Класическа вероятност

Условна вероятност $P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$

Пълна вероятност $P(A) = \sum_i P(H_i)P(A|H_i)$

Формула на Бейс $P(H_k|A) = \frac{P(H_k)P(A|H_k)}{\sum_i P(H_i)P(A|H_i)}$

Дискретни случайни величини $p_i = P(\xi = x_i)$

Математическо очакване $E\xi = \sum_i x_i p_i \quad Eh(\xi) = \sum_i h(x_i)p_i$

Дисперсия $D\xi = E(\xi - E\xi)^2 = E\xi^2 - (E\xi)^2$

Ковариация $\mathrm{cov}(\xi,\eta) = E(\xi - E\xi)(\eta - E\eta) = E\xi\eta - E\xi\, E\eta$

Коефицент на корелация $\rho = \frac{\mathrm{cov}(\xi,\eta)}{\sqrt{D\xi}\sqrt{D\eta}}$

Пораждаща функция $g_\xi(x) = \sum_i x^i p_i$

$E\xi = g'(1) \quad D\xi = g''(1) + g'(1) - (g'(1))^2$

$g_{\xi+\eta}(x) = g_\xi(x) g_\eta(x)$

Дискретни разпределения

$\xi \in Bi(n,p) \Leftrightarrow P(\xi = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, k = 0,\dots,n$

$\xi \in Ge(p) \Leftrightarrow P(\xi = k) = p(1-p)^k, k = 0,\dots$

$\xi \in Po(\lambda) \Leftrightarrow P(\xi = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}, k = 0,\dots$

$\xi \in HG(N,M,n) \Leftrightarrow P(\xi = k) = \frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$

Полиномно разпределение

$P(\xi_1 = l_1, \xi_2 = l_2, \dots, \xi_k = l_k) = \frac{n!}{l_1! l_2! \dots l_k!} p_1^{l_1} p_2^{l_2} \dots p_k^{l_k}$

$V_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$

$\tilde{V}_n^k = n^k$

$P_n = n!$

$\tilde{P}_n^{k_1 \dots k_s} = \frac{n!}{k_1! k_2! \dots k_s!}$

$\binom{n}{k} = C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$

$\tilde{C}_n^k = C_{n+k-1}^k = \binom{n+k-1}{k}$

взимаме k от n

$V_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$

Вариация - изчисляване броят на начините по който могат от даден множество от n на брой елемента да се изберат k на брой, като реда на избиране е от значение

$n(n-1)\dots(n-k+1) = V_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$

Класическа вероятност

Условна вероятност $P(A \mid B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$

Пълна вероятност $P(A) = \sum_i P(H_i) P(A \mid H_i)$

Формула на Бейс $P(H_k \mid A) = \frac{P(H_k) P(A \mid H_k)}{\sum_i P(H_i) P(A \mid H_i)}$

Дискретни случайни величини $p_i = P(\xi = x_i)$

Математическо очакване $E\xi = \sum_i x_i p_i \quad Eh(\xi) = \sum_i h(x_i) p_i$

Дисперсия $D\xi = E(\xi - E\xi)^2 = E\xi^2 - (E\xi)^2$

Ковариация $cov(\xi, \eta) = E(\xi - E\xi)(\eta - E\eta) = E\xi\eta - E\xi\, E\eta$

Коефициент на корелация $\rho = \frac{cov(\xi, \eta)}{\sqrt{D\xi}\sqrt{D\eta}}$

Пораждаща функция $g_\xi(x) = \sum_i x^i p_i$

$E\xi = g'(1) \quad D\xi = g''(1) + g'(1) - (g'(1))^2$

$g_{\xi+\eta}(x) = g_\xi(x) g_\eta(x)$

Дискретни разпределения

$\xi \in Bi(n, p) \Leftrightarrow P(\xi = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, k = 0, \dots, n$

$\xi \in Ge(p) \Leftrightarrow P(\xi = k) = p(1-p)^k, k = 0, \dots$

$\xi \in Po(\lambda) \Leftrightarrow P(\xi = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}, k = 0, \dots$

$\xi \in HG(N, M, n) \Leftrightarrow P(\xi = k) = \frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$

Полиномно разпределение

$P(\xi_1 = l_1, \xi_2 = l_2, \dots, \xi_k = l_k) = \frac{n!}{l_1! l_2! \dots l_k!} p_1^{l_1} p_2^{l_2} \dots p_k^{l_k}$

ξ, η-случайни величини, $f_\xi(x)$-плътност на ξ, $F_\xi(x)$-функция на разпределение на ξ, $f_{\xi,\eta}(x, y)$-съвместна плътност на ξ и η

