y = \pm 2$$

$$x = 5 - 3y$$

~~изпит~~

~~изпит~~
н.р.к

$$\begin{aligned} y^2 + 25 - 6y + 9y^2 &= 5 \\ 10y^2 - 6y + 20 &= 0 \\ 5y^2 - 3y + 10 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_1 &= 1 \\ y &= 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y &= 1 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y &= 2 \\ x &= -1 \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} x_3 = 2 \\ y_3 = 1 \end{pmatrix}$$

$$(x_4 = -1, y_4 = 2)$$

$$A = \begin{pmatrix} 2x & \cancel{2y} & 2y \\ 2x + 3y - 6 & 3(x-1) \end{pmatrix}$$

$$1) A(1, 2) = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 = 2$$

$$\lambda_1 \cdot \lambda_2 = -8 < 0 \Rightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} : \lambda > 0$$

$\tau. (x=1, y=2)$ е неустойчиво
положение на равновесие

$$2) A(x=1, y=-2) = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -10 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 = 2$$

$$\lambda_1 \cdot \lambda_2 = -40 \Rightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} : \lambda > 0$$

$\Rightarrow \tau. (x=1, y=-2)$ е
неустойчиво пол. на
равновесие

$$3) A(x=2, y=1) = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 7 \\ \lambda_1 \cdot \lambda_2 = 10 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \operatorname{Re} \lambda_{1,2} > 0$$

$\Rightarrow (x=2, y=1)$ - неустойчиво
пол. на равн.

$$4) A(x=-1, y=2) = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -2 & -6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = -8 \\ \lambda_1 \cdot \lambda_2 = 20 \end{cases} \Rightarrow \operatorname{Re} \lambda_{1,2} < 0$$

$$\Rightarrow x = (-1, 2), y = 2 \text{ e}$$

асимптотически
устойчиво пол.
на равновесие

заг.

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = \sin(x+y) \end{cases}$$

$$(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \begin{cases} y = 0 \\ \sin(x+y) = 0 \end{cases}$$

$$\sin x = 0$$

$$\Rightarrow x = 0^\circ + k\pi$$

$k \in \mathbb{Z}$

$$x \mapsto (x, y) = (k\pi, 0)$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \cos(x+y) & \cos(x+y) \end{pmatrix} \Bigg|_{\substack{x=k\pi \\ y=0}} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \cos k\pi & \cos k\pi \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ (-1)^k & (-1)^k \end{pmatrix}$$

↑ есл. $k = 2s$ s -цало число

$$A(2s\pi, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 \cdot \lambda_2 = -1 < 0 \Rightarrow \exists \lambda : \lambda > 0$$

~~***~~

$$\Rightarrow (x = 2s\pi, y = 0)$$

$s \in \mathbb{Z}$ е нецел.

положит. на

равновесие

11 сл. $k = \cancel{2m+1} 2s+1$

$$A((2s+1)\pi, 0) = \begin{pmatrix} s e^{\frac{2s+1}{2}\pi} & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 = -1$$

$$\lambda_1 \cdot \lambda_2 = +1$$

$$\Rightarrow \operatorname{Re} \lambda_1, \operatorname{Re} \lambda_2 < 0$$

$$\Rightarrow \Gamma: x = (2s+1)\pi, y = 0$$

$$y = 0$$

$$s \in \mathbb{Z}$$

е асимптотически устойчиво пол. на равновесие

20 В зависимост от реалните параметри a и b (изследвайте за устойчивост положението на равновесие $(0,0)$ на системите:

$$a) \begin{cases} \dot{x} = \ln(1+a^2 x) - y e^{y^2} = 0 \\ \dot{y} = x + b^2 \operatorname{tg} y = 0 \end{cases} \quad x=y=0$$

$$A = \begin{pmatrix} \frac{a^2}{1+a^2 x} - e^{y^2} - 2y^2 & -e^{y^2} \\ 1 & \frac{b^2}{\cos^2 y} \end{pmatrix} \quad x=y=0$$

