

19.05.2014г.

ТБМС - лек.

4) $\varphi_3(t)$ - равном. непрер.

5) Ако $\in (|z|^n) < \infty$, то $\exists \varphi_3^{(n)}(t)$ - непрер.

$$\varphi_3(t) = \sum_{k=0}^n \frac{(it)^k}{k!} \in (z^k) + o(t^n)$$

$$\varphi_3(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} f(x) dx \quad \varphi'(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} ix \cdot e^{itx} f(x) dx.$$

Ф-ла на Тейлор: $\varphi_3(t) = \varphi_3(0) + \frac{\varphi_3'(0)}{1!} t + \dots + \frac{\varphi_3^{(n)}(0)}{n!} t^n + o(t^n)$

Метод на характеристичните ф-ции за
Д-во на гранични теореми

Т: 1 (Теорема за непрекъснатост (Ляпунов))

1) Ако $\{z_1, z_2, \dots, z_n, \dots\}$
(р-ца от с. вкл.)

$\{z_n \xrightarrow{d} z\}$,
които
по р-зпределение
(слаба сходимость)

то $\varphi_{z_n}(t) \rightarrow \varphi_z(t), \forall t.$

-до:

наем. те

$$\varphi_{z_n}(t) = E e^{it z_n}$$

$$f(x) = e^{itx}$$

сх. $\rightarrow E(f(z_n)) \rightarrow E(f(z))$

2) Ако $\varphi_{z_n}(t) \rightarrow \varphi(t), \forall t$ и ако
редукт $\varphi(t) \in \text{непр. при } t=0,$

то $\varphi(t) \in$ характеристична ф. на с.вет.
 $\{u\} \xRightarrow{\quad} \{ \quad \}$ (слабо конв.)
 $\{u\} \xRightarrow{\quad} \{ \quad \}$ по разпр. или слабо

Пр.: 1) Закон за големиот број:
 $\{z_1, z_2, \dots, z_n, \dots\}$ независни с.вет.
 и еднакво разпр. с.вет.
 с краен први абсолютен момент,
 т.е. $E|z_1| < \infty$.

$$\frac{\sum_{k=1}^n z_k}{n} \xrightarrow{\quad} E z_1 \quad \text{при нас} \quad E z_1 = 0.$$

(↓
закон по вероятност)

$$\frac{S_n}{n} \Rightarrow 0 \quad \varphi_{\frac{S_n}{n}}(t) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1.$$

$$\varphi_{\frac{S_n}{n}}(t) = \varphi_{S_n}\left(\frac{t}{n}\right), \text{ т.е. } \varphi_z(t) = E e^{it z}.$$

$$= \left(\varphi_{z_1}\left(\frac{t}{n}\right) \right)^n \quad \varphi_{z_1}(t) = 1 + o(t), \quad E z_1 = 0$$

$$= \left(1 + o\left(\frac{t}{n}\right) \right)^n \xrightarrow{\quad} 1$$

закон по вероятност

Централна гранична теорема

$\{z_1, \dots, z_n, \dots\}$ незав. еднакво разпр. с.вет.
 $E z_1^2 < \infty$.

$$S_n = \sum_{i=1}^n \xi_i$$

$$T = \frac{S_n - ES_n}{\sqrt{DS_n}} \Rightarrow N(0,1) \quad \text{при } n \rightarrow \infty \quad E\xi_1 = 0.$$

$$E\xi_1^2 = D\xi_1 = \sigma^2$$

$$\Rightarrow DS_n = n \cdot \sigma^2$$

$$? \frac{S_n}{\sqrt{n}} \Rightarrow N(0,1).$$

$$? \varphi_{\frac{S_n}{\sqrt{n}}}(t) \longrightarrow e^{-\frac{t^2}{2}} \quad \text{с-Б.О.}$$

$$\varphi_{\frac{S_n}{\sqrt{n}}}(t) = \varphi_{S_n}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) = \left(\varphi_{\xi_1}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right)^n =$$

$$\varphi_{\xi_1}(t) = 1 + \frac{(it)^2}{2} \sigma^2 + o(t^2)$$

$$= \left(1 - \frac{t^2 \sigma^2}{2n} + o\left(\frac{t^2}{n}\right)\right)^n =$$

$$= \left(1 - \frac{t^2}{2n} + o\left(\frac{t^2}{n}\right)\right)^n \longrightarrow \left(1 - \frac{t^2}{2n}\right)^n \longrightarrow e^{-\frac{t^2}{2}}.$$



Основни понятия и задачи на статистиката

1. Популация (ктерална свързаност)

и

извадка

- осн. понятие.

осн. зад.: от данните в извадката да направим
избор за популацията.

популация Ω (проект. от с.век.)

