03.04.2013 ДИС - упражнение

Неявна функция

$x^2+y^2-1=0$ $\quad F(x,y)=0$

$y=\sqrt{1-x^2}$

$y=-\sqrt{1-x^2}$ $\quad y(x)$

$x^2+\left(\sqrt{1-x^2}\right)^2-1\equiv 0$ $\quad F(x,y(x))=0$

$\varepsilon(x)=\begin{cases}1 & \text{рац.}\\ -1 & \text{ирац.}\end{cases}$

$y=\varepsilon(x)\sqrt{1-x^2}$

$F,\ F'_x,\ F'_y$ непрекъснати

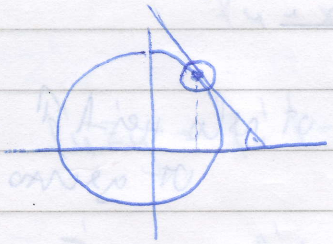
$F(x_0,y_0)=0$

$F'_y(x_0,y_0)\neq 0$

$\Rightarrow$ съществува дост. малка околност на т. x_0, в която $\exists!$ функция която се определя от това уравнение

Пример: взимаме т. $\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ в нея е изпълнено условието,

а $F'_y=2y\neq 0$



можем да намерим достатъчно ~~малка околност~~ малък кръг около тази точка, в която да има само една функция

$\Rightarrow$ функцията има свойството $\underline{F(x,y(x))\equiv 0}$

в нашия пример $\quad F'_x\,1+F'_y\,y'=0$

$y'\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=-\dfrac{2\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}}{2\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}}=-1$ $\quad\Rightarrow y'(x_0)=-\dfrac{F'_x(x_0,y_0)}{F'_y(x_0,y_0)}$

tg $\angle$ между Ox и допирателната е $=-1$

задача

$$F(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy = 0$$

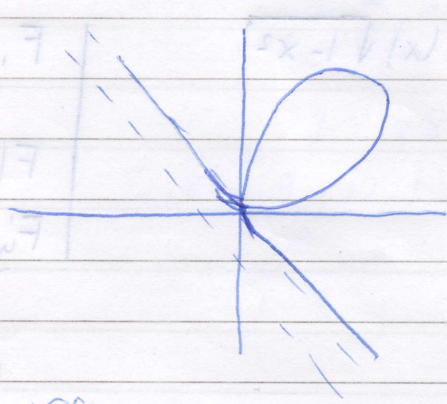
$$\begin{cases} x^3 + y^3 - 3xy = 0 \\ 3x^2 - 3y = 0 \end{cases}$$

$$y = \frac{3x^2}{3} = x^2$$

$$x^3 + x^6 - 3x^3 = 0$$
$$x^6 - 2x^3 = 0$$
$$x^3(x^3 - 2) = 0$$

$x^3 = 0 \qquad x = 0 \qquad y = 0$

$x^3 = 2 \qquad x = \sqrt[3]{2} \qquad y = \sqrt[3]{4}$

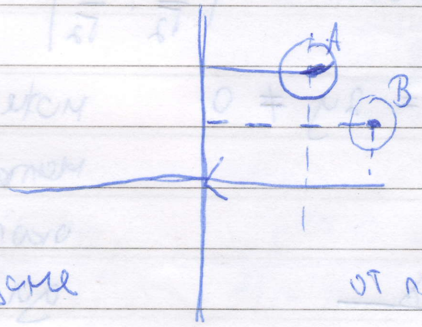


$$F'_y = 3y^2 - 3x$$

ако заместим с $(0,0)$

$$\begin{cases} F'_y = 0 \\ F'_x = 0 \\ F = 0 \end{cases}$$ ако тези три неща са изпълнени F се нарича особена

$$F'_y(\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{4}) \neq 0 = 3\sqrt[3]{2}$$



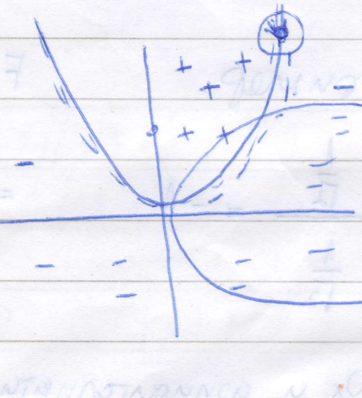
в т. А имаме хоризонтална допирателна

т. В е симетрична, ако гледаме F относно y и в В имаме вертикална производна

от ляво на А ↑

от дясно ↓

$$y'(x) = \frac{3x^2 - 3y}{3y^2 - 3x} = -\frac{(x^2 - y)}{(y^2 - x)}$$



за асимптотата

$y(x) \to \infty$

$x \to -\infty$

задача

при какви условия от

$f(\overset{u}{z}, \overset{v}{y - xz}) = 0$ може да се определи неявна функция

и да се док. че тази функция удовлетворява условието

$z'_x + z . z'_y = 0$

$F(x, y, z) = 0$

F F'_x, F'_y, F'_z - непрек.