$$\begin{pmatrix} a^2 & -1 \\ 1 & b^2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = a^2 + b^2 \geq 0 \\ \lambda_1 \cdot \lambda_2 = a^2 b^2 + 1 \geq 1 \end{cases}$$

$$\textcircled{1} a^2 + b^2 \neq 0$$

$$(a, b) \neq (0, 0)$$

$$\Rightarrow \operatorname{Re} \lambda_{1,2} > 0$$

$\Rightarrow$ т. $(x=y=0)$ е неустойчиво
пол. на равновесие

2 сл. $a^2 + b^2 = 0 \Rightarrow a = b = 0$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_{1,2} = \pm i$$

$$\operatorname{Re} \lambda_{1,2} = 0$$

и теоремата по първо
приближение не
дава отговор на
въпроса за устойчивост

Тейлър
на $f(x)$ в
 $x=a$

$$\dot{x} = A(x-a) + o(|x-a|)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \left| \frac{h(x)}{|x-a|} \right| = 0$$

$$x \rightarrow a = z$$

$$\dot{z} = Az$$

$$u_1 = c_1 e^{\lambda_1 t}$$

$$u_2 = c_2 e^{\lambda_2 t}$$

$$\operatorname{Re} \lambda_1 > 0$$

$$u_1 \rightarrow +\infty$$

$$x \rightarrow +\infty$$

$$\operatorname{Re} \lambda_1 = \operatorname{Re} \lambda_2 = 0?$$

$$\begin{cases} \dot{x} = -y e^{y^2} \\ \dot{y} = x \end{cases}$$

Def. Положението на равновесие $x=a$ за (1) е устойчиво (в смисъл на Ляпунов), ако на всяка околност U на т.а. може да се отпостави околност V на т.а., $V \subset U$, за която за $\forall x_0 \in V$ решението $\psi(t)$ на (1), т.е. $\psi(0) = x_0$ удовлетворява условията

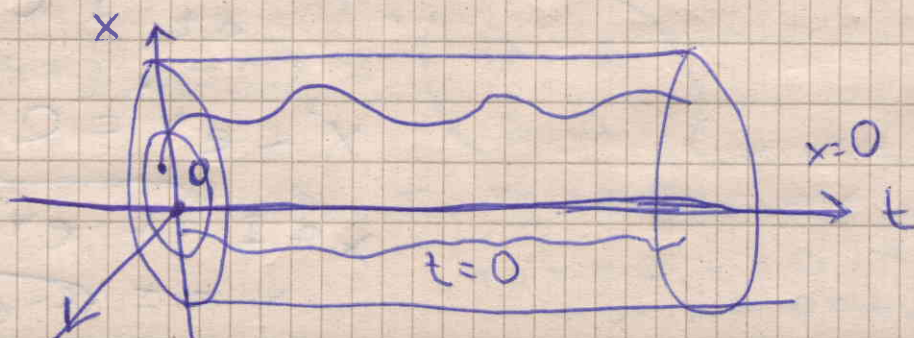
- ① $\psi(t)$ е деф. за $\forall t \in [0; +\infty)$
- ② Когато t пробегва $[0; +\infty)$ $\psi(t)$ остава в U .

