

12.05.2014

и условно мат. отакване

X_1, X_2 - зависим; $f_{X_1, X_2}(x, y)$ вер. пл. на X_1 при y ,
 че $X_2 \in$ прела
 ст-ст y .

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$A = \{X_1 \in dx\} \quad B = \{X_2 = dy\}$$

малък
инт.,
близък
до x

$$P(A|B) = \frac{P(X_1 \in dx, X_2 \in dy)}{P(X_2 \in dy)}$$

свбм. вер
пл.

$P(X_2 \in dy)$

вер. пл.
свбм. вер.

$$= \frac{f(x, y) dx dy}{f_{X_2}(y) dy}$$

$$= \frac{f(x, y)}{f_{X_2}(y)} dx$$

не зависи от
голем. на инт. dy
 $\sim dx$

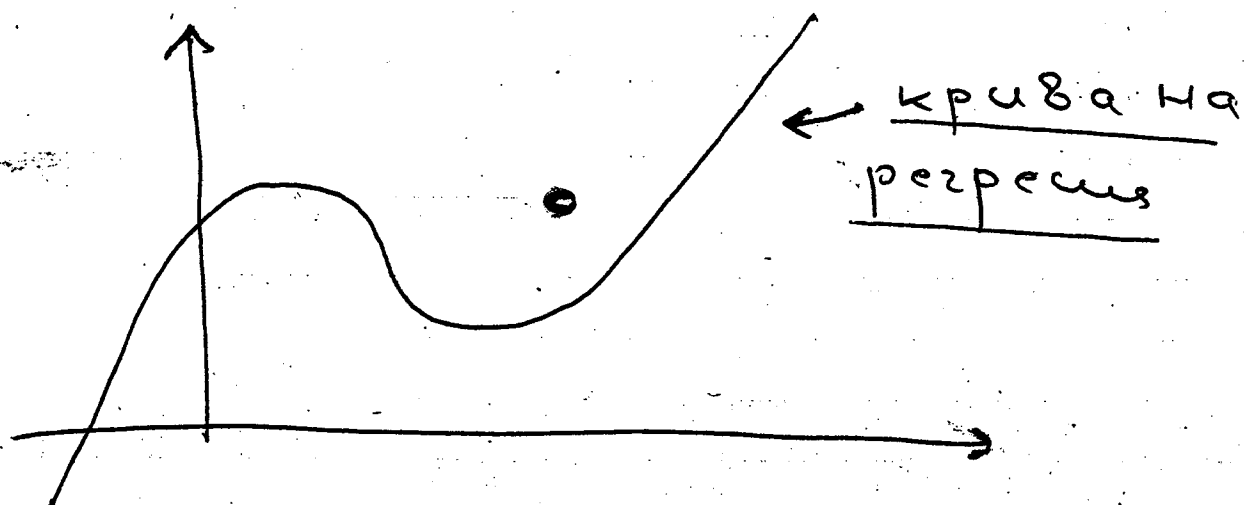
$$f_{X_1|X_2}(x|y) = \frac{f(x, y)}{f_{X_2}(y)}$$

усл. вер.
плътност

$$E(X_1 | X_2 = y) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_{X_1|X_2}(x, y) dx$$

условно
мат. отакване

$g(y)$



Двумерно нормално
разпределение

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)} \left(\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} - 2\rho \frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2} \right)}$$

$$f_{X_1}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}}$$

$$f_{X_2}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2} e^{-\frac{(y-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}}$$

ρ - коеф. на корелация ^{на} X_1 и X_2

$$\rho = \frac{\text{Cov}(X_1, X_2)}{\sqrt{DX_1 DX_2}}$$

Незав. $\Leftrightarrow$ некорел.

