

05.11.2013г.

Упражнение

зад. $\dot{x} = Ax$,

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 2 & 3 & 6 \\ -2 & -2 & -5 \end{pmatrix}$$

Решение:

диагонализирате

$$x = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = a_{11} + a_{22} + a_{33}$$

$$\lambda_1 \lambda_2 + \lambda_2 \lambda_3 + \lambda_3 \lambda_1 = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$+ a_{22}a_{33} -$$

$$- a_{23}a_{32}$$

$$+ a_{33}a_{11} - a_{13}a_{31}$$

$$\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = \det A$$

зад. $\dot{x} = Ax$

$$A = \begin{pmatrix} -8 & -9 & 0 \\ 5 & 5 & 1 \\ 4 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

Решение: Собствените числа на A са
 $\lambda_{1,2} = -2$ и $\lambda_3 = 1$
 Тъй като рангът

$$\text{rang } B_1 = \text{rang } (A + 2E) = \text{rang}$$

$$= \text{rang} \begin{pmatrix} -6 & -9 & 0 \\ 5 & 7 & 1 \\ 4 & 5 & 2 \end{pmatrix} = 2 = 3 - 1, \text{ то}$$

имаме една Жорданова клетка

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \text{ и Жордановата}$$

нормална форма

$$J = \left(\begin{array}{cc|c} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

Принадлежащият вектор S_2 е
 собствен за B_1^2 , т.е.



$$B_1^2 = \begin{pmatrix} -9 \\ \end{pmatrix}$$

$$45 - 63 + 25 = 7 \\ 20 + 35 + 10 = 65$$

$$\begin{pmatrix} -6 & -9 & 0 \\ 5 & 7 & 1 \\ 4 & 5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -6 & -9 & 0 \\ 5 & 7 & 1 \\ 4 & 5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 & -9 & -9 \\ 9 & 9 & 9 \\ 9 & 9 & 9 \end{pmatrix}$$

$$B_1^2 = \begin{pmatrix} -9 & -9 & -9 \\ 9 & 9 & 9 \\ 9 & 9 & 9 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{S_{12}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$S_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$S_1 = B S_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$S_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

На
Простото обитвено число x_3
съответства обитвен в-р

$$S_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$4 - 5 - x_3 = 0 \\ x_3 = -1$$

$$\begin{pmatrix} -9 & -9 & 0 \\ 9 & 9 & 1 \\ 4 & 5 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Общое решение e:

$$x = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-2t} & t e^{-2t} & 0 \\ 0 & e^{-2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

заг.

$$\dot{x} = Ax$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

S_3 - соотвечает $\lambda = 0$

$$\Rightarrow B^3 = 0$$

$$S_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$S_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

||

$$S_1 = B S_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$x = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} e^{2t} \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2!} \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

зад. $\dot{x} = Ax$ $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 15 & -8 & 3 \\ 5 & -2 & -1 \end{pmatrix}$

$$\left| \begin{array}{ccc|ccc} 3-\lambda & -2 & 1 & 3-\lambda & -2 & \\ 15 & -8-\lambda & 3 & 15 & -8-\lambda & \\ 5 & -2 & -1-\lambda & 5 & -2 & \end{array} \right| =$$

$$= -(\lambda + 2)^3$$

Матрицата A има тройно собствено число $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 = -2$. Тъй като рангът на $A + 2E$ е 2

$$\text{rang } B = \text{rang } (A + 2E) = \text{rang } \underbrace{\begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 15 & -6 & 3 \\ 5 & -2 & 1 \end{pmatrix}}_B = 1 = 3 - 2$$

то имаме 2 Жорданови клетки и Жордановата нормална форма

$$J = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$\downarrow$ $\swarrow \quad \searrow$
 собств. присъед.

Пръвстединеният вектор S_2 е собитвен на $B^2 = 0$ матри., т.е. избираме произволен S_2 , например $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

[Всеки вектор е собитвен на нулевата матрица]

Товава $S_1 = BS_2 = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 15 & -6 & 3 \\ 5 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 15 \\ 5 \end{pmatrix}$

S_3 е собитвен вектор, линейно независим със S_1 , например

$$S_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Общото решение е:

експонента на J^t

$$e^{-2t} \begin{pmatrix} 1 & t & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix}$$

$$e^{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} t} = e^{1t} \begin{pmatrix} 1 & t & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\dot{x} = Ax$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_{1,2,3} = 2$$

$$p(\lambda) = 3 - \lambda g \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= 3 - \lambda g \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= 1$$

$\Rightarrow 1$ Жорданова клетка

$$\Rightarrow J = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Ушице

$$B S_1 = 0$$

$$B S_2 = S_1$$

$$B S_3 = S_2$$

$$(A - \lambda E) S_1 = 0$$

$$(A - \lambda_2 E) S_2 = S_1 \quad | \cdot (A - \lambda E)$$

$$(A - \lambda E) S_3 = S_2 \quad | \cdot (A - \lambda E)^2$$

$$(A - \lambda E)^2 S_2 = 0$$

$$(A - \lambda E)^3 S_3 = 0$$

$\Rightarrow S_3$ е собствен вектор за $(A - \lambda E)^3$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ избираме $S_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

"
 S_2

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

=> Матрицата на претода е

$$T = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

=> Общото решение е

$$x = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{2t} & te^{2t} & \frac{e^{2t} \cdot t^2}{2!} \\ 0 & e^{2t} & te^{2t} \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

07.11.2013г.

Лекция

$$A: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$$

$\lambda_1, \dots, \lambda_p$ - са различни собствени числа

λ_j с кратност d_j

$$V_j = \left\{ x: (A - \lambda_j E)^r x = 0, r = 1, 2, \dots \right\}$$

обобщени собствени подпространства

$$\dot{x} = Ax$$

Th

$$\mathbb{C}^n = \bigoplus V_j$$

$$\dot{x} = Ax$$

$$\psi(t)$$

$$\psi(0) = V$$

$$V = V_1 + V_2 + \dots + V_p \quad V_j \in V_j$$

единствено

$$\psi_j(0) = V_j$$

$$\psi(t) = \underbrace{\psi_1(t) + \dots + \psi_p(t)}$$

решения във V от подпространствата

$$V_j = V$$

1) Нека $v \in V$ принадлежи на V_{j1}
 v -собствен

Решението се задава с

$$\varphi_1(t) = e^{\lambda_j t} v \text{ (генер.)}$$

$$\varphi_1 = \lambda_j e^{\lambda_j t} v =$$

~~XXXXXX~~

$$\lambda_j v = Av$$

2) $v \in V_{j2}$

$$\notin V_{j1} \quad V_{j1} \subset V_{j2}$$

$$V_{j2} = \{x : (A - E\lambda_j)^2 x = 0\}$$

$$(A - E\lambda_j)^2 v = 0$$

$$(A - E\lambda_j) v \neq 0$$

$$\parallel$$

$$u \neq 0$$

$$(A - E\lambda_j) u = 0$$

$$Au = \lambda_j u$$

$$Av = \lambda_j v + u$$

Решение с начално условие $\varphi(0) = v$

$$\underline{\underline{\varphi(t) = e^{\lambda_j t} (v + tu)}}$$

$$\begin{aligned}
 \dot{u} &= \lambda_j e^{\lambda_j t} (v + tu) + e^{\lambda_j t} u = \\
 &= t(\lambda_j) e^{\lambda_j t} (u) + e^{\lambda_j t} (\lambda_j v + u) = \\
 &= e^{\lambda_j t} t \cdot A u + e^{\lambda_j t} A v = \\
 &= e^{\lambda_j t} A (tu + v)
 \end{aligned}$$

$$\dot{u} = A(e^{\lambda_j t} (v + tu)) = A u$$

$\Rightarrow u$ е решение

$$V_j s \quad v \in V_{j, s+1}, \text{ но } v \notin V_{j, s}$$

$$(A - \lambda_j E)^{s+1} v = 0$$

$$(A - \lambda_j E)^s v \neq 0$$

$\parallel$
 w_1

$$(A - \lambda_j E) w_1 = 0$$

$$(A - \lambda_j E) v = w_s$$

$$(A - \lambda_j E) w_s = w_{s-1}$$

$$(A - \lambda_j E) w_{s-1} = w_{s-2}$$

$\vdots$

$$(A - \lambda_j E) w_2 = w_1$$

$$v = w_{s+1}$$

$$A w_1 = \lambda_j w_1$$

$$A w_2 = \lambda_j w_2 + w_1$$

$\dots$

$$A w_s = \lambda_j w_s + w_{s-1}$$

$$A w_{s+1} = \lambda_j w_{s+1} + w_s$$

$$\psi(t) = e^{s_1 t} \left(w_1 + t w_2 + \frac{t^2}{2!} w_3 + \dots + \frac{t^s}{s!} w_{s+1} \right)$$

D-80 - диференциране :))

заг.

$$\dot{x} = Ax$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 15 & 5 \\ -2 & -8 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_{1,2,3} = -2$$

$$A + 2E = \begin{pmatrix} 5 & 15 & 5 \\ -2 & -6 & -2 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{rg}(A + 2E) = 1$$

$$3 - 1 = 2$$

2 собствени

1 присъединен

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

не собствени
присъединен

$$\begin{pmatrix} 5 & 15 & 5 \\ -2 & -6 & -2 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

собствен

$$\begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \rightarrow S$$

собствен

присъед.

$$J = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$S = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$e^{St} = e^{-2t} \begin{pmatrix} 1 & t & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$x = S e^{St} c$$

3a9.

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -x_1$$

$$\dot{x}_1 = 0 \cdot x_1 + x_2$$

$$\dot{x}_2 = -x_1 + 0 \cdot x_2$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$x = e^{At} c$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} -\lambda & 1 & -\lambda - 1 \\ -1 & -\lambda & 1 \end{array} \right)$$

$$\lambda^2 + 1$$

~~$$\lambda^2 + 1$$~~

$$\lambda_{1,2} = \pm i$$

$$\lambda_1 = i \quad \lambda_2 = -i$$

$$A - iE = \begin{pmatrix} -i & 1 \\ -1 & -i \end{pmatrix}$$

$$\text{rg}(A - iE) = 1 \Rightarrow 1 \text{ кн емка}$$

$$\begin{pmatrix} -i & 1 \\ -1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1' \\ v_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\cancel{v_2' = \begin{pmatrix} i \\ -1 \end{pmatrix}} \quad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$$

$$A - i_2 E$$

$$\begin{pmatrix} \oplus -i & 1 \\ -1 & \oplus -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$v_2 = \begin{pmatrix} -i \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$e^{At} = S e^{Jt} S^{-1}$$

$$e^{Jt} = e^{\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} t} = e^{it} \begin{pmatrix} e^{it} & 0 \\ 0 & e^{-it} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{it} & 0 \\ 0 & e^{-it} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

$$A \overline{V_1} = i \overline{V_1}$$

$$A \overline{V_1} = -i \overline{V_1}$$

$$\overline{V_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} = V_2 \quad (i))$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{it} & 0 \\ 0 & e^{-it} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

$$x(t) = c_1 e^{it} V_1 + c_2 e^{-it} V_2 =$$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$x = \overline{x}$$

$$= \overline{x} = \overline{c_1} e^{-it} \overline{V_1} + \overline{c_2} e^{it} \overline{V_2} =$$

$$= \overline{c_1} e^{-it} V_2 + \overline{c_2} e^{it} V_1$$

$$c_1 e^{it} = \overline{c_2} e^{-it}$$

$$c_1 = \overline{c_2}$$

$$c_2 e^{-it} = \overline{c_1} e^{it}$$

$$c_2 = \overline{c_1}$$

$$x(t) = c_1 e^{it} V_1 + \overline{c_1} e^{-it} \overline{V_1}$$

$$x(t) = c_1 e^{it} V_1 + \overline{c_1} e^{it} \overline{V_1} =$$

$$= 2 \operatorname{Re}(c_1 e^{it} V_1)$$

$$\operatorname{Re} \left[(2 + i\beta) e^{it} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \right] =$$

$$e^{it} = \cos t + i \sin t$$

$$e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = e^a (\cos b + i \sin b)$$

$$z = a + ib$$

$$e^a (\cos b + i \sin b)$$

φ-na Oύnep

$$\operatorname{Re} \left[(2 + i\beta) (\cos t + i \sin t) \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \right] =$$

$$= \operatorname{Re} (2 \cos t - \beta \sin t) + i (2 \sin t + \beta \cos t) \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \cos t - \beta \sin t \\ -2 \sin t - \beta \cos t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

maxano

$$\ddot{x}_1 + x_1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_1 \end{aligned}$$

zag.

$$\dot{x} = Ax$$

A - pеaлнa

$\lambda_1, \dots, \lambda_k$ - комплексны

$\bar{\lambda}_1, \dots, \bar{\lambda}_k$ /

$\lambda_{2k+1}, \dots, \lambda_n$ - реалны

$$\begin{aligned} \varphi(t) = & c_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + \dots + c_k e^{\lambda_k t} v_k + \dots \\ & + d_1 e^{\bar{\lambda}_1 t} \bar{w}_1 + \dots + d_k e^{\bar{\lambda}_k t} \bar{w}_k + \dots \\ & + E_{2k+1} e^{\lambda_{2k+1} t} u_{2k+1} + \dots \\ & + E_n e^{\lambda_n t} u_n \end{aligned}$$

u_j, v_j, w_j - собственные векторы

$\operatorname{Re} \varphi$

$$c_j = \alpha_j + i \beta_j$$

$2n$ - реални параметра

$$\varphi = \bar{\varphi}$$

$$\begin{aligned} = \bar{\varphi} = & \bar{c}_1 e^{\bar{\lambda}_1 t} \bar{v}_1 + \dots + \bar{c}_k e^{\bar{\lambda}_k t} \bar{v}_k + \dots \\ & + \bar{d}_1 e^{\lambda_1 t} \bar{w}_1 + \dots + \bar{E}_{2k+1} e^{\lambda_{2k+1} t} \bar{u}_{2k+1} \end{aligned}$$

$$\lambda_1, \dots, \lambda_k \rightarrow v_1$$

$$\lambda_2 \rightarrow v_2$$

!

$$\lambda_k \rightarrow v_k$$

$$! \quad \bar{\lambda}_k \rightarrow \bar{v}_k$$

$$\left. \begin{array}{l} \lambda_{2k+1} \rightarrow u_{2k+1} \text{ реален} \\ \vdots \\ \lambda_n \rightarrow u_n \end{array} \right\} \text{реални}$$

$$\begin{array}{l} \bar{v}_1 = w_1 \\ \vdots \end{array}$$

$$\bar{c}_i e^{\bar{\lambda}_i t} \bar{v}_i = D_i e^{\bar{\lambda}_i t} \bar{v}_i$$

$$\bar{c}_i = D_i$$

$$\vdots$$

$$\bar{c}_k = D_k$$

$$E_{2k+1} = \overline{E_{2k+1}}$$

$$\begin{array}{c} c \in \mathbb{C} \\ E \in \mathbb{R} \end{array}$$

$$\begin{aligned} u(t) = & \operatorname{Re} \left\{ c_1 e^{\lambda_1 t} \bar{v}_1 + \dots + c_k e^{\lambda_k t} \bar{v}_k \right\} + \\ & + E_{2k+1} e^{\lambda_{2k+1} t} u_{2k+1} + \dots + E_n e^{\lambda_n t} u_n \end{aligned}$$

12.11.2013г.

Упражнение

зад. $\dot{x} = Ax$, где 0

$$1) A = \begin{pmatrix} -7 & 5 & 4 \\ -9 & 6 & 5 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{l} \det(A - \lambda E) = 0 \end{array} \right.$$

$$\left| \begin{array}{ccc|cc} -7-\lambda & 5 & 4 & -7-\lambda & 5 \\ -9 & 6-\lambda & 5 & -9 & 6-\lambda \\ 0 & 1 & 1-\lambda & 0 & 1 \end{array} \right| =$$

$$= -((\lambda - 6)(1 - \lambda)(\lambda + 7) - 36$$

$$+ 5(7 + \lambda) + 45(1 - \lambda)) =$$

$$= (\lambda - \lambda^2 - 6 + 6\lambda)(\lambda + 7) - 36 +$$
$$+ 35 + 5\lambda + 45 - 45\lambda =$$

$$= (-\lambda^2 + 7\lambda - 6)(\lambda + 7) + 44 - 40\lambda =$$

$$= -\lambda^3 - 7\lambda^2 + 7\lambda^2 + 49\lambda - 6\lambda - 42$$
$$+ 44 - 40\lambda =$$

$$= -\lambda^3 + 3\lambda + 2 = -(\lambda^3 - 3\lambda - 2)$$

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 0 & -3 & -2 \\ -1 & 1 & -1 & -2 & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 0 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -2 & 0 \end{array}$$

DE

$$(\lambda - 1)(\lambda^2 + \lambda - 2)$$

$$(\lambda - 1)(\lambda + 2)(\lambda - 1) =$$

$$= (\lambda - 1)^2 (\lambda + 2)$$

$$\lambda^2 - \lambda - 2$$

$$0 = 9$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{1 \pm 3}{2} \rightarrow 2$$

$$= (\lambda + 1)^2 (\lambda - 2)$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -1$$

$$\lambda_3 = 2$$

$$J = \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ \hline & & 2 \end{array} \right)$$

$$3 - 2g = \begin{pmatrix} 6 & & \\ -8 & 5 & 4 \\ -9 & 7 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = 3 - 2 = 1$$

$$e^{Jt} = \begin{pmatrix} e^{-t} & te^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-t} & 0 \\ \hline 0 & 0 & e^{2t} \end{pmatrix}$$

$$T = (S_1 \ S_2 \ S_3)$$

$$S_1 : (A+E)S_1 = 0$$

$$S_2 : (A+E)S_2 = S_1$$

$$S_3 : (A+2E)S_3 = 0$$

$$(A+E)^2 = (TJT^{-1} + T \cdot T^{-1})^2 =$$

$$= (T(J+E)T^{-1})^2 =$$

$$= T(J+E) \underbrace{T^{-1}T}_{E} (J+E)^2 T^{-1} =$$

$$= T(J+E)^2 T^{-1}$$

$$\begin{pmatrix} -6 & 5 & 4 \\ -9 & 7 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} +1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

S_2

$$x_2 - 2x_3 = 0$$

$$-6x_1 + 10 + 4 = 0$$

$$-6x_1 = -14$$

$$-6x_1 + 20 + 8$$

$$-6x_1 + 5 \cdot 2 + 4 = 0$$

$$6x_1 = 14$$

$$x_1 = \frac{7}{3}$$

$$S_2 : \begin{pmatrix} -6 & 5 & 4 \\ -9 & 7 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$x_2 + 2x_3 = -1$$

$$-6 - 5 + 4x_3 = 0 + 1$$

$$4x_3 = 10$$

$$x_3 = \frac{5}{2}$$

$$\frac{2}{-2} \cdot \frac{5}{2}$$

$$x_3 = 3$$

$$-6x_1 + 5 - 4 = 1$$

$$\begin{pmatrix} -9 & 5 & 4 \\ -9 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

S_3

$$-9x_1 + 5 + 4 = 0$$

$$x_1 = 1$$

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ Общое решение е

$$x = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-t} t e^{-t} & 0 \\ e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{pmatrix}$$

3ag. $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} -1-\lambda & 3 & 1 \\ -1 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & -1 & -1-\lambda \end{pmatrix} \begin{vmatrix} -1-\lambda & 3 \\ -1 & 2-\lambda \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda+1)^2 (2-\lambda) + 3 + 1 - (2-\lambda)$$

$$- (\lambda+1) + 3 - 3(\lambda+1) =$$

$$= (\lambda^2 + 2\lambda + 1)(2-\lambda) + \cancel{4} - 2 + \cancel{\lambda}$$

$$- \cancel{\lambda} - \cancel{\lambda} - 3\lambda - \cancel{3} =$$

$$= \cancel{2\lambda^2} - \lambda^3 + 4\lambda - \cancel{2\lambda} + \cancel{2} - \lambda - \cancel{2} - 3\lambda =$$

$$= -\lambda^3$$



a

$$\rho(0) = 3 - \tau(A) =$$

$$= 3 - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = 1$$

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

S_1

~~(A = REF)~~ S_2

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 - x_3 &= -1 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 - x_3 &= 1 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned}$$

$$x_2 = 1$$

$$x_1 - 1 + 1 = 1$$

S_3

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$x = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

$$As_1 = 0$$

$$As_2 = s_1$$

$$As_3 = s_2$$

В равенството $As_3 = s_2$

$$A^3 s_3 = A(As_2) = As_1 = 0$$

$$A^3 = (T J T^{-1})^3 = T J^3 T^{-1} = 0$$

s_3 е собствен в-р на
0-вата матрица

$$0s_3 = 0$$

s_3 можем да го
изберем произволен

Тогава

$$s_2 = As_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Тогава } s_1 = As_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Общо решение:

$$x(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

309. $A = \begin{pmatrix} -4 & -2 & 6 \\ -1 & -3 & 3 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix} -4-\lambda & -2 & 6 \\ -1 & -3-\lambda & 3 \\ -1 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -4-\lambda & -2 \\ -1 & -3-\lambda \\ -1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= (4+\lambda)(3+\lambda)(1-\lambda) + 6 + 6$$

$$= -6(\lambda+3) - 3(\lambda+4) - 2(1-\lambda) =$$

$$= \begin{matrix} -3\lambda \\ (4 - 4\lambda + \lambda - \lambda^2) \end{matrix} (3+\lambda) + 12 -$$

$$- 6\lambda - 18 - 3\lambda - 12 - 2 + 2\lambda =$$

$$= 12 + 4\lambda - 9\lambda - 3\lambda^2 - 3\lambda^2 - \lambda^3 - 20 - 7\lambda =$$

$$= -\lambda^3 - 6\lambda^2 - 12\lambda - 8 =$$

$$= (\lambda^3 + 6\lambda^2 + 12\lambda + 8)$$

$$(\lambda+2)^3$$

	1	6	12	8
-2	1	4	4	0

$$3 - \begin{pmatrix} -2 & -2 & 6 \\ -1 & -1 & 3 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} = 12$$

$$J = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} (A - \lambda E)S_1 &= 0 \\ (A - \lambda E)S_2 &= S_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (A + 2E)S_1 &= 0 \\ (A + 2E)S_2 &= S_1 \\ (A + 2E)S_3 &= 0 \end{aligned}$$

! иша
приведен

$$\begin{pmatrix} -2 & -2 & 6 \\ -1 & -1 & 3 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ S_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$-x_1 - x_2 + 3x_3 = 0$$

$$-x_1 - x_2 + 3x_3 = 1$$

$$\begin{pmatrix} -2 & -2 & 6 \\ -1 & -1 & 3 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

нша
приведен

$$\begin{pmatrix} -2 & -2 & 6 \\ -1 & -1 & 3 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-2t} & te^{-2t} & 0 \\ 0 & e^{-2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-2t} \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} e^{-2t} & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$e^{(B+D)t} = \begin{pmatrix} e^{-2t} & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{pmatrix} (E + Dt)$$

Намерете реално

решение
 $t \in \mathbb{R}$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$-\lambda^3 + \lambda^2 - \lambda + 1 = -(\lambda^3 - \lambda^2 + \lambda - 1) =$$

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 2 \\ 1 & -\lambda & 2 \\ -2 & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 2 \\ 1 & -\lambda & 2 \\ -2 & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda^2(\lambda-1) + (\lambda-1)) =$$

$$= \lambda(\lambda+1)(2-\lambda) + 4 + 2$$

$$= 4\lambda - 2(2-\lambda) - \lambda - 1 =$$

$$= 2\lambda - \lambda^2 + 2\lambda^2 - \lambda^3 + 5 - 4\lambda - 4 + \lambda$$

$$\lambda_1 = 1$$

$$\lambda_2 = i$$

$$\lambda_3 = -i$$

$$\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3$$

$$A \sim J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{pmatrix}$$

$$e^{Jt} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{\lambda_3 t} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^{it} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-it} \end{pmatrix}$$

$$T = (s_1, s_2, s_3):$$

$$s_1: (A - E)s_1 = 0$$

$$s_2: (A - iE)s_2 = \underline{0}$$

$$s_3 = s_2$$

$$S_1: \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$S_2: \begin{pmatrix} 2-i & -1 & 2 \\ 1 & -i & 2 \\ -2 & 1 & -1-i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} (2-i)a - b + 2c &= 0 \\ a - ib + 2c &= 0 \end{aligned}$$



$$(1-i)a + (i-1)b = 0$$

$$a = b$$

~~$$2a - ia + 2c = 0$$~~

~~$$2c = a(i-1)$$~~

$$\bar{S}_2 = S_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1-i \end{pmatrix}$$

$$x(t) = T \cdot e^{Jt} c = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & -1+i & -1-i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^{it} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-it} \end{pmatrix} \cdot$$

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 + i c_3 \\ c_2 - i c_3 \end{pmatrix} \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow x(t) \in \mathbb{R}$$

komponenten

$$c_1 e^t \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + (c_2 + i c_3) e^{it} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 + i \end{pmatrix} + (c_2 - i c_3) e^{-it} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 - i \end{pmatrix}$$

$$= c_1 e^t \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \operatorname{Re} \left((c_2 + i c_3) e^{it} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 + i \end{pmatrix} \right)$$

$$e^{(2 \pm i\beta)t} = e^{2t} (\cos \beta t \pm i \sin \beta t)$$

Öner

$$c_1 e^t \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \operatorname{Re} (c_2 + i c_3) (\cos t + i \sin t) \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 + i \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 x_1(t) &= 2(2c_2 \cos t - 2c_3 \sin t) \\
 x_2(t) &= 2c_1 e^t + 4(c_2 \cos t - c_3 \sin t) \\
 x_3(t) &= c_1 e^t + 2(-c_2 \cos t - c_3 \sin t - c_3 \cos t + c_3 \sin t)
 \end{aligned}$$

заг Намерете реално решение

$$\dot{x} = Ax$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left| \begin{array}{ccc|ccc}
 1-\lambda & -1 & -1 & 1-\lambda & -1 & \\
 1 & 1-\lambda & 0 & 1 & 1-\lambda & \\
 3 & 0 & 1-\lambda & 3 & 0 &
 \end{array} \right| =$$

$$= (1-\lambda)^3 + 3(1-\lambda) + (1-\lambda) =$$

$$= (1-\lambda)(1-2\lambda+\lambda^2+3+1) =$$

$$= (1-\lambda)(\lambda^2-2\lambda+5)$$

~~$$D = 4 - 20 = -16$$~~

$$D = 4 - 20 = -16$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{2 \pm i4}{2}$$

$$1 \pm 2i$$

$$\begin{aligned}
 (1-2i), \\
 (1+2i), \\
 (1-2i)
 \end{aligned}$$

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1+2i & 0 \\ 0 & 0 & 1-2i \end{pmatrix}$$

$$e^{Jt} = \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^{(1+2i)t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{(1-2i)t} \end{pmatrix}$$

$X \Rightarrow$

$$(A - E)S_1 = 0$$

$$(A - (1+2i)E)S_2 = 0$$

$$(A - (1-2i)E)S_3 = 0$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2i & 0 \\ 0 & 0 & -2i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} x_1 - 2ix_2 &= 0 \\ x_1 &= 2ix_2 \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

S_1

$$\begin{pmatrix} -2i & -1 & -1 \\ 1 & -2i & 0 \\ 3 & 0 & -2i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2i \\ 1 \\ 2^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$= S_2$

$4i^3 + 2i^5$

$$x_1(t) = -\cancel{c_1} - \cancel{2c_2} e^t \cos 2t - 2e^t (-2c_2 \sin 2t - 2c_3 \cos 2t)$$

$$x_2(t) = c_1 e^t + 2e^t (c_2 \cos 2t - c_3 \sin 2t)$$

$$x_3(t) = c_1 e^t + 2e^t (3c_2 \cos 2t - 3c_3 \sin 2t)$$

3.9.9 $\dot{x} = Ax$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\left| \begin{array}{ccc|cc} 2-\lambda & 1 & 0 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 2-\lambda & 4 & 0 & 2-\lambda \\ 1 & 0 & -1-\lambda & 1 & -1-\lambda \end{array} \right| =$$

$$= (4 - 4\lambda + \lambda^2)(\lambda - 1) + 4 =$$

$$= -4\lambda - 4 + 4\lambda^2 + 4\lambda =$$

$$-\lambda^3 - \lambda^2 + 4\lambda =$$

$$= -\lambda^3 + 3\lambda^2 =$$

$$= -\lambda^2(\lambda - 3)$$

$$A - \lambda E = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= 3 - \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 & & \\ 1 & 0 & -1 & & \end{pmatrix} = 1$$

$$J = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 3 \end{array} \right)$$

$$e^{Jt} = \begin{pmatrix} 1 & t & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^{3t} \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} A S_1 = 0 \\ A S_2 = S_1 \\ (A - 3E) S_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$x_1 = x_3 - 1$$

$$x_1 - x_3 = -1$$

$$2x_1 - x_2 = 1$$

$$2x_3 - 2x_1 = 1$$

$$2c + 2 + b = 1$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$2c + b = 1$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$S_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 14 \\ 14 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

S_3

$$x(t) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -2 & -3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & t & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^{3t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

14.11.2013г.

