6.06.2013г. ДИС - упражнения

1. диф на неявни f
2. смяна на променливите
3. лок екстремуми
4. абсолютни екстремуми
5. множители на Лагранж
6. сходимост на Σ
7. събиране на ст. редове и почленно диф. на f и Σ

Редове на Фурие

ако имаме $f(x)$

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{l} + b_n \sin\frac{n\pi x}{l}\right)$$

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx$$

$n = 0, \ldots$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx$$

Th ↓

ако имаме интервал ω -

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{a+\omega}^{b+\omega} f(x)\,dx$$

$$\int_0^{\omega} f(x)\,dx = \int_a^{a+\omega} f(x)\,dx$$

$f(x)$ - нечетна $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$ $f(x)$-четна $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$

Th Ако $f(x)$ е частично гладка (в краен брой т. диференц.), то редът на Фурие е сх (в рст не т. диференцуема) и неговата сума е $f(x)$

в точките, в които f е прекъсната (ср. аритметично на лявата и дясната граница)

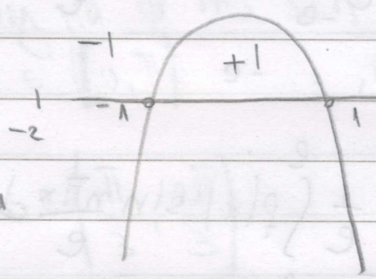
$$\frac{\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}} f(x) + \lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x>x_0}} f(x)}{2}$$

Задачи

(знак)

$f(x) = \operatorname{sign}(1-x^2) \underset{[-2,1]}{=}$

$\operatorname{sign}(1-x^2)$ - графика

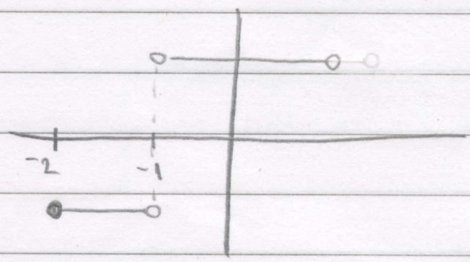


$$f(x) = \underset{[-2,1]}{\operatorname{sign}(1-x^2)} = \begin{cases} -1 & -2 \le x \le -1 \\ 1 & -1 < x < 1 \end{cases}$$

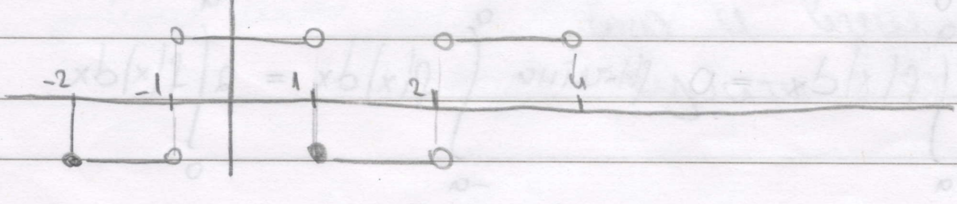
интервала в който е дефинирана

$2\ell = 3$

(пренасяме f със същите интервали



- симетрична относно Ox



тецоли $\overbrace{\quad}^{\text{четна - заради симетрията}}$

$$b_n = \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x) \underbrace{\sin\frac{n\pi x}{\ell}}_{\text{нечетна}} dx$$

четна · нечетна = н

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0 \implies b_n = 0$$

смятаме a_n

$$a_n = (2)\frac{2}{3}\int_0^{3/2} f(x)\cos\frac{2n\pi x}{3}dx =$$ ще се разложи на $\int$ от

