

07.04.2014г.

ТБМС - КЕК.

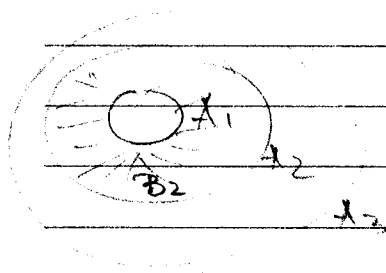
от милиондо тест, кема!

- 1) σ -аддитивна;
- 2) непер. омырды;
- 3) непер. отторе;
- 4) непер. $\mathbb{R}$ -линейна;

2-во:

$$1 \Rightarrow 2: \text{ } A_1 \subset A_2 \subset \dots \subset A_n : P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) =$$

$$= \lim P(A_n)$$



$$B_1 = A_1$$

$$B_2 = A_2 \setminus A_1 \Rightarrow A_2 = B_2 \cup A_1$$

...

$$B_n = A_n \setminus A_{n-1}$$

$$B_i \cap B_j = \emptyset \quad i \neq j \quad \text{ок + непер. аддитивна!}$$

$$A_n = \bigcup_{k=1}^n B_k \Rightarrow \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k$$

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} P(B_k) = \quad (\text{от теорема})$$

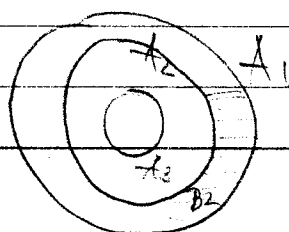
$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n P(B_k) = \lim_{n \rightarrow \infty} (P(A_1) + P(A_2) - P(A_1) + P(A_3) - P(A_2) + \dots + P(A_n) - P(A_{n-1})) =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n)$$

$$2 \Rightarrow 3: \text{ } A_1 \supset A_2 \supset \dots \supset A_n \supset \dots$$

$$P(\cap A_n) = \lim P(A_n)$$

$$B_k = A_1 \setminus A_n \quad B_n = A_1 \setminus A_n$$



$$B_1 = \emptyset$$

$$A_1 \subset A_2 \subset \dots \subset B_n \subset \dots$$

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (P(A_1) - P(A_n)) \quad (\text{Dedekind's prop.})$$

$$\text{Итого: } \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_1 \setminus A_n) = A_1 \setminus \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$$

$$P(A_1) - P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)$$

3 $\Rightarrow$ 4: Дедекинд

$$4 \Rightarrow 1: \quad A_1, A_2, \dots, A_n, \dots \quad A_i \cap A_j = \emptyset \quad i \neq j.$$

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$$

$$\text{Покажем } B_n = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k, \quad n=1, 2, \dots$$

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = B_{\infty} \cup C_{\infty} \quad C_{\infty} = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$$

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k) = P(C_{\infty}) =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n P(A_k) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(C_n)$$

$$C_1 \supset C_2 \supset \dots \supset C_{\infty}$$

$$\bigcap C_n = \emptyset \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} P(C_n) = 0.$$

Пример на вероятностно пространство

$\Omega = \mathbb{R}^1$ мн. права е. мн. прлоо.

$F = \emptyset$ (Борелева σ -алгебра)

P е σ -измерима вероятност;

$F(x) = P((-\infty, x])$ - функция на разпределение на P

Свойства на 1) $F \in [0; 1]$

$F(x)$: 2) $F(x)$ е намаляваща

3) $F(x)$ е непрер. отляво и има

разрива отляво $\forall x$

4) $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$;

5) $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1$;

Доказателство: 1) очевидно, $x \geq y \Rightarrow F(x) \geq F(y)$

$(-\infty, x] \supset (-\infty, y]$

2) непрер. отляво: ако имаме р-ца от x

$x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n \leq \dots$ $x_n \rightarrow x$

$F(x_n) = P((-\infty, x_n])$

$F(x_n) = P((-\infty, x_n])$

$\lim_{n \rightarrow \infty} F(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} P((-\infty, x_n]) = P(\bigcup_{n=1}^{\infty} (-\infty, x_n])$

$= P((-\infty, x]) = F(x)$

$x_1 > x_2 > \dots > x_n > \dots$ $x_n \rightarrow x$

$\lim_{n \rightarrow \infty} F(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} P((-\infty, x_n]) = P(\bigcap_{n=1}^{\infty} (-\infty, x_n]) = P((-\infty, x]) = F(x)$

3) $x_1 < x_2 < \dots < x_n < \dots$

$x_n \rightarrow \infty$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} F(x_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} P\left(\bigcap_{i=1}^k (-\infty, x_k]\right) = P\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} (-\infty, x_k]\right) = P(\mathbb{R}^1)$$

4) $x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_n \geq \dots, x_n \rightarrow -\infty$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\bigcap_{k=1}^n (-\infty, x_k]\right) = P\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} (-\infty, x_k]\right) = P(\emptyset) = 0$$

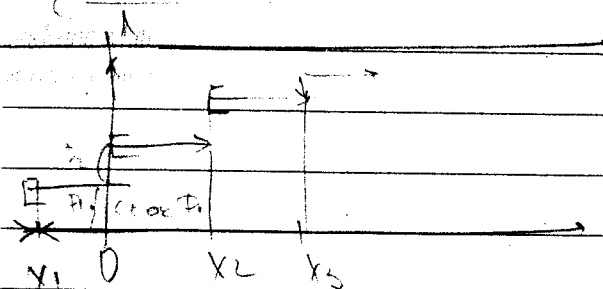
1. TR: Вероятность непрерывна:

Вероятность непрерывна, если для любого $\lambda \in [0, 1]$ и

существует последовательность x_n такая, что $x_n \rightarrow x$ и $F(x_n) \rightarrow F(x)$.