Лекция

Линейни системи с
променливи коефициенти

$$\dot{x} = A(t)x$$

$A(t) = (a_{ij}(t))$ непрекъснати
коэф.

$$t \in I \subset \mathbb{R}$$

$$x(t)$$

$$x^0 \in \mathbb{R}^n, t_0 \in I$$

$M = 0$ от $\forall$ решения

$$x(t_0) = x^0$$

Th Реш. на зад. на Коши съществува в цели интервал I .

$$\dot{x} = 1 + x^2$$

Лема : M е лин. п-во с размерност n .

Д-во: $\varphi(t), \psi(t)$ решения
 $\lambda, \mu - \text{const.}$

$\lambda\varphi + \mu\psi$ също е решение?

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (\lambda\varphi + \mu\psi) &= \lambda\dot{\varphi} + \mu\dot{\psi} = \\ &= \lambda A(t)\varphi + \mu A(t)\psi = \\ &= A(\lambda\varphi + \mu\psi) \quad \therefore \end{aligned}$$

$$i: \mathbb{R}^n \rightarrow M$$

$$\begin{aligned} x^0 &\rightarrow \varphi(t) \\ \varphi(t_0) &= x^0 \end{aligned}$$

t_0 - фиксирано

① линейност

$$u, v \in \mathbb{R}$$

$$i(\lambda u + \mu v)$$

$$\varphi(t) \quad \varphi(t_0) = \lambda u + \mu v$$

$$\varphi_u(t_0) = u, \quad \varphi_v(t_0) = v$$

?

$$\varphi(t) = \underbrace{\lambda \varphi_u + \mu \varphi_v}_{\text{решение}}$$

Тогда $\exists u!$

$\equiv$ наз. условиями

$$\varphi(t_0) = \lambda u + \mu v$$

$$(\lambda \varphi_u + \mu \varphi_v)(t_0) = \lambda u + \mu v$$

Изоморфизм?

$$\textcircled{1} i(\mathbb{R}^n) = M$$

$$\varphi(t) \in M$$

$$\varphi(t_0)$$

$$i(\varphi(t_0)) = \varphi(t)$$

$$\textcircled{2} \forall x \in i = 0$$

$$0 \in \mathbb{R}^n$$

$$x \in \ker i \Leftrightarrow i(x) = \bar{0} \in M$$

$$\varphi(t) \equiv 0$$

$$i(0) = 0 \text{ единственная точка}$$

Базис в M

$$\varphi^1(t), \dots, \varphi^n(t)$$

$$\varphi_j \quad \varphi^j(t) = \begin{pmatrix} \varphi^{j_1}(t) \\ \varphi^{j_2}(t) \\ \vdots \\ \varphi^{j_n}(t) \end{pmatrix}$$

Свойства на W

① Вронскианът или е тождествено 0 или ~~се~~ никъде не се нулира

Д-во: Нека $W(t_1) = 0$ за някое t_1

$$W(t_1) \equiv 0$$

$$|\varphi'(t_1) \dots \varphi^n(t_1)| = 0$$

$\Rightarrow$ същ. константи $c_1, \dots, c_n$ (не всички $= 0$)

$$\sum c_j \varphi^j(t_1) = 0$$

Да построим решение

$$\psi(t) = \sum c_j \varphi^j(t)$$

$$\psi(t_1) = 0 \Rightarrow \psi(t) \equiv 0$$

$$\Rightarrow \sum c_j \varphi^j(t) = 0$$

$$\Rightarrow |\varphi'(t), \dots, \varphi^n(t)| = 0$$

Th (Лиувил)

$$\dot{W} = \text{tr } A(t) \cdot W(t)$$

$$\dot{W} = \frac{d}{dt} (e^1, \dots, e^n) =$$

$$= \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} e^1 & e^2 & \dots & e^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e_{n1} & e_{n2} & \dots & e_{nn} \end{pmatrix}$$

$$e^{ij} = \begin{pmatrix} e_{i1}^j \\ \vdots \\ e_{ni}^j \end{pmatrix}$$

$$\dot{W} = \sum_{k=1}^n W_k$$

$$W_k = \begin{pmatrix} e_1^1 & e_1^2 & \dots & e_1^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e_k^1 & e_k^2 & \dots & e_k^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e_n^1 & e_n^2 & \dots & e_n^n \end{pmatrix} =$$

$$\dot{e}^j = A(t) e^j$$

$$\begin{cases} \dot{e}_i^j = a_{i1}(t) e_1^j + \dots + a_{in}(t) e_n^j \\ \dot{e}_k^j = a_{k1}(t) e_1^j + \dots + a_{kn}(t) e_n^j \end{cases}$$

$$\begin{aligned} & \cancel{A} \cancel{B}^T \quad \cancel{A}^T \cancel{B} \\ & \cancel{A} \cancel{B}^T \quad \cancel{A}^T \cancel{B} \end{aligned}$$

$$= \begin{pmatrix} e_1^1 & \dots & e_1^n \\ \vdots & & \vdots \\ \sum a_{ks} e_s^1 & \dots & \sum a_{ks} e_s^n \\ \vdots & & \vdots \\ e_n^1 & \dots & e_n^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{k1} & \dots & a_{kn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} e_1^1 & \dots & e_1^n \\ \vdots & & \vdots \\ a_{kk} e_k^1 & \dots & a_{kk} e_k^n \\ \vdots & & \vdots \\ e_n^1 & \dots & e_n^n \end{pmatrix} =$$

$$= a_{kk} \begin{vmatrix} e_1^1 & \dots & e_1^n \\ \vdots & & \vdots \\ e_k^1 & \dots & e_k^n \\ \vdots & & \vdots \\ e_n^1 & \dots & e_n^n \end{vmatrix} = a_{kk} W$$

$$\Rightarrow \bar{W} = \sum_{k=1}^n a_{kk} W = W \operatorname{tr}(A)$$

неhomогенно y-e

$$\dot{x} = A(t)x + f(t)$$

$$x_{\text{hom}}(t) = c \int_{t_0}^t e^{A(s)} ds$$

$$\dot{x} = x + t$$

$$\dot{x} = x$$

$$x = C_2 \cdot e^t$$

$$x = c(t) \cdot e^t$$

$$\dot{x} = c(t) \cdot e^t + e^t \cdot \dot{c} = c(t) e^t + t$$

$$e^t \cdot \dot{c} = t$$

$$\dot{c} = t \cdot e^{-t}$$

$$c = \int t \cdot e^{-t} dt$$

$$x = -t - 1$$

$$\dot{X} = A(t) X \quad \text{хомог.}$$

$$\psi^1, \quad \psi^2, \quad \dots, \quad \psi^p$$

$$\dot{X} = A(t) X + f(t) \quad \text{нехом.}$$

$$\Phi(t) = (\psi^1, \dots, \psi^p)$$

рм
(функ. матрица)

$$x(t) = \Phi(t) \cdot C \quad \begin{array}{l} \text{— общо р-е на} \\ \text{хом. у-е} \\ \uparrow \\ \text{const в-р} \end{array}$$

$$x \in \mathbb{R}^1$$

$$x^{(n)} + a_1(t) x^{(n-1)} + \dots + a_n(t) x = 0$$

$$\begin{cases} x = y_1 \\ \dot{x} = y_2 \\ \vdots \\ x^{(n-1)} = y_n \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_2 \\ \dot{y}_2 = y_3 \\ \vdots \\ y_{n-1} = y_n \end{cases}$$

$$\dot{y} = A(t)y \rightarrow \textcircled{M}$$

$$\begin{cases} y_n = -a_n y_1 - \dots - a_1 y_n \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 1 \\ -a_n & \dots & \dots & \dots & -a_1 \end{pmatrix}$$

Матрица на
Силвестър

Пространството от решения на
у-ето от n -ти ред озн. с $\mathbb{N}K$
Изоморфизъм u/y K и M

$$x(t) \rightarrow y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

19.11.2013г.

Упражнение

Нехомогенни системи

Разгледаме системата

$$(1) \quad \dot{x} = Ax + F(t) \quad A \in M_n(\mathbb{C}),$$

$$F(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix}$$

$$t \in \mathbb{C}$$

Общото решение на (1) се дава с

$$x(t) = x_h(t) + \tilde{x}(t), \text{ където}$$

$$x_h(t) = T e^{At} = \varphi(t) \text{ е}$$

решението на хомогенната с-ма

$$\dot{x} = Ax, \text{ а}$$

$\tilde{x}(t)$ е едно частно решение
на нехомогенната
система.

$\Psi(t) = e^{At}$ се нарича фундамен-
тална матрица
на $\dot{x} = Ax$

За да намерим частно решение

$\tilde{x}(t)$ на (1) използваме метода на Лагранж за вариране на константи

Винаги съществува частно решение

$\tilde{x}(t)$ на (1) във вида на решението $x_h(t)$ на хомогенната система, като вектор-стълбът от интеграционни константи се полага да е вектор-стълб от функции на t , т.е.

$$\tilde{x}(t) = \phi(t) \begin{pmatrix} c_1(t) \\ c_2(t) \\ \vdots \\ c_n(t) \end{pmatrix}$$

За да намерим кои са тези функции $c_1(t), \dots, c_n(t)$ ще използваме, че

$\tilde{x} = \phi(t)c(t)$ е частно решение на (1)

Диференцираме $\tilde{x}$ по t и получаваме

$$\dot{\tilde{x}} = \dot{\phi}c + \phi\dot{c}$$

$$\parallel$$
$$A\tilde{x} + F(t) = \underline{A\phi c + F(t)}$$

Тъй като Φ е решава хомогенната система

$(\dot{x} = Ax)$, то получаваме

$$\Phi \dot{c} = F(t)$$

$$\Rightarrow \dot{c} = \Phi^{-1} F \Rightarrow$$

$$c(t) = \int \Phi^{-1} F dt$$

Пример: Намерете общото решение на

$$\dot{x} = Ax + F(t)$$

$$A = \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$$

$$F(t) = \begin{pmatrix} \frac{2}{e^t - 1} \\ -\frac{3}{e^t - 1} \end{pmatrix}$$

Решаваме хомогенната система

$$\dot{x} = Ax$$

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} -4-\lambda & -2 \\ 6 & 3-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (\lambda - 3)(\lambda + 4) + 12 =$$

$$= \lambda^2 + 4\lambda - 3\lambda =$$

$$= \lambda^2 + \lambda = \lambda(\lambda + 1) = 0$$

$$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -1$$

$$A \sim J = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$e^{Jt} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}$$

$$\vec{r} = (s_1, s_2)$$

$$s_1: A s_1 = 0$$

$$s_2: \cancel{A} s_2 (A + E) s_2 = 0$$

$$s_1: (-4, -2) \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$s_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$s_2: (-3 \quad -2) \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} = 0$$

$$S_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$X_n(t) = T e^{St} \cdot C = \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}}^{\phi(t)} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{x}(t) = \phi(t) \begin{pmatrix} c_1(t) \\ c_2(t) \end{pmatrix} \text{ — частное решение}$$

$$\begin{pmatrix} \dot{c}_1(t) \\ \dot{c}_2(t) \\ \dot{c}_3(t) \end{pmatrix} = \phi^{-1}(t) \cdot F(t) =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{e^t - 1} \\ -\frac{3}{e^t - 1} \end{pmatrix}$$

$$\dot{c}_1 = -\frac{6}{e^t - 1} + \frac{6}{e^t - 1} = 0$$

$$\dot{c}_2 = e^t \frac{(4-3)}{e^t - 1} = \frac{e^t}{e^t - 1}$$

$$c_1 = 1$$

$$c_2 = \int \frac{e^t}{e^t - 1} dt = \ln |e^t - 1|$$

$$\tilde{x}(t) = \phi(t) \begin{pmatrix} 1 \\ \ln|e^t - 1| \end{pmatrix}$$

Общото решение е

$$x(t) = x_h(t) + \tilde{x}(t) = \phi(t) \cdot C + \phi(t) \begin{pmatrix} 1 \\ \ln|e^t - 1| \end{pmatrix}$$

$$= \phi(t) \cdot \begin{pmatrix} c_1 + 1 \\ c_2 + \ln|e^t - 1| \end{pmatrix}$$

DU

Линейни уравнения
от n-ти ред

$$a_n(x) y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x) y^{(n-1)}(x) + \dots + a_2(x) y''(x) + a_1(x) y'(x) + a_0(x) y(x) = f(x)$$

$a_j(x), f(x)$ - дефинирани и непрекъснати

в $I \subset \mathbb{R}$
интервал

$y(x)$ е неизвестната ф-я

(1) се нарича

- $f(x) \equiv 0$ хомогенно y -е

- при $f(x) \neq 0$ нехомогенно

Th Задачата на Коши (1)

$$(2) y(x_0) = y_0$$

$$y'(x_0) = y_1$$

$$, x_0 \in I$$

$$y^{(j-1)}(x_0) = y_j$$

$$y_j \in \mathbb{R}$$

при горните предположения
притетжава единствено
решение

Това решение е дефинирано и
непрекъснато в I .

(Решението на проблемите,
където имат проблеми коефици-
тите $a_j(x)$ и $f(x)$)

Доказва се, че общото решение

$y(x)$ на (1) се дава с

$$y(x) = y_h(x) + \tilde{y}(x), \text{ където}$$

$y_h(x)$ е общото решение
на хомогенното y' -е, съответства-
що на (1), а $\tilde{y}(x)$ е едно частно
решение на (1).

Th

Пространството от решения на хом. у-е, съответстващо на (1) е линейно пространство с размерност n .

Всеки базис $\{f_1(x), \dots, f_n(x)\}$ на това пространство се нарича фундаментална система от решения на хомогенното у-е (ФСР).
Следователно

$$y_n(x) = c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \dots + c_n f_n(x)$$

$\mathbb{R}$

$c_j \in \blacksquare$ - константи на интегриране

Линейни уравнения с постоянни коефициенти

$$(2) a_n y^{(n)}(x) + a_{n-1} y^{(n-1)}(x) + \dots + a_1 y' + a_0 y = f(x)$$

$$a_j \in \mathbb{C}$$

Хомогенни у-я : $(f(x) \equiv 0)$

Построяване на ФСР:

Алгебричното y -е от n -ти ред:

$$Xy: a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + a_{n-2} X^{n-2} + \dots$$

$$+ a_1 X + a_0 = 0$$

се нарича характеристично y -е на хомогенното y -е

Нека $\lambda \in \mathbb{R}$ е k -кратен корен на характеристичното y -е. Тогава на него му съответстват k ^{на брой} представители във $\mathbb{C}^R$. Те са:

$$e^{\lambda x}, x e^{\lambda x}, x^2 e^{\lambda x}, \dots, x^{k-1} e^{\lambda x}$$

Изречдайки всичките корени на хар. y -е и съответстващите на тях подпространства във $\mathbb{C}^R$ се получава цялата система.

Какво Нека $x = \alpha + i\beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\beta \neq 0$ е k -кратен корен на Xy . На него му съответстват $2k$ на брой реални представители във $\mathbb{C}^R$. Те са:

$$\begin{aligned} e^{\alpha x} \cos \beta x \\ x e^{\alpha x} \cos \beta x \\ x^2 e^{\alpha x} \cos \beta x \\ \vdots \\ x^{k-1} e^{\alpha x} \cos \beta x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e^{\alpha x} \sin \beta x \\ x e^{\alpha x} \sin \beta x \\ x^2 e^{\alpha x} \sin \beta x \\ \vdots \\ x^{k-1} e^{\alpha x} \sin \beta x \end{aligned}$$

Комплексно трезнатото с сво сџуи
реален базис.

$$a_n y^{(n)}(x) + \dots + a_0 y = f(x) \quad (2)$$

Врџка на y -ето (2) с линейните
системи.

Попазаме

$$y(x) := z_0(x)$$

$$y'(x) := z_1(x)$$

$$y''(x) := z_2(x)$$

⋮

$$y^{(n-1)}(x) := z_{n-1}(x)$$

Тозава $y' = z_0' = y' = z_1$

$$z_1' = y'' = z_2$$

⋮

$$z_{n-2}' = y^{(n-1)} = z_{n-1}$$

$$z_{n-1}' = y^{(n)} = -\frac{a_0}{a_n} z_0 -$$

$$-\frac{a_1}{a_n} z_1 \dots$$

$$-\frac{a_{n-1}}{a_n} z_{n-1} + f(x)/a_n$$

от
 y -ето

Комплексно трезнатото с със свързани
реален базис.

$$a_n y^{(n)}(x) + \dots + a_0 y = f(x) \quad (2)$$

Връзка на y -ето (2) с линейните
системи.

Положение

$$\begin{aligned} y(x) &:= z_0(x) \\ y'(x) &:= z_1(x) \\ y''(x) &:= z_2(x) \\ &\vdots \end{aligned}$$

$$y^{(n-1)}(x) := z_{n-1}(x)$$

Тогава $y' = z_0' = y' = z_1$

$$z_1' = y'' = z_2$$

$\vdots$

$$z_{n-2}' = y^{(n-1)}(x) = z_{n-1}$$

$$z_{n-1}' = y^{(n)} = -\frac{a_0}{a_n} z_0 -$$

$$-\frac{a_1}{a_n} z_1 \dots$$

$$-\frac{a_{n-1}}{a_n} z_{n-1} + f(x)/a_n$$

от
 y -ето

По този начин получаваме системата

$$(3) \quad z' = Az + F(x), \text{ където}$$

$$z = (z_0, \dots, z_{n-1})^T$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \\ -\frac{a_0}{a_n} & -\frac{a_1}{a_n} & \dots & \dots & -\frac{a_{n-1}}{a_n} \end{pmatrix}$$

$$F(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \frac{f(x)}{a_n} \end{pmatrix}$$

Функцията $y = y(x)$ е решение на

(2) $\Leftrightarrow$ векторът

$$\begin{pmatrix} y(x) \\ y'(x) \\ y''(x) \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(x) \end{pmatrix} \text{ решава}$$

системата (3).

Упражнение: $\det(A - \lambda E) =$
 $= -1(a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_0)$

На $\forall$ собствено число λ на A му отговаря $\exists$ само една Жорданова клетка от ред, равен на алгебричната кратност на λ като корен на χ .

S -собствен в-р на A , отговарещ на λ , то S е единствен

$$(A - \lambda E)S = 0$$

$$\begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & -\lambda & 1 & \dots & 0 \\ -\frac{a_0}{a_n} & \dots & \dots & -\frac{a_{n-1}}{a_n} & -\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$a_2 = \lambda a_1$

$$-\lambda a_2 + a_3 = 0$$

$$a_3 = \lambda a_2 = \lambda^2 a_1$$

$$\Rightarrow a_4 = \lambda a_3 = \lambda^3 a_1$$

$$S = a_1 \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ \lambda^2 \\ \vdots \\ \lambda^{n-1} \end{pmatrix}$$

$$S = a_1 \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ \vdots \\ \lambda^{n-1} \end{pmatrix}$$

Задача:

$$y'' - 5y' + 6y = 0$$

$$xy: \lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$$

$$\lambda_1 = 2$$

$$\lambda_2 = 3$$

$$\Phi_{CP}: e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}$$

$$\{e^{2x}, e^{3x}\}$$

$$y(x) = c_1 \cdot e^{2x} + c_2 \cdot e^{3x}$$

Заг. $y'' + 6y' + 9y = 0$

$$xy: \lambda^2 + 6\lambda + 9 = (\lambda + 3)^2 = 0$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -3$$

$$\Phi_{CP}: \{e^{-3x}, xe^{-3x}\}$$

$$y(x) = c_1 \cdot e^{-3x} + c_2 \cdot x \cdot e^{-3x}$$

$$3) y'' - 4y' + 5y = 0$$

$$\chi y: \lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = 2 \pm i$$

$$P \nexists CP: \{e^{2x} \cos x, e^{2x} \sin x\}$$

$$y(x) = c_1 \cdot e^{2x} \cos x + c_2 \cdot e^{2x} \sin x$$

3a9. $y''' - 8y = 0$

$$\lambda^3 - 8 = 0$$

$$(\lambda - 2)(\lambda^2 + 2\lambda + 4) = 0$$

$$\lambda_1 = 2$$

$$D = 4 - 16 = -12$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{-12}}{2}$$

$$= -2 \pm \frac{2}{2} \sqrt{3}i$$

$$= -1 \pm \sqrt{3}i$$

$$P \nexists CP \quad e^{2x}, e^{-x} \cdot \cos \sqrt{3}x, e^{-x} \sin \sqrt{3}x$$

$$y = c_1 \cdot e^{2x} + c_2 \cdot e^{-x} \cos \sqrt{3}x + c_3 \cdot e^{-x} \sin \sqrt{3}x$$

Нехомогенни у-и
 $a_n y^{(n)} + \dots + a_0 = f(x)$

~~зада~~

$$(*) \quad y(x) = y_h(x) + \tilde{y}(x)$$

$\tilde{y}$ - частно решение на
нехомогенното у-е.

$$\int P(x) e^{\lambda x} \begin{cases} \cos \beta x \\ \sin \beta x \end{cases} dx$$

Нека $f(x) = P(x) e^{\lambda x}$, където
 $P(x)$ е полином, а $\lambda \in \mathbb{C}$

Изрази от този вид се наричат
квазиполиноми

Тогава у-ето $(*)$ винаги притежава
частно решение във вида

$$\tilde{y}(x) = x^k \cdot Q(x) e^{\lambda x}$$

k -кратността на λ като
корен на ХУ на хомогенното
уравнение

(ако λ не е корен на ХУ, то $k=0$)
 $Q(x)$ е полином с неопределени
коэффициенти

$$\deg Q = \deg P$$

заг. Намерете общото реш. на y -ето:

$$1) y'' - 2y' - 3y = e^{4x}$$

$$y = y_h + \tilde{y}$$

$$y'' - 2y' - 3y$$

xy

$$\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$$

$$\lambda_1 = -1$$

$$\lambda_2 = 3$$

фср

$$\{e^{-x}, e^{3x}\}$$

$$y_h = C_1 \cdot e^{-x} + C_2 \cdot e^{3x}$$

$\tilde{y}$

Намиране на частно решение:

$$f = e^{4x}$$

$$f(x) = P(x) e^{rx}$$

$$P = 1$$

$r = 4$ не е корен на xy

Тогава

$$\tilde{y} = x^0 \cdot Q(x) e^{4x}$$

$Q(x)$ с неопр. коэф.

$$\deg Q = 0$$

$$Q = A$$

$$\tilde{y} = A \cdot e^{4x}$$

$$A = ?$$

Дифференцируем $\tilde{y}$ и то заместим в уравнение:

$$\begin{aligned}\tilde{y}' &= 4Ae^{4x} \\ \tilde{y}'' &= 16Ae^{4x}\end{aligned}$$

$$4 \cdot 16Ae^{4x} - 2 \cdot 4Ae^{4x} - 3Ae^{4x} \equiv 1$$

$$5A = 1$$

$$A = \frac{1}{5}$$

$$\tilde{y} = \frac{1}{5}e^{4x}$$

Общее решение:

$$y(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^{3x} + \frac{1}{5}e^{4x}$$