Положението на равновесие $x=a$ е асимптотически устойчиво, ако е устойчиво и

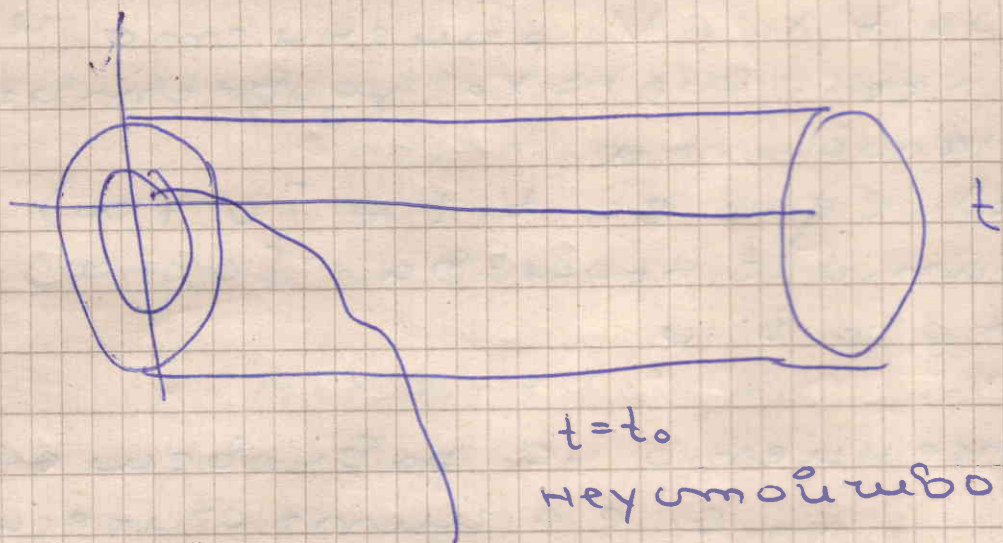
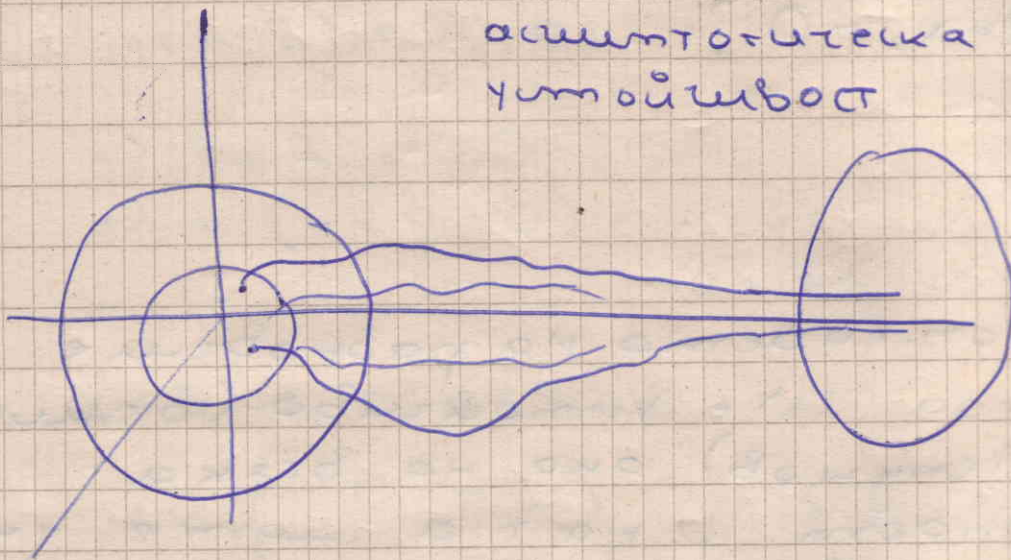
$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \psi(t) = a$$

$$\text{Б.О.О. } a = 0$$

устойчивост



асимптотическая
устойчивость



$t=t_0$
неустойчивость

$$\dot{x} = -ye^{y^2} \quad | \quad x$$

$$y = x \quad | \quad ye^{y^2}$$

$$x\dot{x} + ye^{y^2}\dot{y} = \frac{d}{dt} \frac{1}{2} [x^2 + e^{y^2}]$$

$$x^2 + e^{y^2} = C$$

$$x = \pm \sqrt{C - e^{y^2}}$$

$$y = \pm \sqrt{C - x^2}$$

$$\int \frac{dy}{\sqrt{c - ey^2}} = t - t_0$$

Заг. В зависимост от реален параметър a намерете и изследвайте ~~полож.~~ за устойчивост положението на равновесие на системите

