

30.04.2013

ЗЧС - лекция

Теорема на функци.

Th1 Ако $f_n(x)$ са непрек. в M и $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$.

Тогава $f(x)$ е непрек.

Заб. Това условие е ДУ, но не е НДУ.

Док фиксираме $x_0 \in M$

$$\text{разгн. } (*) \quad |f(x) - f(x_0)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)|$$

$f_n(x) \rightrightarrows f(x) \Rightarrow$ по ε може да намери

$$\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists N \text{ такова че } |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \text{ за } \forall x \in M$$

Взимаме такова n и го фиксираме.

В $(*)$ за това n (1) и (3) са по-малки от $\frac{\varepsilon}{3}$

За (2) n е фиксирано като $f_n(x)$ е

непрек. в x_0 , то $\exists \delta$ та $|x - x_0| < \delta$ и

$$\text{изн. } |f_n(x) - f_n(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3} \Rightarrow$$

за $x \in M$ и $|x - x_0| < \delta$ имаме

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Th2. Граничен преход по знака на интеграла

Нека $f_n(x) \Rightarrow f(x)$ (равном. в $[a, b]$)

Тогава $\int_a^b f_n(x) dx \rightarrow \int_a^b f(x) dx$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx$$

Повече ДУ f_n да е НДУ, т.е. условия за равномерност сходимост може да бъде заменено с друго.

Пример: $f_n(x) = x^n$ в $[0, 1]$ $f_n(x) \rightarrow f(x) = \begin{cases} 0 & [0, 1] \\ 1 & \text{за } x=1 \end{cases}$

$$\int_0^1 f_n(x) dx = \int_0^1 x^n dx = \left. \frac{x^{n+1}}{n+1} \right|_0^1 = \frac{1}{n+1} \rightarrow 0 = \int_0^1 f(x) dx$$

$$f_n(x) \not\Rightarrow f(x)$$

Док. $\left| \int_a^b f_n(x) dx - \int_a^b f(x) dx \right| = \left| \int_a^b [f_n(x) - f(x)] dx \right| \leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)| dx$

То ε нам. $\forall: n > N$

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{b-a} \quad \forall x \in [a, b]$$

$$|A| < \int_a^b \frac{\varepsilon}{b-a} dx = \frac{\varepsilon}{b-a} x \Big|_a^b = \frac{\varepsilon}{b-a} (b-a) = \varepsilon$$

Th 3 (Последно диференциране)

Нека $f_n(x) \xrightarrow{[a,b]} f(x)$

Нека $\exists f'_n(x)$ непрекъснати и $f'_n(x) \Rightarrow \varphi(x)$ (равно в $[a,b]$)

Тогава граничната функция $f(x)$ е диф. и нейната производна $f'(x) = \varphi(x)$

$$\left(\lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x) = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right)' \right)$$

Док. т.к. $f'_n(x)$ са непрекъснати в $[a,b]$ и $f'_n(x) \Rightarrow \varphi(x)$ в $[a,b]$, то по Th1 $\varphi(x)$ е непр. в $[a,b]$

По Th2 $\int_a^b f'_n(x) dx \Rightarrow \int_a^b \varphi(x) dx$

$f'_n(b) - f'_n(a)$, но ние вземем $b \rightarrow x$, $a \rightarrow t$

$$\int_a^x f'_n(t) dt \rightarrow \int_a^x \varphi(t) dt$$

$$f_n(x) - f_n(a) \Rightarrow f(x) - f(a) = \int_a^x \varphi(t) dt$$

$$f(x) - f(a)$$

$\varphi(t)$ е непр. прилагаме към дясната част А-Хюуден. Прилагаме към л.ч. $\exists \eta \in \dots \Rightarrow \varphi(x) = f'(x)$ и л.ч. $\exists \eta \in \dots \Rightarrow f'(x) = \varphi(x)$

Съществува T_n , то за резултат

$$\text{Ако } \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$$

T_n Ако $u_n(x)$ са непрекъснати в M , и резултат е равн. с. $|$ клони към $S(x)$, то $S(x)$ е непр.

T_n Ако $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ е равн. с. в $[a, b]$, то

$$\int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x) dx$$

T_n Ако $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ е с. в $[a, b]$, а $\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$ е равн. с.