зад. $y'' + 2y' - 3y = x^2 e^x$

ХЧ: $y'' + 2y' - 3y = 0$

$$\begin{aligned}\lambda^2 + 2\lambda - 3 &= 0 \\ \lambda_1 &= -3 \\ \lambda_2 &= 1\end{aligned}$$

Фсп: e^x, e^{-3x}

$$y_h(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-3x}$$

частно решение

$$f(x) = x^2 e^x$$

$$p(x) = x^2$$

$\lambda = 1$ е еднократен корен на χ

Тогава частното решение ще е вида

$$\tilde{y} = x^1 \cdot Q(x) \cdot e^x$$

$$Q(x) = ax^2 + bx + c$$

$$\tilde{y} = (ax^3 + bx^2 + cx) e^x$$

$$a = ? \quad c = ?$$
$$b = ?$$

$$\tilde{y}' = (3ax^2 + 2bx + c) e^x + e^x (ax^3 + bx^2 + cx)$$

$$\tilde{y}'' = (6ax + 2b) e^x$$

$$(6ax + 2b + \underbrace{3ax^2 + 2bx + c}_{+ 3ax^2 + 2bx + c} + \underbrace{ax^3 + bx^2 + cx}_{+ cx}) e^x$$

$$(ax^3 + (6a + b)x^2 + (6a + 4b + c)x + 2b + 2c) e^x = ax^3 +$$

$$+ 2(ax^3 + (3a+b)x^2 + (2b+c)x + c)e - 3(ax^3 + bx^2 + cx)e^x = x^2 e^x$$

$$x^3: 0 = 0$$

$$x^2: 6a + \cancel{b} + 6a + \cancel{2b} - \cancel{3b} = 1$$

$$12a = 1$$

$$a = \frac{1}{12}$$

$$x: 6a + \cancel{4b} + \cancel{c} + \cancel{4b} + \cancel{2c} - \cancel{3c} = 0$$

$$6a + 8b = 0$$

$$\frac{1}{2} + 8b = 0$$

$$8b = -\frac{1}{2}$$

$$b = -\frac{1}{16}$$

$$x^0: \cancel{2c} + \cancel{2c} - 3$$

$$\cancel{2b} + \cancel{2c} - \cancel{2c} = 0$$

$$2b + 2c + 2c = 0$$

$$b = -2c$$

$$c = \frac{1}{32}$$

$$\tilde{y} = \left(\frac{1}{12} x^3 - \frac{1}{16} x^2 + \frac{1}{32} x \right) e^x$$

$$y(x) = y_h + \tilde{y} = c_1 e^x + c_2 e^{-3x} + \left(\frac{1}{12} x^3 - \frac{1}{16} x^2 + \frac{1}{32} x \right) e^x$$

зад. $y'' + y = 4 \sin x$

Общо реално решение

хомогенно y_h е

$$y'' + y = 0$$

$$\lambda^2 + 1 = 0$$

$$\lambda = \pm i$$

РФСР: $\{\cos x, \sin x\}$

$$y_h = c_1 \cos x + c_2 \sin x$$

$$c_j \in \mathbb{R}$$

Частно решение:

$$f(x) = 4 \sin x$$

Възползвайки се от формулата на

Ойлер

$$e^{i\beta} = \cos \beta + i \sin \beta$$

$$e^{i\beta} = \cos \beta + i \sin \beta$$

$$e^{-i\beta} = \cos \beta - i \sin \beta, \text{ то}$$

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

$$f(x) = \frac{4}{2i} (e^{ix} - e^{-ix}) =$$

$$= -2ie^{ix} + 2ie^{-ix}$$

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x), \text{ където}$$

$$f_1(x) = -2ie^{ix}$$

$$f_2(x) = 2ie^{-ix}$$

2 ≠ квазитомнома

Търсят се 2 частни
решения

$\tilde{y}_1$ и $\tilde{y}_2$, като

$\tilde{y}_1$ е частно реш. на

$$y'' + y = f_1(x)$$

$\tilde{y}_2$ — " —

$$y'' + y = f_2(x)$$

Общо реш: $y = y_n + \tilde{y}_1 + \tilde{y}_2$:))

21.11.2013г.

Лекция

хомогенно

$$x^{(n)} + a_1(t)x^{(n-1)} + \dots + a_n(t)x = 0$$

$$i: \begin{cases} x = y_1 \\ \dot{x} = y_2 \\ \vdots \\ x^{(n-1)} = y_n \end{cases} y$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \\ -a_n & & & -a_1 \end{pmatrix}$$

$$\dot{y} = A(t)y$$

N -решенията на y -ето
 M -решения на системата

i е изоморфизъм

$$x \rightarrow y = \begin{pmatrix} x \\ \dot{x} \\ \vdots \\ x^{(n-1)} \end{pmatrix}$$

$$y \rightarrow x = y_1$$

1) Нека $x_1, \dots, x_n$ е базис на $N \Rightarrow$
фср

Всяко решение е лнн. комбинация

$$x(t) = \sum_{j=1}^n c_j x_j(t)$$

Детерминанта на Вронски

$$\Phi = \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_n \\ \dot{x}_1 & \dots & \dot{x}_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{(n-1)} & \dots & x_n^{(n-1)} \end{pmatrix}$$

нехом. у-е

$$x^{(n)} + a_1^{(t)} x^{(n-1)} + \dots + a_n(t) x = f$$

$x_1, x_2, \dots, x_n$ - Φ СР

$$\dot{y} = A(t)y + F$$

$$F = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f \end{pmatrix}$$

$$x(t) = \Phi(t) \cdot C$$

матрица

на нехомог. система

Общи решение във вида

$$x(t) = \Phi(t) \cdot c(t)$$

$$\begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_n \\ \vdots & & \vdots \\ x_1^{(n-1)} & \dots & x_n^{(n-1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1(t) \\ \vdots \\ c_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f \end{pmatrix}$$

$$x(t) = \sum_{j=1}^n c_j(t) x_j(t)$$

Уравнения с постоянными коэффициентами

$$x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \dots + a_n x = 0$$

$$a_1, \dots, a_n - \text{const}$$

2.4

$$\dot{y} = Ay$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_n & \dots & \dots & -a_1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \\ -a_{k+1} & & & -a_k - \lambda \end{vmatrix} =$$

$$= -\lambda S_k + \begin{vmatrix} 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \\ -a_{k+1} & & & \end{vmatrix}$$

$$= -\lambda S_k + \begin{vmatrix} 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \\ -a_{k+1} & & & \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^k (-\lambda) (\lambda^k + a_1 \lambda^{k-1} + \dots + a_k) +$$

$$+ a_{k+1} (-1)^k = 0$$

$$(-1)^{k+1} (\lambda^{k+1} + a_1 \lambda^k + \dots + a_k \lambda + a_{k+1}) = 0$$

$$S_{k+1} = 0$$

1) Собственные числа са различни

$$Q_1 = \begin{pmatrix} q_1 u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & -a_1 \\ & & -a_n & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 u_1 \\ \vdots \\ \lambda_1 u_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 1 \cdot u_2 = \lambda_1 u_1 \\ 1 \cdot u_3 = \lambda_1 u_2 \\ \vdots \\ -a_n u_1 + \dots + (-a_1) u_n = \lambda_1 u_n \end{cases}$$

$$u_1 \neq 0$$

$$u_1 = 1$$

$$u_2 = \lambda_1$$

$$u_3 = \lambda_1^2$$

$$\vdots$$

$$u_n = \lambda_1^{n-1}$$

$$\lambda_1 \lambda_1^{n-1} + a_1 \lambda_1^{n-1} + \dots + a_n = 0$$

$$Q_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_1^{n-1} \end{pmatrix}$$

Решение на системата, отговарящо на λ_1 $y = e^{\lambda_1 t} \varphi_1$

$$\Rightarrow x = y_1 = e^{\lambda_1 t}$$

$$\ddot{x} - x = 0$$

$$x^2 - 1 = 0$$

$$x(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-t}$$

2) Кратни корени

Нека λ_1 е кратен корен. Тогава на λ_1 отговаря един собствен вектор.

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_1^{n-1} \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ само 1

Жорданова
клетка

Решенията на системата, отговарящи на λ_1 с кратност d_1

$$y(t) = e^{\lambda_1 t} \left(c_1 \varphi_1 + c_2 (\varphi_2 + t \varphi_1) + \dots + c_{d_1} (\varphi_{d_1} + \dots + t^{d_1-1} \varphi_1) \right)$$

$(d_1 - 1)!$

$$\begin{aligned}
 & e^{\lambda_1 t} \ell_1 \rightarrow e^{x_1 t} = x_1 \\
 & e^{\lambda_1 t} (\ell_2 + t \ell_1) \Rightarrow \tilde{x}_2 = e^{\lambda_1 t} (a_2^1 + t) \\
 & e^{\lambda_1 t} \left(\ell_{d_1} + \dots + \frac{t^{d_1-1}}{(d_1-1)!} \ell_1 \right)
 \end{aligned}$$

const

$$\begin{aligned}
 \tilde{x}_2 - * x_1 &= t e^{\lambda_1 t} \\
 x_{d_1} &= \frac{t^{d_1-1}}{(d_1-1)!} e^{\lambda_1 t}
 \end{aligned}$$

3ag

$$\ddot{x} = 0$$

$$\lambda^3 = 0$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$$

$$e^{0t} = 1$$

$$x_1 = t e^0 = t$$

$$x_3 = t^2 e^0 = t^2$$

$$\begin{aligned}
 x &= c_1 1 + c_2 \cdot t + \\
 &+ c_3 t^2
 \end{aligned}$$

$$x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \dots + a_n x = e^{\mu t} p(t)$$

Решением

квазиполиноми

не фиксировано

$$Q_m^{(M)} = \left\{ e^{\mu t} P(t), \deg P < m \right\}$$

$$\frac{d}{dt} = D \text{ оператор}$$

$$D(e^{\mu t} P) = \mu e^{\mu t} P + e^{\mu t} P' = e^{\mu t} (\mu P + P')$$

$$e^{\lambda_1 t} + e^{\lambda_2 t}$$

$$e^{\mu t}, e^{\mu t} \cdot t, \dots, e^{\mu t} t^{m-1} - \text{базис}$$

$$D e^{\mu t} = \mu e^{\mu t} \text{ собствен в-р}$$

$$D(e^{\mu t} t) = \mu e^{\mu t} t + e^{\mu t}$$

$$e^{\mu t} \text{ е собствен в-р}$$

$$t e^{\mu t} \rightarrow \text{I присоединен}$$

$$D(e^{\mu t} t^2) = \mu e^{\mu t} t^2 + e^{\mu t} \cdot 2t$$

$$\frac{D e^{\mu t} t^2}{2} = \frac{\mu e^{\mu t} t^2}{2} + e^{\mu t} \cdot t$$

$$\frac{t^2}{2} e^{\mu t} - \text{II присоединен}$$

$$\vdots$$

$$t^{n-1} \rightarrow (m-1)\text{-ви присоединен}$$

$$(m-1)!$$

$$e_1 = e^{\mu t}$$

$$e_2 = e^{\mu t} t$$

$$\vdots$$

$$e_j = \frac{e^{\mu t} t^j}{(j-1)!}$$

$$D \rightarrow \begin{pmatrix} \mu & 1 & & \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & \\ & & & \mu \end{pmatrix}$$

$$x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \dots + a_n = e^{\mu t} p(t)$$

$$x_0 = e^{\mu t} R(t)$$

решение
свободно от
поры bug

$$\text{Ако } e^{\mu t} p(t) \in Q_m$$

$$(D^n + a_1 D^{(n-1)} + \dots + a_n E) x_0 = e^{\mu t} p$$

$$D^n = \begin{pmatrix} \mu^n & * & & \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & \\ & & & \mu^n \end{pmatrix}$$

$$a_1 D^{n-1} \begin{pmatrix} a_1 \mu^{n-1} & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & a_1 \mu^{n-1} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \mu^n + a_1 \mu^{n-1} + \dots + a_n$$

$$x_0 = v_1 e_1 + \dots + v_m e_m$$

$$= \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix}$$

Лема 1: Ако μ не е корен на характ. полином, то γ -то е решение в Q_m .

$$x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \dots + a_n x = e^{\mu t} p(t) = c_1 e_1 + \dots + c_m e_m;$$

Търсим решение във вида

$$e^{\mu t} R(t)$$

$$\deg R < m$$

26.11.2013г.

Упражнение

зад. $y'' + y = 4 \sin x$

Нека е дадено y -ето

$$(1) \quad Ly = a_n y^{(n)}(x) + a_{n-1} y^{(n-1)}(x) + \dots + a_0 = \\ = P(x) \cdot e^{\lambda x} \cdot \begin{cases} \cos \beta x \\ \sin \beta x \end{cases}$$

$$a_j \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}$$

$P(x)$ - полином с реални
коэффициенти

$$\lambda, \beta \in \mathbb{R}$$

$$\beta \neq 0$$

Вие ето да търсим 2 частни
решения

$y_1(x)$ и $y_2(x)$ на (1)

с десни части съответно

$$e^{i\beta x} = \cos \beta x + i \sin \beta x$$

$$e^{-i\beta x} = \cos \beta x - i \sin \beta x$$

$$\frac{P(x)e^{\lambda x} e^{i\beta x}}{2}$$

$$, \quad \frac{P(x)e^{\lambda x} e^{-i\beta x}}{2}$$

$$\frac{P(x)e^{\lambda x} e^{i\beta x}}{2i}$$

$$, \quad \frac{-P(x)e^{\lambda x} e^{-i\beta x}}{2i}$$

~~Можем~~ можем да търсим само едно частно решение

$\tilde{y}(x)$ е на (1), но с дясна страна $P(x) \cdot e^{(\lambda + i\beta)x}$

Полученото частно решение ще има вида

$$\tilde{y} = u(x) + i v(x), \quad u(x), v(x): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

Понемис операторът L е с реални коефициенти и $x \in \mathbb{R}$, то тогава

$$L\tilde{y} = Lu + iLv = P(x) \cdot e^{\lambda x} (\cos \beta x + i \sin \beta x)$$

Тогава $u(x) = \operatorname{Re} \tilde{y}$ решава (1) с дясна страна $P(x) e^{\lambda x} \cos x$, а

$v(x) = \operatorname{Im} \tilde{y}$ решава (1) с дясна страна $P(x) e^{\lambda x} \sin \beta x$

В зависимост каква е десната страна на нашето y -е, избираме за частно решение или $u(x)$, или $v(x)$.

Заг. $y'' + 2y' - 3y = -10xe^{-3x} + 6\cos x$

Намерете общо реално решение

1) Решаваме хомогенното уравнение

$$y'' + 2y' - 3y = 0$$

$$xy: \lambda^2 + 2\lambda - 3 = 0$$

$$D = 4 + 12 = 16$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-2 \pm 4}{2} \rightarrow 1 \rightarrow -3$$

ф.ср

$$\{e^x, e^{-3x}\}$$

$$y_h(x) = C_1 \cdot e^x + C_2 \cdot e^{-3x}$$

2) Частни решения на нехомогенното y -е

$$f(x) = -10xe^{-3x} + 6\cos x$$

Два различни квазитермина и трябва да намерим 2 частни решения

$y_1(x)$ и $y_2(x)$
 От тях $y_1(x)$ решава y -ето с
 дясна страна $-10xe^{-3x}$, а
 $y_2(x)$ с дясна страна
 $6\cos x$

У Търсим $y_1(x)$

$$y'' + 2y' - 3y = -10xe^{-3x} \quad (*)$$

$$f_1(x) = -10xe^{-3x}$$

-3 е еднократен корен
на χ

$$\Rightarrow p(x) = -10x$$

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow y_1(x) &= x^k Q(x) e^{-3x} = \\
 &= x \cdot Q(x) e^{-3x} = \\
 &= x(ax + b) e^{-3x} = \\
 &= (ax^2 + bx) e^{-3x}
 \end{aligned}$$

$$y_1' = \cancel{(2ax + b)} e^{-3x} + (2ax + b) \cdot e^{-3x} + (ax^2 + bx) \cdot e^{-3x} \cdot (-3)$$

$$y_1'' = (2a - 6ax - 3b - 6ax - 3b + 9ax^2 + 9bx) e^{-3x}$$

а Заменваме в (*)

$$\begin{aligned}
 &\cancel{9ax^2} + (9b - 12a)x + 2a - 6b = \\
 &\cancel{-6ax} + 2(2a - 3b)x + 2b - \cancel{3ax^2} - \\
 &\quad - 3bx \equiv -10x
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 x^1: \quad & 3\cancel{8} - 12a + 4a - 6\cancel{8} - 3\cancel{8} = -10 \\
 & -8a = -10 \\
 & a = \frac{5}{4}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 x^0: \quad & 2a - 4b = 0 \\
 & a = 2b \\
 & b = \frac{a}{2} = \frac{5}{8}
 \end{aligned}$$

$$y_1 = \left(\frac{5}{4} x^2 + \frac{5}{8} x \right) e^{-3x}$$

Търсим $y_2(x)$, т.е. частно решение на

$$y'' + 2y' - 3y = 6 \cos x$$

Вместо да търсим частно решение с такава дясна страна, ще търсим частно решение с дясна страна $6e^{ix}$

$$y'' + 2y' - 3y = 6e^{ix} \quad (*)$$

$$\begin{aligned}
 \tilde{y} &= x^0 \cdot Q(x) \cdot e^{ix} = \\
 &= A \cdot e^{ix}
 \end{aligned}$$

$$\tilde{y}' = A \cdot e^{ix} \cdot i$$

$$\tilde{y}'' = A i^2 e^{ix} = -A e^{ix}$$

зам. в (*2)

$$-Ae^{ix} + 2Aie^{ix} - 3A \cdot e^{ix} = 6e^{ix}$$

$$2Ai - 4A = 6$$

$$Ai - 2A = 3$$

$$A = \frac{3}{i-2} =$$

$$= \frac{3(i+2)}{-5} = -\frac{3}{5}(i+2) =$$

$$= -\frac{6}{5} - \frac{3}{5}i$$

$$\text{Тогава } \tilde{y} = -\left(\frac{6}{5} + \frac{3}{5}i\right)e^{ix} =$$

$$= -\left(\frac{6}{5} + \frac{3}{5}i\right)(\cos x + i \sin x) =$$

$$= \left(-\frac{6}{5} \cos x + \frac{3}{5} \sin x\right) +$$

$$+ i\left(-\frac{3}{5} \cos x - \frac{6}{5} \sin x\right)$$

$$y'' + 2y' - 3y = 6(\cos x + i \sin x)$$

Горесеното от нас частно решение

$$y_2(x) = R\tilde{e} = -\frac{6}{5} \cos x + \frac{3}{5} \sin x, \text{ т.к.}$$

истинската частна функция
 $6\cos x = \operatorname{Re}(6e^{ix})$

реално
Общото решение:

$$\begin{aligned} y(x) &= y_h + y_1 + y_2 = \\ &= c_1 e^x + c_2 e^{-3x} + \\ &+ \left(\frac{5}{4} x^2 + \frac{5}{8} x \right) e^{-3x} + \left(-\frac{6}{5} \cos x + \frac{3}{5} \sin x \right) \end{aligned}$$

заг. $y'' + y = x \sin x$

Намерете общото реално решение

1. Хомогенно $y-h$

$$y'' + y = 0$$

$$\lambda^2 + 1 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \pm i$$

РФСР: $\{ \cos x, \sin x \}$

$$y_h = c_1 \cos x + c_2 \sin x, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

2. Частно решение

Ще намерим частно решение

$\tilde{y}(x)$ на уравнението

$$y'' + y = x e^{ix} \quad (*)$$

$f(x) = x \cdot e^{ix}$ и i е еднократен корен на ~~характеристиката~~ XY .

$$\begin{aligned}\tilde{y} &= x^1 \cdot Q(x) e^{ix} = \\ &= x \cdot (ax + b) e^{ix} = \\ &= (ax^2 + bx) e^{ix}\end{aligned}$$

$$\tilde{y}' = (2ax + b + ax^2 + bxi) e^{ix}$$

$$\begin{aligned}\tilde{y}'' &= (2a + 2axi + bi + 2axi \\ &\quad + bi - ax^2 - bx) e^{ix}\end{aligned}$$

~~14ai - b + b = 1~~

$$14ai - b + b = 1$$

$$4ai = 1$$

$$a = \frac{1}{4i} = \frac{i}{-4} = -\frac{1}{4}i$$

$$2a + 2bi = 0$$

$$b = -\frac{2a}{2} = \frac{1}{4} \frac{i}{i} = \frac{1}{4}$$

Тогава

$$\tilde{y} = \left(-\frac{i}{4} x^2 + \frac{1}{4} x \right) e^{ix} =$$

$$= \left(-\frac{i}{4} x^2 + \frac{1}{4} x \right) (\cos x + i \sin x) =$$

$$2e^{2x}(\cos x + i \sin x)$$

$$\{e^{2x} \cos x, e^{2x} \sin x\}$$

2) частное решение

$$y'' - 4y' + 5y = 2e^{2x+2ix} = 2e^{(2+i)x}$$

$$\tilde{y} = x \cdot Q(x) \cdot e^{(2+i)x} = x \cdot A \cdot e^{(2+i)x}$$

$$y' = A \cdot (e^{(2+i)x} + x \cdot e^{(2+i)x} \cdot (2+i)) = A \cdot e^{(2+i)x} (1 + 2x + xi)$$

$$y'' = A \cdot (e^{(2+i)x} (2+i) (1 + 2x + xi) + e^{(2+i)x} \cdot (2+i)) = A \cdot e^{(2+i)x} \{ (2+i) (1 + 2x + xi) + (2+i) \} = A \cdot e^{(2+i)x} \{ (2+i) (2 + 2x + xi) \}$$

$$A \cdot (2+i) (2 + 2x + xi) -$$

$$- 4A (1 + 2x + xi) + 5Ax = 2$$

$$A (4 + 4x + 2xi + 2i + 2xi - x) -$$

$$- 4A (1 + 2x + xi) + 5Ax = 2$$

$$A (4x + 4x + 2i + x - x - 4 - 8x - 4xi + 5x) = 2$$

$$A = \frac{1}{i} = -i$$

$$\tilde{y} = -ix \cdot e^{(2+i)x} =$$

$$= -ix \cdot e^{2x} (\cos x + i \sin x) =$$

$$= \underline{x \cdot e^{2x} \sin x - ix \cdot e^{2x} \cos x}$$

~~$$2e^{2x}$$~~

~~$$y'' - 4y' + 5y = 2e^{2x} \cos x$$~~

$$y'' - 4y' + 5y = 2e^{2x} \cos x$$

$$\Rightarrow \tilde{y} = x \cdot \sin x \cdot e^{2x}$$

$$y = C_1 \cdot e^{2x} \cos x + C_2 \cdot e^{2x} \sin x + x \sin x \cdot e^{2x}$$

за вариране на
константите

Метод на Лагранж за намиране на частни решения на нехомогенното уравнение

(1)

$$a_n y^{(n)}(x) + a_{n-1} y^{(n-1)}(x) + \dots + a_0 = f(x)$$

- Този метод е универсален и
! няма значение каква е дясната
• страна

Нека сме решили ХУ, отговарящо
на (1), и нека

$$\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x) \text{ е}$$

една ФСР.

