

28.05.2013г.

ДМС - лекция

Интегралы зависящие от параметра

$f(x, y)$ ,  $x \in [a, b]$ ,  $y \in Y$ . За  $\forall$  фикс.  $y$  из  $Y$   $\exists I(y) = \int_a^b f(x, y) dx$

Th1 Если  $f(x, y)$  е непрер. в прямоугольнике  $D = [a, b] \times [c, d]$ .

Тогда  $I(y)$  е непрер. в  $[c, d]$

Док. с основана на факта, че  $f(x, y)$  е непрер. непрер. в  $D$

Th2 Если  $f(x, y)$  е непрер. в  $[a, b] \times [c, d]$  Тогда  $I(y)$  е интегр. в  $[c, d]$  и  $\int_c^d \left[ \int_a^b f(x, y) dx \right] dy = \int_a^b \left[ \int_c^d f(x, y) dy \right] dx$

за интегр.

Th3 Если  $f(x, y)$  е непрер. в  $D = [a, b] \times [c, d]$  и если  $f'_y(x, y)$  е непрер. в  $D$ . Тогда  $I(y)$  е дифр. в  $[c, d]$  и  $I'(y) = \int_a^b f'_y(x, y) dx$

Док. Враз дифер. частно  $I(y+h) - I(y) =$

$$= \int_a^b \frac{f(x, y+h) - f(x, y)}{h} dx = \frac{I(y+h) - I(y)}{h} = \int_a^b f'_y(x, y+\theta h) dx$$

$\varphi(y+h) - \varphi(y) = \varphi(y+\theta h) \cdot h$ . Тъж крайните наричаме

искаме  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{I(y+h) - I(y)}{h} = \int_a^b f'_y(x, y) dx$

трябва да док. че  $\lim_{h \rightarrow 0} \int_a^b [f'_y(x, y+\theta h) - f'_y(x, y)] dx \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$

искаме да док.

Имаме че  $f'_y(x, y)$  е непрер. в  $D \Rightarrow$  е непрер. непрер. то  $\epsilon > 0$  може да намери  $\delta > 0$ , че  $|x' - x''| < \delta \Rightarrow |f'_y(x', y') - f'_y(x'', y'')| < \frac{\epsilon}{2}$

$< \frac{\epsilon}{2}$

$$x', x'' \in [a, b], \quad y', y'' \in [c, d]$$

укажем  $\Delta h \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$

$$x' = x'' = x$$

$$y' = y'' = y$$

$$y' = y + \Delta h, \quad y'' = y$$

$$\text{Ако } h < \delta \Rightarrow x' - x'' = 0, \quad |y' - y''| = |\Delta h| < \delta$$

Тогава можем да изберем  $\delta \in [0, \epsilon]$  в  $\Delta h$  е по-малко от

$$\frac{\epsilon}{b-a} \Rightarrow \Delta h < \frac{\epsilon}{b-a} \int_a^b dx = \epsilon$$

Th Нека  $f(x, y)$  и  $f'_y(x, y)$  са непр. в  $[a, b] \times [c, d]$ .

Нека  $\alpha(y)$  и  $\beta(y)$  са непр. в  $[c, d]$ .

Тогава, ако  $I(y) = \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x, y) dx$ , то тя е диференц. и

$$I'(y) = \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f'_y(x, y) dx + f(\beta(y), y) \cdot \beta'(y) - f(\alpha(y), y) \cdot \alpha'(y)$$

$$F(y) = \int_a^y f(x) dx$$

$y$  е фиксирано

$$F'(y) = f(y)$$

не е изяснено

Док. 1  $\frac{I(y+h) - I(y)}{h} = \frac{1}{h} \int_{\alpha(y+h)}^{\beta(y+h)} f(x, y+h) dx - \frac{1}{h} \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x, y) dx =$

$$= \int_{\alpha(y+h)}^{\beta(y+h)} \frac{f(x, y+h)}{h} dx + \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} \frac{f(x, y+h) - f(x, y)}{h} dx +$$

така, както по изхода Th

$$\frac{1}{h} \int_{\beta(y)}^{\beta(y+h)} f(x, y+h) dx = \int_{\beta(y)}^{\beta(y+h)} f(x, y+h) dx = f(\xi, y+h) \cdot (\beta(y+h) - \beta(y))$$

$\beta(y) \rightarrow \beta(y+h)$        $\beta(y)$        $f(x, y, y)$        $\beta'(y)$

$\xi \in \tau$ . В интервале ограничена от  $\beta(y)$ ,  $\beta(y+h)$

$$\beta(y+h) \rightarrow \beta(y) \quad \beta(y) \rightarrow \beta(y) - 1/m$$

Задача

$$I(a) = \int_0^{\pi/2} \ln|a^2 - \sin^2 \theta| d\theta \quad a > 1$$

$$I'(a) = \int_0^{\pi/2} \frac{2a}{a^2 - \sin^2 \theta} d\theta = 2a \int_0^{\pi/2} \frac{\frac{dt}{1+t^2}}{\frac{a^2 + a^2 t^2 + t^2}{t^2 + 1}} = 2a \int_0^{\infty} \frac{dt}{a^2 + (a^2 + 1)t^2}$$

$$= \int_0^{\infty} \frac{du}{\sqrt{a^2 - 1} (a^2 + u^2)} \quad u = \sqrt{a^2 - 1} t \quad du = \sqrt{a^2 - 1} dt$$

$$= \frac{2a}{\sqrt{a^2 - 1}} \cdot \frac{1}{a} \arctg \frac{u}{a} \Big|_0^{\infty} = \frac{2}{\sqrt{a^2 - 1}} \cdot \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{\sqrt{a^2 - 1}}$$

$$I(a) = \int I'(a) da + C = \pi \int \frac{da}{a^2 - 1} + C = \pi \ln|a + \sqrt{a^2 - 1}| + C$$