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = x^3 - x^2 - 2x + ay \end{cases}$$

$$(x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad y = 0 \\ x^3 - x^2 - 2x + ay = 0$$

$$x(x^2 - x - 1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$x(x-2)(x+1) = 0$$

$$\begin{aligned} &(x_1 = 0, y_1 = 0) \quad (x_2 = 2, y_2 = 0) \\ &(x_3 = -1, y_3 = 0) \end{aligned}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3x^2 - 2x - 2 & a \end{pmatrix}$$

$$1) A' = (x=2, y=0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 6 & a \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1, \lambda_2 = -6 \leq 0$$

$\therefore (x=2, y=0)$ е неуст.
пол. на равн. за $\forall a$

$$2) A(x=-1, y=6) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & a \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1, \lambda_2 = -3 < 0$$

$$\Rightarrow \tau. (x=-1, y=0) \text{ е}$$

неуст. тъл. на равн. за $\forall a$

$$3) A(x=0, y=0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & a \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1, \lambda_2 = 2$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 = a$$

$$\text{I сл. } a > 0 \Rightarrow \operatorname{Re} \lambda_{1,2} > 0$$

$$\Rightarrow \tau. (x=0=y) \text{ е неуст.}$$

полож. на равновесие

$$\text{II сл. } a < 0 \Rightarrow \operatorname{Re} \lambda_{1,2} < 0$$

$$\Rightarrow \tau. (x=y=0) \text{ е асимпт. уст.}$$

полож. на равновесие

$$\text{III сл. } a = 0$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{2}$$

$$\operatorname{Re} \lambda_{1,2} = 0$$

В този случай системата $\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = x^3 - x^2 - 2x \end{cases}$

е консервативна

$$\dot{H} = -\operatorname{grad} H = (x^3 - 2x^2 - 2x)$$

В сила е следната Th

Th (Лагранж-Дирихле)

Нека $u \in C^2(D)$, $D \subset \mathbb{R}^{n-2}$ област

Нека т. x_0 е точка на строг лок. min
за потенциала $u(x)$. Тогава положението
на равновесие $(x_0, 0)$ за системата

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\text{grad} u \end{cases} \text{ е устойчиво} \\ \text{положение} \\ \text{на равновесие.}$$

Прилагайки тази теорема към системата

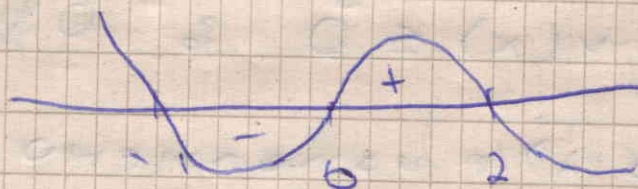
$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = x^3 - x^2 - 2x \end{cases}$$

Установяваме, че

т. $x = y = 0$ е устойчиво пол. на
равновесие

Наистина $x = 0$ е строг лок. min

$$u' = -x(x-2)(x+1)$$



$x = 0$ е лок. min за $u(x)$

Dom.: 19, 21

Деф. Нека $f = (f_1, \dots, f_n) \in C^1(D)$

$f: D \rightarrow \mathbb{R}^n$ е векторно поле и
нека

$u(x): D \rightarrow \mathbb{R}$ е скаларна ф-я
 $u \in C^1(D)$

Тогавта ф-ята $x \in D$

$$L_f u(x) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_j}(x) f_j \text{ се}$$

нарича производна на u в т. x по
направление на векторното поле f .
Нарича се още производна на Lu .

Деф. ~~Тезисата~~ ~~х-та~~ Положителност на
равновесие $x=a$ за (1) притежава
ф-я на Ляпунов $v(x)$, ако $\exists$
околност O на a и
скаларна ф-я $v(x): D \rightarrow \mathbb{R}$
 $v(x) \in C^1(D)$, т.е

1) $v(x) > 0 \mid \{a\}, v(a) = 0$

2) $L_f v(x) \leq 0$ в $O \setminus \{a\}$

Ако виещо 2) е изпълнено $\exists$

$L_f v(x) < 0$ в $O \setminus \{a\}$, то

$x=a$ притежава строг
ф-я на Ляпунов.