~ ДИС ~ 18.04.13г. лекция

зад.) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{(3n)!}{27^n (n!)^3}}_{a_n}$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\dfrac{(3n+3)!}{27^{n+1}((n+1)!)^3}}{\dfrac{(3n)!}{27^n (n!)^3}} = \frac{\overbrace{(3n+3)!}^{(3n)!(3n+3)(3n+2)(3n+1)}\, 27^n}{(3n)!\,(27)^{n+1}}\left(\frac{n!}{(n+1)!}\right)^3 =$$

$$= \frac{1}{\cancel{27}\,9}\,\frac{(3n+1)(3n+2)\cancel{(3n+3)}}{(n+1)^3} = \frac{1}{9}\,\frac{(3n+1)(3n+2)}{(n+1)^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$$

$\Rightarrow$ Даламбер не дава отговор

$$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = n\left(\frac{9n^2+18n+9}{9n^2+9n+2} - 1\right) = n\left(\frac{\cancel{9n^2}+18n+9-\cancel{9n^2}-9n-2}{9n^2+9n+2}\right) =$$

$$= \frac{9n^2-7n}{9n^2+9n+2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 \quad \Rightarrow \text{Дюамел} \to \text{не}$$

$\Rightarrow$ с критерий на Гаус:

Критерий на Гаус

Нека $\dfrac{a_n}{a_{n+1}} = \alpha + \dfrac{\beta}{n} + \dfrac{\gamma_n}{n^{1+\varepsilon}}$, където $|\gamma_n| \leq c$

Тогава: 1) ако $\alpha > 1$ редът е сходящ; $\alpha < 1$ - разход.

2) $\alpha = 1$, $\beta > 1$ – сходящ; $\alpha = 1$, $\beta < 1$ – разход.

3) $\alpha = 1$, $\beta = 1$ – разходящ

Д-во:

1. $\alpha > 1$ $\qquad \dfrac{a_{n+1}}{a_n} \longrightarrow \dfrac{1}{\alpha} < 1$ – сх. по Даламбер

$\alpha < 1$ $\qquad \dfrac{1}{\alpha} > 1$ – рах. по Даламбер

(2) $n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = \beta + \frac{\gamma_n}{n^{\varepsilon}}$

$\Rightarrow \beta$: $\beta > 1$ – сх. по Р-Дюамел
$\beta < 1$ – разх. по Р-Д.

~*~ * ~~ * ~~

3.

<u>Критерий на Кумер</u> → не влиза в изпита!

Нека $c_n > 0$ и $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{c_n}$ е разходящ. Образ. $K_n = c_n \frac{a_n}{a_{n+1}} - c_{n+1}$

Ако $\exists\, \delta > 0 : K_n \geq \delta$, редът е сход. Ако $K_n \leq 0$, редът е разход.

Ще док. частта за разходимост:

$K_n \leq 0$

$c_n \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} \leq c_{n+1}$

$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq \frac{c_n}{c_{n+1}}$

$\frac{a_{n+1}}{a_1} = \frac{a_{n+1}}{a_n} \cdot \frac{a_n}{a_{n-1}} \cdots \frac{a_2}{a_1} \geq \frac{c_n}{c_{n+1}} \cdot \frac{c_{n-1}}{c_n} \cdots \frac{c_1}{c_2} = \frac{c_1}{c_{n+1}}$

$a_{n+1} \geq \frac{a_1 . c_1}{c_{n+1}} = a_1 . c_1 . \frac{1}{c_{n+1}}$

$\boxed{a_n \geq a_1 . c_1 . \frac{1}{c_n}}$ $\Rightarrow$ редът със сума a_n е разход., защото $\sum \frac{1}{c_n}$ е разход.

Ако $c_n = 1$ → ~~нка~~ $\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \geq \delta$

$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{1}{1+\delta}$ → крит. на Даламбер

$c_n = n$ → Раабе-Дюамел

$c_n = \frac{1}{n . \ln n}$ → $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$ – разх.

Критерий на Бертран

за разходимост:

$$K_n = \frac{\cancel{\dots}}{n\ln n} \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - \frac{\cancel{\dots}}{(n+1)\ln(n+1)}$$

$$B_n = \ln n \cdot n \left[\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) - 1 \right] \longrightarrow 0$$

$$K_n - n.\ln.n + \ln n.n + \ln n - \ln n = \ln n \left(n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) - 1 \right] -$$
$$-(n+1)\left[\ln(n+1)\} - \ln n\right] =$$
$$= B_n - (n+1)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = B_n - \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} \longrightarrow B_n - 1$$

$K_n = B_n - 1$

$K_n \leq 0$, $B_n \leq 1$ – разход.

$B_n \geq 1 + \delta$ – сход.

$$B_n = \ln n \left[n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) - 1 \right] \to 0$$

Ако $B_n \geq 1 + \delta$ – сход

$B_n \leq 1$ – разход.