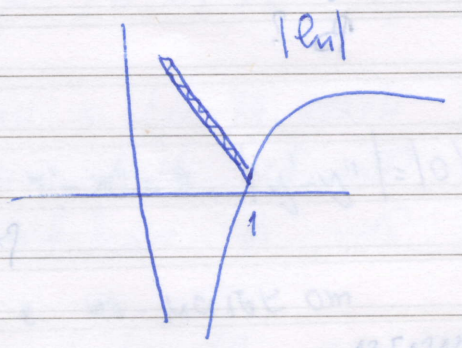
$$C = \int_0^{\pi/2} \ln|a^2 - \sin^2 \theta| d\theta - \pi \ln(a + \sqrt{a^2 - 1})$$

$\ln a^2 + \ln(1 - \frac{\sin^2 \theta}{a^2}) = 2 \ln a + \ln(1 - \frac{\sin^2 \theta}{a^2})$

$$C = \int_0^{\pi/2} \ln \left| 1 - \frac{\sin^2 \theta}{a^2} \right| d\theta = \pi \ln \frac{a^2 + \sqrt{a^4 - 1}}{a}$$

$A \rightarrow 0$   
 $a \rightarrow \infty$

$$\left| \ln \left| 1 - \frac{\sin^2 \theta}{a^2} \right| \right| \leq \ln \left| 1 - \frac{\sin^2 \frac{\pi}{2}}{a^2} \right| \left| \ln \left| 1 - \frac{1}{a^2} \right| \right|$$



$|\ln|$  в  $[0, 1]$  е намаляваща

$$A \leq \frac{\pi}{2} \left| \ln \left| 1 - \frac{1}{a^2} \right| \right|$$

$$0 \leq A \leq 0$$

$$2 \ln a + \ln \left| 1 - \frac{\sin^2 \theta}{a^2} \right|$$

$$I = \pi \ln |a + \sqrt{a^2 - 1}| - \pi \ln 2 = \pi \ln \frac{a + \sqrt{a^2 - 1}}{2}$$

за информация:

$$\Gamma(a) = \int_0^{\infty} x^{a-1} e^{-x} dx \quad 0 < x < \infty \quad a > 0$$

$$\Gamma(a+1) = a \Gamma(a)$$

$$\Gamma(1) = 1$$

$$\Gamma(n+1) = n!$$

$$\Gamma(x) = x^{x-1/2} e^{-x} e^{\frac{\theta}{12x}} \sqrt{2\pi}$$

Бета функция.

$$B(a, b) = \int_0^1 x^{a-1} (1-x)^{b-1} dx$$

$f(x, y)$ ,  $x \in [a, b]$ ,  $y \in Y$ .  $\exists$   $\forall$  функ  $y$  на  $\exists$   $\int_a^b f(x, y) dx$

Th1: Если  $f(x, y)$  е непрерывна в прямоугольнике  $D = [a, b] \times [c, d]$ .

Функция  $I(y) = \int_a^b f(x, y) dx$  е непрерывна в  $[c, d]$

Доказательство: Функция  $f(x, y)$  е равномерна непрерывна в  $D$

Th2: Если  $f(x, y)$  е непрерывна в  $[a, b] \times [c, d]$  и функция  $I(y)$  е непрерывна в  $[c, d]$  и  $\int_a^b f(x, y) dx / dy = \int_a^b \partial f(x, y) / \partial y dx$

и наоборот

Th3: Если  $f(x, y)$  е непрерывна в  $D = [a, b] \times [c, d]$  и функция  $f_y(x, y)$  е непрерывна в  $D$ . Тогда  $I(y)$  е дифференцируема в  $[c, d]$  и  $I'(y) = \int_a^b f_y(x, y) dx$

Доказательство: Определим разность  $I(y+h) - I(y)$

$$\int_a^b \frac{f(x, y+h) - f(x, y)}{h} dx = \frac{1}{h} \left[ \int_a^b f(x, y+h) dx - \int_a^b f(x, y) dx \right] = \int_a^b \frac{f(x, y+h) - f(x, y)}{h} dx$$

$f(y+h) - f(y) = f'(y)h + o(h)$ , и из этого неравенства

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{I(y+h) - I(y)}{h} = \int_a^b f_y(x, y) dx$$

$$\text{требуется допустить, что } \int_a^b [f_y(x, y+h) - f_y(x, y)] dx \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$$

и докажем, что это так

Поскольку  $f_y(x, y)$  непрерывна в  $D$ , то в каждой точке  $(x, y)$  непрерывна

на  $\delta > 0$  найдутся  $\epsilon > 0$ , и  $|x - x'| < \delta \Rightarrow |f_y(x, y) - f_y(x', y)| < \epsilon$

$$|y - y'| < \delta$$

$$< \frac{\epsilon}{\epsilon_0}$$