Тогава

$$y_n = c_1 \varphi_1(x) + \dots + c_n \varphi_n(x) \text{ е}$$

решение на ХУ

Винаги $\exists$ частно решение

$y_1(x)$ във вида на общото

решение на ХУ $y_n(x)$ на хомогенното
у-е като полагаме $c_j = c_j(x)$

$$y_1(x) = c_1(x) \varphi_1(x) + c_2(x) \varphi_2(x) + \dots + c_n(x) \varphi_n(x)$$

За да намерим тези функции,
решаваме линейната n на n
алгебрична система

$$c_1' \varphi_1 + c_2' \varphi_2 + \dots + c_n' \varphi_n = 0$$

$$c_1' \varphi_1' + c_2' \varphi_2' + \dots + c_n' \varphi_n' = 0$$

$$c_1' \varphi_1'' + c_2' \varphi_2'' + \dots + c_n' \varphi_n'' = 0$$

$\vdots$

$$c_1' \varphi_1^{(n-2)} + c_2' \varphi_2^{(n-2)} + \dots + c_n' \varphi_n^{(n-2)} = 0$$

$$c_1' \varphi_1^{(n-1)} + c_2' \varphi_2^{(n-1)} + \dots + c_n' \varphi_n^{(n-1)} = 0$$

$$\underline{c_1', c_2', \dots, c_n'}$$

$$\frac{f(x)}{a_n}$$

$$c_j = \int c_j' dx \text{ без const}$$

Задача $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x}$

1) xy

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = 1$$

$$\text{ФСР } \{e^{\lambda_1 x}, x e^{\lambda_1 x}\} = \{e^x, x e^x\}$$

$$y_n(x) = c_1 e^x + c_2 x e^x$$

2) частное решение

$$y_1 = c_1(x) e^x + c_2(x) x e^x$$

$$c_1, c_2 = ?$$

Решавание системы

$$\begin{cases} c_1' e^x + c_2' x e^x = 0 \\ c_1' (e^x)' + c_2' (x e^x)' = \frac{e^x}{x} \end{cases} \quad (=\Rightarrow)$$

$$\begin{cases} c_1' e^x + c_2' x e^x = 0 \\ c_1' e^x + c_2' e^x + x e^x c_2' = \frac{e^x}{x} \end{cases}$$

$$c_2' = \frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow c_2 = \int \frac{1}{x} dx = \ln|x|$$

$$c_1' = - \frac{1}{x} \cdot x e^x$$

$$c_1 = -e^x - 1$$

$$c_1 = - \int dx = -x$$

Частное решение е

$$y_1 = -x e^x + x e^x \ln|x|$$

Общее решение

$$y(x) = y_h + y_i = c_1 e^x + \frac{c_2 x e^x}{-x e^x + x \cdot e^x e^{-x} |x|}$$

$$2) y'' + 3y' + 2y = \frac{1}{e^x + 1}$$

$$1) \lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$$

$$D = 1$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-3 \pm 1}{2} \begin{matrix} \nearrow -2 \\ \searrow -1 \end{matrix}$$

$$2) \cancel{y'' + 3y' + 2y} = \frac{1}{\cancel{e^x + 1}}$$

$$\text{ф.ср. } \{e^{-2x}, e^{-x}\}$$

$$y = c_1 \cdot e^{-2x} + c_2 \cdot e^{-x}$$

частно решение

$$y = c_1(x) \cdot e^{-2x} + c_2(x) \cdot e^{-x}$$

$$\left| \begin{array}{l} c_1'(x) \cdot e^{-2x} + c_2'(x) \cdot e^{-x} = 0 \\ c_1'(x) (e^{-2x})' + c_2'(x) \cdot (e^{-x})' = \frac{1}{e^x + 1} \end{array} \right.$$

$$\left| \begin{array}{l} c_1'(x) (e^{-2x})' + c_2'(x) \cdot (e^{-x})' = \frac{1}{e^x + 1} \end{array} \right.$$

$$\begin{cases} c_1'(x) \cdot e^{-2x} + c_2'(x) e^{-x} = 0 \\ c_1'(x) \cdot e^{-2x} \cdot (-2) - c_2'(x) \cdot e^{-x} = \frac{1}{e^x + 1} \end{cases}$$

$$-c_1'(x) \cdot e^{-2x} = \frac{1}{e^x + 1}$$

$$c_1'(x) = - \frac{e^{2x}}{e^x + 1}$$

$$c_1 = - \int \frac{e^{2x}}{e^x + 1} dx =$$

$$= - \int \frac{e^x \cancel{de^x}}{e^x + 1} =$$

$$= - \int 1 de^x + \int \frac{1}{e^x + 1} d(e^x + 1) =$$

$$= -e^x + \ln|e^x + 1|$$

$$e^{-x} c_2(x) = -c_1'(x) \cdot e^{-2x}$$

$$c_2(x) = \frac{e^{-x} \cdot e^{2x}}{e^x + 1} = \frac{e^x}{e^x + 1}$$

$$C_2'(x) = \frac{e^x}{e^x + 1}$$

$$C_2(x) = \int \frac{d(e^x + 1)}{e^x + 1} = \ln|e^x + 1|$$

$$\Rightarrow y = C_1 \cdot e^{-2x} + C_2 \cdot e^{-x} + (-e^x + \ln|e^x + 1|) \cdot e^{-2x} + e^{-x} \cdot \ln|e^x + 1|$$

3ag $y'' + 4y = 2 \operatorname{tg} x$

$$1) \quad \lambda^2 + 4 = 0$$

$$\lambda = \pm 2i$$

$$\lambda_1 = 2i$$

$$\lambda_2 = -2i$$

$$\Rightarrow P \oplus CP (\sin 2x, \cos 2x)$$

$$y = C_1 \sin 2x + C_2 \cos 2x$$

$$2) \quad \begin{cases} C_1' \sin 2x + C_2' \cos 2x = 0 \\ C_1' \cos 2x + C_2' \sin 2x = \frac{\sin x}{\cos x} \end{cases}$$

$$C_1' \sin^2 x + C_1 \cos^2 x = \frac{\sin x \cos 2x}{\cos x}$$

$$C_1' = \frac{\sin x \cos 2x}{\cos^2 x}$$

$$C_1 = \int \frac{\sin x \cos 2x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{\sin x (1 - \sin^2 x)}{\cos^2 x} dx$$

$$C_1 = - \int \frac{\cos 2x \sin x}{\cos x} d \cos x =$$

$$= - \int \frac{2 \cos^2 x - 1}{\cos x} d \cos x =$$

$$= - \int 2 \cos x d \cos x + \int \frac{1}{\cos x} d \cos x =$$

$$= - \cos^2 x + \ln |\cos x| =$$

$$= - \cos^2 x + \ln |\cos x|$$

$$C_2' = \frac{-C_1' \sin 2x}{\cos 2x} = \frac{-\sin x \cos 2x \sin 2x}{\cos^2 2x}$$

$$C_2 = - \int \frac{\cancel{\sin 2} \cdot 2 \sin x \cancel{\cos x} \sin x}{\cancel{\cos x}} dx =$$

$$= - \int 2 \sin^2 x dx =$$

$$= - \int 1 - \cos 2x dx =$$

$$= -x + \frac{1}{2} \int \cos 2x d2x =$$

$$= -x + \frac{1}{2} \sin 2x$$

$$y = C_1 \cdot \sin 2x + C_2 \cos 2x + \\ + (-\cos^2 x + 9n|\cos x|) \sin 2x + \\ + \left(-x + \frac{1}{2} \sin 2x\right) \cos 2x$$

Dom.: $y'' - 5y' + 6y = 4e^{2x} \cos^3 x$

$$(*) \quad x^3 (y'' - y) = x^2 - 2$$

$$y'' - y = \frac{x^2 - 2}{x^3}$$

Намерете
периодично
решение
на y -ето

~~$$\lambda^2 - 1 = 0$$~~

зад. Намерете периодично р-е.

$$y''' + 3y'' + 3y' + y = \sin \omega x$$

$$\omega \in \mathbb{R}$$

Задача на Коши

$$ХУ: \lambda^3 + 3\lambda^2 + 3\lambda + 1 = (\lambda + 1)^3$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = -1$$

$$\text{ф.ср.} \quad e^{-x}, x e^{-x}, x^2 e^{-x}$$

$$y_h = C_1 \cdot e^{-x} + C_2 \cdot x e^{-x} + C_3 \cdot x^2 e^{-x}$$

частно решение

Понемпе e^{-x} , $x e^{-x}$, $x^2 e^{-x}$ не са
периодични функции, в решението,
което търсим $C_1 = C_2 = C_3 = 0$.

$$= e^{i\omega x}$$

$$y_1 = A e^{i\omega x}$$

$$y_1' = A e^{i\omega x} i\omega$$

$$y_1'' = -A \omega^2 e^{i\omega x}$$

$$y_1''' = -iA \omega^3 e^{i\omega x}$$

$$-i\omega^3 A - 3\omega^2 A + 3i\omega A + A = 1$$

$$A (1 + 3\omega i - 3\omega^2 - i\omega^3) = 1$$

$$A = \frac{1}{1 + 3\omega i - 3\omega^2 - i\omega^3}$$

$$= \frac{1}{1 + 3\omega i - \omega^2(1 + 3\omega i)}$$

$$= \frac{1}{(1 - \omega^2)(1 + 3\omega i)}$$

$$= \frac{1 - 3\omega^2 - i(3\omega - \omega^3)}{(1 - 3\omega^2)^2 + (3\omega - \omega^3)^2}$$

$$Y_1 = \frac{1 - 3\omega^2 - i(3\omega - \omega^3)}{(1 - 3\omega^2)^2 + (3\omega - \omega^3)^2}$$

$$(\cos \omega x + i \sin \omega x)$$

$$\frac{(1 - 3\omega^2) \cos \omega x + (3\omega - \omega^3) \sin \omega x}{(1 - 3\omega^2)^2 + (3\omega - \omega^3)^2}$$

$$+ i \left(\frac{1 - 3\omega^2}{(1 - 3\omega^2)^2 + (3\omega - \omega^3)^2} \sin \omega x - \frac{3\omega - \omega^3}{(1 - 3\omega^2)^2 + (3\omega - \omega^3)^2} \cos \omega x \right)$$

$$\tilde{y} = \operatorname{Im} y_1 = \frac{1-3\omega^2}{()} \sin \omega x - \frac{3\omega - \omega^3}{()} \cos \omega x$$

03.12.2013г.

Упражнение

2010 Изпит

Заг. а) Да се намери общото решение на уравнението

$$L(y) = y'' + 4y' + 4y = 0$$

б) Да се намери частното решение на уравнението

$$L(y) = \frac{e^{-2x}}{x^2}, \quad x > 0$$

~~$$x^2 + 4x + 4 = 0$$~~
~~$$(x+2)^2 = 0$$~~
~~$$x_1 = x_2 = -2$$~~

$$\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0$$

$$(\lambda + 2)^2 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = -2$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -2$$

$$\Rightarrow \text{фср } \{e^{-2x}, x \cdot e^{-2x}\}$$

$$y(x) = C_1 \cdot e^{-2x} + C_2 \cdot x \cdot e^{-2x}$$

б) $\tilde{y} = C_1(x) \cdot e^{-2x} + C_2(x) \cdot x \cdot e^{-2x}$

$$\begin{cases} C_1' \cdot e^{-2x} + C_2' \cdot x \cdot e^{-2x} = 0 \\ C_1' \cdot e^{(-2x)'} + C_2' \cdot (x \cdot e^{-2x})' = \frac{e^{-2x}}{x^2} \end{cases}$$

$$c_1' + c_2' x = 0$$

$$2c_1' e^{-2x} + c_2' (e^{-2x} - 2x \cdot e^{-2x}) = \frac{e^{-2x}}{x^2}$$

$$c_1' + c_2' x = 0$$

$$-2c_1' + c_2' - 2x c_2' = 0$$

$$c_2' = \frac{1}{x^2}$$

$$\Rightarrow c_2 = \int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x}$$

$$c_1' = -c_2' x = -\frac{1}{x}$$

$$c_1 = -\ln x$$

$$\tilde{y}_1 = (-\ln x) \cdot e^{-2x} - e^{-2x}$$

2010
Мат.

$$\ddot{x} - 5\dot{x} + 4x = \frac{9e^t}{1 + e^{-3t}}$$

Намерете
Общото решение на ДУ, когато

$$\bullet = \frac{d}{dt}$$

$$\lambda^2 - 5\lambda + 4 = 0$$

$$D = 9$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{5 \pm 3}{2} \rightarrow \begin{matrix} 4 \\ 1 \end{matrix}$$

$$\Rightarrow \{e^{4t}, e^t\}$$

$$y = c_1 \cdot e^{4t} + c_2 \cdot e^t$$

$$\tilde{y} = c_1(x) \cdot e^{4t} + c_2(x) \cdot e^t$$

$$\begin{cases} c_1' e^{4t} + c_2' e^t = 0 \\ c_1' \cdot 4e^{4t} + c_2' \cdot e^t = \frac{ge^t}{1+e^{-3t}} \end{cases}$$

$$c_1' = -\frac{c_2' e^t}{e^{4t}}$$

$$-\cancel{c_2' e^t} \cdot 4 + c_2' \cdot \cancel{e^t} = \frac{ge^t}{1+e^{-3t}}$$

$$-3c_2' = \frac{g}{1+e^{-3t}}$$

$$c_2' = -\frac{3}{1+e^{-3t}}$$

$$c_2 = -3 \int \frac{1}{1+e^{-3t}} dt$$

$$c_1 = \frac{-3e^{-3t}}{1+e^{-3t}}$$

$$c_2 = -3 \int \frac{1}{1+e^{-3t}} dt =$$

$$= -3 \int \frac{1+e^{-3t}-e^{-3t}}{1+e^{-3t}} dt =$$

$$= -3 \left(\int dt - \int \frac{e^{-3t}}{1+e^{-3t}} dt \right) =$$

$$\cancel{I} \Rightarrow \cancel{-3t} = \cancel{\int dt}$$

$$= -3 \left(t - \int \frac{(-3) d(e^{-3t} + 1)}{1+e^{-3t}} \right) =$$

$$= -3t + 9 \ln |1+e^{-3t}|$$

$$c_1 = \int \frac{-3e^{-3t}}{1+e^{-3t}} dt =$$

$$= \ln |1+e^{-3t}|$$

$$\tilde{X}_1 = 3te^t + e^t \ln |1+e^{-3t}| +$$

$$+ e^{4t} p_n(1 + e^{-3t})$$

Общо решение

$$x(t) = c_1 e^t + c_2 e^{4t} + 3te^t + \frac{(e^t + e^{4t})}{p_n(1 + e^{-3t})}$$

Линейни уравнения
от n -ти ред с променливи
коэффициенти

(1)

$$a_n(x) y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x) y^{(n-1)}(x) + \dots + a_0(x) y(x) = f(x)$$

~~Уравнение~~

Общото решение

$$y(x) = y_n(x) + y_1(x)$$

$y_n(x)$ е общото решение на
хомогенното y -е

$y_1(x)$ е частно решение на
нехомогенното y -е

$$y_n(x) = c_1 \psi_1(x) + c_2 \psi_2(x) + \dots + c_n \psi_n(x)$$

$$\{\psi_j(x)\}_{j=1}^n \text{ е ф.с.р.}$$

Уравнение на Ойлер

$$A_n (a+bx)^n y^{(n)}(x) + A_{n-1} (a+bx)^{n-1} y^{(n-1)}(x) + \dots + A_2 (a+bx)^2 y''(x) + A_1 (a+bx) y'(x) + A_0 y(x) = f(x)$$

$A_j - \text{const}$

$$a=b=1$$

$$A_n x^n y^{(n)}(x) + A_{n-1} x^{n-1} y^{(n-1)}(x) + \dots + A_2 x^2 y''(x) + A_1 x y'(x) + A_0 y(x) = f(x)$$

$$x \in \mathbb{R}$$

y - это (2) чрез смената: 1) при $x > 0$

$$x = e^s$$

2) при $x < 0$

$$x = -e^s$$

$$\text{При } x = e^s \Rightarrow dx = e^s ds$$

Тогавга

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{e^s ds} = e^{-s} \frac{dy}{ds}$$

$$y'' = \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dx} (y') = \frac{d}{e^s ds} \left(e^{-s} \frac{dy}{ds} \right) =$$

$$= e^{-s} \left(-e^{-s} \frac{dy}{ds} + e^{-s} \frac{d^2 y}{ds^2} \right) =$$

$$= e^{-2s} \left(-\frac{dy}{ds} + \frac{d^2 y}{ds^2} \right)$$

$$A_2 x^2 y''(x) + A_1 x y'(x) + A_0 y(x) =$$

$$= A_2 e^{2s} \cdot e^{-2s} \left(-\frac{dy}{ds} + \frac{d^2 y}{ds^2} \right) + A_1 e^s e^{-s} \frac{dy}{ds}$$

$$+ A_0 y(s) = f(s)$$

Заг. $t^3 \ddot{x} = 2tx + 6 \ln t \quad | : t \quad \cdot = \frac{d}{dt} \quad x = x(t)$

$$t^2 \ddot{x} - 2x = 6 \frac{\ln t}{t} \quad \underline{t > 0}$$

y-e на Ойлер

Полагаме

$$t = e^s$$

$$\ddot{x} = e^{-2s} \left(-\frac{dx}{ds} + \frac{d^2 x}{ds^2} \right)$$

Уравнението става

$$e^{2s} e^{-2s} \left(-\frac{dx}{ds} + \frac{d^2 x}{ds^2} \right) -$$

$$- 2x = \underline{6s} \cdot e^{-s}$$

$$\frac{d^2 x}{ds^2} - \frac{dx}{ds} - 2x = 6s \cdot e^{-s}$$

$$x = x(s)$$

Реш. ху:

$$\chi^2 - \chi - 2 = 0$$

$$D = 9$$

$$\chi_{1,2} = \frac{1 \pm 3}{2} \rightarrow \begin{matrix} 2 \\ -1 \end{matrix}$$

$$y_{\text{ср}} = \{e^{-s}, e^{2s}\}$$

$$y = c_1 \cdot e^{-s} + c_2 \cdot e^{2s}$$

Таким образом решение

$$\text{XII} \quad x'' - x' - 2x = 6s \cdot e^{-s}$$

$$\tilde{x} = s^k \cdot Q(s) \cdot e^{-s}$$

$$P(s) = 6s$$

$$\tilde{x} = s \cdot Q(s) e^{-s}$$

$$Q(s) = as + b$$

$$\tilde{x} = s(as + b)e^{-s} =$$

$$= (as^2 + bs)e^{-s}$$

$$x' = \cancel{2as + b} (2as + b)e^{-s} + (as^2 + bs)e^{-s}$$

$$x' = e^{-s} (as^2 + 2as + bs + b)$$

$$x'' = -e^{-s} (as^2 + 2as + bs + b) + e^{-s} (2as + 2a + b)$$

$$as^2 + s(4a + b) + 2a + 2b$$

$$- 2as - b - as^2 - bs - 2as^2 -$$

$$- 2bs = 6s$$

$$\cancel{4a + bs}$$

$$\cancel{-as^2 - 2as - bs - b + 2as + 2a + b}$$

$$\cancel{- 2as - b + as^2 + bs + 2as^2 + 2bs = 0}$$

$$\textcircled{1} \quad -as^2 - 2as$$

$$\cancel{-as^2 - 2as - bs - b + 2as + 2a + b}$$

$$\cancel{- 2as - b + as^2 + bs - 2as^2 - 2bs =}$$

$$= 6s$$

$$x' = e^{-s} (2as + b - as^2 - bs)$$

$$x'' = -e^{-s} (2as + b - as^2 - bs) + e^{-s} (2a - 2as - b)$$

$$\begin{array}{r}
 -2as - b + as^2 + bs - 2a + 2as \\
 + b \\
 -2as - b + as^2 + bs \\
 -2as^2 - 2bs = 6s
 \end{array}$$

$$a = -\frac{1}{2}$$

$$2a = -6s$$

$$a = -3s$$

$$b = 0$$

$$-b - 2a = 0$$

$$b = -2a = 1$$

$$Q(s) = -\frac{1}{2}s$$

$$a = -1$$

$$\tilde{x} = -\frac{1}{2}s e^{-s}$$

$$\tilde{x} = s \left(-\frac{1}{2}s + 1 \right) e^{-s} =$$

$$= \left(-\frac{1}{2}s^2 + s \right) e^{-s}$$

$$x = -s^2 e^{-s} - \frac{2}{3} s e^{-s} - \frac{2}{3} e^{-s}$$

$$x(s) = c_1 e^{-s} + c_2 e^{2s} - \left(s^2 + \frac{2}{3}s \right) e^{-s}$$

$$t = e^s \quad s = \ln t$$

58) - грешна!

$$t > 0$$

заг. 5a)

$$t^2 \ddot{x} + \frac{5}{2} t \dot{x} = x$$

$$t^2 \ddot{x} + \frac{5}{2} t \dot{x} - x = 0$$

$$t = e^s$$

$$dt = e^s ds$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx}{e^s ds} = e^{-s} \frac{dx}{ds}$$

$$\frac{dx}{ds} \left(e^s \frac{dx}{ds} \right) =$$

$$= -e^{-s} \frac{dx}{ds} + \cancel{\frac{dx}{ds}} e^{-s} \frac{d^2 x}{ds^2}$$

$$\frac{d}{dt} \left(e^{-s} \frac{dx}{ds} \right) =$$

$$= \frac{d}{e^s ds} \left(e^{-s} \frac{dx}{ds} \right) =$$

$$= -e^{-2s} \frac{dx}{ds} + e^{-2s} \frac{d^2 x}{ds^2}$$

$$e^{2s} e^{-2s} \left(-\frac{dx}{ds} + \frac{d^2 x}{ds^2} \right) + \frac{5}{2} \cancel{e^s} \frac{dx}{ds} - x = 0$$

$$-x' + x'' + \frac{5}{2}x' - x = 0$$

$$x'' - \frac{3}{2}x' - x = 0$$

$$2x'' - 3x' - 2x = 0$$

$$2\lambda^2 - 3\lambda - 2 = 0$$

$$b = 9 + 16 = 25$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{3 \pm 5}{4} \rightarrow \begin{matrix} 2 \\ -\frac{1}{2} \end{matrix}$$

$$\{e^{2s}, e^{-\frac{1}{2}s}\}$$

$$s = \ln t$$

$$\{e^{2\ln t}, e^{-\frac{1}{2}\ln t}\}$$

$$t^2 \quad \text{and} \quad t^{-\frac{1}{2}}$$

$$\{t^2, t^{-\frac{1}{2}}\}$$

$$\Rightarrow x = c_1 t^2 + c_2 t^{-\frac{1}{2}}$$

Разглеждаме y -ето

$$(1) \quad a_2(x) y''(x) + a_1(x) y'(x) + a_0(x) y = 0$$

Матрицата

$$\phi(x) = \begin{pmatrix} \psi_1(x) & \psi_2(x) \\ \psi_1'(x) & \psi_2'(x) \end{pmatrix},$$

където $\{\psi_1, \psi_2\}$ е една ФСР на (1)
се нарича фундаментална
матрица на (1), а нейната $\det$
се нарича $\det$ на Вронски на
с-мата $\{\psi_1, \psi_2\}$

$$\det \phi(x) = W(x)$$

Тогава е в сила следното y -е за
 $W(x)$

~~ф-на~~
~~Личвиг~~ $\frac{d}{dx} \ln W(x) = \operatorname{tr} A(x)$, където

$A(x)$ е матрицата,
асоциирана с (1) в смисъл

$$A = \begin{pmatrix} 0 & +1 \\ -\frac{a_0}{a_2} & -\frac{a_1}{a_2} \end{pmatrix}$$

$$\frac{d}{dx} \ln W(x) = -\frac{a_1}{a_2}$$

Ako y -emo e om no- ∂ ucon peg

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_0 y = 0$$

$$w(x) = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & \dots & e_n \\ e_1' & e_2' & \dots & e_n' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e_1^{(n-1)} & e_2^{(n-1)} & \dots & e_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

$\{e_j\}$ e една $\mathcal{B}$ CP u
nak

$$\frac{d}{dx} e_n w(x) = - \frac{a_{n-1}}{a_n}$$

Toraba

~~...~~

$$p_n w(x) = - \int \frac{a_{n-1}}{a_n} dx + C$$

$$w(x) = c e^{-\int \frac{a_{n-1}}{a_n} dx}$$

3a 2

$$w(x) = c e^{-\int \frac{a_1}{a_2} dx}$$

~~...~~

$$\begin{vmatrix} e_1 & e_2 \\ e_1' & e_2' \end{vmatrix} = c e^{-\int \frac{a_1}{a_2} dx}$$

Ако знаем напр. $y_1(x)$, тази формула ни дава директно общото реш. на y -ето (1).

зад. $(2x+1)y'' + 4xy' - 4y = 0$

$$y_1 := \begin{cases} e^{ax} & a=? \\ x^n + a x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = c e^{-\int \frac{4x}{(2x+1)} dx}$$

$$y_1 := e^{ax}, \quad a=?$$

$$y_1' = a e^{ax}$$

$$y_1'' = a^2 e^{ax}$$

$$(2x+1)a^2 + 4xa - 4 = 0 \quad \forall x$$

$$2xa^2 + 4ax + a^2 - 4 = 0$$

$$2a^2 + 4a = 0 \quad 2a(a+2) = 0$$

$$a = \pm 2$$

$$y_1 = e^{-2x} \text{ е частно решение}$$

Torada e^{-2x}

$$\begin{aligned} \left| \begin{array}{c} e^{-2x} y \\ -2e^{-2x} y' \end{array} \right| &= ce^{-2 \int \frac{2x+1-1}{2x+1} dx} \\ &= ce^{-2x + \ln(2x+1)} \\ &= \frac{ce^{-2x}}{2x+1} \end{aligned}$$

$$e^{-2x} y' + 2e^{-2x} y = \frac{ce^{-2x}}{2x+1}$$

$$2y + y' = \frac{c}{2x+1}$$



$$\begin{aligned} x^2 + 2 &= 0 \\ x &= \pm i\sqrt{2} \end{aligned}$$

PBCP $\left\{ \begin{array}{c} \cos \sqrt{2}x \\ \sin \sqrt{2}x \end{array} \right\}$

$$y' = -2y + \frac{c}{2x+1}$$

$$y(x) = e^{-2x} \left[c_1 + \int \frac{e^{2x}}{2x+1} dx \right]$$

$$\int \frac{e^{2x}}{2x+1} dx = \int \frac{2}{2x+1} de^{2x} =$$

$$= e$$

$$y(x) = e^{-2x} \left[c_1 + \int e^{2x} (2x+1) dx \right] =$$

$$= e^{-2x} \left[c_1 + \frac{1}{2} e^{2x} + \int x de^{2x} \right] =$$

$$= e^{-2x} \left[c_1 + \frac{1}{2} e^{2x} + x e^{2x} - \frac{1}{2} e^{2x} \right]$$

Dom: $xy'' - (2x+1)y' + (x+1)y = 0$

$a(x)y + b(x)$
 $e^{2x} \int \frac{1}{x}$
 $e^{2x} \ln|x|$

12.12.2013г.

Лекция

Пример за неединственост на решение на (1)

$$\dot{x} = x^{\frac{2}{3}}, \quad x(0) = 0$$

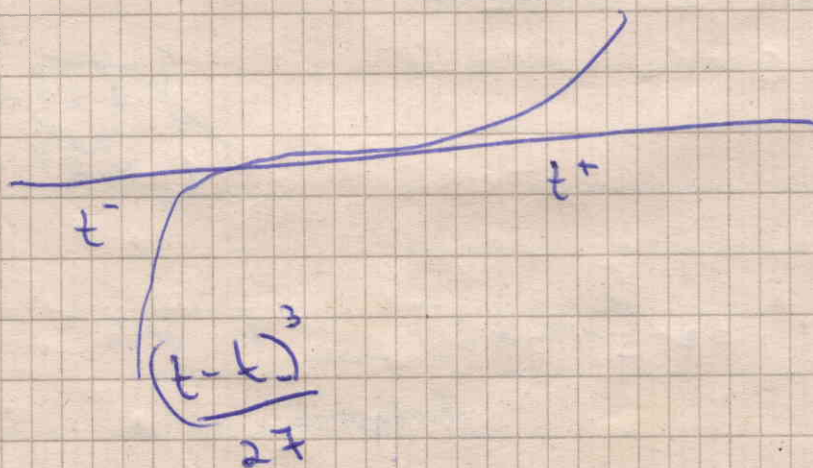
$$\frac{dx}{dt} = x^{\frac{2}{3}}$$

$$3x^{\frac{1}{3}} = t + C$$

$$x = \left[\frac{1}{3} (t + C) \right]^3$$

$$x = \left(\frac{t}{3} \right)^3$$

$$\frac{(t - t_*)^3}{27}$$



Th за единственост на решението
на ДУ (1)

по x
Ако функцията f е Липшицова
(напр. ако е C^1 -функция), то
решението $x = x(t)$ е единствено.

$$\text{Липшицова по } x \quad |f(t, x^*) - f(t, x^{**})| < L |x^* - x^{**}|$$

$\forall t, x^*, x^{**} \quad \exists L = \text{const.}$

Деф. на Липшицова (по x) f -я,
с константа на Липшиц L .