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_\xi(x)\,dx = 1 \qquad \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{\xi,\eta}(x, y)\,dx\,dy = 1$$

$$f_\xi(x) = \frac{\partial F_\xi(x)}{\partial x} \qquad f_{\xi,\eta}(x, y) = \frac{\partial^2 F_{\xi,\eta}(x, y)}{\partial x \partial y}$$

$$F_\xi(x) = \int_{-\infty}^{x} f_\xi(t)\,dt \qquad F_{\xi,\eta}(x, y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f_{\xi,\eta}(u, v)\,du\,dv$$

$$f_\xi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\xi,\eta}(x, y)\,dy \qquad F_\xi(x) = F_{\xi,\eta}(x, \infty)$$

$$P(\xi \in A) = \int_A f_\xi(x)\,dx \qquad P((\xi, \eta) \in D) = \iint_D f_{\xi,\eta}(x, y)\,dx\,dy$$

$$E\xi = \int_{-\infty}^{\infty} x f_\xi(x)\,dx \qquad E\,g(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_\xi(x)\,dx$$

$$D\xi = E(\xi - E\xi)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - E\xi)^2 f_\xi(x)\,dx$$

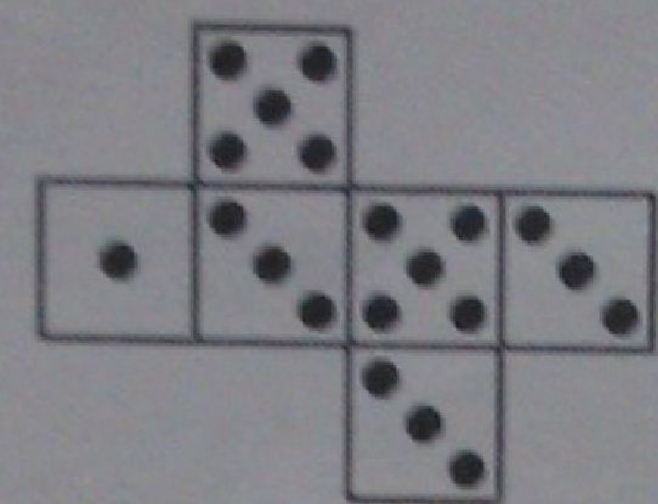
$$f_{\xi|\eta}(x \mid y) = \frac{f_{\xi,\eta}(x, y)}{f_\eta(y)} \qquad E(\xi \mid \eta) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_{\xi|\eta}(x \mid y)\,dx$$

$$P(\xi \in A \mid \eta = y) = \int_A f_{\xi|\eta}(x \mid y)\,dx$$

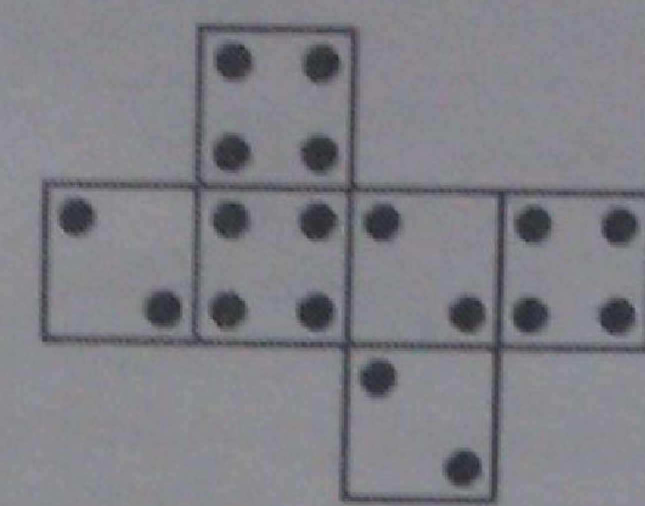
$$P(A) = \int_{-\infty}^{\infty} P(A \mid \xi = x) f_\xi(x)\,dx$$

Задача 1. Разглеждаме следните две зарчета:

Синьо зарче



Червено зарче



Нека при хвърлянето на двата зара случайната величина ξ е сборът на точките от синия и червения зар, а η – по-малкият брой точки от двата зара. Намерете:

а) съвместното разпределение на сл. в. ξ и η;

б) маргиналните разпределения на ξ и η;

в) коефициента на корелация $\rho(\xi,\eta)$.

Задача 2. Нека точката M е равномерно разпределена във вътрешността на ΔOAB, където $O=(0,0)$, $A=(1,0)$ и $B=(0,1)$. Да се намери средната стойност на лицето на ΔABM.

Задача 3. Теглото на случайно избран студент от ФМИ е нормално разпределена случайна величина Z с очакване $\mu=75$ кг и дисперсия $\sigma^2=225$ кг^2.

а) Каква е вероятността от 5 случайно избрани студенти да има поне двама, които са с тегло над 85 кг?

б) В сградата на ФМИ има асансьор, който има максимална товаримост от 375 кг. Намерете най-голямото естествено число n такова, че за W_n = сумата от теглата на n случайно избрани студенти, е изпълнено $P(W_n \geq 375) \leq 0.01$.