от 0 до 1 и от 1 до $\frac{3}{2}$

защото сме взели $\frac{1}{2}$ от интервала

$$a_0 = \frac{4}{3}\int_0^{3/2} f(x)dx = \frac{4}{3}\left(\int_0^1 1dx + \int_1^{4/3} -1dx\right) = \frac{4}{3}\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{2}{3} = a_0$$

$$a_n = \frac{4}{3}\int_0^{3/2} f(x)\cos\frac{2n\pi x}{3}dx = \frac{4}{3}\left(\int_0^1 f(x)\cos\frac{2n\pi x}{3} + \int_1^{2/3} f(x)\cos\frac{2n\pi x}{3}dx\right) =$$

$$= \frac{4}{3}\int_0^1 \frac{1}{3}\cos\frac{2n\pi x}{3}dx - \frac{4}{3}\int_1^{3/2}\cos\frac{2n\pi x}{3}dx =$$

$$= \frac{4}{3}\left(\frac{3}{2n\pi}\sin\frac{2n\pi x}{3}\Big|_0^1 - \frac{3}{2\pi}\sin\frac{2n\pi x}{3}\Big|_1^{3/2}\right) = \frac{4}{3}\left(2\sin\frac{2n\pi}{3}\cdot\frac{3}{2n\pi}\right) = \frac{4\sin\frac{2n\pi}{3}}{n\pi}$$

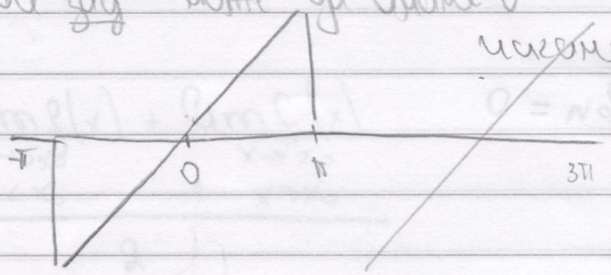
при кратни на $n = 0$
при кратни $n+1 = 1$
при кратни $n+2 = -1$

Задача

$f(x) = x$ какво озн да и развие по sin

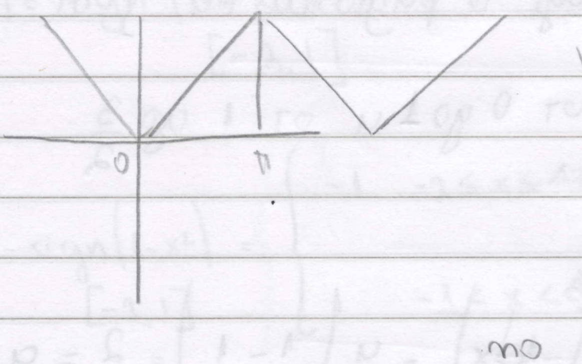
$f(x) = \{$

какви зад може да имаме ↓ по sin



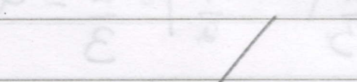
искаме коефициент от a_n да са $= 0$

ако искаме да разв по cos



коеф от $b_n = 0$

по sin и cos



в интервала $[0, 2\pi]$

вземаме в $0, 2\pi = x$

и след това по периодичност

задача

$f(x) = x \quad [-\pi, \pi]$

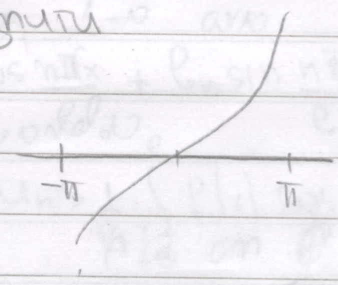
$a_n = 0$

$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x \sin nx\,dx = \frac{2}{n\pi}\int_0^{\pi} x \sin nx\,dxn = \frac{2}{\pi n}\int_0^{\pi} x\, d\cos nx =$

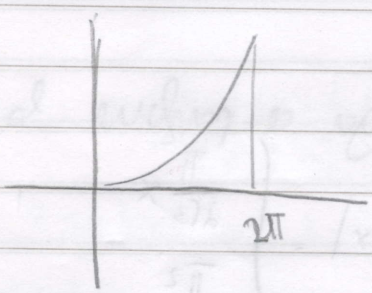
$= -\frac{2}{n\pi}\left(x\cos nx \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \cos nx\,dx \right) = -\frac{2}{n\pi}\cos n\pi + \underbrace{\int_0^{\pi} \cos nx\,dnx}_{0} = \frac{2(-1)^n}{n}$