Например, ако $f \in C^1$, то можем
да изберем $L = \sup \left| \frac{\partial f}{\partial x} \right|$ ~~вс~~

коштактно 0, напр. $L < +\infty$

$|x|$ е Липшицова, не C^1
свс $L = 1$



До-во: Нека $x(t)$ и $y(t)$ са 2 реш. на (1).
Тогава

$$e^{Lt} \frac{d}{dt} (|x(t) - y(t)| e^{-Lt}) =$$

~~e^{Lt}~~

$$e^{Lt} \frac{d}{dt} \left(|x(t) - y(t)| e^{-Lt} \right) =$$

$$= e^{Lt} \left[\pm |\dot{x} - \dot{y}| e^{-Lt} - |x - y| L e^{-Lt} \right]$$

$$= \pm |\dot{x} - \dot{y}| - |x - y| L =$$

$$= \pm |f(t, x) - f(t, y)| -$$

$$- L |x - y| \leq$$

$$L |x - y| - L |x - y| = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \underbrace{(|x(t) - y(t)| e^{-Lt})}_{h(t)} \leq 0$$

$h(t)$ е
 1) неотрицательна
 2) ^{мон.} ~~на~~ убывающа
 3) $h(0) = 0$

$$\Rightarrow h(t) \equiv 0$$

$$|x(t) - y(t)| \equiv 0$$

$$\Rightarrow x(t) \equiv y(t)$$

13.12.2013г.

Упражнение

Фазови портрети на линейни
хомогенни системи в $\mathbb{R}^2$

$$\begin{cases} \dot{x} = a_{11}x + a_{12}y \\ \dot{y} = a_{21}x + a_{22}y \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Класификацията на особените точки и вида на фазови портрет зависи изцяло от собствените стойности на матрицата A и нейната Жорданова нормална ф-ма.

I $\det A \neq 0$ (A няма нулеви собствени числа и има само една особена точка $(x, y) = (0, 0)$)

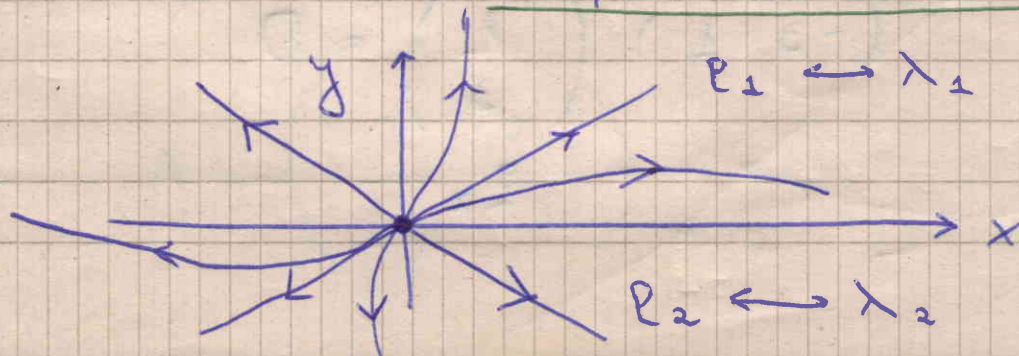
λ_1, λ_2 - собствени числа на A

1. $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$

$\lambda_1 \neq \lambda_2$

навън се движи

1.1 $0 < \lambda_1 < \lambda_2$ - неустойчив възел



Пример: $\begin{cases} \dot{x} = 2x + y \\ \dot{y} = 3x + 4y \end{cases}$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Собственные числа:

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 3 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(4-\lambda) - 3 = \\ = 8 - 2\lambda - 4\lambda + \lambda^2 - 3 = \\ = \lambda^2 - 6\lambda + 5$$

$$\lambda_1 = 1 > 0$$

$$\lambda_2 = 5 > 0$$

$\Rightarrow$ особената точка е неустойчив възел

$$p_1 : \lambda_1 : (A - E)p_1 = 0$$

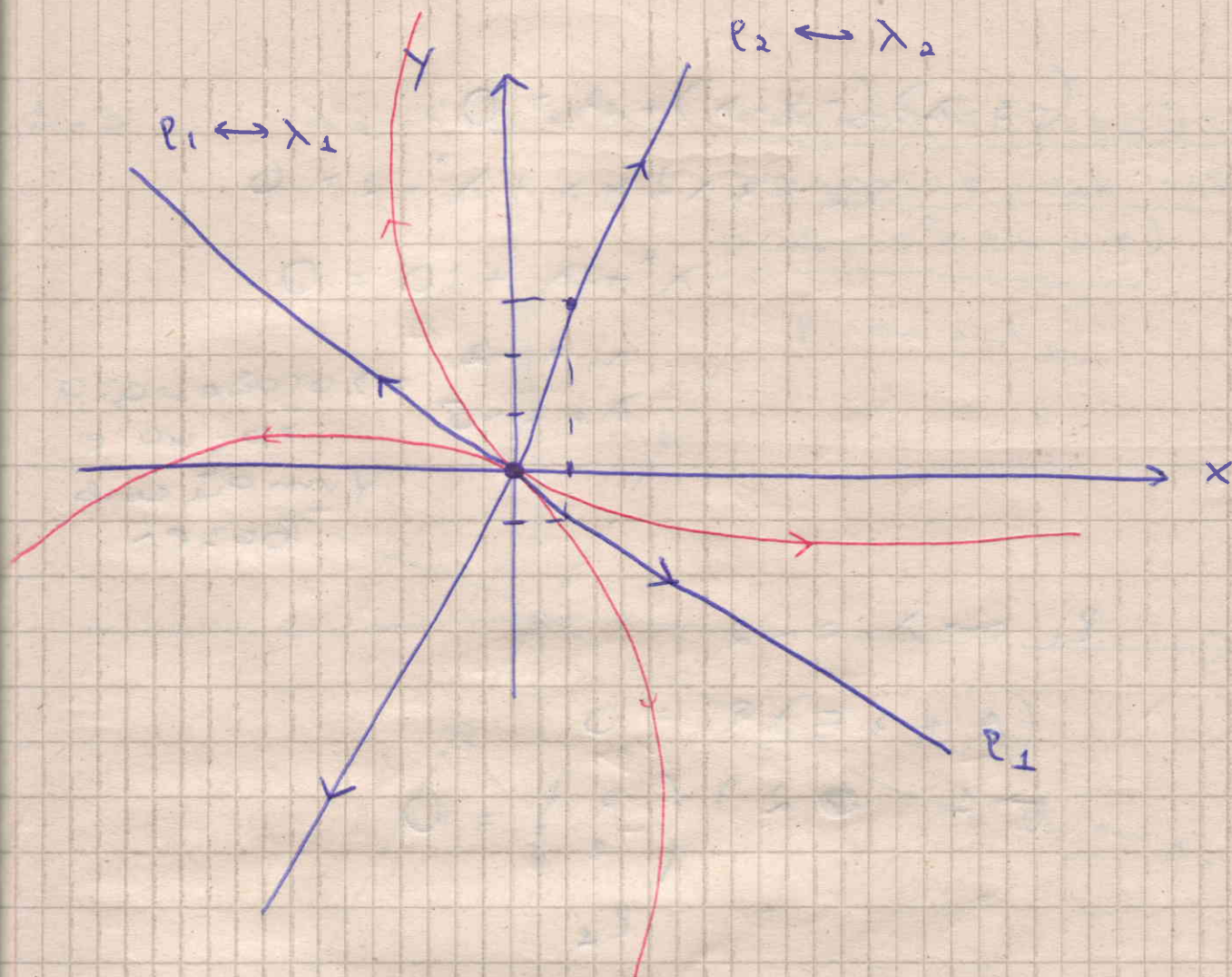
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$$

p_1

$$p_2 : \lambda_2 : (A - 5E)p_2 = 0$$

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = 0$$

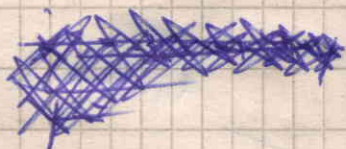
p_2



към по-малкото число-парабола
 По $\forall$ точка само една фазова крива.

1.2 ~~1.2~~ $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$ устойчив възел
 (асимптотическа
устойчивост)

Пример:



$$\begin{cases} \dot{x} = -3x + 2y \\ \dot{y} = x - 4y \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$$

$$(-3-\lambda)(-4-\lambda)-2=0$$

$$12+3\lambda+4\lambda+\lambda^2-2=0$$

$$\lambda^2+7\lambda+10=0$$

$$\lambda_1 = -2$$

$$\lambda_2 = -5$$

$\Rightarrow$ особената
точка е
устойчив
възвеш

$$p_1 \leftrightarrow \lambda_1 = -2:$$

$$(A + 2E)p_1 = 0$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$$

p_1

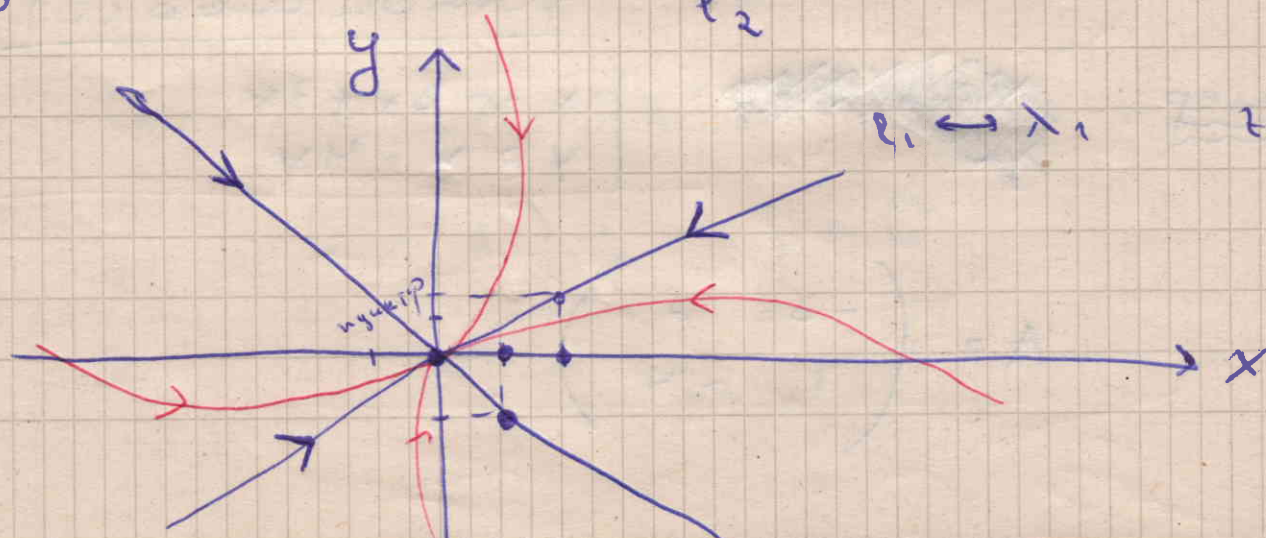
$$p_2 \leftrightarrow \lambda_2 = -5$$

$$(A + 5E)p_2 = 0$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$$

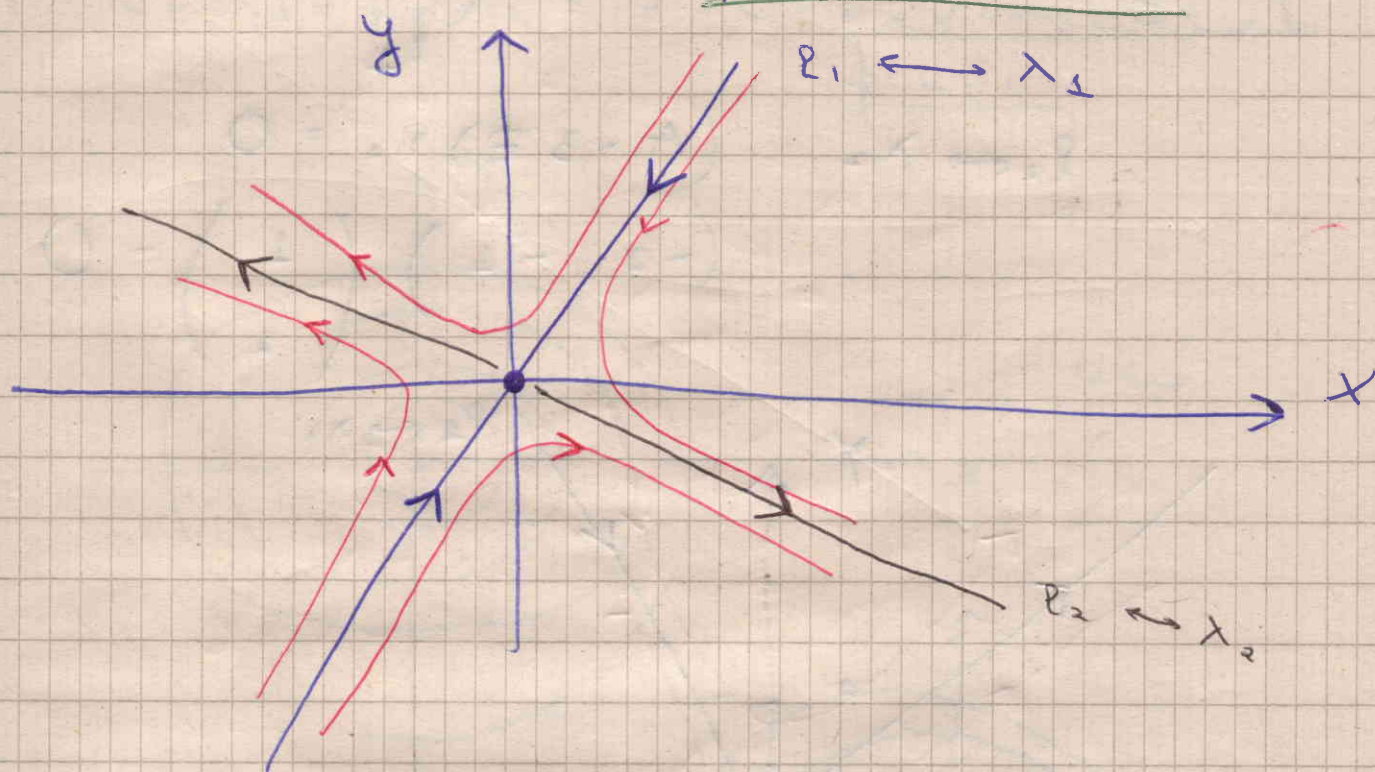
p_2

но-калко
но-когута



1.3

$\lambda_1 < 0 < \lambda_2$ седло (неустойчиво
положение на
равновесие)



Пример:

$$\begin{cases} \dot{x} = x - y \\ \dot{y} = -4x + y \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 = 2 = \text{tr} A$$

$$\lambda_1 \cdot \lambda_2 = -3 = \det A$$

$$\lambda_1 = -1$$

$$\lambda_2 = 3$$

(//

особената точка е седло

$c = -1$

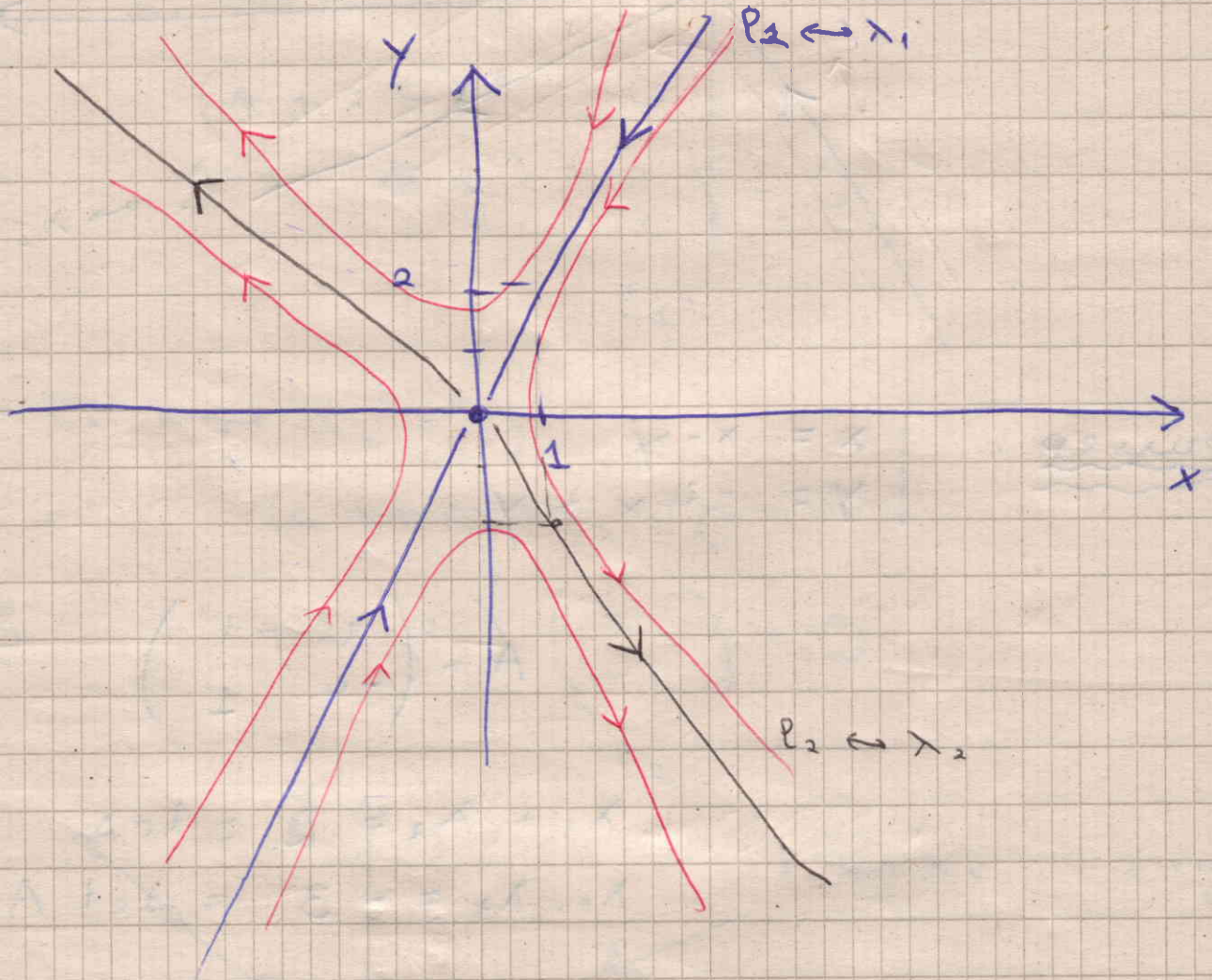
$$p_1 \leftrightarrow \lambda_1 : (A + E) p_1 = 0$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 0$$

p_1

$$p_2 \leftrightarrow \lambda_2 : (A - 3E) p_2 = 0$$

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = 0$$

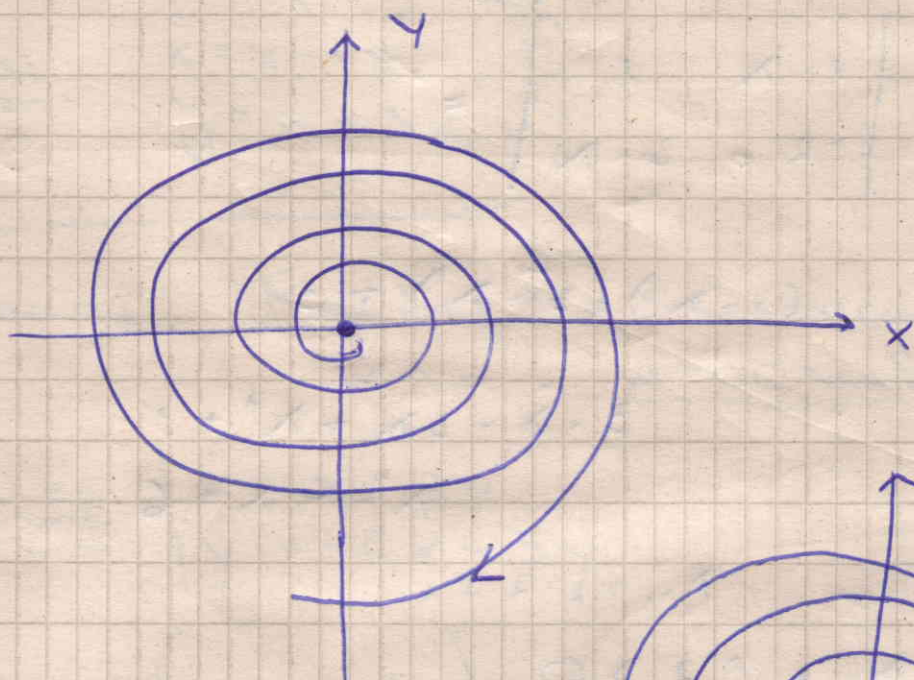


$$\lambda_1 = 2 + i\beta$$

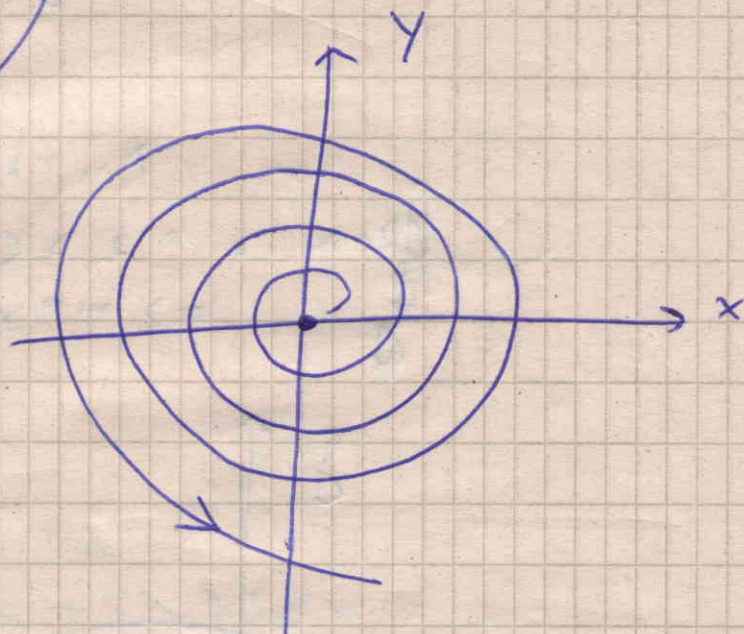
$$\lambda_2 = \overline{\lambda_1} = 2 - i\beta$$

$$2, \beta \in \mathbb{R}, \beta \neq 0$$

2.1. $\operatorname{Re} \lambda_1 = \operatorname{Re} \lambda_2 = 2 > 0$ - неустойчив
фокус



или



в-р скорост

$$(\dot{x}, \dot{y})|_{x=1, y=0} = (a_{11}, a_{21})$$

$$y=0$$

Кол от спиралите е се определя
от в-ра скорост

Пример:

$$\begin{cases} \dot{x} = x + y \\ \dot{y} = -2x + 3y \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\textcircled{*} \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -2 & 3-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$(1-\lambda)(3-\lambda) + 3$$