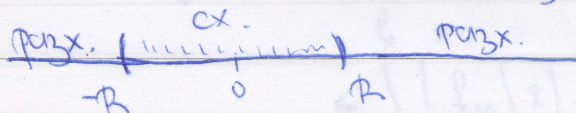
$$\text{към } \varphi(x), \text{ то } \sum u_n'(x) = (\sum u_n(x))'$$

Степенни редове

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots$$

т. х, за които $\sum a_n x^n$ е с. , наричаме област на сходим.

0 е ад. на с.-ст за $\forall$ ред.



Радийсус $\sqrt[n]{|a_n|}$

1) $\sqrt[n]{|a_n|}$ е неограничена

2) $\sqrt[n]{|a_n|}$ има граница

или т. на събиране

$$\exists L = \limsup \sqrt[n]{|a_n|}$$

най-голямата от т. на събиране

Th на Коши - Адамар.

Ако $\sqrt[n]{|a_n|}$ е неограничена, то $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ е сх само

Ако $L = \limsup \sqrt[n]{|a_n|}$ и $L > 0$, то резулт е сх за $x=0$

$|x| < \frac{1}{L}$ и разх. за $|x| > \frac{1}{L}$

Ако $L=0$, то резулт е сх за $\forall x$ (сх. е абсолютна)

$$R = \frac{1}{L} = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}}$$

$$\frac{1}{L}$$

Док. на $|z|$ при L неогр.

$\sqrt[n]{|a_n|}$ е неогр. Вземаме $x \neq 0$

Товабси $\sqrt[n]{|a_n|} \cdot x$ е неогр. $\Rightarrow \exists V: n > V \sqrt[n]{|a_n|} \cdot |x| > 1$

$$\sqrt[n]{|a_n x^n|} > 1$$

$$|a_n x^n| > 1 \Rightarrow a_n x^n \not\rightarrow 0$$

$\Rightarrow$ не е изп. необх. условие

за сх. на рекур. общият терм
да клони към 0

$\Rightarrow \sum a_n x^n$ е разх.

Нека $\sqrt[n]{|a_n|}$ е огр. $L = \limsup \sqrt[n]{|a_n|}$

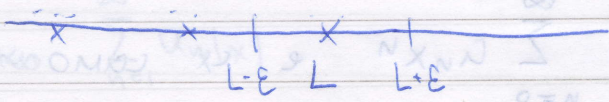
1) $L > 0$ обр. $\frac{1}{L} > 0$. Нека $|x| < \frac{1}{L}$

$$0 < |x| < \frac{1}{L} < \frac{1}{L-\epsilon}$$

$\exists \epsilon > 0$

$$\left(\begin{array}{c} \text{ако } x \in \left[\frac{1}{L}, \frac{1}{L-\epsilon} \right] \\ \frac{1}{L} \end{array} \right)$$

L е най-големият от т. н. съставляващи $\sqrt[n]{|a_n|}$



Няма безброй много $\sqrt[n]{|a_n|}$ по-големи от $L + \frac{\epsilon}{2}$
(иначе по Б-В сумата намерити т. н. сг. $> L + \frac{\epsilon}{2}$,
а L е най-големият)

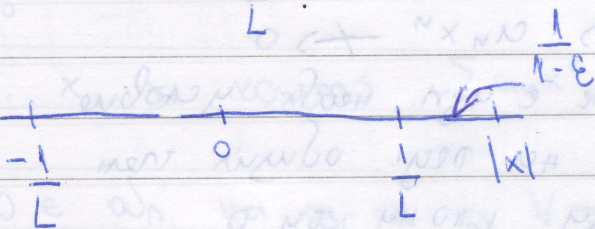
$\Rightarrow$ за д. големи n : $\sqrt[n]{|a_n|} < L + \frac{\epsilon}{2} |x|$

$$\text{от } |x| < 1 \Rightarrow \sqrt[n]{|a_n x^n|} = \sqrt[n]{|a_n|} \cdot |x| < \frac{L + \frac{\epsilon}{2}}{1} < 1$$

То критерия на Коши т. к. $\sqrt[n]{|a_n x^n|} \leq q < 1$ редът

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n \text{ е сг.}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} |x|^n > \frac{1}{L}$$