Существование функции распределения:

1) Проверка функции на монотонность:



x	x_1	x_2	x_3
$F(x)$	0	$F(x_2)$	$F(x_3)$

2) Проверка функции на непрерывность:

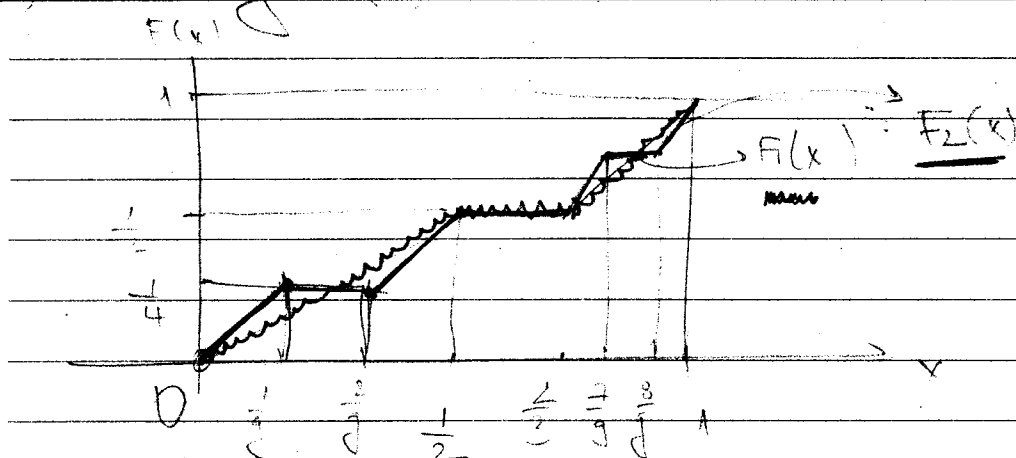
$$\exists \text{ ф. л. в. } F(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} F(x) = F(x_0)$$

Существование плотности вероятности

$$P([a, b]) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x) dx$$

$$\left[\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right]$$

3). Сингулярни - събота на Кантор (пр.)



$$F(x) = \lim F_n(x)$$

Теорема на Асколи-Арцела

1) $F_n(x)$ е равномерно оп.

2) $F_n'(x)$ е равномерно огранич.

1) означава $\exists$ const C : $|F_n(x)| \leq C$

2) $\rightarrow$ equicontinuous

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta(\epsilon, x) : |x - y| < \delta \Rightarrow |F_n(x) - F_n(y)| < \epsilon.$$

$F(x) \in$ непрерыв.

Ето е пример:

$$(1/n) \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{4}{27} + \dots + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{4}{27} + \dots \right) \right) =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1 - \frac{2}{3}} = 1$$

Поэтому $\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) = 1$

Така $\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) = 1$ е аддитивна функция $\int_0^1 F_n(x) dx = F(1) = 1$

$$F(x) = p_1 F_1(x) + p_2 F_2(x) + p_3 F_3(x)$$

$$p_1, p_2, p_3 \geq 0$$

$$p_1 + p_2 + p_3 = 1$$

Случайные величины

$$Z: \Omega \rightarrow \mathbb{R} \quad Z: (\Omega, \mathcal{F}, P) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}, F)$$

$$Z^{-1}(B) \in \mathcal{F} \quad B \in \mathcal{B}$$

$$F(x) = P(Z \leq x) = P(Z^{-1}((-\infty, x]))$$

Примеры из статистики:

1) Индикатор на событие $A \in \mathcal{F}$

$$1_A(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{если } \omega \in A \\ 0, & \text{если } \omega \notin A \end{cases} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

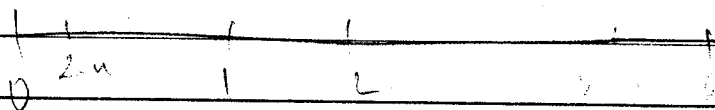
Матрица:

2) Простая случайная величина - это случайная величина, принимающая значения $z = \sum_{k=1}^n \gamma_k 1_{A_k}$

Лемма: 1) Если $z = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n$, то $\exists \{z_1, z_2, \dots, z_n, \dots\}$ - последовательность случайных величин, таких что $z(\omega) = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n(\omega), \forall \omega$

2) Если $z \geq 0$, то $\{1 \leq z_1 \leq z_2 \leq \dots \leq z_n \leq \dots\}$ - последовательность неотрицательных случайных величин, таких что $z(\omega) = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n(\omega), \forall \omega$

2.60: 1) 8) $z_n(\omega) = \sum_{k=1}^n \frac{k-1}{2^n} 1_{\{\frac{k-1}{2^n} \leq z < \frac{k}{2^n}\}} + n \cdot 1_{\{z \geq n\}}$



$$\zeta_n \leq \zeta$$

$$Z_n \leq Z_{n+1}$$

$$N \rightarrow N+1$$

$$\frac{2(k-1)}{2^k} \quad \frac{2k-1}{2^k} \quad \frac{k}{2^k}$$

Ако $\{$ прие на $an - an, myk$
 $\{n = \{n+1$

Тогда $\{1 \leq \{2 \leq \dots \leq \{n \leq \dots \in \text{МОНОТОННАЯ}$
 $\Rightarrow \in \text{СИСТЕМА}$

a) ~~Следва~~ от, че $\zeta = \zeta^+ - \zeta^-$
 (Звека 1 и 2-ри, могат да се представят
 като разлика на 2 а. в. $\zeta^+, \zeta^- \geq 0$)

$$z^+ = \max(z, 0)$$

$$z^* = \max \{-3, 0\}$$