$$f_{x_1, x_2}(x|y) = \frac{f(x, y)}{f_{x_2}(y)} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_1 \sqrt{1-\rho^2}} e^{-H} \quad (*)$$

$$H = \frac{1}{2(1-\rho^2)} \left(\frac{(x-m_1)^2}{\sigma_1^2} - 2\rho \frac{(x-m_1)(y-m_2)}{\sigma_1 \sigma_2} + \frac{(y-m_2)^2}{\sigma_2^2} \right) - \cancel{\frac{1}{2}} \frac{(y-m_2)^2}{2\sigma_2^2} =$$

$$\boxed{|\rho| \leq 1}$$

$$\frac{1}{(1-\rho^2)} - 1 = \frac{\rho^2}{(1-\rho^2)}$$

$$= \frac{1}{2(1-\rho^2)} \left(\frac{(x-m_1)^2}{\sigma_1^2} - 2\rho \frac{(x-m_1)(y-m_2)}{\sigma_1 \sigma_2} + \rho^2 \frac{(y-m_2)^2}{\sigma_2^2} \right) =$$

$$= \frac{1}{2(1-\rho^2)} \left(\frac{(x-m_1)}{\sigma_1} - \rho \frac{(y-m_2)}{\sigma_2} \right)^2 =$$

$$= \frac{\left((x-m_1) - \rho \frac{\sigma_1}{\sigma_2} (y-m_2) \right)^2}{2(1-\rho^2) \sigma_1^2}$$

$$\textcircled{*} \quad = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_1 \sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{\left(x - m_1 - \rho \frac{\sigma_1}{\sigma_2} (y - m_2)\right)^2}{2\sigma_1^2 (1-\rho^2)}}$$

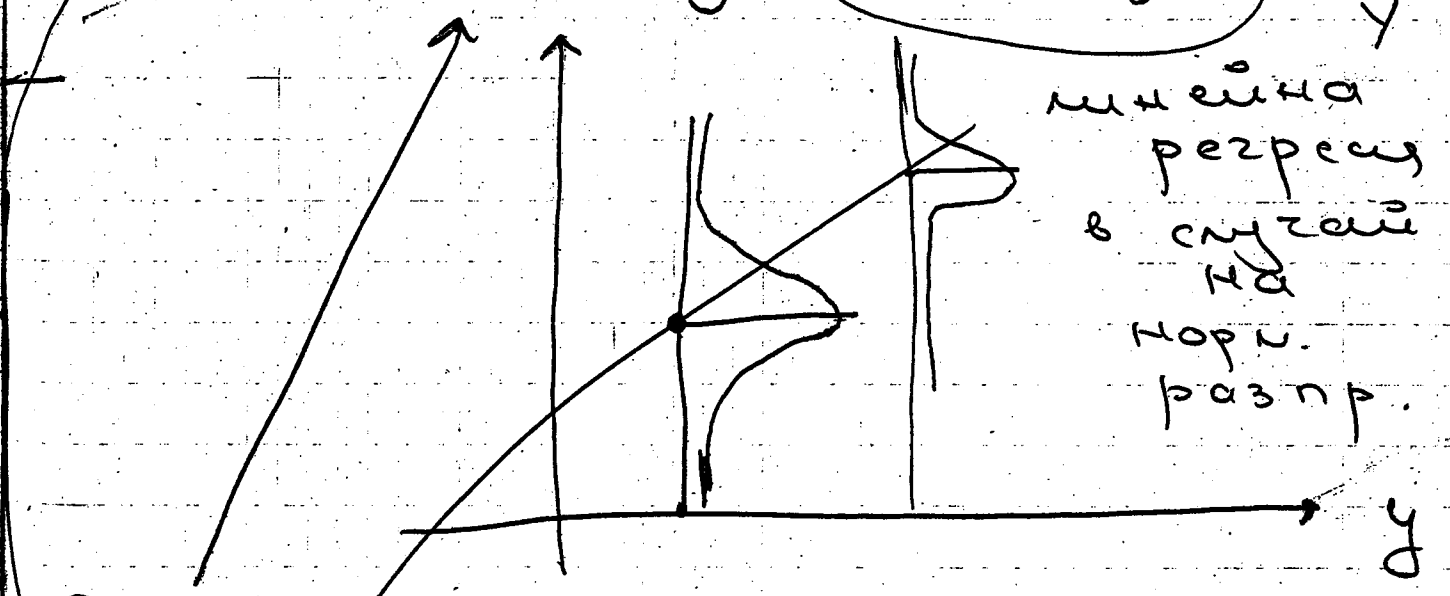
дисперсия

това е вер. пл. на норм. разпр. с
оградените параметри
мат. очакване — $m_1 + \rho \frac{\sigma_1}{\sigma_2} (y - m_2)$ и
условно $\sigma_1 \sqrt{1-\rho^2}$ — дисперсия