* * * * *

3. $$\frac{B_n}{n.\ln n} = \frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 - \frac{1}{n} = \frac{\gamma^n}{n^{1+\varepsilon}} \longrightarrow$$

огран.

$$B_n = \frac{\ln n}{n.\varepsilon} \gamma^n \longrightarrow 0 \Rightarrow B_n \to 0$$

$B_n \leq 1$, т.е. редът е разходящ

! за изпит: само формулировка на крит. на Гаус продължение на задачата:

$$\frac{9n^2-7n}{9n^2+9n+2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$$

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1+\frac{1}{n}+\frac{9n-1}{9n^2+9n+2} = 1+\frac{1}{n}+\frac{\overbrace{9n-1+7}^{3(3n+2)}-7}{(3n+1)(3n+2)} = 1+\frac{1}{n}+\frac{3}{3n+1}+\frac{7}{\underset{n^2}{\underset{\wr}{(3n+1)(3n+2)}}}$$

$$= 1+\frac{1}{n}+\frac{3}{3n+1}+\ldots(\text{малко } e) =$$

$$= 1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n}\cdot\frac{3n}{3n+1}+\ldots$$

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1+\frac{1}{n}+\frac{9n+7}{(3n+1)(3n+2)} = 1+\frac{9n+6}{(3n+1)(3n+2)}+\underbrace{\frac{1}{(3n+1)(3n+2)}}_{\text{малко число}} =$$

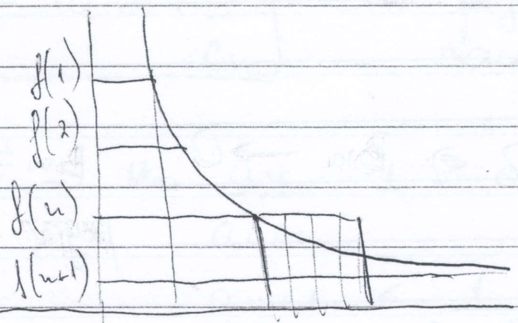
$$= 1+\frac{3}{3n+1}+\text{м.} = 1+\frac{3}{3n+1}-\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\text{м.} = 1+\frac{1}{n}+\frac{3n-3n-1}{n(3n+1)}+\text{м.} - 1+\frac{1}{n}+\frac{C}{n^2}$$

разход. по Гаус

Интегрален критерий на Коши (К!)

Тм Нека $f(x)$ е неотриц., монот. намаляваща $[1,\infty)$. Тогава редът $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ е сходящ или разход. едновр. с $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$.

Д-во:



$$f(n+1)(n+1-n) \le \int_n^{n+1} f(x)\,dx \le f(n)(n+1-n)$$

сум. по $n = 1, N-1$

$$\sum_{n=1}^{N-1} f(n+1) \le \int_1^N f(x)\,dx \le \sum_{n=1}^{N-1} f(n) = f(1)+f(2)+\dots+f(N-1)$$

$$f(2)+f(3)+\dots+f(N) = S_N - f(1) \qquad\qquad S_{N-1}$$

$$\boxed{S_N - f(1) \le \int_1^N f(x)\,dx \le S_{N-1}}$$

$\Rightarrow$ Нека е сх. редът $\Rightarrow$ Парциалните суми са огр. с L $\Rightarrow$

$\int_1^N f(x)\,dx \le L$, Означ. с $F(A) = \int_1^A f(x)\,dx$

$\Rightarrow F(A) \le F(N) \le L \Rightarrow$ ф-ията $F(A)$ е монот. растяща и огран. отгоре $\Rightarrow \exists \lim_{A\to\infty} F(A)$, т.е. $\int_1^\infty f(x)\,dx$ е сходящ.

$\Leftarrow$ Нека $\int_1^\infty f(x)\,dx$ е сходящ. $\Rightarrow \int_1^N f(x)\,dx$ е огран. $\Rightarrow S_N \le f(1) + \int_1^N f(x)\,dx$ е огран. $\Rightarrow$ редът е сходящ

Приложения на Th-та:

1. Обобщен хармоничен ред

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \qquad f(n)$$

$$f(x) = \frac{1}{x^s} \qquad \int_1^\infty \frac{dx}{x^s}$$

$s > 1$ – сх.

$s \le 1$ – разх.

• $c_n = \frac{1}{n.\ln n}$, $\sum c_n$ е разх.

$$\int_2^\infty \frac{dx}{x.\ln x} = \int_2^\infty \frac{d(\ln x)}{\ln x}$$

$$\int_2^A \frac{d(\ln x)}{\ln x} = \ln|\ln(x)|\Big|_2^A = \ln(\ln A) - \ln(\ln 2) \xrightarrow[A\to\infty]{} \infty$$

разх.

• $\sum_{n=2}^\infty \frac{1}{n.\ln^p n}$

$$\int_2^\infty \frac{dx}{x\ln^p x} \quad \int_2^A \frac{d\ln x}{\ln^p x}, \quad p \neq 1 =$$

$$= \int_2^A \frac{(\ln x)^{1-p}}{1-p}\Big|_2^A = \frac{(\ln A)^{1-p}}{1-p} - C$$

за $p > 1$, $\infty^{\text{отр. степен}} \to$ сх.

$p < 1$, $\infty^{\text{полож. степ.}} \to$ разх.

Важно е,

Ако $f(x) = \frac{1}{x\ln^p x}$ е мон. намал.

$$f'(x) = \frac{-(\ln^p x + x.p-1.\ln^{p-1} x.\frac{1}{x})}{x^2\ln^{2p} x} = \frac{-\ln^{p-1} x(\ln x + p)}{(\;)^2} \checkmark$$

(*) $\sum a_n$ е сх. $\iff \sum_{n=1}^\infty 2^n a_{2^n}$ — др. крит. на Коши