

21.05.2023г.

DUC - лекция

пример

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

$$S_n(x_0) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi [f(x_0+t) + f(x_0-t)] \frac{\sin nt}{2 \sin \frac{t}{2}} dt$$

$$f(x) = 1$$

$$S_n(x_0) = 1 = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sin \frac{2n+1}{2} t}{2 \sin \frac{t}{2}} dt$$

x_0 ако това е точка на непрекъснатост $S_0 = f(x_0)$

прекъсване от '1' реду $f(x_0+0) + f(x_0-0)$
ако имаме скок (вълна върха на скока)

$$S_n(x_0) - S_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \underbrace{[f(x_0+t) + f(x_0-t) - 2S_0]}_{\varphi(t)} \frac{\sin \frac{2n+1}{2} t}{2 \sin \frac{t}{2}} dt$$

Признак на Дири

Редът на Фурье за $f(x)$ в т. x_0 има за сума S_0 ако за някое $h > 0$

$$\int_0^h \frac{|\varphi(t)|}{t} dt$$

е сходящ.

Док.

$$S_n(x_0) - S_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{\varphi(t)}{t} \frac{\sin \frac{2n+1}{2} t}{2 \sin \frac{t}{2}} dt$$

Лемата на Риман

$$\int_0^p \frac{g(t)}{\sin pt} dt \xrightarrow{p \rightarrow \infty} 0$$

$|g(t)|$ е интегр. $p = \frac{2n+1}{2}$

$$\int_0^h \frac{|\varphi(t)|}{t} \left| \frac{t/2}{\sin \frac{t}{2}} \right| dt \leq c \int_0^h \frac{|\varphi(t)|}{t} dt \leq c x$$

изп. са условията на лемата на Риман

$$\rightarrow S_n(x_0) \rightarrow S_0$$

защото мажоризиран

$$\text{Ако } \exists f'_+(x_0) \text{ и } f'_-(x_0)$$

$$f'_+(x_0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0+t) - f(x_0)}{t} \leq c$$

$$|f(x_0+t) - f(x_0)| \leq ct$$

аналогично за $f'_-(x_0)$

$$|f(x_0) - f(x_0-t)| \leq ct$$

$$|f(x_0-t) - f(x_0)| \leq ct$$

неравенство на Δ

$$|\varphi(t)| = |f(x_0+t) + f(x_0-t) - f(x_0) - f(x_0)| \leq |f(x_0+t) - f(x_0)| + |f(x_0-t) - f(x_0)|$$

$$\leq |f(x_0+t) - f(x_0)| + |f(x_0-t) - f(x_0)| \leq 2ct$$

$$\Rightarrow \frac{|\varphi(t)|}{t} \text{ е орг. нмч особено в } 0$$

$$|f(x_0+t) - f(x_0)| \leq ct^2 \quad 0 < t \leq 1$$

особено лемата Δ

$$|f(x_0+t) - f(x_0)| \leq ct^2$$

$$\int_0^h \frac{|\varphi(t)|}{t} dt \leq c \int_0^h \frac{dt}{t^{1-\alpha}} \quad \alpha = 1$$

пример

$$f = a_0 x^3 + a_1 x^2 + a_2 x + a_3$$

$$x \rightarrow x - \frac{a_1}{3a_0}$$

$$f = x^3 + px + q \rightarrow d_1, d_2, d_3;$$

$$S_0 = 3$$

$$S_1 = 0$$

$$S_2 = -2p$$

$$S_3 = -3q$$

$$S_4 = 2p^2$$

$$S_2 = d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 = (d_1 + d_2 + d_3)^2 - 2(d_1 d_2 + d_1 d_3 + d_2 d_3)$$

$$= -2p$$

$$f = d_1^3 + p d_1 + q = 0$$

$$d_1^3 = -p d_1 - q$$

$$S_3 = d_1^3 + d_2^3 + d_3^3$$

$$= \underbrace{-p d_1 - q}_{d_1^3} + \underbrace{-p d_2 - q}_{d_2^3} + \underbrace{-p d_3 - q}_{d_3^3} = -p(S_1) - 3q = -3q$$

$$0$$

$$d_1^3 + p d_1 + q = 0 \quad |d_1| \quad d_1^4 = -p d_1^2 - q d_1$$

$$S_4 = d_1^4 + d_2^4 + d_3^4 + d_4^4$$

$$d_1^4 = -p d_1^2 - q d_1$$

$$d_2^4 = -p d_2^2 - q d_2$$

$$d_3^4 = -p d_3^2 - q d_3$$

$$d_4^4 = -p d_4^2 - q d_4$$

$$S_4 = -p(S_2) - q(S_1) =$$

$$= -p(-2p) - q(0) = +2p^2$$

$$D(f) = \begin{vmatrix} 3 & 0 & -2p \\ 0 & -2p & -3q \\ -2p & -3q & 2p^2 \end{vmatrix} = -12p^3 + 8p^3 - 27q^2 = -4p^3 - 27q^2$$

$$f, g \in F[x] \quad f = a_0 x^n + \dots + a_n, \quad g = b_0 x^s + \dots + b_s, \quad a_0, b_0 \neq 0$$

$$\text{результат на } f, g: R[f, g] = a_0^s b_0^n \prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^s (d_i - \beta_j)$$

$$R[f, g] = 0 \Leftrightarrow f \text{ и } g \text{ имеют общие корни}$$

$$R|g, f| = (-1)^{ns} R|f, g|$$

$$\text{TB}_1 \quad R|f, g| = a_0^s g|d_1| g|d_2| \dots g|d_n|$$

$$\text{Dok}_1 \quad R|f, g| = a_0^s \cdot b_0 |d_1 - \beta_1| |d_1 - \beta_2| \dots |d_1 - \beta_s| \quad |1| \quad \varepsilon = 0, 2$$

$$b_0 = |d_2 - \beta_1| |d_2 - \beta_2| \dots |d_2 - \beta_s| \quad \varepsilon = 1, 2$$

$$\vdots$$

$$b_0 |d_n - \beta_1| |d_n - \beta_2| \dots |d_n - \beta_s| = \varepsilon^2$$

$$g|x| = b_0 |x - \beta_1| |x - \beta_2| \dots |x - \beta_s|$$

$$g|d_1| = b_0 |d_1 - \beta_1| |d_1 - \beta_2| \dots |d_1 - \beta_s| = |1|$$

$$g|d_2| = b_0 |d_2 - \beta_1| |d_2 - \beta_2| \dots |d_2 - \beta_s|$$

$$\vdots$$

$$g|d_n| = b_0 |d_n - \beta_1| |d_n - \beta_2| \dots |d_n - \beta_s|$$

$$\text{Cn} \quad R|f, g| \in F$$

результат който се изразява чрез корените, които могат да бъдат извадени от основното поле принадлежи на основното поле

(замяне във формулата от TB_1 като $g \rightarrow f'$)

$$\frac{n(n-1)}{2} a_0 \cdot |D|f| = a_0^{n-2} \left[(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} f'|d_1| f'|d_2| \dots f'|d_n| \right]$$

$$R|f, f'| = a_0^{n-1} \left[f'|d_1| f'|d_2| \dots f'|d_n| \right]$$

$$\text{TB}_1 \quad R|f, f'| = a_0 \cdot (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} |D|f|$$

Dok_1