$$E(X_1 | X_2 = y) = m_1 + \rho \frac{\sigma_1}{\sigma_2} (y - m_2)$$

$$D(X_1 | X_2 = y) = \sigma_1^2 (1-\rho^2)$$

независимост от y



линейна
регресия
в случай
на
норм.
разпр.

① хомоскедастичност

② линейна регресия

} хар. св. в о.
на
норм.
разпр.

Видове сходимост на случайни редици

безбр.
мн.
сл.
вса.

$Z_1, Z_2, \dots, Z_n$ - случайна редица

1. Сходимост почти сигурно

$$Z_1, Z_2, \dots, Z_n, \dots : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

Ако $\omega \in \Omega$ е ел. събитие, то

$$Z_1(\omega), Z_2(\omega), \dots, Z_n(\omega), \dots -$$

ст-та на сл.
събитие в ω

числова редица

$$A = \left\{ \omega : \begin{array}{l} \text{редницата е сх.} \\ \lim Z_n(\omega) = Z(\omega) \end{array} \right\}$$

$$\text{Ако } P(A) = 1 \Rightarrow Z_n \xrightarrow[\text{сигурно}]{\text{почти (п.с.)}} Z$$

2. Сходимост по вероятност

$$Z_n \xrightarrow{P} Z, \text{ ако } \forall \varepsilon > 0$$

$$P(|Z_n - Z| > \varepsilon) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

згг

(закон за големите числа) Якоб-Бернул

$$P\left(\left|\frac{k}{n} - p\right| > \varepsilon\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$\downarrow$
 Z_n

изр. сл. вел - const p

3. Средно-квадратична (L^2) сходимость

$$\xi_n \xrightarrow{L^2} \xi, \text{ ако}$$

$$E(\xi_n - \xi)^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

4. Сходимость по распределению -

$$\xi_n \xrightarrow{d} \xi, \text{ ако}$$

$$F_n(x) \longrightarrow F(x) \quad \forall x$$

↓
ф.ч. на разпр. на ξ_n

↑
ф.ч. на разпр. на ξ

$\forall$ точка x , в която $F(x)$ е непрекъснатата.

$$P\left(a < \frac{\kappa - np}{\sqrt{npq}} < b\right) \longrightarrow 0$$

$$\longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

Моавър -
Лаплас

$$a = -\infty$$

$$b = x$$

ф.ч. на разпр. на норм. бр. Y отехи

$$F_n(x) \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

5. Слаба сходимость

$$\bullet \quad \text{---} \quad z_n \Rightarrow z, \text{ ако}$$

$$E(f(z_n)) \rightarrow E(f(z)) \text{ за}$$

$\forall$ огр. непрерыв. ф-н $f(x)$.

$$\text{Th } \left. \begin{array}{l} 1) \\ 2) \\ 3) \end{array} \right\} \begin{array}{l} z_n \xrightarrow{n.c.} z \Rightarrow z_n \xrightarrow{P} z \\ z_n \xrightarrow{L^2} z \Rightarrow z_n \xrightarrow{P} z \\ z_n \xrightarrow{L^1} z \Rightarrow z_n \xrightarrow{P} z \end{array} \text{ --- ако}$$

ако $z = \text{const}$, вярно е и обратното

$$4) \quad z_n \xrightarrow{P} z \Leftrightarrow z_n \Rightarrow z$$

$$2) \quad P(z > \varepsilon) < \frac{Ez}{\varepsilon}, \quad z \geq 0$$

$$P(|z - z_n| > \varepsilon) = P((z - z_n)^2 > \varepsilon) < \frac{E(z - z_n)^2}{\varepsilon^2} \rightarrow 0$$

4) без g-во (случайно: s)

