Упражнение 11

Векторно и смесено произведение на свободни вектори

Задача 1. Докажете тъждествата:

$$\vec{a} \times \left[\vec{b} \times \left(\vec{c} \times \vec{d}\right)\right] = \vec{b}\vec{d}.\left(\vec{a} \times \vec{c}\right) - \vec{b}\vec{c}.\left(\vec{a} \times \vec{d}\right),$$

$$\left(\vec{a} \times \vec{b}\right)\left[\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \times \vec{c}\right]\left[\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \times \left(\vec{b} \times \vec{c}\right)\right] = -\vec{a}\vec{b}\vec{c}.\vec{b}\vec{c}.\left(\vec{a} \times \vec{b}\right)^2.$$

Задача 2. Относно ортонормирана координатна система са дадени точките $A(1,-5,4)$, $B(0,-3,1)$, $C(-2,-4,3)$, $D(4,4,-2)$. Намерете дължината на височината през върха A на тетраедъра $ABCD$.

Задача 3. Дадени са векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и $\triangle ABC$ с медиана AM ($M \in BC$). Ако $\overrightarrow{AB} = (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{a}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$, $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$ и $|\overrightarrow{AM}| = \frac{\sqrt{13}}{4}$, намерете $\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})$.

Задача 4. Ако OA, OB и OC са ръбове на паралелепипед и $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{a} \times \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$, докажете, че обемът на паралелепипеда е равен на $|\vec{a}\vec{c}|(\vec{a} \times \vec{b})^2$.