

17.03.2014г.

ТВМС - 10к.

моменти

$$DZ = E(Z^2) - (EZ)^2 = \mu_2 - \mu_1^2$$

DZ - дисперсия на Z .
 $DZ > 0$ освен в сл.

свойства на дисперсията DZ

→ ако c е число, то $D(cZ) = c^2 DZ$

$$\begin{aligned} D(cZ) &= E(c^2 Z^2) - (E(cZ))^2 \\ &= c^2 E(Z^2) - c^2 (EZ)^2 \\ &= c^2 (E(Z^2) - (EZ)^2) \\ &= c^2 DZ \end{aligned}$$

→ ако $Z = c = \text{const}$, то $DZ = 0$.

→ ако Z, Y - а. вел.
 то $D(Z+Y) = ? DZ + DY$

$$\begin{aligned} Z=Y & \quad \begin{aligned} 1. \text{стр} &= D(2Z) = 4DZ \\ 2. \text{стр} &= 2DZ \end{aligned} \quad \left. \begin{aligned} & \text{тога} \\ & \text{иначе } = ? \end{aligned} \right\} \end{aligned}$$

$EZ \rightarrow$ наит. означение.

$$\begin{aligned} D(Z+Y) &= E(Z+Y)^2 - (E(Z+Y))^2 = \\ &= E(Z^2 + Y^2 + 2ZY) - (EZ + EY)^2 = \\ &= \underbrace{E(Z^2)}_{(1)} + \underbrace{E(Y^2)}_{(2)} + \underbrace{2E(ZY)}_{(3)} - \underbrace{(EZ)^2}_{(1)} - \underbrace{(EY)^2}_{(2)} - \underbrace{2EZ \cdot EY}_{(3)} \\ &= \underbrace{DZ}_{(1)} + \underbrace{DY}_{(2)} + \underbrace{2(E(ZY) - EZ \cdot EY)}_{(3)} = \end{aligned}$$

ковариация на $Z, Y = \text{cov}(Z, Y)$

$$= DZ + DY + 2\text{cov}(Z, Y).$$

Д.1 Случайните вел. z, η - некорелирани, ако $\text{cov}(z, \eta) = 0$

→ Тогава " ρ " е достигата при некорелирани вел.чести.

Д.1 Сл. вел. z, η са нар. независими, ако събитията, състоящи се в това те да приемат кои да е 2 свои стойности, са независими.

→ $z, \eta \Rightarrow$ разпределение за 2-те сл. вел.

$$\left. \begin{array}{c} z / x_1, x_2, \dots, x_n, \dots \\ \varphi / p_1, p_2, \dots, p_n, \dots \end{array} \right\} \begin{array}{c} \eta / y_1, y_2, \dots, y_m, \dots \\ \psi / q_1, q_2, \dots, q_m, \dots \end{array}$$

$$P(z = x_n, \eta = y_m) = \varphi_n \psi_m \quad n, m = 1, 2, \dots$$

↑
вероятностите то
то записване
така.

Лема! Ако z, η са независими, то те са некорелирани.

До-во: $E(z\eta) = \sum_n \sum_m x_n y_m \cdot P(z = x_n, \eta = y_m) =$

$$= \sum_n \sum_m x_n y_m \varphi_n \psi_m =$$

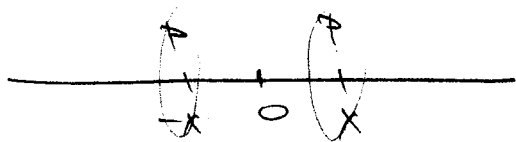
$$= \underbrace{\sum_n x_n \varphi_n}_{E_z} \cdot \underbrace{\sum_m y_m \psi_m}_{E_\eta} = E_z \cdot E_\eta$$

$$= \text{cov}(z, \eta) = \underline{\underline{0}}$$

($z = \eta$!?)

