

~ ДУС ~

1. $f_n(x) = x^4 \quad [0, 1]$

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x = 0 \\ 0 & 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

$$f(x) \geq 0$$

$$f(x) \equiv 0$$

Для x -фикс. $\forall \varepsilon$ найм. $\delta = \delta(x) : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, n > \delta(x)$

Def. К., че редицата $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ е монотонно равностепенно към $f(x)$ в множ. M , ако за $\forall \varepsilon > 0 \exists \nu: n > \nu \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ (едновременно за всички $x \in M$)

$$\begin{aligned} & |f_n(x) - f(x)| \\ & \left| \frac{1}{1+nx} - 0 \right| < \varepsilon \quad 0 < x \leq 1 \\ & \left| \frac{1}{1+n \cdot 1} - 1 \right| \quad x = 1 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ сходността же е равномерна

$$4. \left| \frac{\sin nx}{n} - 0 \right| < \epsilon$$

$$\frac{|\sin nx|}{n} < \epsilon$$

Дост. е $\frac{1}{n} < \varepsilon$, $n > \frac{1}{\varepsilon} = N \Rightarrow$ сход. е равномерна.

Лем. К, че $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ е равномерно сходяща в M , ако редицата $S_n(x)$ от парц. му суми клони равномерно към $S(x)$ -сума.

НЛЧ за равномер. сходимост: $f_n(x) \xrightarrow{M} f(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f_n(x) \text{ клони равн.} \\ \text{към } f(x) \text{ в } M: \\ f_n(x) \xrightarrow{M} f(x) \end{cases}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sup_{x \in M} |f_n(x) - f(x)| \right) = 0$$

$\{ \delta - \epsilon_0 : \Rightarrow f_n(x) \xrightarrow{M} f(x) \Rightarrow \text{по } \epsilon \text{ накл. } \exists : n > \nu$

$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{2}$ за всички x от M едновременно.

$$\sup_{x \in M} |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{\epsilon}{2} < \epsilon \text{ за } n > \nu$$

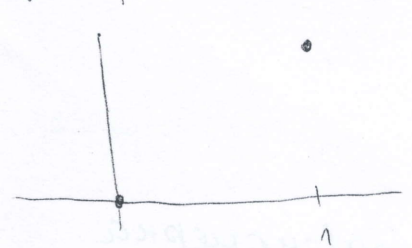
$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sup_{x \in M} |f_n(x) - f(x)| \right) = 0$$

$\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \Rightarrow \text{по } \epsilon \text{ може да се накл. } \exists : n > \nu$

$$a_n = |a_n - 0| < \epsilon$$

Или $0 < \sup < \epsilon \Rightarrow$ за $\forall x$ е изп. $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$
за всички x от M едновременно.

пример: 1) $f_n(x) = x^n$ в $[0, 1] = M$



$$|f_n(x) - f(x)| \leq |x^n - 0| = x^n$$

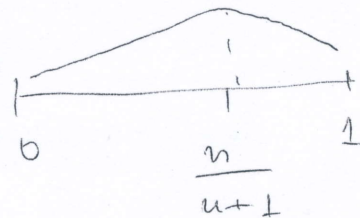
$$\sup_{[0,1]} x^n = 1^n = 1 \rightarrow 0 \Rightarrow \text{сход.}^{\text{тс}} \text{ е неравна}$$

$$f'_n(x) = n \cdot x^{n-1}$$

$$5) f_n(x) = x^n \cdot (1-x) = x^n - x^{n+1} \text{ в } [0, 1]$$

$$f(x) \equiv 0$$

$$\sup_{[0,1]} |x^n - x^{n+1}| = \sup_{x \in [0,1]} \underbrace{(x^n - x^{n+1})}_{g(x)}$$



$$g'(x) = n \cdot x^{n-1} - (n+1)x^n = x^{n-1}(n+1) \left[\frac{n}{n+1} - x \right]$$

$$\sup g(x) = g\left(\frac{n}{n+1}\right) = \frac{n^n}{(n+1)^n} \left(1 - \frac{n}{n+1}\right) = \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} = \frac{1}{n+1} \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} \Rightarrow 0$$

$$3) f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2} \quad [0, 1]$$

$$\sup \left| \underbrace{\frac{nx}{1+n^2x^2}}_{g(x)} - 0 \right|$$

$$g'(x) = \frac{n(1+n^2x^2) - 2n^3x^2}{(1+n^2x^2)^2}$$

$$= \frac{n - n^3x^2}{(1+n^2x^2)^2} = \frac{n(1 - (nx)^2)}{(1+n^2x^2)^2}$$

$$\sup(g(x)) = g\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{n \cdot \frac{1}{n}}{1 + \frac{1}{n^2}} = \frac{1}{2}$$

сходимость не е равномерна

Критерий на Коши за равномер. сходимость:

→ без δ -ов за изпит!

т.е. $f_n(x) \xrightarrow[n]{f(x)}$ ако ва $\forall \varepsilon > 0 \exists \nu \in \mathbb{N}$ и p -ест

$f_n(x)$ е равномер. сходяща в M за $\forall \varepsilon > 0 \exists \nu: n > \nu$ и p -ест

$$|f_{n+p}(x) - f_n(x)| < \varepsilon \text{ за все } x \text{ от } M \text{ едновременно.}$$

↑
НДЧ на Коши