28.04.2014г. **ТВМС - лек.**

Основни непрекъснати разпределения

1. Нормално разпределение НВ!

вероятностна плътност:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \cdot e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} \qquad m, \sigma \text{ - параметри}$$

$$-\infty < x < +\infty \qquad \sigma > 0$$

св-ва:

$$\xi \sim N(m, \sigma)$$

1) $m = E\xi$

$\sigma^2 = D\xi$

Ако $m = 0, \sigma = 1$ я стандартно нормално разпределение

$$\Rightarrow \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$$

* при интегралната теорема на Моавър-Лаплас

$$P\left(a < \frac{k - np}{\sqrt{npq}} < b\right) \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

$$\| $$

$$P(a < Z < b)$$

$$Z \sim N(0,1)$$

$$E\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} (x - m + m) \cdot e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx =$$

$$= \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} (x-m)\, e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} d(x-m)}_{= 0} + \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} m \cdot e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx}_{= m} =$$

$$= 0 + m = m.$$

Аналогично се док., че $\sigma^2 = D\xi$. (по ф-лата:

$$D\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-m)^2 f(x)\,dx.$$

3) **Важно свойство:**

Ако $\xi \sim N(m,\sigma)$ (величина ξ е нормално разпределена с парам. m, σ)

a - число, то

$$\xi + a \sim N(m+a, \sigma), \quad \xi . a \sim N(m.a, \sigma.|a|).$$

($P(\xi \in dx) = f(x)dx$ вер. да попадне в интервалче)

$$P(\xi + a \in dx) = P(\xi \in dx - a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \cdot e^{-\frac{(x-a-m)^2}{2\sigma^2}} dx.$$

→ параметрите са $m+a$ и σ.

$$P(a.\xi \in dx) = P\left(\xi \in \frac{dx}{a}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \cdot e^{-\frac{\left(\frac{x}{a}-m\right)^2}{2\sigma^2}} \frac{dx}{a} =$$

заместваме най-горе (в началото)

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma a} \cdot e^{-\frac{(x-am)^2}{2\sigma^2 a^2}} dx$$

→ параметрите са $\sigma|a|$ и $a.m.$

Сл. от 3): Ако $\xi \sim N(m,\sigma)$, то $z = \frac{\xi - m}{\sigma} \sim N(0,1)$,

т.е. стандартно норм. разп. вел.

z - преобразуване

. **Гама разпределение**

$$\Gamma(p) = \int_0^{\infty} x^{p-1} . e^{-x} dx$$

Да положим $x = \frac{y}{\beta}$

$$\Rightarrow \Gamma(p) = \frac{1}{\beta}\int_0^\infty \left(\frac{y}{\beta}\right)^{p-1} e^{-\frac{y}{\beta}}\,dy =$$

$$= \beta^{-p}\cdot\int_0^\infty y^{p-1}\cdot e^{-\frac{y}{\beta}}\,dy$$

$$\frac{\int_0^\infty y^{p-1}\cdot e^{-\frac{y}{\beta}}\,dy}{\Gamma(p)\cdot\beta^p} = 1$$

$$\Rightarrow f(y) = \frac{y^{p-1}\cdot e^{-\frac{y}{\beta}}}{\beta^p\cdot\Gamma(p)}$$ е вероятностна плътност на някакво абсолютно непрекъснато разпредел.

Γ разпр. с параметри β и p. $= \Gamma(p, \beta)$.

Частен случай на Γ разпр.:

1) $p = 1 \Rightarrow f(y) = \frac{1}{\beta}\cdot e^{-\frac{y}{\beta}}$ = експоненциално разпределение с параметър β. $\mathcal{E}(\beta)$.

2) $p = \frac{n}{2}$, $n = 1, 2, \ldots$, $\beta = 2$.

$$f(y) = \frac{y^{\frac{n}{2}-1}\cdot e^{-\frac{y}{2}}}{2^{\frac{n}{2}}\cdot\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} = \chi^2(n)$$

(хиквадрат разпределение или разпределение на Пирсън)

n се нар. <u>степени на свобода</u> на разпределението

$\xi \sim \Gamma(p, \beta)$

$E\xi = ?\quad, D\xi = ?$

$$\underline{\underline{E\xi}} = \int_0^\infty x f(x)\,dx = \int_0^\infty x \cdot \frac{x^{p-1} \cdot e^{-\frac{x}{\beta}}}{\beta^p \cdot \Gamma(p)}\,dx =$$

$$= \frac{1}{\beta^p \cdot \Gamma(p)} \cdot \int_0^\infty x^p \cdot e^{-\frac{x}{\beta}} =$$

↓ виж ~~дефиницията~~

$$= \frac{1}{\beta^p \cdot \Gamma(p)} \cdot \beta^{p+1} \cdot \Gamma(p+1) = \underline{\underline{\beta \cdot p}}$$

$$\left(* \ \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p)} = p \right)$$