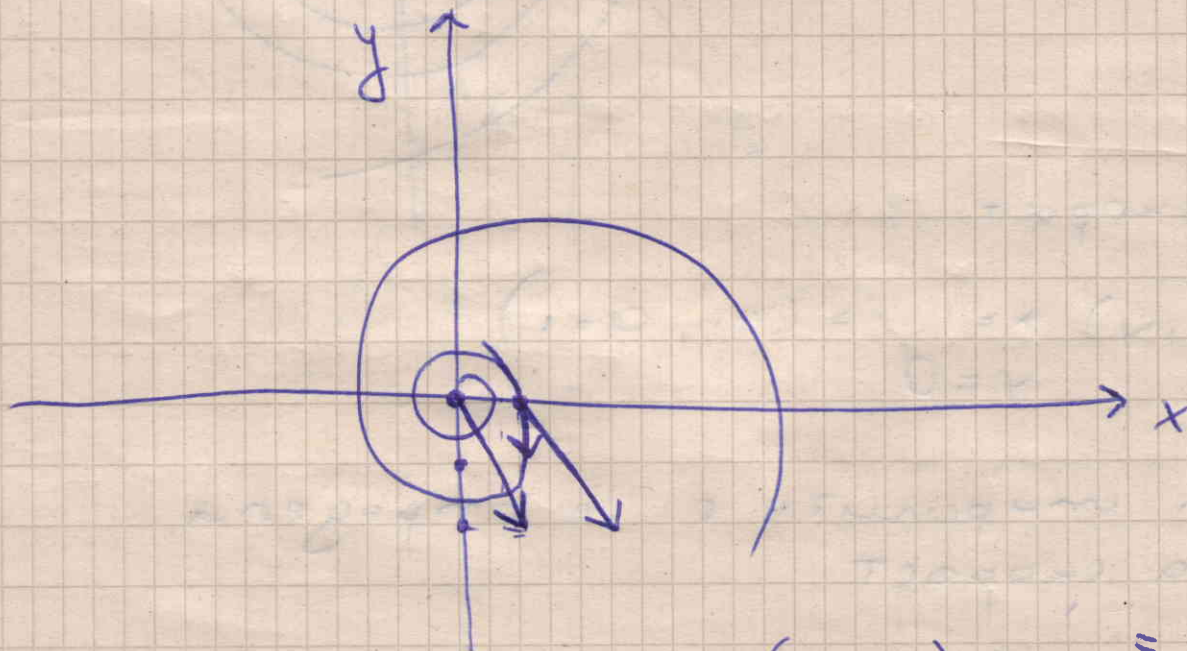
$$3 - \lambda - 3\lambda + \lambda^2 + 3$$

$$\lambda^2 - 4\lambda + 6$$

$$\lambda_{1,2} = 2 \pm i$$

$$\text{Re } \lambda_{1,2} = 2 > 0$$

$\Rightarrow$ неустойчив фокус



$$(\dot{x}, \dot{y})_{x=1, y=0} =$$

$$= (1, -2)$$

В-р скорост-допир към фазовата крива
неустойчиво-отлива наляво

Дом:

$$\begin{cases} \dot{x} = x - 2y \\ \dot{y} = x + 3y \end{cases}$$

2. Реша $\operatorname{Re} \lambda_{1,2} = -2 < 0$ особена точка
устойчив фокус

Пример:

$$\begin{cases} \dot{x} = x + 3y \\ \dot{y} = -6x - 5y \end{cases}$$

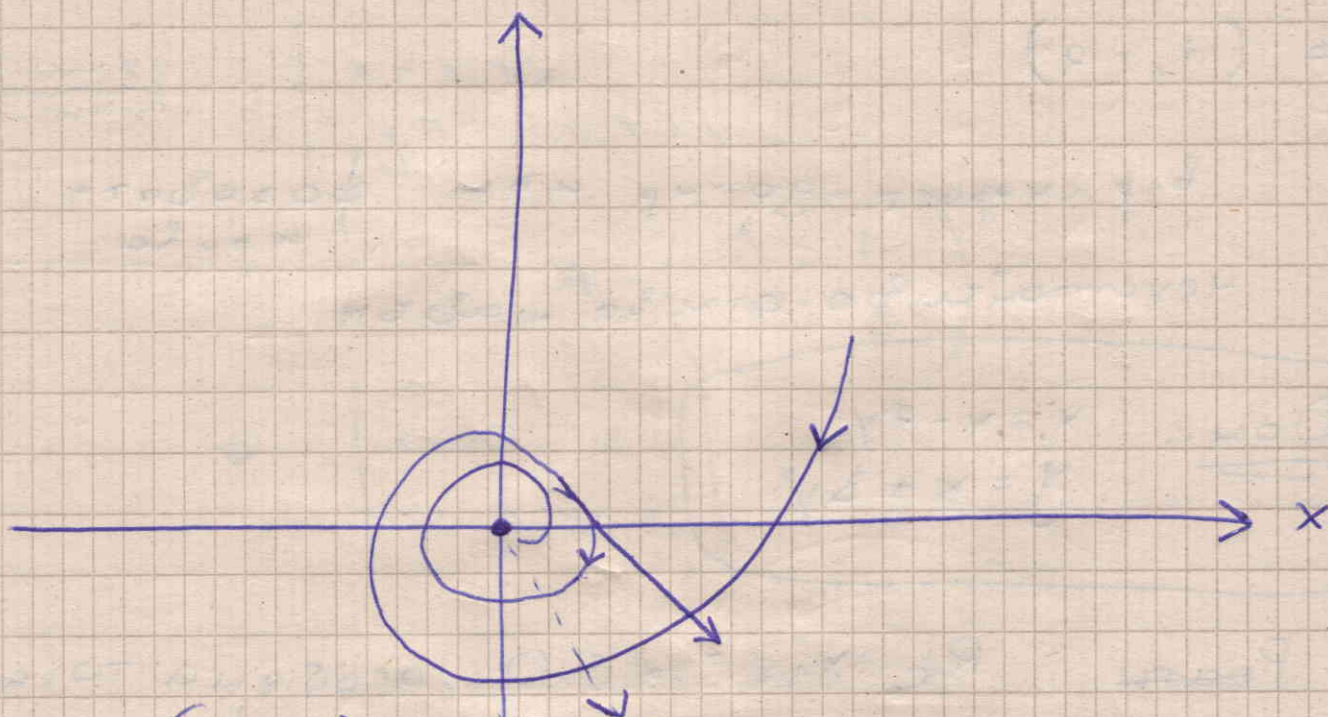
$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -6 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} (1-\lambda)(-5-\lambda) + 18 &= \\ &= \lambda^2 - 5 - \lambda + 5\lambda + 18 = \\ &= \lambda^2 + 4\lambda + 13 \end{aligned}$$

$$b = 16 - 52 = -36$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-4 \pm i6}{2} \begin{matrix} \nearrow -2 + 3i \\ \searrow -2 - 3i \end{matrix}$$

$\operatorname{Re} \lambda_{1,2} = -2 < 0$
 $\Rightarrow$ особ. точка е устойчив фокус



$$\left(\dot{x}, \dot{y} \right)_{\substack{x=1 \\ y=0}} = (1, -6)$$

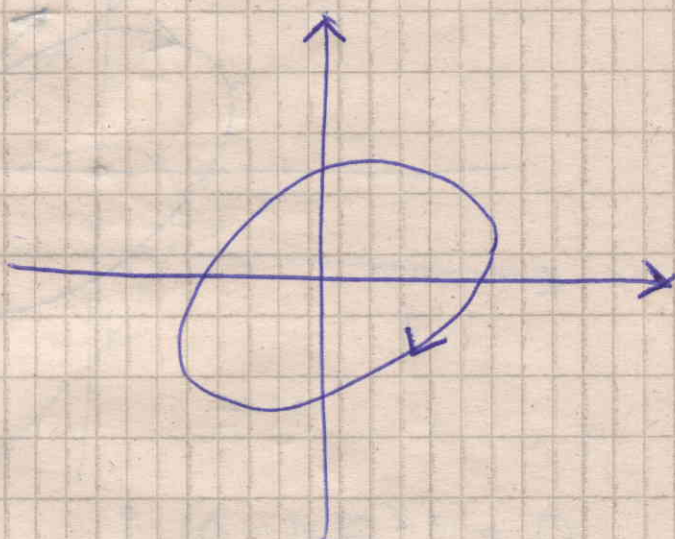
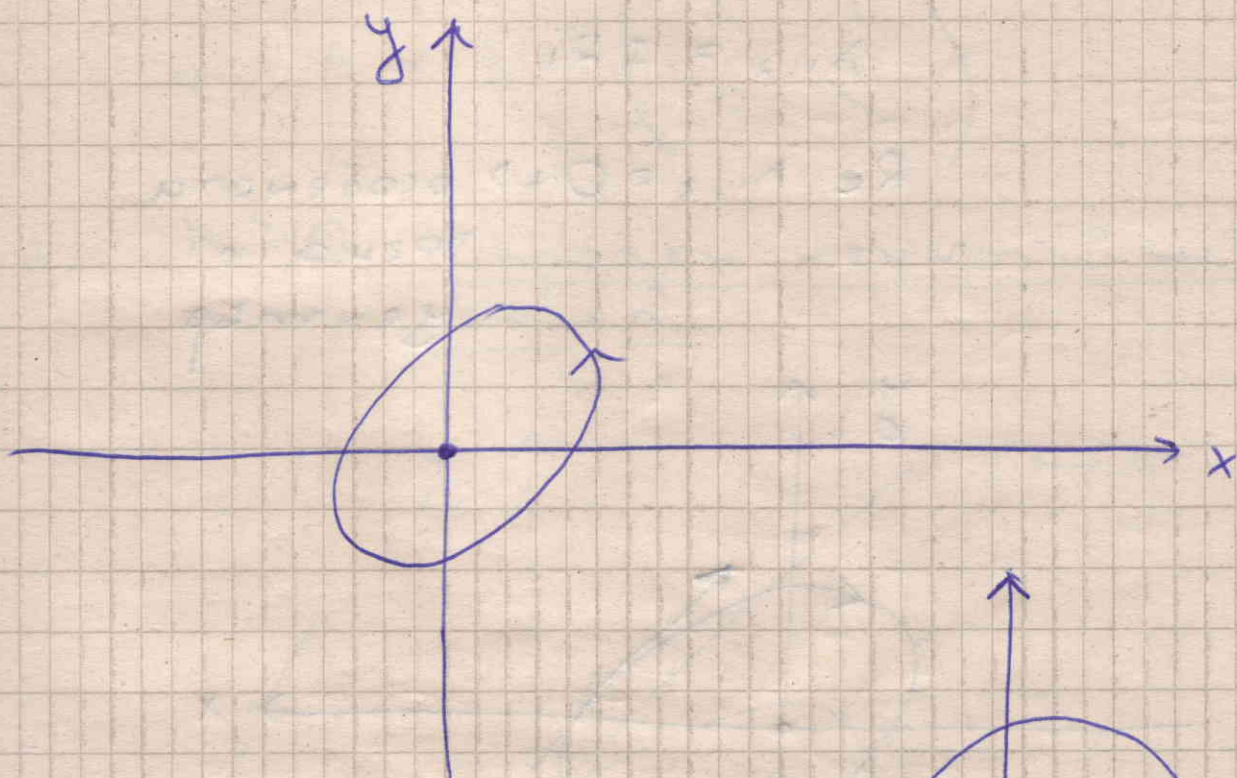
Дом: $\begin{cases} \dot{x} = x - 6y \\ \dot{y} = 3x - 5y \end{cases}$

2.3 $\operatorname{Re} \lambda_{1,2} = 2 = 0$

особена точка - се нарича център

(това е само утвърдително положение на равновесие, т.е. няма ~~асимптотична~~ ^{тесна} утвърдителност)

Движението се отпр. с в-ра-скорост



Пример: $\begin{cases} \dot{x} = -x - 5y \\ \dot{y} = x + y \end{cases}$

$$\begin{pmatrix} -1 & -5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

~~А =~~

~~det~~

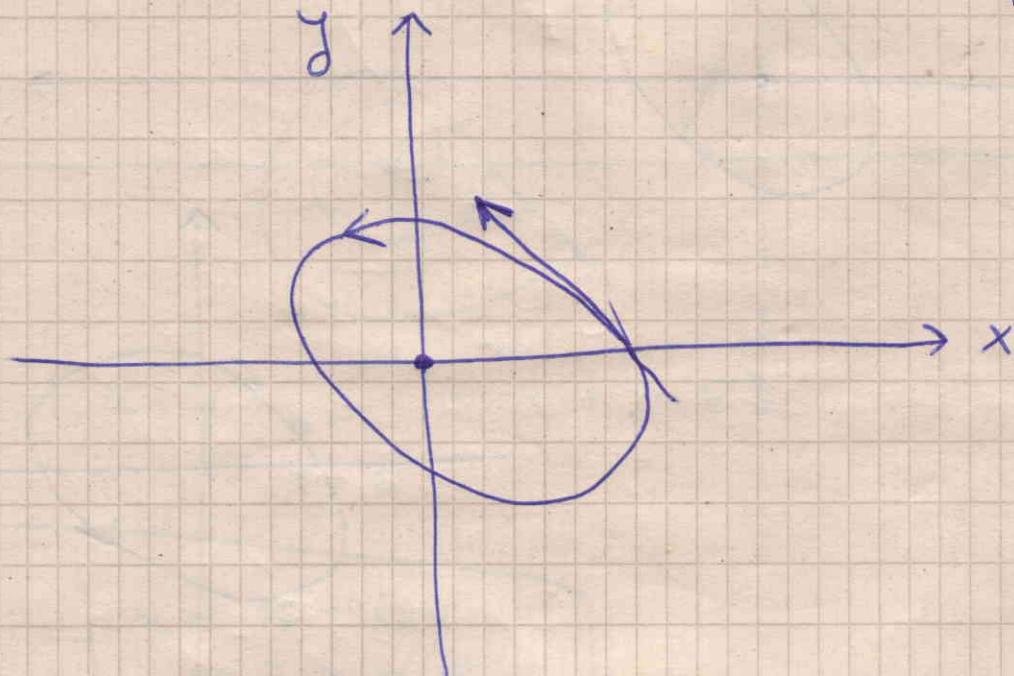
$$\bullet (-1-\lambda)(1-\lambda) + 5 =$$

$$= -1 + \lambda - \lambda + \lambda^2 + 5 =$$

$$= \lambda^2 + 4$$

$$\lambda_{1,2} = \pm 2i$$

$\operatorname{Re} \lambda_{1,2} = 0 \Rightarrow$ особената
точка е
център



$$(\dot{x}, \dot{y})_{x=1, y=0} = (-1, 1)$$

Dom: $\dot{x} = -x + y$
 $\dot{y} = -5x + y$

III

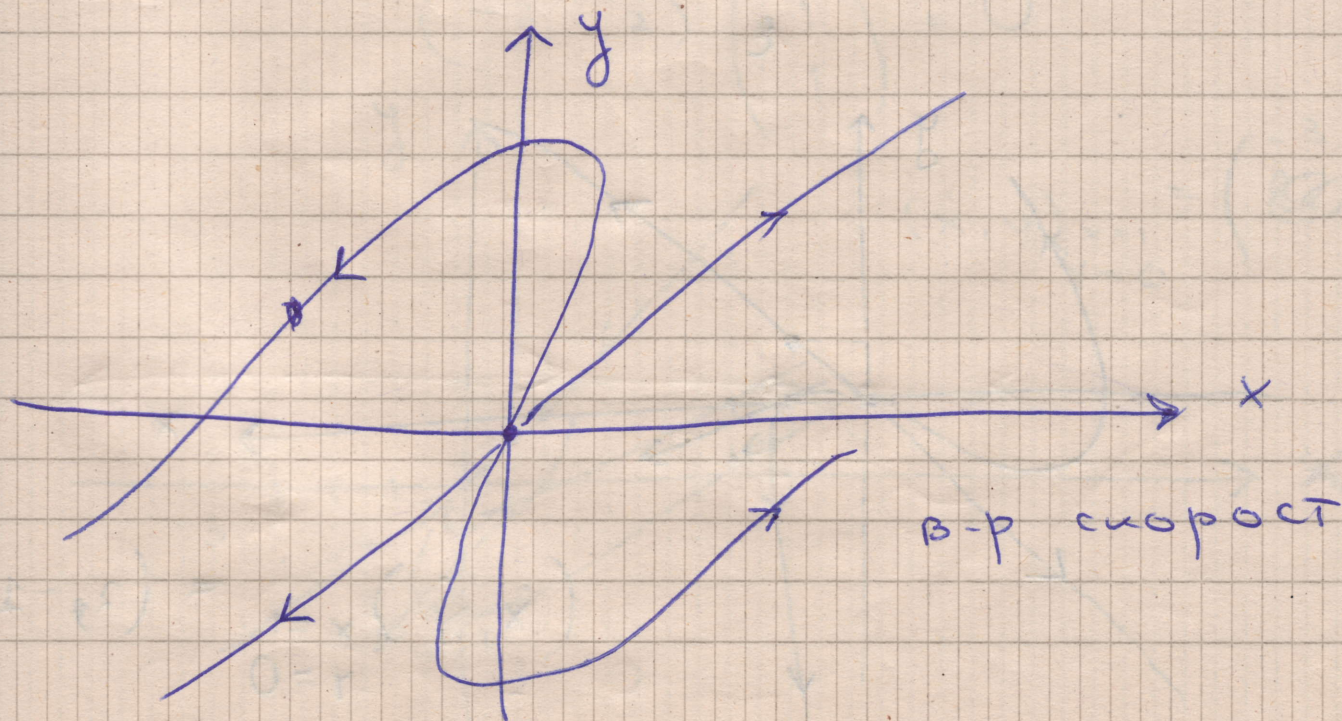
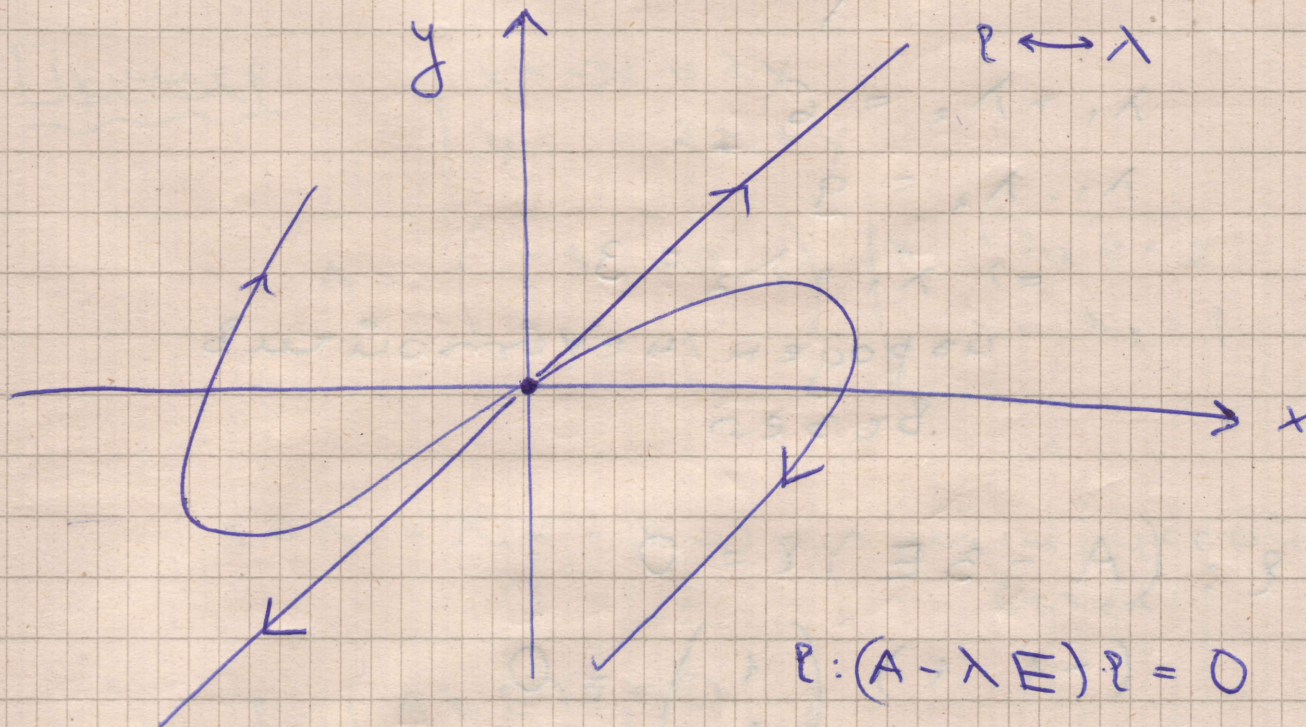
$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$$A \in M_2(\mathbb{R})$$

$$u \quad A \sim J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

3.1. $\lambda > 0$ изрожден неустойчив
взвеш



Пример:
$$\begin{cases} \dot{x} = 2x + y \\ \dot{y} = -x + 4y \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 = 6$$

$$\lambda_1 \cdot \lambda_2 = 9$$

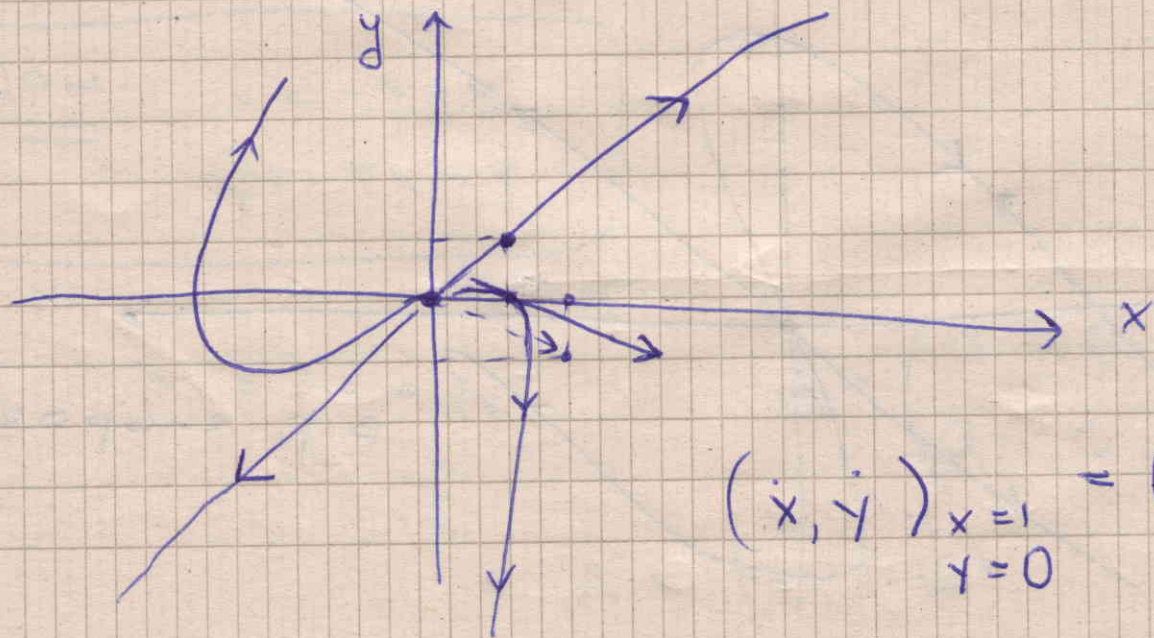
$$\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 3$$

изрожден неустойчив
взвешен

$$\xi: (A - 3E)\xi = 0$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

ξ



$$(\dot{x}, \dot{y})_{\substack{x=1 \\ y=0}} = (2, -1)$$

$$\text{Дом.: } \begin{cases} \dot{x} = 2x - y \\ \dot{y} = x + 4y \end{cases}$$

3.2. $\lambda < 0$ Особена точка се нарича изроден устойчив възел.

Пример : $\begin{cases} \dot{x} = -3x + 2y \\ \dot{y} = -2x + y \end{cases}$

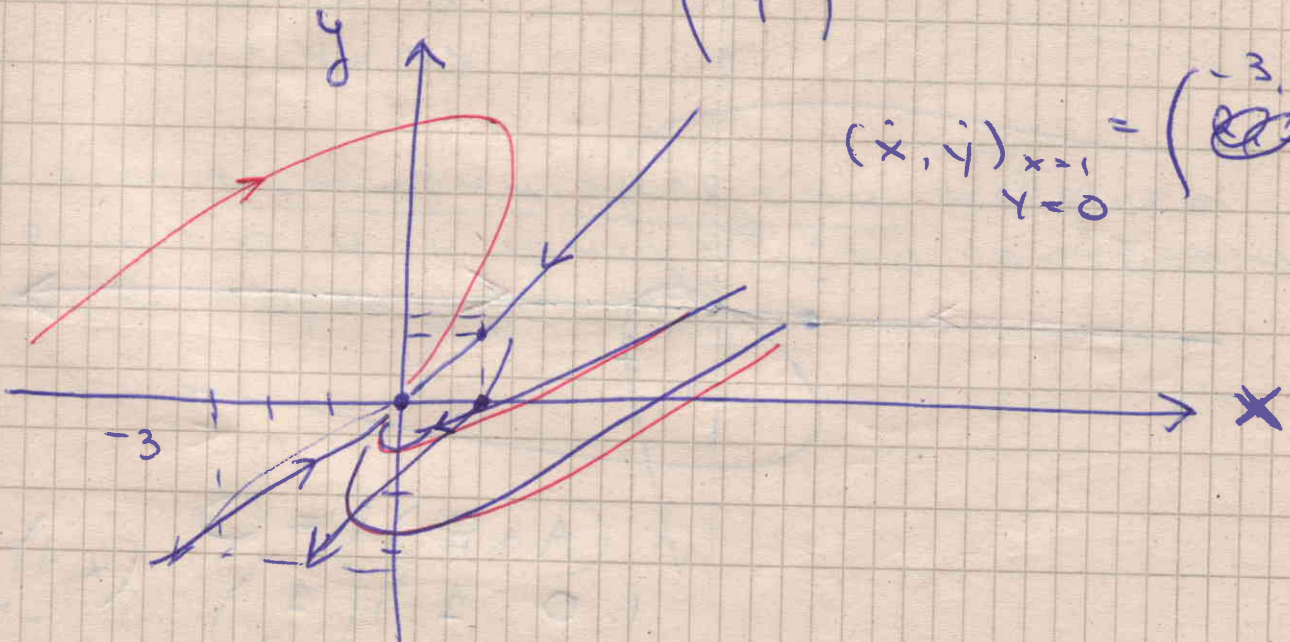
$$A = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = -2 \\ \lambda_1 \cdot \lambda_2 = 1 \end{cases}$$