Лема $z_n \xrightarrow{n.c.} z, \text{ ако } \forall \varepsilon > 0$

$$P\left(\sup_{k \geq n} |z_k - z| > \varepsilon\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$$\sup_{k \geq n} |z_k - z| \geq |z_n - z|$$

$$\rightarrow \{ |z_n - z| > \varepsilon \} \supseteq \{ \sup_{k \geq n} |z_k - z| > \varepsilon \} \Rightarrow$$

$$P\left(\sup_{k \geq n} |z_k - z| > \varepsilon\right) \geq P(|z_n - z| > \varepsilon)$$

и 1) :))

Д-во Лема: $\{\omega: z_n^{(\omega)} \not\rightarrow z(\omega)\} =$
 $z_n(\omega) \not\rightarrow z(\omega) \Leftrightarrow \exists N: \forall n \nexists$
 $k \geq n: |z_k(\omega) - z(\omega)| > \frac{1}{N}$

$$\exists \rightarrow \cup$$

$$\forall \rightarrow \cap$$

$$= \bigcup_{N=1}^{\infty} \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} \left\{ \omega: |z_k(\omega) - z(\omega)| > \frac{1}{N} \right\}$$

$$\Rightarrow P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} \left\{ \omega: |z_k(\omega) - z(\omega)| > \frac{1}{n} \right\}\right) = 0$$

$$A_n = \bigcup_{k=n}^{\infty} \left\{ \omega: |z_k(\omega) - z(\omega)| > \frac{1}{n} \right\}$$

$$A_1 \supseteq A_2 \supseteq \dots \supseteq A_n \quad \text{нмал редица}$$

$$P(A_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad (\text{\u0441-\u0430\u0434\u0438\u0442\u0438\u0432\u043d\u043e\u0441\u0442})$$

$$P\left(\sup_{k \geq n} |z_k - z| > \frac{1}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad \text{Лема}$$

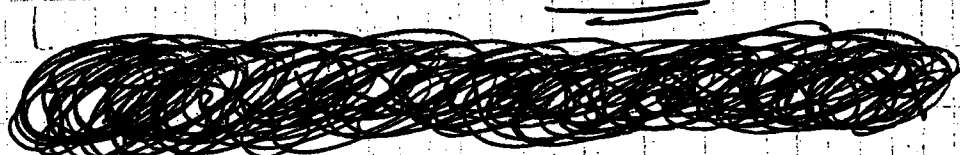
$$3) \quad z_n \xrightarrow{p} z \Rightarrow$$

$$1. \quad E(f(z_n)) \longrightarrow E(f(z)) \quad , \quad f(x) \text{ неогр. и неупр.}$$

$$2. \quad E|f(z_n) - f(z)| \longrightarrow 0$$

$$\begin{aligned} & \leq \\ & |f(z_n) - f(z)| \leq \underbrace{|f(z_n) - f(z)|}_{(1)} \cdot \mathbb{1}_{\{|z| > N\}} + \\ & + |f(z_n) - f(z)| \cdot \mathbb{1}_{\{|z| \leq N, |z_n - z| > \varepsilon\}} + \\ & + \underbrace{|f(z_n) - f(z)|}_{(3)} \cdot \mathbb{1}_{\{|z| \leq N, |z_n - z| \leq \varepsilon\}} \end{aligned}$$

$$\delta > 0$$

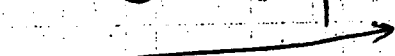


① N -дост. гол.

$< \frac{\delta}{3}$ за сметка на избора на N

② неупр. на комп. 0 $\Rightarrow$ равн. неупр.

$$< \frac{\delta}{3}$$



$$② \quad \underbrace{|f(z_n) - f(z)|}_{\text{const } C} \cdot \mathbb{1}_{\{|z| \leq N, |z_n - z| > \varepsilon\}}$$

ограниченост на $f \Rightarrow E(\quad) \leq$

$$|f(x)| \leq C \quad \forall x$$

$$\leq 2CP(|z_n - z| > \varepsilon) \longrightarrow 0$$

сходимость по вероятности.