~~Бета разпределение~~

$$B(a,b) = \int_0^1 x^{a-1} \cdot (1-x)^{b-1}\,dx \qquad a,b>0$$

$$f(x) = \frac{x^{a-1} \cdot (1-x)^{b-1}}{B(a,b)}$$ – вероятностна плътност на $B(a,b)$ разпр.

$$E\xi = \int_0^1 x f(x)\,dx \overset{\xi \sim B(a,b)}{=} \frac{1}{B(a,b)} \cdot \int_0^1 x^a (1-x)^{b-1}\,dx =$$

$$= \frac{B(a+1,b)}{B(a,b)} = \frac{\Gamma(a+1) \cdot \cancel{\Gamma(b)}}{\Gamma(a+b+1)} \cdot \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a) \cdot \cancel{\Gamma(b)}} =$$

$$B(a,b) = \frac{\Gamma(a) \cdot \Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$$

$$= \frac{a}{a+b}$$

Частни случаи:

1) $a = b = 1$ ⇒ стандартно равномерно разпределение.

$f(x) = 1$

2) $a = b = 1/2$ ⇒ разпределение на аркусситуса (arcsin) разпр.

$$f(x) = \frac{c}{\sqrt{x(1-x)}}$$

$$F(x) = \int_0^x f(x)\,dx = c\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{x}\sqrt{1-x}} = 2c \int_0^x \frac{d\sqrt{x}}{\underbrace{\sqrt{1-x}}_{\sqrt{1-(\sqrt{x})^2}}} = 2c.\arcsin\sqrt{x}.$$

Разпределение на функция от сл. вел.

ξ е сл. вел. с вер. плътност $f_\xi(x)$.

$g(x)$ е детерминирана ф-ция

$\eta = g(\xi)$ нова случайна вел.

$f_\eta(x) = ?$

1) Случай $g(x)$ е монотонно растяща (пр. x, x^2, e^x)

$g^{-1}(x)$ обратната на g, която също е мон. растяща!

$$F_\eta(x) = P(\eta \le x) = P(g(\xi) \le x) = P(\xi \le g^{-1}(x)) = F_\xi(g^{-1}(x))$$

$$f_\eta(x) = F_\eta'(x) = \frac{d}{dx} F_\xi(g^{-1}(x)) = F_\xi'(g^{-1}(x)) \cdot \frac{d}{dx} g^{-1}(x) = \frac{f_\xi(g^{-1}(x))}{g'(g^{-1}(x))}.$$

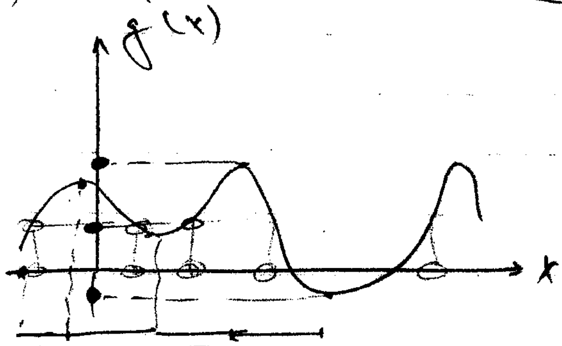
2сл.) g е монотонно намаляваща.
$\exists\, g^{-1}$ също монотонно намаляваща.

$$\underline{F_\eta(x)} = P(\eta \le x) = P(g(\xi) \le x) = P(\xi \ge g^{-1}(x)) = 1 - F_\xi(g^{-1}(x))$$

$$\underline{f_\eta(x)} = F'_\eta(x) = \frac{d}{dx}\left(1 - F_\xi(g^{-1}(x))\right) = -F'_\xi(g^{-1}(x))\frac{d}{dx}g^{-1}(x) =$$

$$= \frac{f_\xi(g^{-1}(x))}{|g'(g^{-1}(x))|} \Big\}$$ обща формула и за 2-та случая

3сл.) Произволна ф-ция.

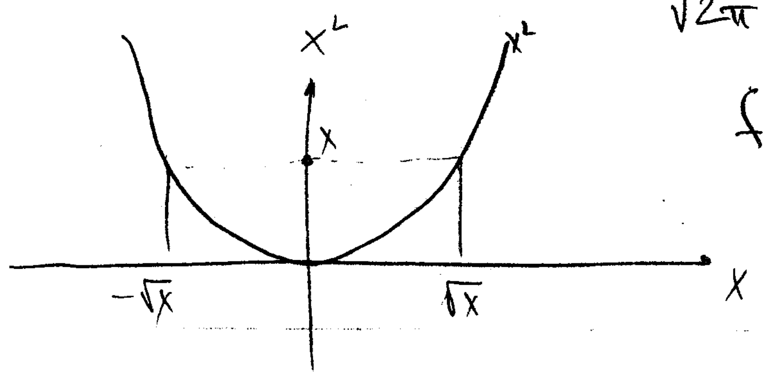


$\eta = g(\xi)$

интервали на монотонност.

$$f_\eta(x) = \sum_{y = g^{-1}(x)}' \frac{f_\xi(g^{-1}(x))}{|g'(g^{-1}(x))|}.$$

Примери: 1) $Z \sim N(0,1)$ $\quad f_Z(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$, $\quad g(x) = x^2$.
$\eta = \xi^2$.



