31.03.2014г. ТВМС - лек.

Интегрална теорема на Моавър-Лаплас

$$P\left(a < \frac{k-np}{\sqrt{npq}} < b\right) \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_a^b e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx.$$

$$\left|\frac{k}{n} - p\right| = o\left(n^{-\frac{1}{3}}\right)$$

$$\underbrace{P\left(a < \frac{k-np}{\sqrt{npq}} < b\right)}_{k\text{ — брой успехи}} = \sum_{i:\ a<\frac{i-np}{\sqrt{npq}}<b} P_n(i)$$

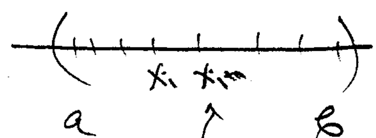
(i успеха в n опита)

$$\left|\frac{i}{n} - p\right| = o\left(n^{-\frac{1}{3}}\right)$$

$\approx$ близка до

$$\sum_{i:\ a<\underbrace{\frac{i-np}{\sqrt{npq}}}_{x_i}<b} \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} \cdot e^{-\frac{(i-np)^2}{2npq}} =$$

$$= \sum_{i:\ a<x_i<b} \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} \cdot e^{-\frac{x_i^2}{2}} =$$



x_i е в инт.

$$x_{i+1} - x_i = \frac{i+1-np}{\sqrt{npq}} - \frac{i-np}{\sqrt{npq}} = \frac{1}{\sqrt{npq}}.$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{i:\ a<x_i<b} e^{-\frac{x_i^2}{2}} \, \Delta x_i \longrightarrow$$

това е риманова интегрална сума на $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x_i^2}{2}}$

$$\Rightarrow \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_a^b e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx.$$

$$P\left(a < \frac{S_n - ES_n}{\sqrt{DS_n}} < b\right)$$

$S_n = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n$

$\xi_1, \dots, \xi_n, \dots$ са независими сл. вел. с разпр. на Бернули с вер. за успех p

$$\downarrow$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

Друга форма на запис.

Централна гранична теорема
(за величини с крайна дисперсия, не само на бернулиеви)

Пр.: $n = 100$ хвърляния на монета.
k = бр. „ези"
$P(45 < k < 55) = ?$

по ~~схемата~~ на Бернули: $\sum_{k=46}^{54} C_{100}^{k} \cdot \frac{1}{2^{100}}$ – затова не

ще използвам т-мата.
вел. k има биномно разпр. с параметри $100, \frac{1}{2}$.

$$k \sim Bi(\underset{n}{100}, \underset{p}{1/2})$$

$$E(k) = n.p = 50$$

$$D(k) = npq = 25$$

$$= P\left(\frac{45-50}{5} < \frac{k-50}{\sqrt{25}} < \frac{55-50}{5}\right) =$$

$$= P\left(-1 < \frac{k-50}{5} < 1\right) \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^{1} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \approx 0.68.$$

$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^{1} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 2L(1)$

има таблици за този интеграл.

(табл. за дисперсия !?)

$$L(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$ — ф-ция на Лаплас

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-x^2} dx = erf(x)$$ — интеграл на вероятностите;

→ табулирани са тези функции.

Съвременна теория на вероятностите

СЕ с неизброимо много изходи

(случаен експеримент)

СЕ: безбр. мн. хвърляния на монета

сл. пр-во на експ.: $\Omega = \{\omega : \omega = \omega_1 \omega_2 \dots \omega_n \dots, \ \omega_n = \{\text{ези} \mid \text{тура}\}, n = 1, 2, \dots\}$

ω_1 — изход на 1-то хвърляне

$\exists$ изоморфизъм $i : \Omega \longleftrightarrow [0;1]$

$\omega = \omega_1 \omega_2 \dots \omega_n \dots \longleftrightarrow \alpha \in [0;1]$:

$\alpha = 0,\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots$ — двоично predст. $= \sum_n \alpha_n \cdot \frac{1}{2^n}$.

$$\alpha_n = \begin{cases} 1, & \omega_n = E \\ 0, & \omega_n = T \end{cases}$$

Събития: разл. инт. $A_1 = [0; 1/2) = \{\alpha : \alpha_1 = 0\}$

$P(A_1) = 1/2 = |A_1|$ дължината на A_1.

(A_1 → първото хв. е тура, а $\forall$ ост. са каквито си искат)

$A_{11} = [0; 1/4] = \{\alpha : \alpha_1 = \alpha_2 = 0\}$ ⇒ A_{11} е събитието първите 2 хвърляния да са тура.

