

23.04.2018.

DLC - ~~unproven~~ lemma

Лема Нека $a_n > 0$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right| = \Gamma > 0$ то $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$

Тогава $a_n \rightarrow 0$.

Доказ. $\Gamma > 0 \Rightarrow \exists \epsilon$ тако че $\Gamma \epsilon > 1$ | $\epsilon > \frac{1}{2}$

разн. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

Прилагам критериум на Рабе - Дюамел към този ред

$$n \left| \frac{a_n^k}{a_{n+1}^k} - 1 \right| = n \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right| \left(\left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|^{k-1} + \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|^{k-2} + \dots + 1 \right)$$

$$p^k - q^k = (p-q)(p^{k-1} + p^{k-2}q + \dots + q^{k-1})$$

* $\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 > 0$ от някакво място нататък $\Rightarrow \frac{a_n}{a_{n+1}} > 1$

$a_n > a_{n+1}$ a_n е мон. намаляваща
(и е стр. отсрлу с 0, то тя е сж)

$\Rightarrow \rightarrow$ т.к $\Gamma > 1 \Rightarrow \sum a_n^k$ е сж $\Rightarrow a_n^k \rightarrow 0$ и $a_n \rightarrow 0$

зач.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|-1|^n |2n-1|!!}{|2n|!!}$$

$$a_n = \frac{|2n-1|!!}{|2n|!!}$$

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{|2n-1|!!}{|2n|!!} \cdot \frac{|2n+2|!!}{|2n+1|!!} = \frac{2n+2}{2n+1} > 1$$

$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ сж по Лайбниц.

Абсолютно и условно сходящи редице

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \text{ е с.х. } \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{n-1}}{n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ е разх.}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ е с.х. а } \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \text{ е разх. } \Rightarrow \text{ условн. с.х.}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \text{ е с.х. т.к.}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \text{ е с.х. - абсолютно с.х. т.к. } \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2} \text{ е с.х.}$$

Те1: Ако $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ е абсолютно сходящ, то той е с.х.

Доказ НДУ - Коши

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+p}| \leq |a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \dots + |a_{n+p}|$$

т.к. $\sum |a_n|$ е с.х. то последното може да бъде направено $< \epsilon$
 $\Rightarrow A < \epsilon$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ е с.х.}$$

Те2: Ако $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ е абс. с.х., то той може да се представи като

разлика на 2 с.х. реди с неотр. членове.

Верно е и обратното, ако $a_n = p_n - q_n$, и $p_n, q_n \geq 0$,
 $\sum p_n$ и $\sum q_n$ е с.х., то и $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ е абсолютно с.х.

$$S'_n \leq S_e$$

т.к. $a_n > 0$, то S_e само раст. и $S_e \xrightarrow{e \rightarrow \infty} S \Rightarrow S'_n \leq S$

S'_n е също мон. редица $\Rightarrow S'_n$ е сг.
 Озв. сг-ти и в S'

$$S' \leq S$$

~~Това е всеки ред, получен при разнасянето на
 членовете в сг. и сг. редица~~

$$\sum a_{kn} = \sum p_{kn} - \sum q_{kn} = \sum p_n - \sum q_n = \sum a_n$$

Тн на Риман Ако редът е неабсолютно сг. то редът
 може да се пренарежда по произволна сг. или да
 $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ се получи рх ред или произволно число.

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots = \frac{1}{2} + \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{4k-2} - \frac{1}{4k} = \frac{1}{2} \ln 2$$

$$p=1 \quad q=4$$

$$p=2, q=1 \quad 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \dots = \frac{3}{2} \ln 2$$

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{3} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} - \frac{1}{14} - \frac{1}{16} + \frac{1}{5} - \dots = 0$$

$$n^2 \geq n^2$$

$$n^2 + n^2 + n^2 + n^2 = n^2$$

(A) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ има сума A

(B) $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ има сума B

$\sum_{i,k=1}^{\infty} a_i b_k$ $a_1 b_1, a_1 b_2, a_1 b_3, \dots$
 $a_2 b_1, a_2 b_2, a_2 b_3, \dots$
 $a_3 b_1, a_3 b_2, a_3 b_3, \dots$

Th (Коши) Нека резултате $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$

(резултате (A) и (B) са абсолют. сх. и имат
 за сума коэф. типата A и B. Тогава резулт.
 $\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_i b_k$ е сх. и сумата му е равна на AB

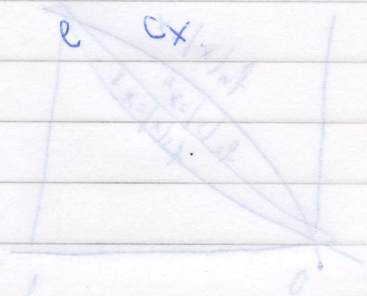
Док S_k и

Th на Мертенс! Нека $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ е абсолютно сх. и

$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ е сх. Тогава резулт. получат като произведение

(симетрия по диагонали)

$a_1 b_1 + (a_1 b_2 + a_2 b_1) + (a_3 b_1 + a_1 b_3 + a_2 b_2) + \dots$ е сх.
 и сумата му е $A \cdot B$



Тн нн = Абел.