$f_\eta(x)_{x \ge 0} =$

заместване във ф-лите!

$$f_\eta(x) = \frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x}{2}}}{2\sqrt{x}} \cdot 2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} \cdot e^{-\frac{x}{2}} \Rightarrow$$ вероятн. плътност на $\chi^2(1)$-разп.

$g^{-1}(x) = \pm\sqrt{x}$

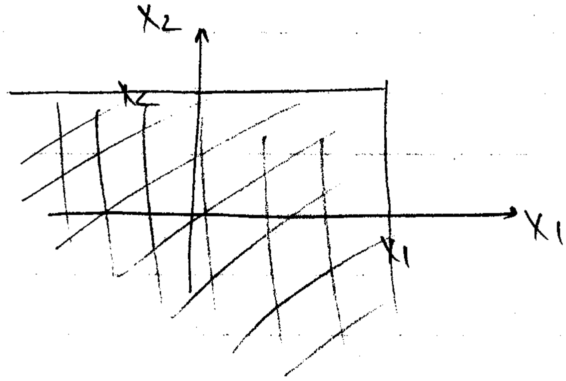
вторият член от сумата е същият заради модула

Случайни вектори

това са няколко сл. вел.
$(X_1, X_2, \dots, X_n) : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$

1. ф-ция на разпределение на сл. в-р.

съвместна $F(x_1, \dots, x_n) = P(X_1 \le x_1, X_2 \le x_2, \dots, X_n \le x_n)$



при $n=2$

(да попаднем в защрих. част)

Съвместна вероятностна плътност

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{\partial^n F(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_n}$$

$P(X_1 \in dx_1, X_2 \in dx_2, \dots, X_n \in dx_n) = f(x_1, \dots, x_n)\, dx_1 dx_2 \dots dx_n$

Свойства на $F(x_1, \dots, x_n)$:

1) ф-цията на разпр. е ненамаляваща по $\forall$ 1 от аргументите си;

2) $\lim\limits_{x_i \to -\infty} F(x_1, \dots, x_n) = 0$.

3) $\lim\limits_{x_i \to +\infty} F_{x_1, x_2, \dots, x_n}(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n) = F_{x_1, \dots x_{i-1}, x_{i+1}, \dots x_n}(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)$.

<u>Условия</u> <u>за</u> <u>съгласуваност</u>.

<u>Т на Колмогоров за съгласуваните разпределения:</u>

Нека $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ удовлетворява 3).
Тогава $F(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ е ф-ция на разпределение на някой случаен в-р.
(без д-во)

$*_2)$ $F(x_1, x_2, \dots x_i, \dots x_n) \le F(\infty, \dots, x_i, \dots \infty)$ – ф. на разпр. на x_i
$x_i \to -\infty$ 0

2. <u>Случайни</u> <u>в-ри</u> <u>с независими</u> <u>координати.</u>

ако $P(x_1 \in I_1, x_2 \in I_2) = P(x_1 \in I_1) . P(x_2 \in I_2)$
$I_1, I_2 \in \mathcal{B}$.

При $n = 2$.

<u>Т.</u> Следните условия са еквивалентни:

1) x_1, x_2 са независими.
2) $F(x_1, x_2) = F_{x_1}(x_1) . F_{x_2}(x_2)$.
3) $f(x_1, x_2) = f_{x_1}(x_1) . f_{x_2}(x_2)$.

<u>Д-во:</u> $1) \to 2)$: $I_1 = (-\infty, x_1]$, $I_2 = (-\infty, x_2]$ + <u>деф</u>

$P(x_1 \in I_1, x_2 \in I_2) = P(x_1 \le x_1, x_2 \le x_2) = F(x_1, x_2) - F_{x_1}(x_1) . F_{x_2}(x_2)$

$2) \to 3)$: $\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} = f(x_1, x_2) = f_{x_1}(x_1) \cdot f_{x_2}(x_2)$.

$3) \to 1)$: $P(x_1 \in I_1, x_2 \in I_2) = \int\limits_{I_1}\int\limits_{I_2} f(x_1, x_2) dx_1 x_2 = \int\limits_{I_1}\int\limits_{I_2} f_{x_1}(x_1) f_{x_2}(x_2) dx_1 dx_2 =$
$\int\limits_{I_1} f_{x_1}(x_1) dx_1 . \int\limits_{I_2} f_{x_2}(x_2) dx_2 = P(x_1 \in I_1) . P(x_2 \in I_2)$ – доказано.

<u>ок.</u>