Задача 4. Нека $X_1, X_2, \dots, X_n$ са независими наблюдения над случайната величина ξ с плътност *(разпределение на Борел)*

$$P(\xi=x)=f_\xi(x\,|\,\theta)=\begin{cases}\dfrac{(\theta x)^{x-1}}{x!}e^{-\theta x}, & x=1,2,3,\dots\\ 0, & x\notin N\end{cases},$$

където $0<\theta<1$ е неизвестен параметър и $E\xi=\dfrac{1}{1-\theta}$. Намерете максимално правдоподобната оценка за математическото очакване на ξ и проверете дали е неизместена.

Задача 5. При бутилирането на бира в 10 отделни партиди са наблюдавани следните средни отклонения в проценти от обявеното на етикета количество:

-1,17 -0,46 -0,09 -0,80 0,50 0,09 -0,68 1,07 0,49 -0,18

Предполага се, че средните отклонения са нормално разпределени с очакване $\mu=0$ и дисперсия σ^2. Може ли при ниво на съгласие $\alpha=0.05$ да се отхвърли хипотезата H_0: $\sigma^2=1$ срещу алтернативата H_1: $\sigma^2<1$?

Задачи от II-ро контролно

Задача 1: Върху отсечката $[0,l]$ по случаен начин попадат две точки A и B. Да се намери средното лице на квадрата със страна $R = |\overline{AB}|$.

Задача 2: Съвместната функция на разпределение на абсолютно непрекъснатите случайни величини X и Y е зададена в следния вид:

$$F_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 0 & x < 0 \text{ or } y < 0 \\ \frac{1}{2}[\sin x + \sin y - \sin(x+y)] & 0 \le x \le \frac{\pi}{2}, \\ & 0 \le y \le \frac{\pi}{2} \\ 1 & x > \frac{\pi}{2}, y > \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Да се намерят:

а) съвместната плътност $f(x,y)$; $\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}$

б) $cov(X,Y)$;

в) условното математическо очакване $E(X|Y=0)$.

г) Независими ли са X и Y?

Задача 3: Да се намери плътността на случайната величина $Z = \frac{X}{Y}$, където X и Y са независими случайни величини, еднакво разпределени с плътност:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{a^2}\exp[-\frac{x^2}{2a^2}] & x \ge 0 \\ 0 & x > 0 \end{cases}, \quad a = const.$$

Зад.1 Известно е, че в 51% от случайте първият роден близнак е момче. Предполагаме, че вероятността за раждане на еднополови близнаци е два пъти по-голяма, отколкото на разнополови. А при разнополовите близнаци вероятността да се роди пръв за всеки пол е една и съща. Ако първият близнак е момче, каква е вероятността втория също да е момче?

Зад.2 Дадена е магнетофонна лента с дължина 100м. Върху всяка от двете страни на лентата, на случайно избрано място, е записано непрекъснато съобщение с дължина 20м. Каква е вероятността между 25 и 50м., считано от началото на лентата, да няма участък несъдържащ поне едно от двете съобщения?

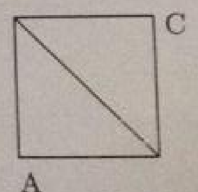
Зад.3 Хвърлят се два сини и един червен зар. Нека ξ е броят на шестиците върху сините зарове, а η общия брой на шестиците. Да се определи:

а) съвместното разпределение на ξ и η;

б) коефицента на корелация;

в) вероятността върху сините зарове да има една шестица, ако общо са се паднали две шестици.

Зад.4 В точка A от лабиринта седи прасе, а в точка C има тиква. Прасето си избира по случаен начин коридор и търчи по права линия, докато достигне отклонение. На новото място отново случайно избира коридор (включително този, по който е дошло) търчи по него и т.н.



Какъв е средния брой коридори по които ще премине прасето за да достигне до тиквата?

Зад.1 В томбола всеки билет носи 1, 2 или 3 подаръка, съответно с вероятност 1/4, 1/2 и 1/4. Играч има 20 билета. Каква е вероятността да спечели 30 подаръка.

Зад.2 Нека $f_\xi(x) = a\cos x$, за $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Намерете:

а) a, така че $f_\xi(x)$ да е плътност;

б) очакването и дисперсията на сл.в. $\eta = |\sin \xi|$.

Зад.3 Нека сл.в $\xi \in Ex(2)$ и $\eta \in U(1,3)$ са независими. Да се определи $P(\xi < \eta)$.

Зад.4 Компания разработва нов метод за лъчево лечение на рак. Предполагаме, че времето ξ на облъчване, за което половината ракови клетки измират е експоненциално разпределена сл.в. Направени са следните измервания в минути: 1.5, 6.6, 3.6, 6.7, 2.9, 0.8, 11.6, 2.7, 1.6, 0.6.

а) Да се построи 'boxplot'.

б) Чрез нормално приближение да се провери
H_0 : "средното време е 3 мин", срещу
H_1 : "средното време е 4 мин",
с ниво на значимост $\alpha = 0.02$. Пресметнете мощността на критерия.