Нека $\{a_n\}$ е монотонна и ограничена, а $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ е сх.

Тогави $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ е сх.

Тн нн Дирихле

$\{a_n\}$ е монот и $a_n \rightarrow 0$. Нека b_n принадлежи на редица $\sum b_n$ са огр.

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ е сх.

Док не е за изпит
 $b_n = \sin nx$ b_n - ар.
 $b_n = \cos nx$

$$b_n = (-1)^{n-1}$$

$$b_n = 0 \text{ или } 1 \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n \text{ е сх.}$$

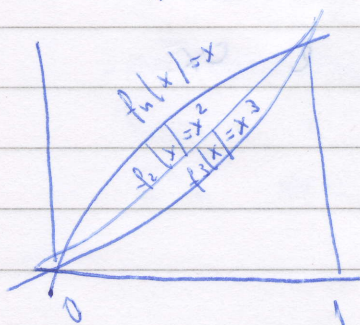
функционални редици и редове

$$f_n(x)$$

$$x \in M$$

Примери $f_n(x) = x^n$ в $M = [0, 1]$

$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$ - гранична функция;



$$x^n \rightarrow 0$$

$$0 < x < 1$$

$$x^n \rightarrow 0 \quad / \quad p(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \in [0; 1] \\ 1 & \text{für } x \in 1 \end{cases}$$

$$\frac{x^n n!}{n} = \frac{|x|}{n!}$$

$$2) \quad p_n(x) = \frac{1}{1+n x}$$

$$0 < \frac{|x|}{n!}$$

$$M = [0; 1]$$

$$p_n(0) = 1 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$$

$$p_n(1) = \frac{1}{1+n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$$\text{für } \forall x > 0 \quad \frac{1}{1+n x} \sim \frac{1}{\infty} = 0$$

$$p(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x=0 \\ 0 & \text{für } x \in [0; 1] \end{cases}$$

$$3) \quad p_n(x) = \frac{n x}{1+n^2 x^2}$$

$$p_n(0) = \frac{0}{1} = 0 \rightarrow 0$$

$$p_n(1) = \frac{n}{1+n^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$$\frac{n x}{n^2 \left| \frac{1}{n^2 x^2} + 1 \right|} \sim \frac{x}{\infty} = 0$$

$$p_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$$f_n(x) = A \sin nx$$

$$|f_n(x)| \leq \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$$f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$$[1, 0] \ni x \neq 0 \Rightarrow \left| \frac{x}{n} \right| = \left| \frac{x}{n} \right| \rightarrow 0 \leftarrow x$$

$$\frac{1}{xN+1} = \left| \frac{x}{n} \right| \frac{1}{N}$$

$$[1, 0] = N$$

$$1 \leftarrow 1 = \left| \frac{0}{n} \right| \frac{1}{N}$$

$$0 \leftarrow \frac{1}{N+1} = \left| \frac{1}{n} \right| \frac{1}{N}$$

$$b_n = \frac{1}{n} \quad b_n = \frac{1}{n} \quad 0 < x < 1 \quad \frac{1}{xN+1}$$

$$0 = x \quad 0 \leftarrow 1 \leftarrow \left| \frac{x}{n} \right| \frac{1}{N}$$

$$b_n = \left| \frac{1}{n} \right| \quad b_n = 0 \text{ или } 1 \quad \sum \left| \frac{1}{n} \right| a_n \leq \left| \frac{1}{n} \right| \frac{1}{N}$$

$$\text{Функционали функции и пределы} = \left| \frac{x}{n} \right| \frac{1}{N}$$

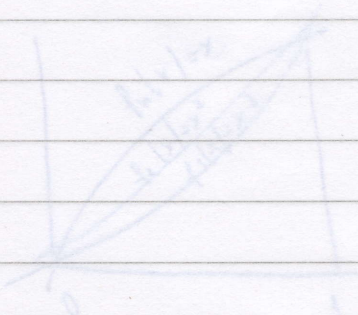
$$f_n(x) \quad x \in M$$

$$0 \leftarrow 0 = \frac{0}{1} = \left| \frac{0}{n} \right| \frac{1}{N}$$

$$\text{Примеры} \quad f_n(x) = x^n \quad x \in [0, 1]$$

$$0 \leftarrow \frac{N}{N+1} = \left| \frac{1}{n} \right| \frac{1}{N}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x) \text{ - граница функции}$$



$$x^N \rightarrow 0 \quad 0 = \frac{x}{N} \leftarrow \left| \frac{1}{n} \right| \frac{1}{N}$$

$$0 \leftarrow \left| \frac{x}{n} \right| \frac{1}{N}$$