$$n \rightarrow \infty$$

$\frac{\varepsilon}{C} > 0$ за дост. зог. N

Характеристични функции

$$\varphi_z(t) = E(e^{itz}) =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} f(x) dx$$

преобразуване
(трансформация)
на Фурье

$$e^{ia} = \cos a + i \sin a$$

(обратно)

Поашон

Примери: 1) $z \sim P_0(x)$

$$\varphi_z(t) = \sum e^{itz} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} e^{itn} \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} =$$

$$= e^{-\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda e^{it})^n}{n!} =$$

$$= e^{-\lambda} \lambda (e^{it} - 1)$$

$$2) z \sim N(0, 1) \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$\varphi_z(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx - \frac{x^2}{2}} dx$$

$$= e^{itx} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(itx)^n}{n!}$$

$$\varphi_z(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx - \frac{x^2}{2}} dx =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(it)^n}{\sqrt{2\pi} n!} \int_{-\infty}^{+\infty} x^n e^{-\frac{x^2}{2}} dx =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(it)^n}{n!} \Pi(z^n)$$

$$\Pi(z^n) = \begin{cases} 0, & n - \text{нечетно} \\ (n-1)!!, & n - \text{четно} \end{cases}$$

$$\Pi(x + z) = \Pi_n(x) \text{ Эрмит}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(it)^{2n}}{(2n)!} (2n-1)!! =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-t^2)^n}{2^n \cdot n!}$$

$$e^{-\frac{t^2}{2}}$$

→ хар. ф-я
на
станд.
норм.
разн.

$$Z \sim N(m, \sigma)$$

$$Z = m + \sigma z, \quad z \sim N(0, 1)$$

$$\begin{aligned} \varphi_Z(t) &= E e^{itZ} = E e^{it(m + \sigma z)} = \\ &= e^{itm} E e^{it\sigma z} = e^{itm - \frac{\sigma^2 t^2}{2}} \end{aligned}$$

Свойства хар. ф-ции: $\varphi_Z(t) = E e^{itZ}$

1) $\varphi_Z(0) = 1 \quad |\varphi_Z(t)| \leq 1$

2) Ако Z и η - независими, то

$$\varphi_{Z+\eta}(t) = \varphi_Z(t) \varphi_{\eta}(t)$$

$$\begin{aligned} \varphi_{Z+\eta}(t) &= E e^{it(Z+\eta)} = E(e^{itZ} \cdot e^{it\eta}) = \\ &= E e^{itZ} \cdot E e^{it\eta} = \varphi_Z(t) \varphi_{\eta}(t) \end{aligned}$$

$$Z \sim N(m_1, \sigma_1)$$

$$\eta \sim N(m_2, \sigma_2)$$

$$\psi_{z+n}(t) = e^{itm_1 - \frac{\sigma_1^2 t^2}{2}} \cdot e^{itm_2 - \frac{\sigma_2^2 t^2}{2}}$$

$$= e^{-it(m_1+m_2) - \frac{(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)t^2}{2}} \text{ - това е}$$

характ. ф-я
на мат. отак-
ване на

$$f_{z+n}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_z(x-y) f_n(y) dy$$

$N(m_1+m_2, \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2})$
конволюция

3) $\psi_z(t)$ е реалнозначна $\Leftrightarrow$
разпр. на z е симетрично, т.е.

~~то~~ z и $-z$ имат едно и
също разпр.

$$P(z \in B) = P(z \in -B)$$

$\Leftarrow$

$$\psi_z(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} (\cos tx + i \sin tx) \underbrace{(f(x))}_{\text{реалнозначна}} dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \cos tx f(x) dx -$$

$$\Rightarrow \varphi_z(t) = \varphi_{-z}(-t) = \overline{\varphi_{-z}(t)}$$

$$? \varphi_z(t) = \varphi_{-z}(t)$$

реалнозн. $\varphi_z(t) = \overline{\varphi_z(t)}$

$$\varphi_z(t) = E(\cos t z) + i E(\sin t z)$$

$$\varphi_z(-t) = \varphi_z(t) = \varphi_{-z}(t) :))$$