$X: \Omega \rightarrow R$
(с.век.) $\omega \rightarrow X(\omega)$
 число
 (резултат)
(от наблюдението над ω)

извадка: $X_1, X_2, \dots, X_n$ - с.век., които имат
следните свойства:

- 1) $X_1, X_2, \dots, X_n$ имат същото Ω като
генералната свързаност X .
- 2) $X_1, \dots, X_n$ имат същото разпределение
като X ;
- 3) $X_1, \dots, X_n$ са независими;

n = брой наблюдения = ОБЕМ на извадката;

Задача за оценка на неизвестен параметър
на ГС.

(параметрична статистика)

- Водят на разпр. на X е известен;

θ = неизвестен параметър на разпр. на X ;
 $\theta = ?$, но трябва да знаем нещо за популацията, а това е възможно извадката.

Дадено: Извадка $x_1, x_2, \dots, x_n$.
Как се решава тази зад.?

- 1) Метод на точковите оценки.
 - 2) Метод на интервалните оценки (на доверителните интервали).
 - 3) Метод на стат. хипотези.
- ↓ по трудност и по "сила".

Метод на точковите оценки:

Зад. 1: Статистика - всяка ф-ция, която зависи само от извадката.

$$g(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$$g(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Зад. 2: Точкова оценка - статистика, приема за стойност на неизвестния параметър.

θ - неизв. парам.

$$\hat{\theta} = \hat{\theta}(x_1, \dots, x_n) \quad \text{-- точкова оценка}$$

(~~θ~~ $\hat{\theta}(x_1, \dots, x_n)$ като значителен прием)

Видове точкови оценки

1.) Неизместени - ако $E\hat{\theta} = \theta$
ср. аритметична на оценката

$\hat{\theta} - \theta$ - грешка на оценката
 $\hat{\theta} - \theta = \hat{\theta} - E\hat{\theta} - \theta + E\hat{\theta}$

$$= \underbrace{\hat{\theta} - E\hat{\theta}}_{\text{случайна грешка}} - \underbrace{(\theta - E\hat{\theta})}_{\text{систематична грешка}} = 0$$

случайна грешка

систематична грешка

примери:

за неизм. оценки:

1) Ако $\theta = EX$, тогава оценката
 $\bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}$ - неизместена.

$$E\bar{X} = E \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} = \frac{1}{n} \cdot E(X_1 + X_2 + \dots + X_n) =$$

$$= \frac{1}{n} \cdot (EX_1 + EX_2 + \dots + EX_n) \stackrel{\text{св.з.}}{=} \frac{1}{n} \cdot n \cdot EX = EX = \theta.$$

2) Ако $\theta = DX$,

то изтеглята разumno
 да е използвана оценката

$X_1, X_2, \dots, X_n$
$\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}$

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (X_k - \bar{X})^2$$

Това обаче, е изместена оценка!!!
 защо?

$$E \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (X_k - \bar{X})^2 =$$

приемаме, че

$$EX = 0$$

$$DX = EX^2$$

$$= \frac{1}{n} \cdot E \left(\sum_{k=1}^n (x_k - \bar{x})^2 \right)$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n (x_k - \bar{x})^2 &= \sum_{k=1}^n (x_k^2 - 2\bar{x} \cdot x_k + \bar{x}^2) = \\ &= \sum_{k=1}^n x_k^2 - 2n \cdot \bar{x}^2 + n \cdot \bar{x}^2 = \\ &= \sum_{k=1}^n x_k^2 - n \cdot \bar{x}^2 \end{aligned}$$

$$E \sum_{k=1}^n (x_k - \bar{x})^2 = E \sum_{k=1}^n x_k^2 - n E \bar{x}^2 =$$

$$*) \quad \frac{1}{n} E \left(\sum_{k=1}^n (x_k - \bar{x})^2 \right) = DX - E \bar{x}^2 \quad \begin{matrix} \text{/: } n \\ \text{по } E \text{ изнесена} \end{matrix}$$

$$\begin{aligned} \bar{x}^2 &= \left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \right)^2 = \\ &= \frac{(x_1 + \dots + x_n)^2}{n^2} = \frac{\sum_{k=1}^n x_k^2 + 2 \sum_{i < j} x_i x_j}{n^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E \bar{x}^2 &= \frac{1}{n^2} \left(n DX + 2 \cdot \sum_{i < j} E(x_i x_j) \right) \stackrel{\text{об.3}}{=} \\ &= \frac{DX}{n} + \frac{2}{n^2} \sum_{i < j} E x_i E x_j \rightarrow 0 \end{aligned}$$

$$*) = \frac{n-1}{n} \cdot DX$$

Д.1
Неузместена оценка

$$E S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n (x_k - \bar{x})^2$$

Поправена дисперсия
на извадката