$\lambda = \lambda_1 = \lambda_2 = -1 \Rightarrow$ изроден устойчив възел

$$v: (A + E)v = 0$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = 0$$

$$(\dot{x}, \dot{y})_{x=1, y=0} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix}$$



$$\text{Dom.: } \begin{cases} \dot{x} = -3x + 2y \\ \dot{y} = 2x + y \end{cases}$$

$$\text{заг. } \begin{cases} \dot{x} = -x + y \\ \dot{y} = -y \end{cases}$$

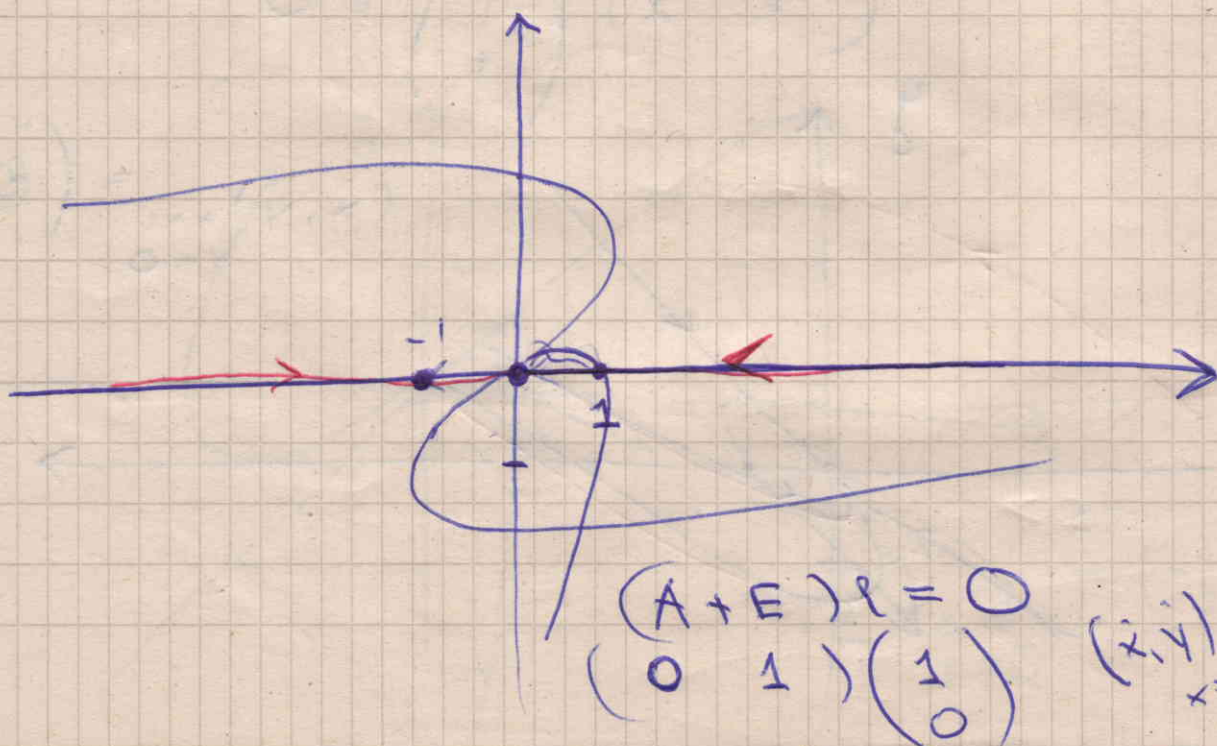
$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$(-1-\lambda)(-1-\lambda) = 0$$

$$\lambda = -1^*$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -1 < 0$$

узловой устойчивый



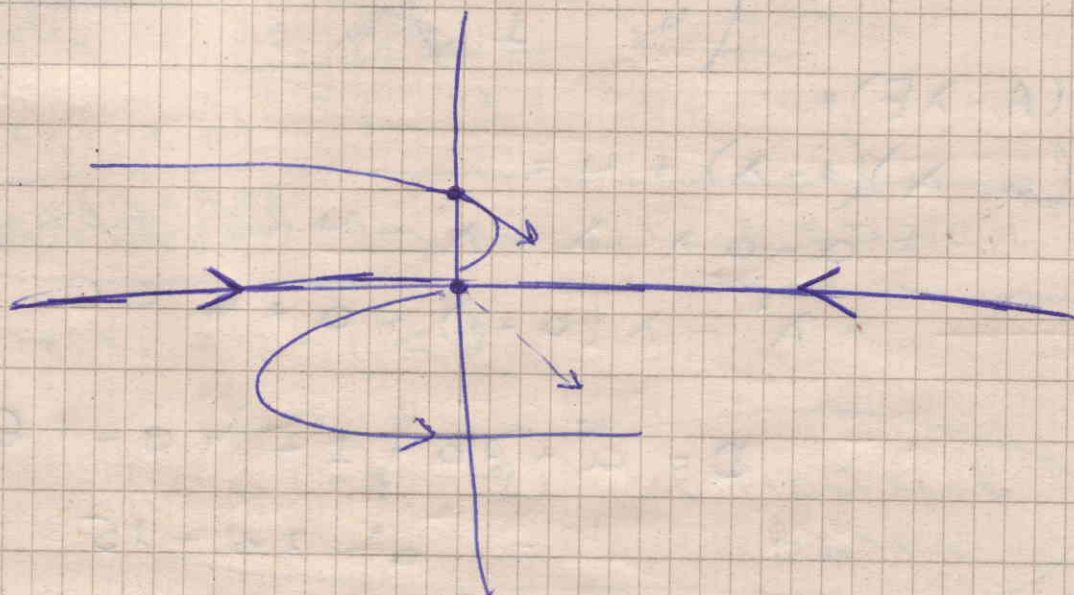
$$(A+E)l = 0$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(x, y) = (-1, 0)$$

$$x = -1, y = 0$$

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix}_{\substack{x=0 \\ y=1}} = (1, -1)$$



Задача: В зависимост от стойностите на реалния параметър a , определете типа на особените точки на линейната система

$$a) \begin{cases} \dot{x} = ax - y \\ \dot{y} = 4x + y \end{cases}$$

За V от типичните случаи изберете по едно a и нарисуйте съответен фазов портрет.

$$a \in \mathbb{R}$$

$$A = \begin{pmatrix} a & -1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det(A - \lambda E) =$$

$$(a - \lambda)(1 - \lambda) + 4 =$$

$$= a - a\lambda - \lambda + \lambda^2 + 4 =$$

$$= \lambda^2 - \lambda(a+1) + a+4 = 0$$

$$D = a^2 + 2a + 1 - 4a - 16 =$$

$$= a^2 - 2a - 15$$

$$D = 0 \Leftrightarrow a_1 = -3$$

$$a_2 = 7$$



$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = a+1 \\ \lambda_1 \cdot \lambda_2 = a+4 \end{cases}$$

$$\text{I. cn. } D > 0 \Leftrightarrow \{a \in (-\infty, -3) \cup (7, +\infty)\}$$

$$1. \lambda_1 \cdot \lambda_2 = a+4 < 0$$

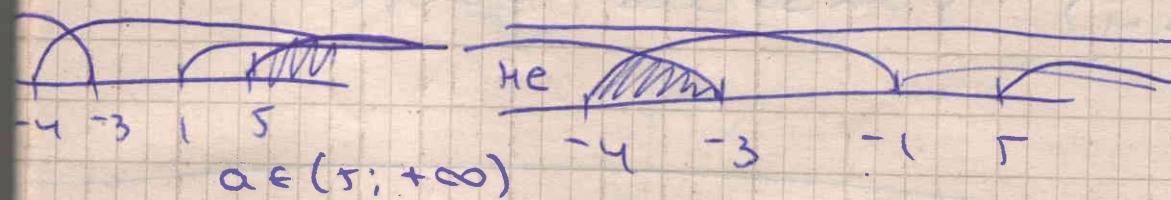
$$\Leftrightarrow a < -4$$

$$\text{signo}$$

$$a \in (-\infty, -4)$$

$$2. \lambda_1, \lambda_2 > 0 \Leftrightarrow a > -4$$

$$2.1. \lambda_1 + \lambda_2 = a + 1 > 0 \Leftrightarrow a > -1$$



~~XXXXXX~~ - неустойчивый узел

$$2.2. \lambda_1 + \lambda_2 = a + 1 < 0$$

$$a < -1$$

$a \in (-4, -1)$ устойчивый узел

$$II \quad D = 0 \Leftrightarrow a = -3$$

$\lambda_1 = \lambda_2 = -1$ изрожденный устойчивый узел

$$2. a = 5$$

$\lambda_1 = \lambda_2 = 3$ изрожденный неустойчивый узел

$$III \quad D < 0$$

$$a \in (-3, 5)$$

$$1. \lambda_1 + \lambda_2 = a + 1 = 0 \Leftrightarrow a = -1$$

$\Rightarrow a = -1$ центр

$$2. \lambda_1 + \lambda_2 > 0 \Leftrightarrow a > -1$$

$$\Rightarrow \operatorname{Re} \lambda_1 = \operatorname{Re} \lambda_2 > 0$$

$a \in (-1, 5)$ неустойчивый фокус

$$3\lambda_1 + \lambda_2 < 0$$

$a \in (-3, -1)$ устойчивый фокус

Следно: $a = -\frac{17}{3}$

$$\lambda^2 - (a+1)\lambda + a+4 = 0$$

$$\lambda^2 - \frac{14}{3}\lambda - \frac{5}{3} = 0$$

$$3\lambda^2 - 14\lambda - 5 = 0$$

$$b = 196 + 60 = 256 = 16^2$$

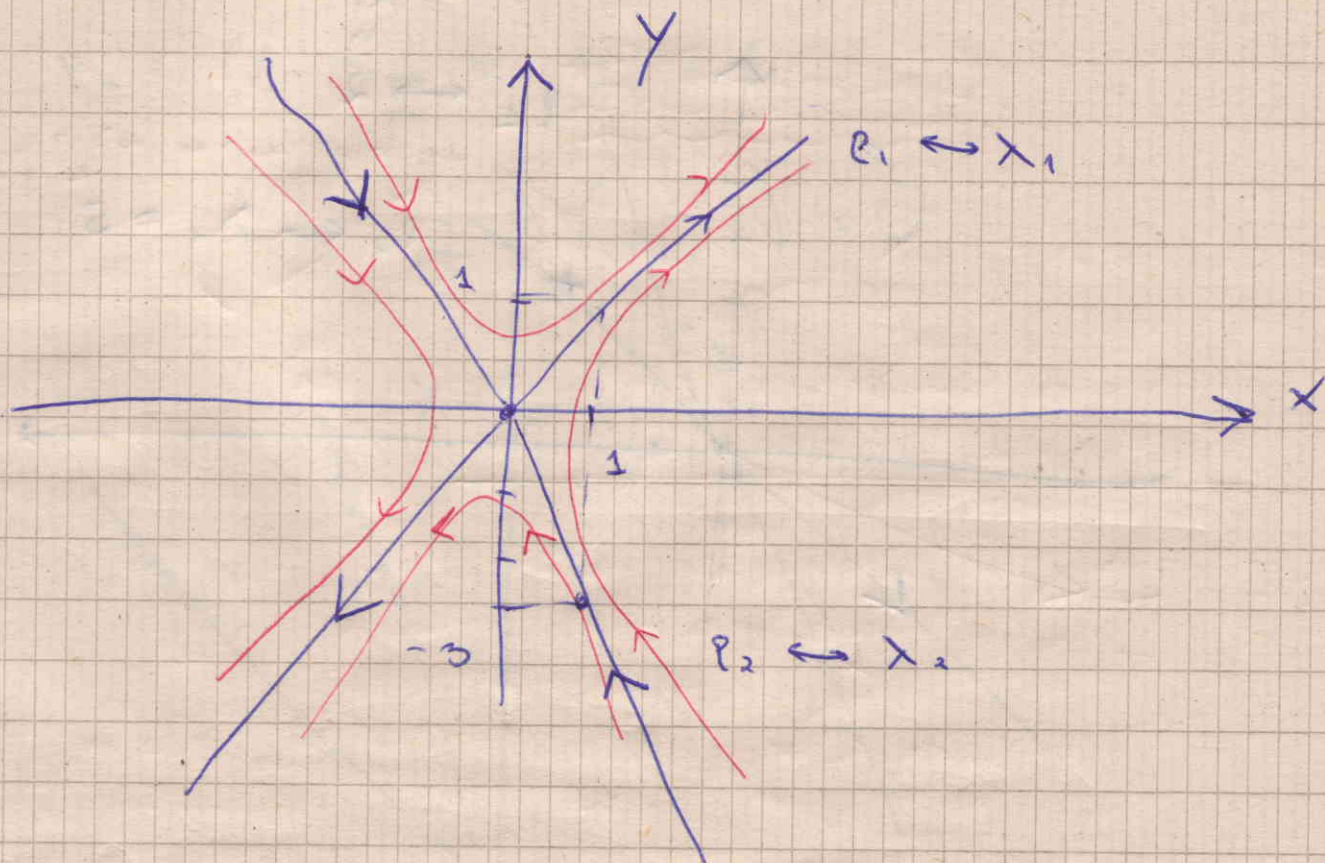
$$\lambda_{1,2} = \frac{14 \pm 16}{6} \rightarrow 5 \rightarrow -\frac{1}{3}$$

$$(A - 5E) \varphi_1 = 0$$

$$\begin{pmatrix} 4 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \underline{\Pi} \text{ peg}$$

$$\varphi_2 \leftarrow \lambda_2 \quad \left(A + \frac{1}{3}E\right) \varphi_2 = 0$$

$$\begin{pmatrix} 4 & \frac{4}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = 0$$



Неустойчивый узел

$$a = 6$$

$$\lambda_1 = 2$$

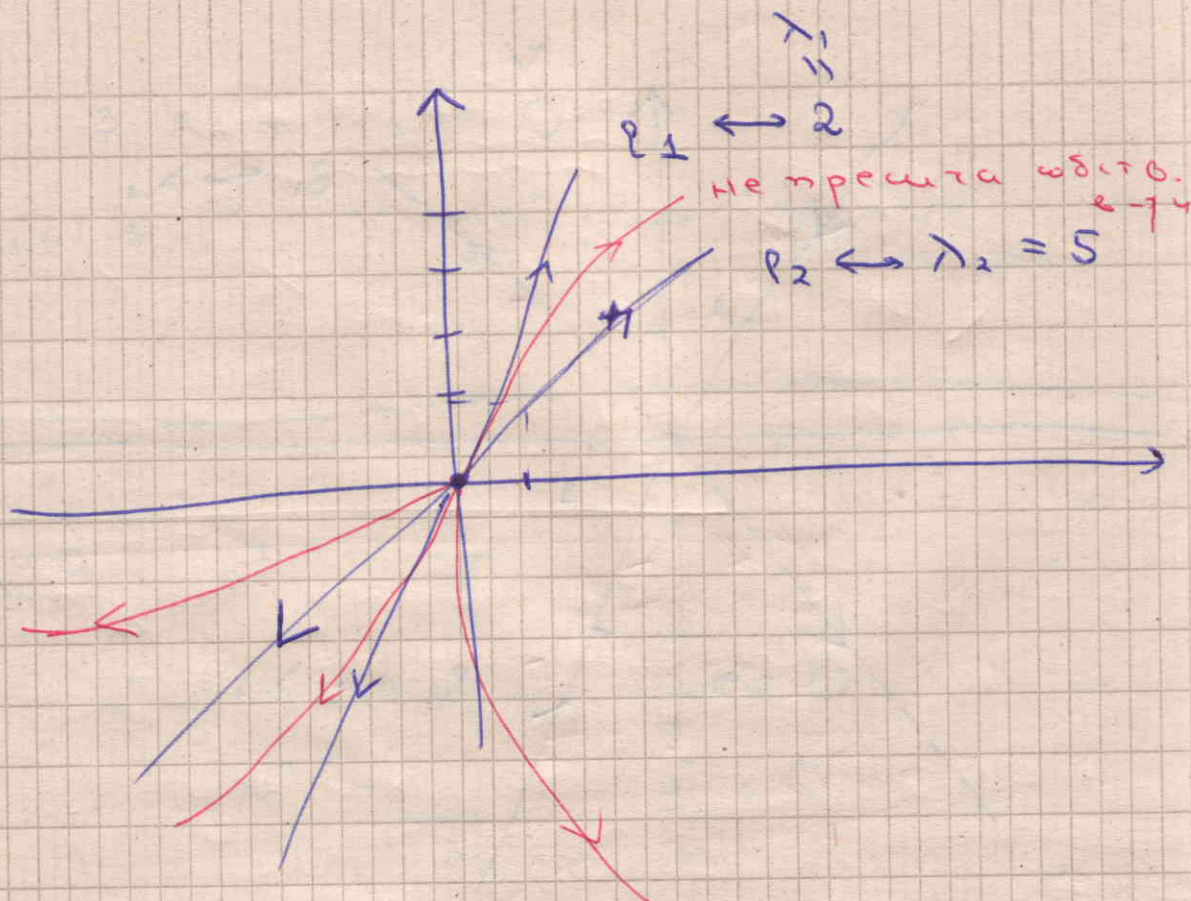
$$\lambda_2 = 5$$

$$(A - 2E) p_1 = 0$$

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} = 0$$

$$(A - 5E) p_2 = 0$$

$$\begin{pmatrix} 4 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$



$a \in (-4, -3)$ γитоване во зс л

$$a = -\frac{10}{3}$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 = -\frac{7}{3}$$

$$\lambda_1 \cdot \lambda_2 = \frac{2}{3}$$

$$\lambda_1 = -2 \quad \lambda_2 = -\frac{1}{3}$$

$$p_1: (A + 2E)p_1 = 0$$

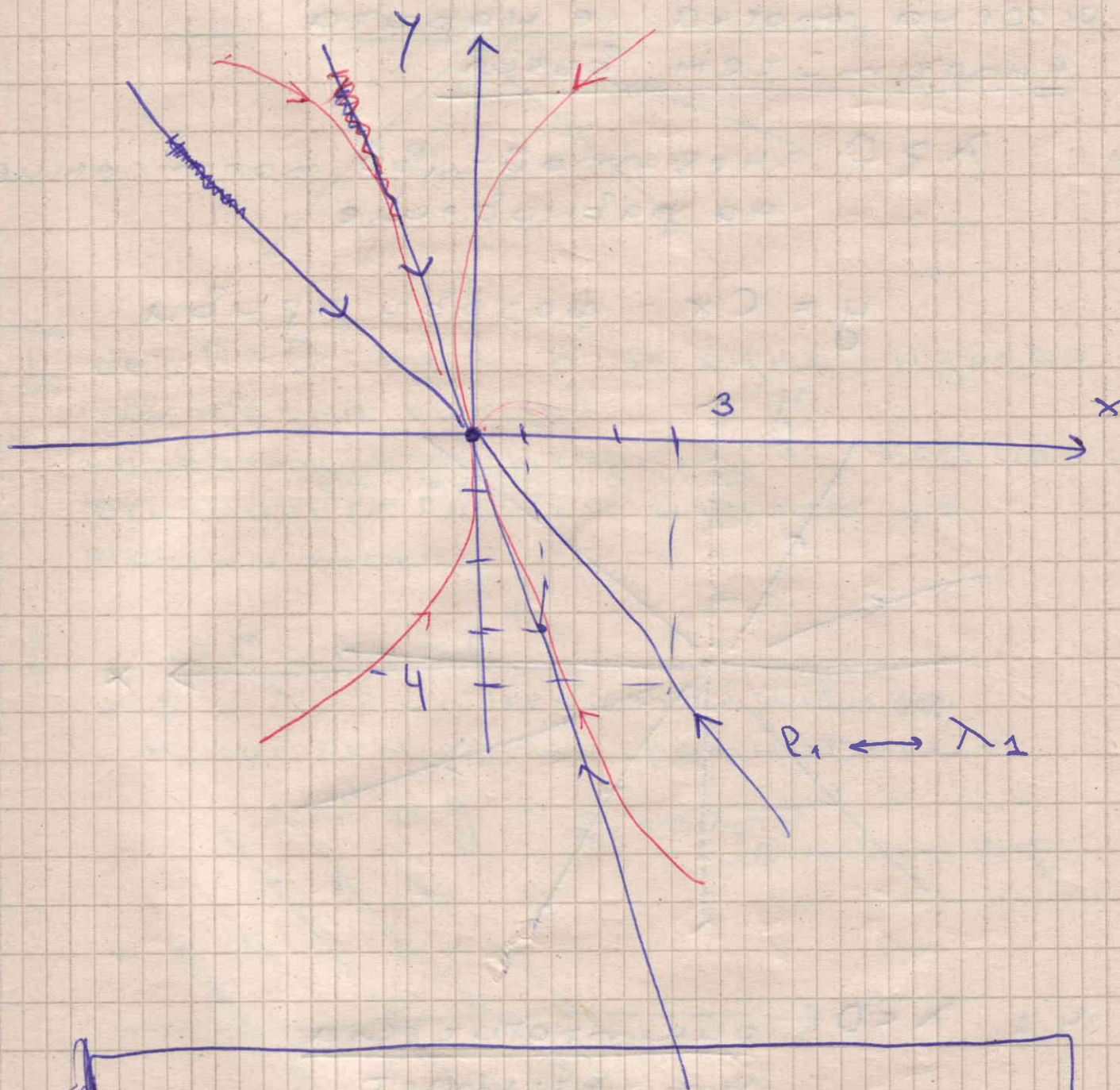
$$\begin{pmatrix} 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} = 0$$

p_1

$$p_2: (A + \frac{1}{3} E) p_2 = 0$$

$$\begin{pmatrix} 4 & \frac{4}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} = 0$$

p_2



Дом. от мистето game eg)

(11)

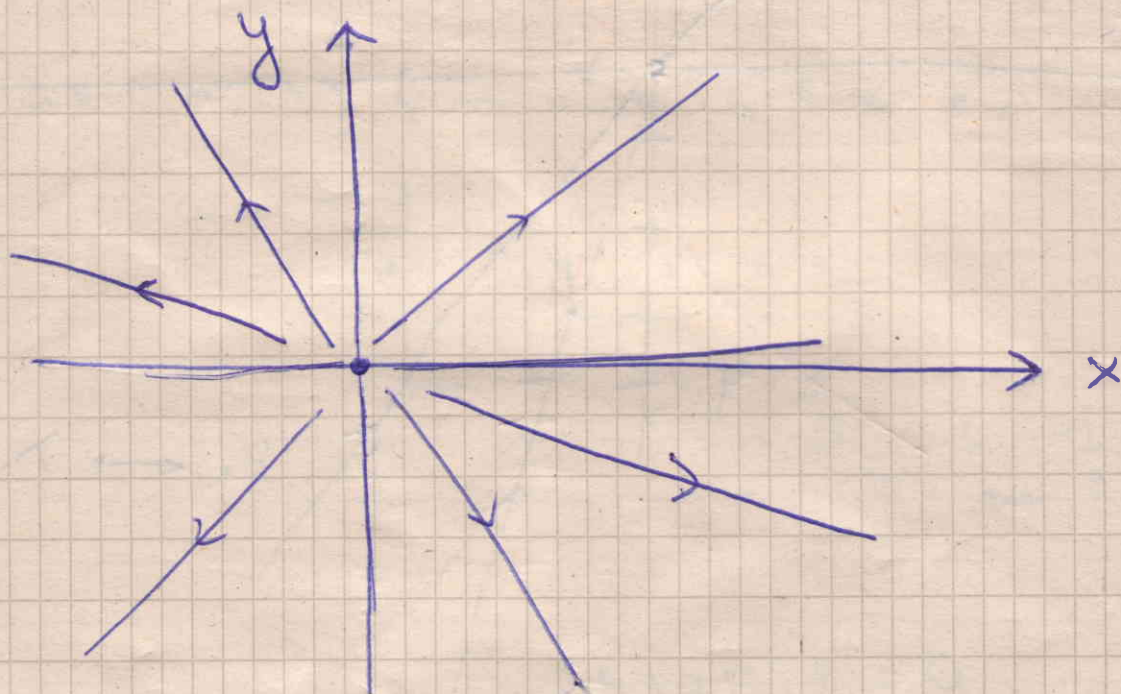
17.12.2013г.