за дост. големи k :

$$L - \epsilon < \sqrt[k]{|a_k|} < L + \epsilon$$

$$|x| > \frac{1}{L - \epsilon}$$

$$L = \limsup \sqrt[n]{|a_n|}$$

$$\Rightarrow \exists n_k \sqrt[n_k]{|a_{n_k}|} \rightarrow L$$

$$\Rightarrow \exists n_k \sqrt[n_k]{|a_{n_k}|} \rightarrow L$$

$$\sqrt[n_k]{|a_{n_k} x^{n_k}|} = \sqrt[n_k]{|a_{n_k}|} |x| > |L - \epsilon| \frac{1}{L - \epsilon} = 1$$

$$\Rightarrow \sqrt[n]{|a_n x^n|} \not\rightarrow 0$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \text{ е разх.}$$

4c) $L = 0$, т.к. $\sqrt[n]{|a_n|} \geq 0$, то т. не ср. $\geq 0 \Rightarrow L = 0$
 е единств. точка на събиращите
 $\Rightarrow \sqrt[n]{|a_n|} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

$$\sqrt[n]{|a_n x^n|} = \sqrt[n]{|a_n|} |x| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 < 1$$

За дост. големи n : $\sqrt[n]{|a_n|} |x^n| < \frac{1}{2}$ ← може без този ред
 по критерия на Коши резултат е сх.

Тн на Коши - Аделмар :

За $\forall$ степенен ред $\exists$ число $R \geq 0$: за $x > R$ редът е разходящ, за $|x| < R$ редът е сх.

$$R = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}} \quad R = \frac{1}{\lim \sqrt[n]{|a_n|}}$$

Примери

$\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ $\sqrt[n]{|a_n|} = 1 \rightarrow 1$ $R = 1$ разх. | сх. | разх.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ $\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \rightarrow 1$ $x = 1$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ разх. хари. ред.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$ $\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{\sqrt[n]{n^2}} \rightarrow 1$ $x = -1$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \rightarrow 0$ $a_n = \frac{1}{n^2}$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ сх по Лейбн. $\frac{1}{n^2} \searrow$
 $x = -1$ - сх

$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$

$$\sum \frac{1}{n^2} \quad \text{c.x. p.e.} \quad e > 1 \quad [-1; 1]$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n x^n}{n^2 + n + 1} \quad \sqrt[n]{|a_n|} > \frac{2}{\sqrt[n]{n^2 + n + 1}} \sim \frac{2}{\sqrt[n]{n^2}} = \frac{2}{(\sqrt[n]{n})^2} \rightarrow 2 \quad R=2$$

$$\begin{array}{c} \text{p.e. } x. \quad \text{c.x.} \quad \text{p.e. } x \\ \hline -\frac{1}{2} \quad \frac{1}{2} \end{array} \quad x = \frac{1}{2}$$

$$\sum \frac{2^n \left(\frac{1}{2}\right)^n}{n^2 + n + 1} = \sum \frac{1}{n^2 + n + 1} \sim \sum \frac{1}{n^2} = \text{c.x.}$$

$$x = -\frac{1}{2} \quad \sum \frac{(-1)^n}{n^2 + n + 1}$$

$$\frac{|u_{n+1}| |x|}{|u_n| |x|} = \frac{\frac{2^{n+1} |x|^{n+1}}{(n+1)^2 + n + 1 + 1}}{\frac{2^n |x|^n}{n^2 + n + 1}} = 2|x| \frac{n^2 + n + 1}{(n+1)^2 + n + 2} \rightarrow 2|x|$$

$$2|x| < 1 \quad \text{c.x. no } \mathbb{D}$$

$$|x| < \frac{1}{2} \quad \text{c.x. no } \mathbb{D}$$

$$|x| > \frac{1}{2} \quad \text{p.e. no } \mathbb{D}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{4^n (3n+2)} \quad \frac{|u_{n+1}| |x|}{|u_n| |x|} = \frac{|x|^{n+1} 4^n (3n+2)}{4^{n+1} (3n+5) |x|^n} =$$

$$x = 4 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n+2} \quad (-1)^n a_n = \frac{1}{3n+2} \quad \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \frac{|x|}{4} \frac{3n+2}{3n+5} \rightarrow \frac{|x|}{4} \quad R = 4$$

$$x = 4 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (-4)^n}{(3n+2) 4^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n+2} \sim \sum \frac{1}{n} \quad \text{p.e.} \quad \begin{array}{c} \text{p.x.} \quad \text{c.x.} \quad \text{p.x.} \\ \hline -\frac{1}{4} \quad \frac{1}{4} \end{array}$$

$$\sum \frac{(-3)^n x^n}{2n^2 + 1}$$

$$\frac{|u_{n+1}| |x|}{|u_n| |x|} = \frac{|(-3)^{n+1}| |x|^{n+1}}{(2(n+1)^2 + 1) |(-3)^n| |x|^n} = 3|x| \frac{2n^2 + 1}{2n^2 + 4n + 3} \rightarrow 3|x|$$