задачи от изпити

$f(x) = x^3$



$f(x) = x^3 \quad [0, 2\pi]$

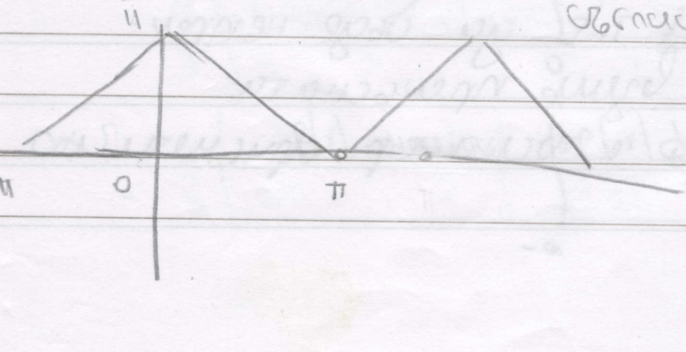


задача

а) да се развие $f(x) = \begin{cases} \pi + x, & [-\pi, 0] \\ \pi - x, & [0, \pi] \end{cases}$

б) за кой x получената ред е сх

в) сумата на реда

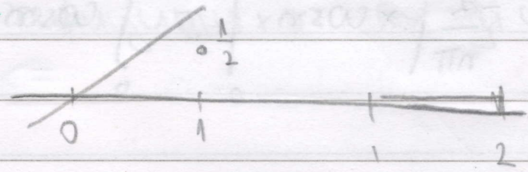


Непрекъсната навсякъде
съгласно Th реда на Фурие във ∀ точка е сх
и във всяка точка сумата
му е $f(x)$

За домашно!

да се развие $f(x) = \begin{cases} x & 0 \le x < 1 \\ a & x = 1 \\ 0 & 1 < x \le 2 \end{cases}$ в ред на Ф

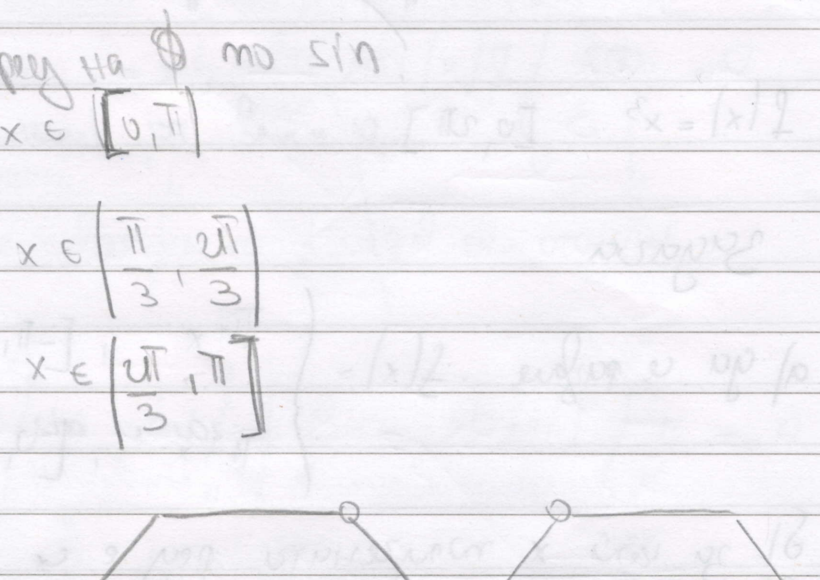
да се определи a, при която сумата на реда на Фурие да е $= f(x)$ във всяка точка



ако $a = \frac{1}{2}$ реда за $\forall x$ съвпада с $f(x)$

задача да се развие в ред на Ф по sin

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2\sqrt{3}} x, & x \in [0, \pi) \\ \frac{\pi^2}{6\sqrt{3}}, & x \in \left(\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right) \\ \frac{\pi}{2\sqrt{3}}(\pi - x, & x \in \left(\frac{2\pi}{3}, \pi\right] \end{cases}$$



ако искаме Ф трябва да
вземем f т.е да бъде непрек
ако я вземем прекъснати
сумата е точно ср. аритметично