$P(A_{11}) = 1/4 = |A_{11}|$

<u>Пример на множество от интервала $[0;1]$, което няма дължина</u>

Въвеждане релация на екв. м/у 2 числа a и b от $[0;1]$

$a \sim b$, ако $a - b \in \mathbb{Q}$

→ релация на еквивалентност;

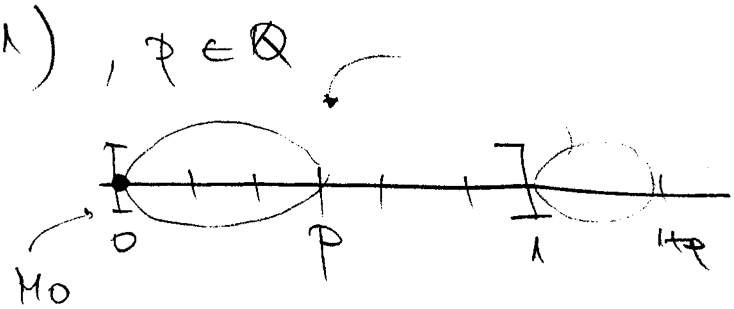
M = мн-вото от класовете на еквивалентност отн. "$\sim$".

M_0 = мн.вото от елементите, които сме избрали по един представител от клас.

M_0 няма дължина — защо?

M_0 е с представител 0 от класа на рац. числа

$$M_p = M_0 + p \pmod 1, \quad p \in \mathbb{Q}$$



$$a + b \pmod 1 = \begin{cases} a+b, & a+b<1 \\ a+b-1, & a+b>1 \end{cases}$$

$$\bigcup_{p \in \mathbb{Q} \cap [0;1)} M_p = [0;1]$$, защото съдържа ∀ рац. ч-а и ∀ сум на рац. и ирац. числа

$M_p \cap M_q = \emptyset \quad , p \neq q$
(ако $\neq \emptyset$, все едно сме избрали 2 числа от 1 клас на еквивалентност).

Нека допуснем, че M_0 има дължина и $|M_0| = \varepsilon \geq 0$.
(дължината на мн.-с 1т. е 0)

$\Rightarrow |M_p| = \varepsilon$ за $\forall p$.

Р*згл. $\bigcup\limits_{p \in \mathbb{Q} \cap [0;1)} M_p [0;1]$

$$\sum_{p \in [0;1)} |M_p| = \underline{1}$$

но ε не може да е 0 и не може да е >0, защото това е безкрайна сума.
$\Rightarrow$ няма дължина.

Стефан Банах (1924) полски математик;
(пример:

$n \geq 3$ и вземем 2 сфери

$S_1^{(n)}$, $S_2^{(n)}$ – сфери с радиуси 1 и 2 в $\mathbb{R}^n$

$\exists \; k = \underline{\underline{k(n)}} : \; S_1^{(n)} = \underbrace{A_1 + A_2}_{} + \ldots + A_k$
непресичащи се обединение.

$S_2^{(n)} = B_1 + B_2 + \ldots + B_k$
и $A_1 \cong B_1, \; A_2 \cong B_2, \ldots, A_k \cong B_k$

$k=5$ в зърнното пр-во

Една ябълка я разрязвам на 5 части и с $\lambda=1$ с тях правя ябълка с $\lambda=2$

Точно с 5 части! , с 4 или с 6 не ?

Стефан Банах

Излиза, че тези части нямат обем (?)

Аксиоматика на Колмогоров

Ω , $\mathcal{F}$

$\uparrow$

система от подмножества на Ω, които да се наричат събития.

Каква да е тази с-ма?

$$\left.\begin{array}{l} A\cup B \\ A\cap B \\ \overline{A} \end{array}\right\} \in \mathcal{F}$$

Ако A и B са събития, т.е. $A, B \in \mathcal{F}$, то

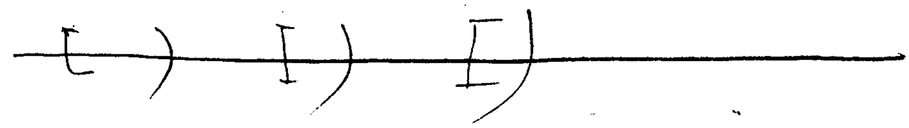
Система от подмн. на Ω удовлетворяващи това условие се нар. алгебра.

$\rightarrow$ $\mathcal{F}$ трябва да е поне алгебра!

Оказва се, че това не е достатъчно.

Защо не е достатъчно?

пр.:



Крайно обедин. на такива непрес. се м-ва не можем да получим едноточкови множества.

Ако трябва да наричаме събития всички тези м-ва, то ще трябва да изключим цялата елементарна теория на вер.

Д.) Система F се нар. <u>σ-алгебра</u>, ако р-ята от съб. $A_1, \dots, A_n, \dots \in F$, то

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in F$$

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in F$$

$$\overline{A_i} \in F$$

$$\{a\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} [a; a+1/n)$$

Д.) Минимална σ-алгебра в $\mathbb{R}^1$ (правата), съдържаща всевъзможни интервали $[a;b)$ се нар. <u>Борелова σ-алгебра</u>

--> достатъчно е да е σ-алг. (както по-горе)

<u>Какво е вероятност?</u>

$$P: \begin{cases} F \longrightarrow [0,1) \\ \ \ \psi \qquad\quad \cup \\ A \longrightarrow P(A) \end{cases}$$