4. $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, $A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$

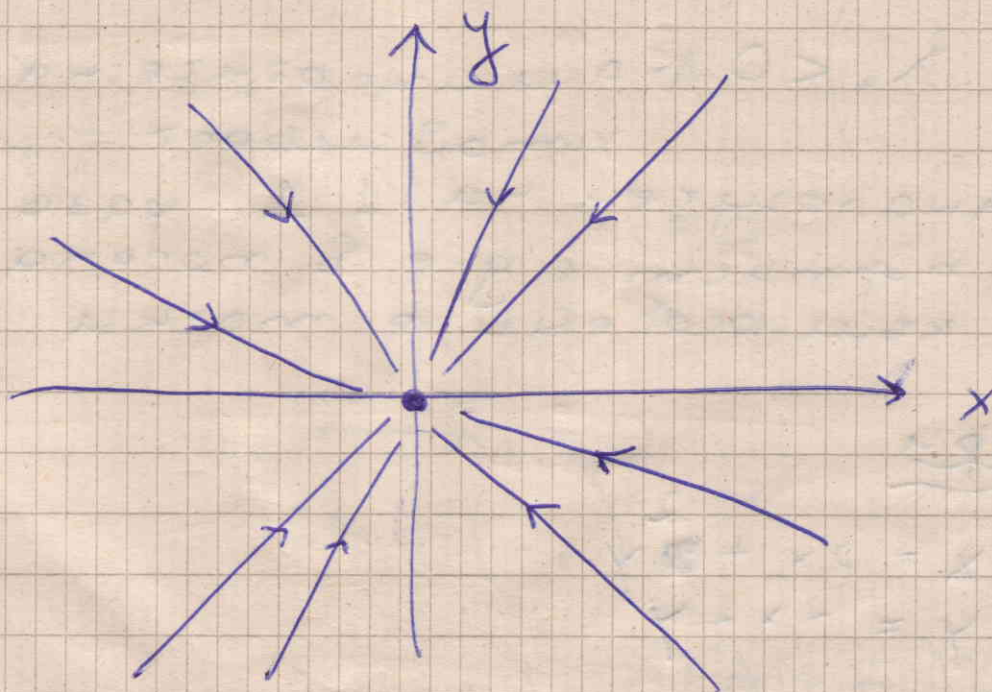
особена точка се нарича
дирктичен възел

4.1. $\lambda > 0$ - неустойчиво положение
на равновесие

$y = Cx$ - фазови кривки



4.2. $\lambda < 0$ асимптотическа
устойчивост

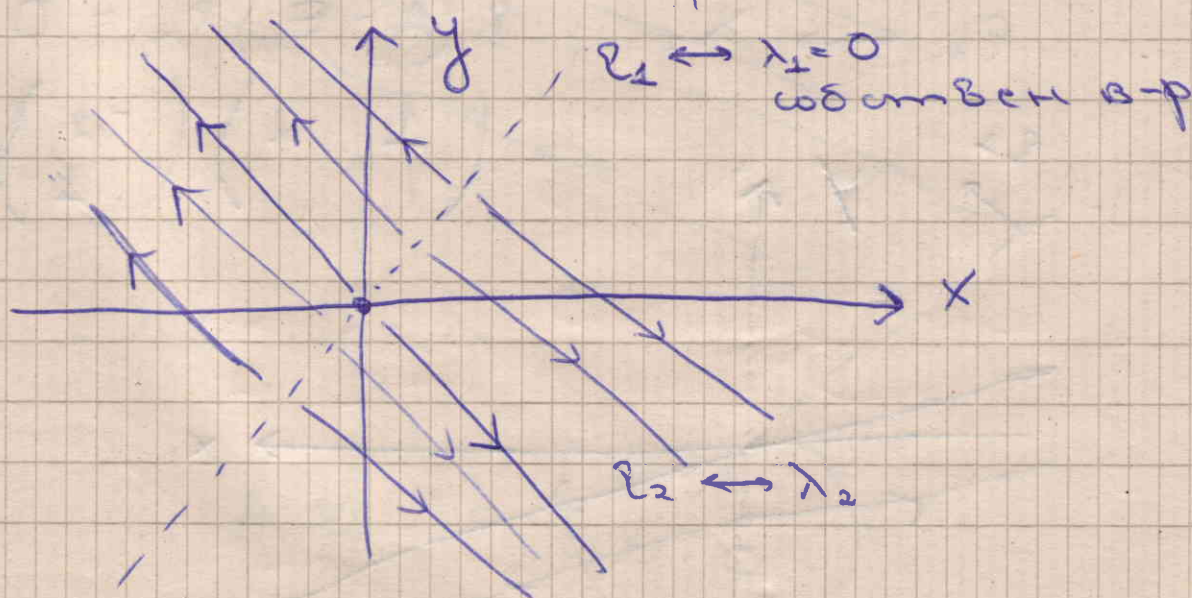


II $\det A = 0$ (има поне едно нулево собствено число)

правата, коллинеарна със собствения вектор, отговарящ на $\lambda = 0$, се състои изцяло от особени точки

1. $\lambda_1 = 0, \lambda_2 \neq 0$

1.1. $\lambda_2 > 0$ неустойчиво положение на равновесие



1.2. $\lambda_2 < 0$ - асимптотическа
устойчивост

Аналогичен на 1.1. фазов
портрет с д-е в посока
към особените точки

Примери

1)
$$\begin{cases} \dot{x} = 2x + 2y \\ \dot{y} = -x - y \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

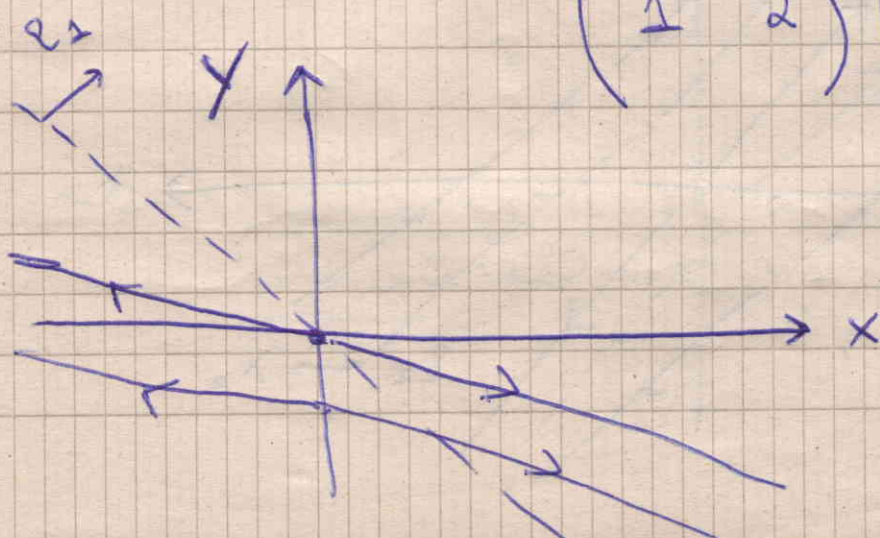
$$\lambda_1 = 0$$

$$\lambda_2 = -1$$

$$v_1 \leftrightarrow \lambda_1 : v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$v_2 \leftrightarrow \lambda_2 : (A - E)v_2 = 0$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$



$$2) \begin{cases} \dot{x} = -2x - 2y \\ \dot{y} = x + y \end{cases} \quad A = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 = 0$$

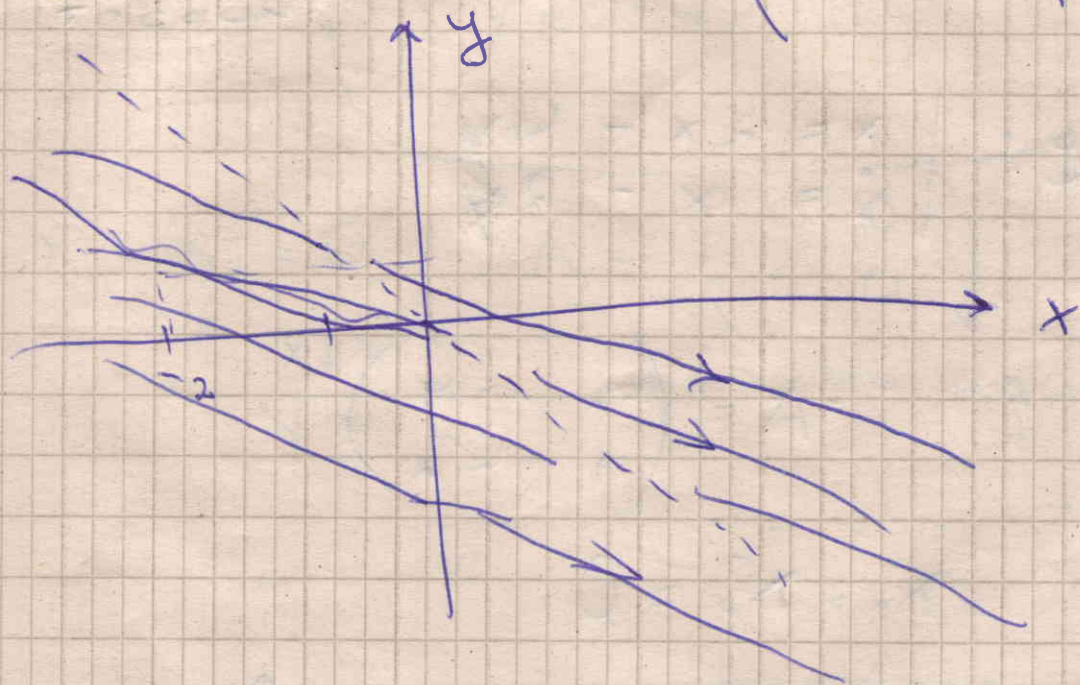
$$\lambda_2 = -1$$

$$e_1 \longleftrightarrow \lambda_1 = 0$$

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

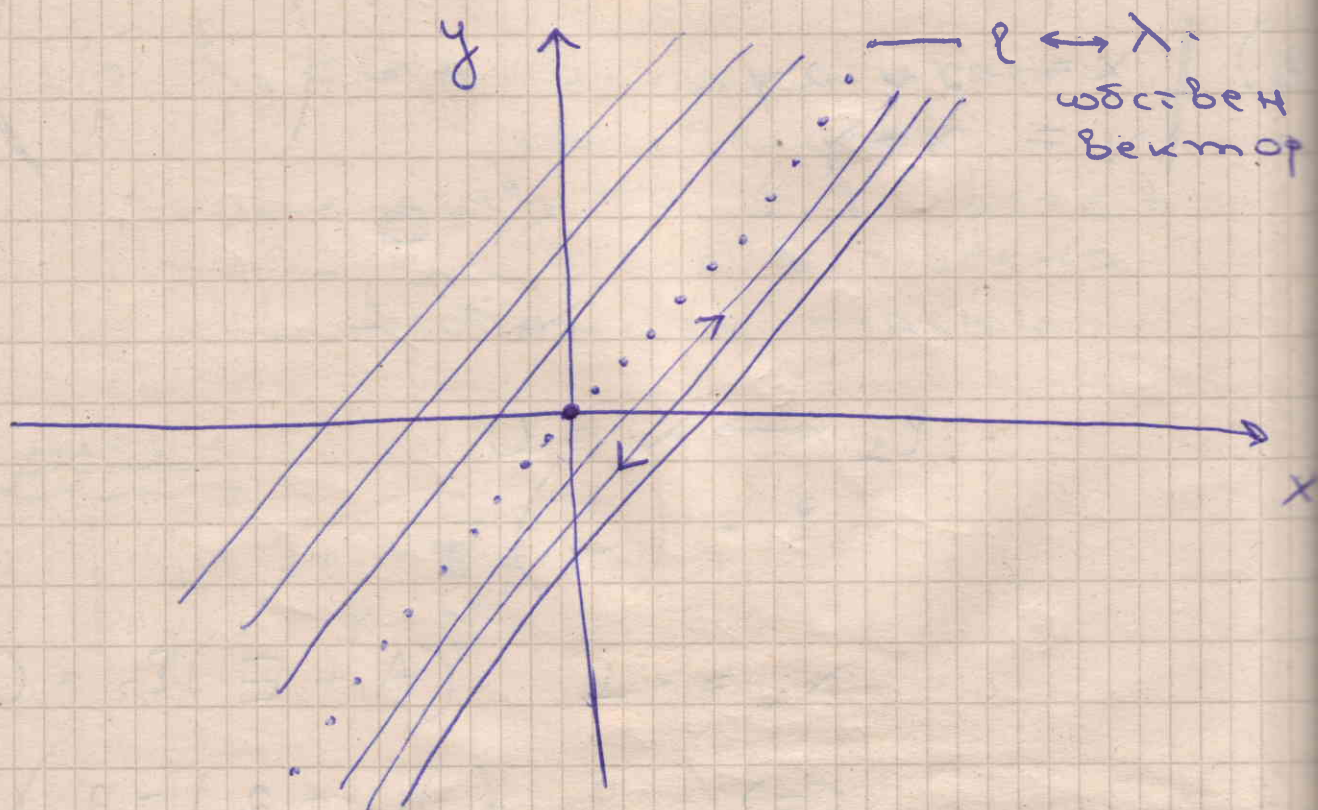
$$\lambda_2 = -1 \quad (A + E)e_2 = 0$$

$$(=) \quad \left(\begin{array}{cc|c} -1 & -2 & -2 \\ & & 1 \end{array} \right) = 0$$



$$2. \lambda_1 = \lambda_2 = 0 = \lambda$$

$$A \approx J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$



посоката се отпр. с φ -ра
скорост

Пример :

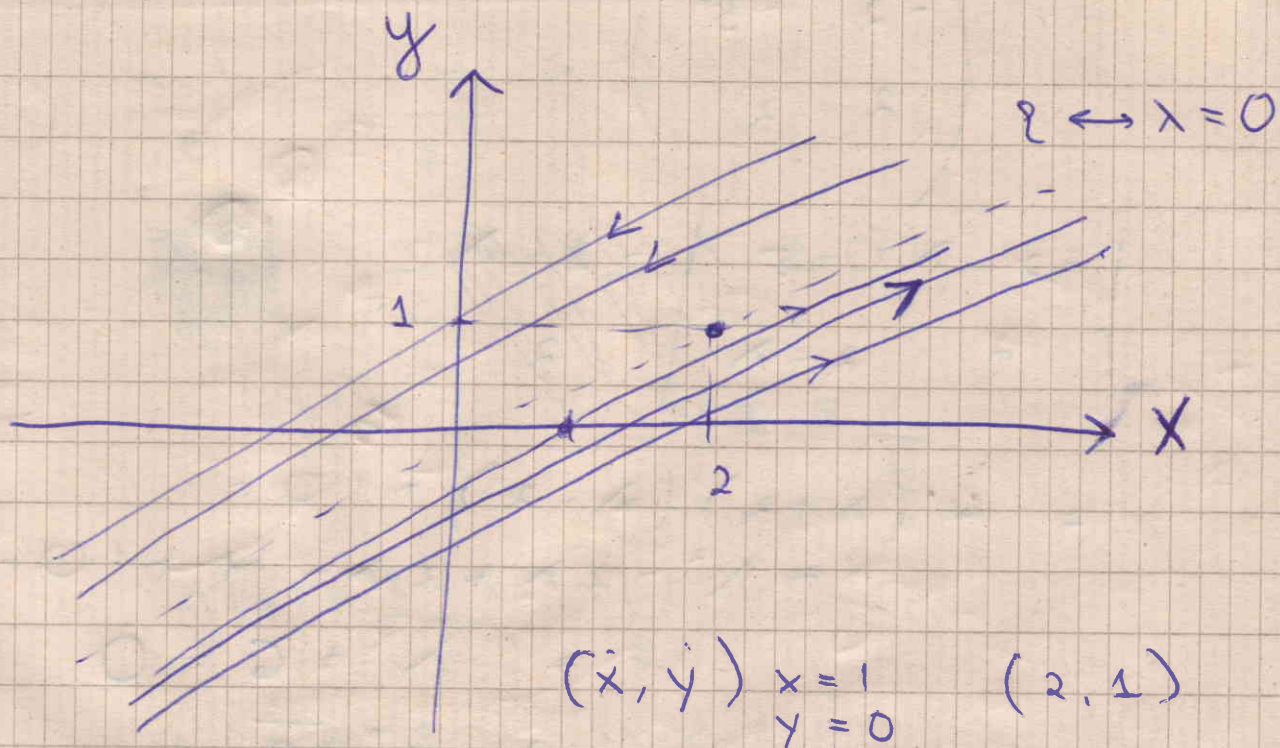
$$\begin{cases} \dot{x} = 2x - 4y \\ \dot{y} = x - 2y \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 0$$

$$\xi = A\xi = 0$$

$$\xi = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$



Dom:

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x + y \\ \dot{y} = -4x - 2y \end{cases}$$

3. $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$x = C_1$

$y = C_2$

фазови криви



заг

$$\begin{cases} \dot{x} = -2x - 5y \\ \dot{y} = 2x + 2y \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} -2 & -5 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} -2-\lambda & -5 \\ 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -2-\lambda & -5 \\ 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} =$$

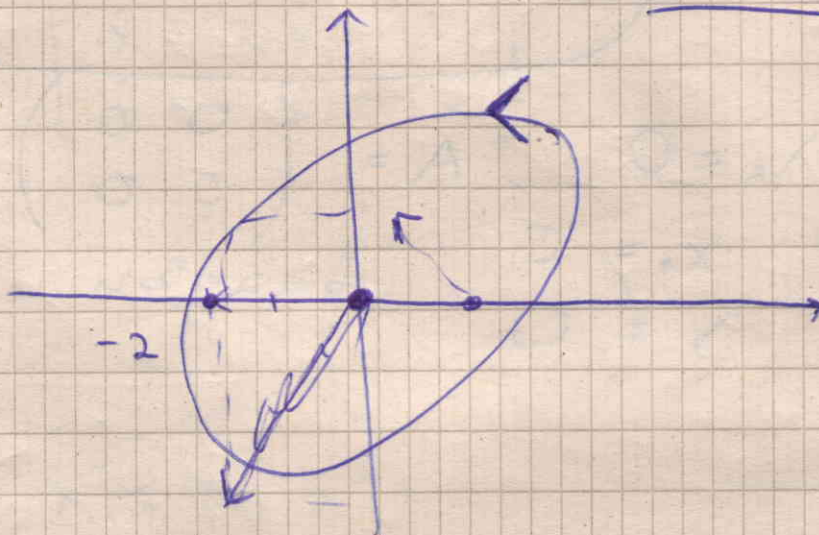
$$\begin{aligned} &= 4(\lambda+2)(\lambda-2) + 10 = \\ &= \lambda^2 - 2\lambda + 2\lambda - 4 + 10 = \\ &= \lambda^2 + 6 = 0 \end{aligned}$$

$$\lambda = \pm i\sqrt{6}$$

$$\lambda_1 = \pm i\sqrt{6}$$

$$\lambda_2 = \pm i\sqrt{6}$$

центр



$$\dot{x}, \dot{y} (1,0) \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$f(x) \quad \frac{x-1}{e} - \frac{\ln^2 x}{2} \geq 0$$



$$\frac{1}{e} - \frac{2 \ln x}{x-x} \geq 0$$

$$\psi(x) \quad \frac{\ln x}{x} \leq \frac{1}{e}$$

$$g(x) = \frac{\ln x}{x} - \frac{1}{e}$$

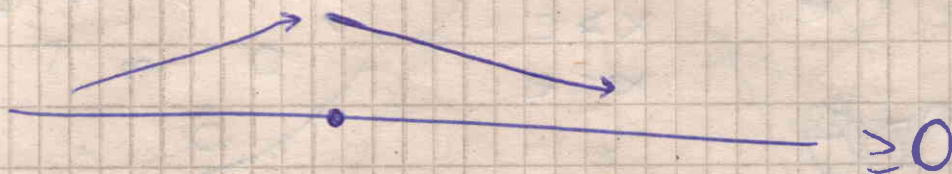
$$g'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln x \cdot 1}{x^2}$$

$$g'(x) > 0 \text{ за } x < e$$

$$g'(x) < 0 \text{ за } x > e$$

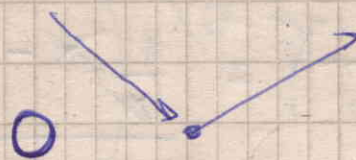
$$1 - \ln x > 0$$

$$\ln x < 1 \\ x < e$$



$$\psi(x) \leq \psi(e) = 0$$

$\Rightarrow$ наша лема да



$$\cancel{x - \ln x} \quad \frac{x - e \ln x}{x - e} \geq 0$$

$$\cancel{x \geq e \ln x}$$

$$x > e$$

$$x - e \ln x$$

$$1 - \frac{e}{x} > 0$$

$$1 > \frac{e}{x}$$

$$f(x) = e^{\frac{1}{x}} - \frac{e^{n^2} x}{2}$$

$$f'(x) = e^{\frac{1}{x}} - \frac{e^{n^2} x}{x}$$

$$e^{\frac{1}{x}} > \frac{e^{n^2} x}{x}$$

$$e^{n^2} x < \frac{x}{e}$$

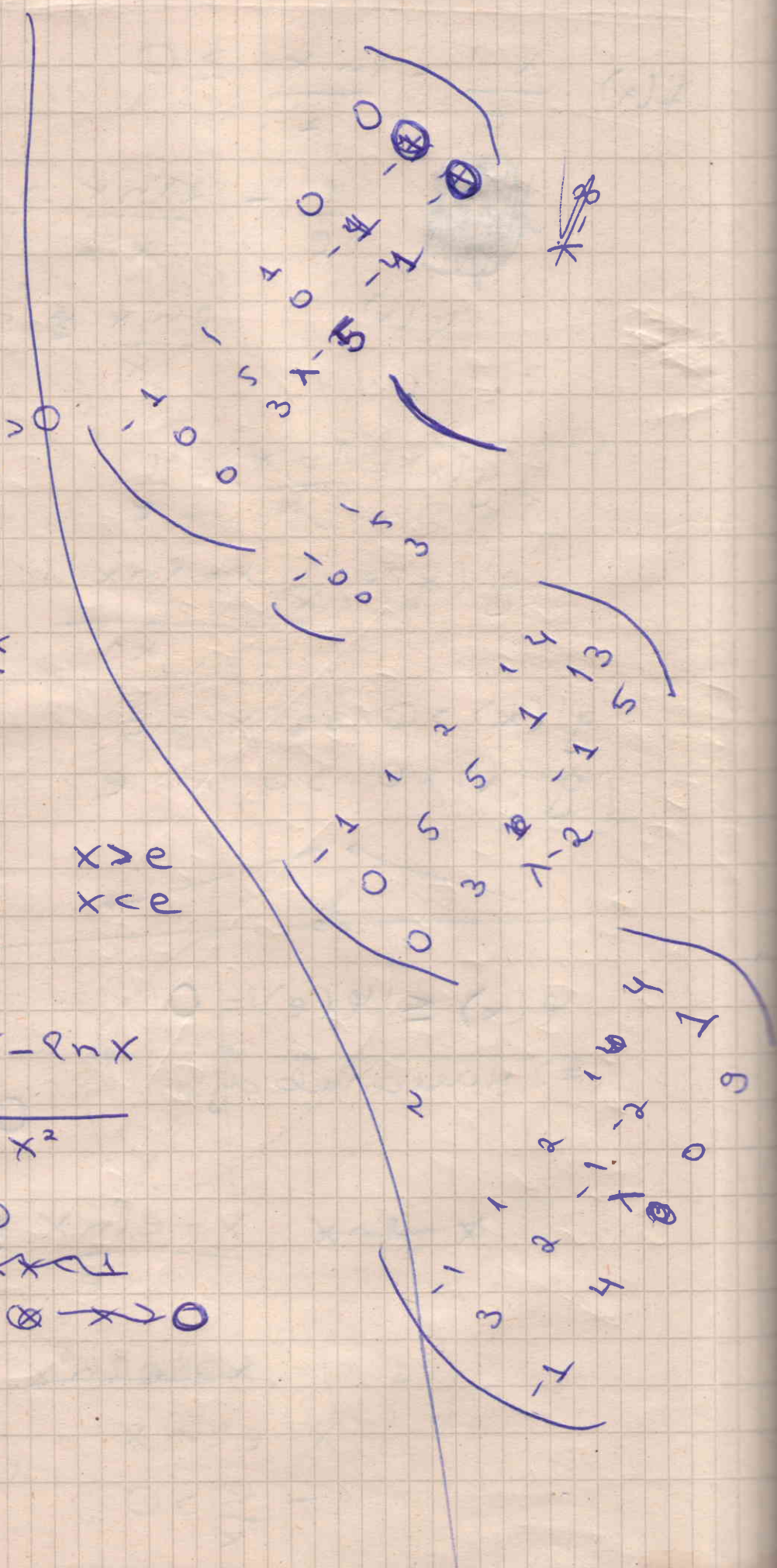
$$x > e$$

$$x < e$$

$$f''(x) = \dots$$

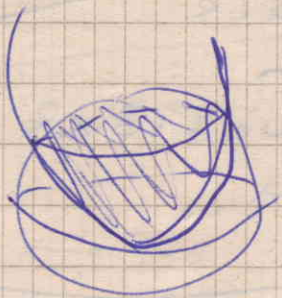
$$\left(\frac{e^{n^2} x}{x}\right)' = \frac{\frac{1}{x} x - e^{n^2} x}{x^2}$$

$$\frac{1 - e^{n^2} x}{x^2}$$



$$x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$$

$$x^2 + y^2 - 2xz = 0$$



$$\int \sqrt{1+x^2} dx = x\sqrt{1+x^2}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 8 & x+3 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1-\lambda & 4 & -2 \\ 2 & -1 & -\lambda & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 2-\lambda \end{pmatrix}$$

$$5 - (x-2)\frac{5}{3}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 4 & -2 \\ 0 & 0 & x-1 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 5 & 5 & 1 & 13 \\ 0 & 3 & x-2 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & & & \\ -1 & 13 & & & \end{pmatrix}$$

$$15 - \frac{25}{3} \quad 35 - 25$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 & -2 & 1 \\ -1 & 4 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 5 & 1 & 13 \\ -1 & 3 & x-2 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & x-5 & 8 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Диф. у-я и лин. алгебра

$$e^{At} = \sum \frac{A^k \cdot t^k}{k!}$$

S. Smale

M. Hirsch

Differential equations and Linear Algebra

[illegible]

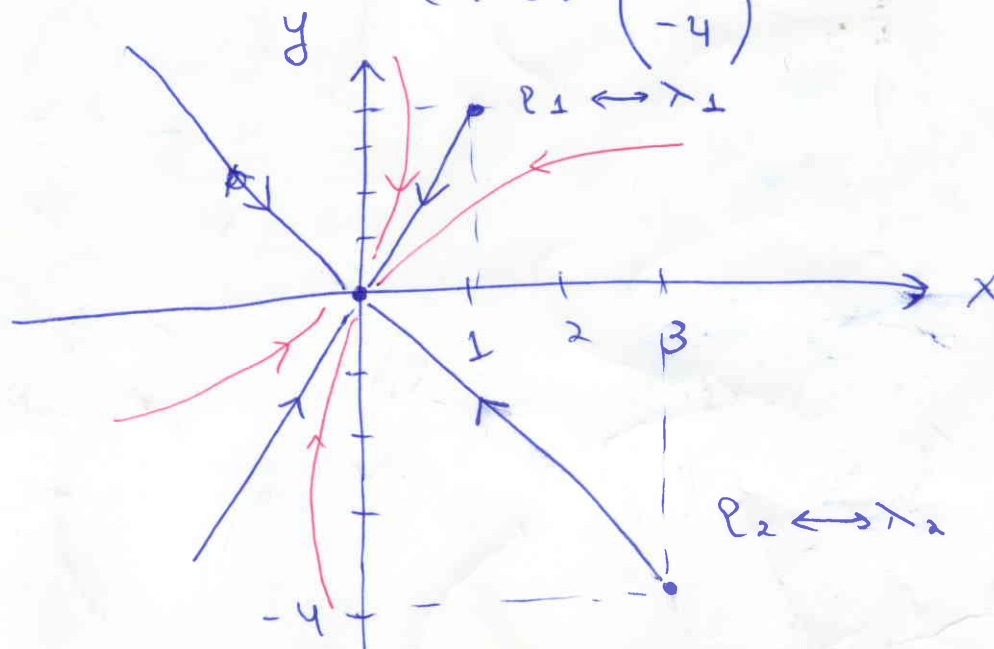
$$\begin{aligned} \dot{x} &= y - 2x \\ \dot{y} &= -4x + 2y \end{aligned}$$

$$p_1 \leftrightarrow \lambda_1 : (A + 4E)p_1 = 0$$

$$\begin{pmatrix} -12 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} = 0$$

$$p_2 \leftrightarrow \lambda_2 : (A + 20E)p_2 = 0$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} = 0$$



Неустойчив в узле $a = 25$

$$\lambda_{1,2} = \frac{3.25 \pm 5}{2} = \begin{cases} 40 \\ 35 \end{cases}$$

$$p_1 \leftrightarrow \lambda_1 : (A - 40E)p_1 = 0$$

$$\begin{pmatrix} 10 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -10 \end{pmatrix} = 0$$

$$p_2 \leftrightarrow \lambda_2 : (A - 35E)p_2 = 0$$

$$\begin{pmatrix} 15 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix} = 0$$