$F(x_0, y_0, z_0) = 0$

$F'_z (x_0, y_0, z_0) \neq 0$

$(x_0, y_0, z_0) \underbrace{\vdots\ f(z_0, y_0 - x_0, z_0) = 0}_{\text{пикава се}}$

$\boxed{f'_u + f'_v(-x) \neq 0}$

произв. на f, + промен. x . произв. на първа втората първата спрямо z

аналогично

$f(z_0, y_0 - x_0, z_0) = 0$

$f'_u + f'_v(-x) \neq 0$

$f(z(x, y), y - xz(x, y)) \equiv 0$

$f'_u z'_x + f'_v(-z - xz'_x) = 0$

$z'_x = \dfrac{z f'_v}{f'_u - x f'_v}$

$f'_u z'_y + f'_v(1 - x . z'_y) = 0$

$z'_y = \dfrac{- f'_v}{f'_u - x f'_v}$

$z'_x + z . z'_y \overset{?}{=} 0$

задача

$f(u, v)$

$f\left(x + \frac{z}{y}, \ y + \frac{z}{x}\right) = 0$

$z(x, y)$ $x \cdot z'_x + y \cdot z'_y = z - xy$

$T.(x_0, y_0, z_0) : f(x_0$

задача

$ax + z = f(by + z)$

да се докаже $z''_{xx} \cdot z''_{yy} = z''_{xy}$

$1 - f' \cdot 1 \neq 0 \qquad z = z(x, y)$

$a + z'_x - f' \cdot (z'_x) = 0$

$\cancel{a + z'_x - f}$

$z'_x (a - f') = 0$

$z'_x = \dfrac{a}{f' - 1}$

$z'_y = f'(b + z'_y)$

$z'_y - f' z'_y = f' b$

$z'_y = \dfrac{f' b}{1 - f'}$

$$z''_{xx} = -\frac{a f'' z'_x}{(f'-1)^2} = \frac{-a^2 \cdot f''}{(f'-1)^3}$$

$$z''_{xy} = -\frac{a \cdot f'' \cdot z'_y}{(f'-1)^2} = \cancel{\frac{ab f'' f'}{(f'-1)^3}} = -\frac{a \cdot f'' (b + z'_y)}{(f'-1)^2}$$

$$z''_{yy} = \frac{f'' b (b + z'_y)(1 - f') + b f' \cdot f'' (b + z'_y)}{(1-f')^2} = b f'' (b + z'_y) \left(\frac{1 - \cancel{f'} + \cancel{f'}}{(1-f')^2} \right) =$$

$$= b f'' \frac{(b + z'_y)}{(1-f')^2} = \frac{b^2 \cdot f'' \cdot \left(1 + \frac{f'}{1-f'}\right)}{(1-f')^2} = \frac{b^2 \cdot f''}{(1-f')^3}$$

$$\frac{z'_y}{b} + \frac{z'_x}{a} = \frac{1}{f'-1} + \frac{f'}{f-f'} = -1$$

$$\frac{z''_{yx}}{b} + \frac{z''_{xx}}{a} = 0$$

$$\frac{z''_{yy}}{b} + \frac{z''_{xy}}{a} = 0$$

$$a \cdot z''_{xy} = -b \cdot z''_{xx}$$

$$b \cdot z''_{xy} = -a \cdot z''_{yy}$$

$$\cancel{(a+b)z''_{xy} = -(a+b)(z''_{xx} + z''_{yy})}$$

b

4.04.2013г. ДИС- упражнение

задача

$f(yz) - (xz) = 0$ $\qquad x^2 z''_{xx} + 2x z'_x = y^2 z''_{yy} + 2y z'_y$

$z(x,y)$

$f' \cdot y - x \neq 0$

$f(yz(x,y)) - xz(x,y) \equiv 0$

$f' \cdot y z'_x - z - x \cdot z'_x = 0$

$\cancel{y z'_x - z - x z'_x = 0}$

$\boxed{z'_x = \frac{z}{yf' - x}}$ $\qquad z''_{xx} = \frac{z'_x (yf' - x) - z(yf'' y z'_x - 1)}{(yf' - x)^2}$

$f' \cdot (1 \cdot z + y \cdot z'_y) - x \cdot z'_y = 0$

$\boxed{z'_y = -\frac{zf'}{yf' - x}}$

$z''_{yy} = -\frac{[z'_y f' + z \cdot f''(z + y \cdot z'_y)](yf' - x) - zf'(f' + yf''(z + yz'_y))}{(yf' - x)^2}$

$(x^2 z'_x)'_x = x^2 \cdot z''_{xx} + 2x z'_x$

$(y^2 z'_y)'_y = \left(\frac{\quad}{\quad} \right)$

задача (за упражнение)

$f(u,v)$

$f(x-yz,\ y+z)=0$

$z(x,y)$ да и ук. $(y-z)z''_{xx}=z''_{xy}+z'^2_x$