Тогда $R = \frac{1}{3}$ $|x| < \frac{1}{3}$ е с.

$$\sum \frac{|(-3)^n| \left|\frac{1}{3}\right|^n}{2n^2 + 1} = \sum \frac{|-1|^n}{2n^2 + 1} \text{ - Абсолютно. ряд}$$

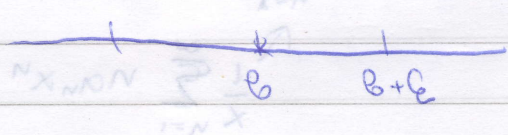
$x = \frac{1}{3}$ $\sum \frac{|(-3)^n| \left|-\frac{1}{3}\right|^n}{2n^2 + 1} \sim \sum \frac{1}{2n^2 + 1} \sim \sum \frac{1}{n^2} \left[-\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right]$

Лема:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} C_n = C$$

$$\limsup B_n \liminf B_n = B$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} B_n C_n = BC$$

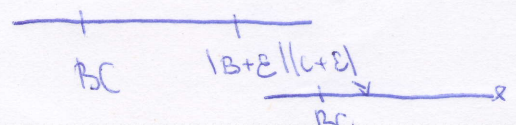


$$\exists B_{n_k} \rightarrow B$$

Заг. $B_n > B + \epsilon$ е чзг. само з кр. Брой n

$$C_{n_k} B_{n_k} \Rightarrow CB \text{ е точка на събиране т.к. } C + \epsilon < C_{n_k} < C + \epsilon$$

$$B_n C_n < (C + \epsilon)(B + \epsilon) \text{ за } \forall \epsilon$$



чзг. нзг. кр. Брой n

Непрехватост на сумата на степенни ред

Th 1 Вие $\tau < R$ -радиус на с. на $\sum a_n x^n$

Тогави $\sum a_n x^n$ е равн. с. в $[-\tau; \tau]$

Доказ

$$-R \quad -\tau \quad 0 \quad \tau \quad R$$

$$|x| \leq \tau \quad \sum_{n=1}^{\infty} |a_n x^n| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \tau^n$$

степ. ред (ф) $\nearrow$ сходящие числов $\nearrow$ ред.

Пр. из. на Вайерштрасс.

$\Rightarrow$ редът е равн. с. в $[-\tau; \tau]$

Следствие $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ е непрек. във вътр. на интерв. на с.
 непрек.

Диференц. на $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

Те 1 Редът $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ имат сдиги и общ R (радиус на с.)

$$\frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}}$$

$$\frac{1}{x} \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n$$

$$\frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}} = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}} \cdot \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{n}} = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}}$$

аналогично: редът получен с последно интегриране има същият радиус на сходимост;

$$\sum_{n+1} \frac{a_n x^{n+1}}{n+1} = x \sum_{n+1} \frac{a_n x^n}{n+1}$$

$$\lim_{n+1} \sqrt[n+1]{|a_n|} = \lim_{n+1} \sqrt[n+1]{|a_n|} \frac{1}{\lim_{n+1} \sqrt[n+1]{n+1}}$$

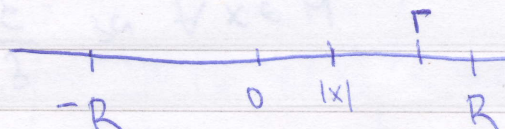
Th. Сумата $f(x)$ на редица $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots + a_n x^n + \dots$

е равномерно функц. и

$$f'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \dots + n a_n x^{n-1} + (n+1) a_{n+1} x^n + \dots$$

$$x \in (-R, R) \quad R = \frac{1}{\lim_{n+1} \sqrt[n+1]{|a_n|}}$$

Док взимаме $x \in [-R; R]$



В интерв. $[-\gamma; \gamma]$ и цялата степенна редица са равномерно сх.

(заради кр-я на B , както в док. за непрек. на сумата в степенна редица)