Обратното не е вярно:

пр. z = със симетрично разпределение.



$$y = z^2.$$

z и y са зависимы, но в същото време некоррелирани.

$$\rightarrow \text{cov}(z, y) = E(z^3) - E(z) \cdot E(z^2) = 0. \quad z \cdot y = z^3$$

б. Производящи функции.

$$\varphi_z(t) = E(t^z) = \sum_n t^{x_n} \cdot p_n, \quad t > 0.$$

пор. ф. на вел. z

z	$x_1 \dots x_n \dots$
p	$p_1 \dots p_n \dots$

$$\varphi_z(1) = 1$$

$$\varphi'_z(t) = \sum_n x_n \cdot t^{x_n-1} \cdot p_n \quad - \quad \varphi'_z(1) = E z = \mu_1$$

$$\varphi''_z(t) = \sum_n x_n \cdot (x_n - 1) t^{x_n-2} \cdot p_n \quad - \quad \varphi''_z(1) = \sum_n x_n^2 p_n -$$

$$- \sum_n x_n p_n =$$

$$= \mu_2 - \mu_1^2$$

μ_2 = втори момент, μ_1 = първи момент

$P(A_1) = p \cdot q^{n-1} \cdot n$, защото имаме C_n^1 и несъвместни събития (и двете).

$k=2 \quad A_2 = \underbrace{yy \dots y}_{n-2} \dots$

→ интересува ни броя на думите.

$P(A_2) = p^2 \cdot q^{n-2} \cdot C_n^2$

$C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}$

$C_n^k = \frac{n(n-1)(n-2) \dots (n-k+1)}{k!}$

$C_n^0 = 1$

Визуализация:

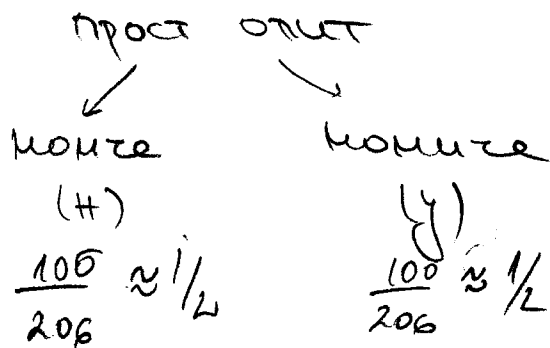
$P(A_0) = C_n^0 \cdot p^0 \cdot q^{n-0}$

$P(A_1) = C_n^1 \cdot p^1 \cdot q^{n-1}$

$P(A_2) = C_n^2 \cdot p^2 \cdot q^{n-2}$

$P(A_k) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}$

Пример: Семейство има 8 деца.
каква е вероятността да има 3 момчета?



$n=8$

$k=3$

$P(A_3) = C_8^3 \cdot \frac{1}{2^8} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{1}{2^8} = \frac{7 \cdot 7}{2^5 \cdot 32}$

2а) "Схема с точки".

Урна N точки $\begin{cases} M = \text{бр. бели} \\ N-M = \text{бр. черни} \end{cases}$ (2 вида точки)

Извличаваме n точки.

БЕЗ
ВРЪЩАНЕ

m бр. бели
точки в извадката

$n-m$ бр. черни
точки в извадката.

$A_m = \{ \text{събитието в извадката да има } m \text{ бели точки} \}$

$$P(A_m) = ?$$

$$P(A_m) = \frac{K_{A_m}}{K_n}$$

$$K_n = C_n^n$$

$$K_{A_m} = ?$$

трябва ни правило за броење:

Сложнен експеримент E

ЕТАПИ

ЕТАП E_1

E_1 има k_1 на брой

(+) изхода

ЕТАП E_2

За всеки изход на

първия ЕТАП, вторият ЕТАП има k_2 изхода.

Тогва биват бр. изходи на E
е $k_1 \cdot k_2$ изхода.

$$\Rightarrow K_{A_m} = C_m^m \cdot C_{n-m}^{n-m}$$

$$\Rightarrow P(A_m) = \frac{C_m^m \cdot C_{n-m}^{n-m}}{C_n^n} = 1$$

когато $n \ll N, M$, тогава 2-те схем
 са много близки.
 → можем да апроксимираме краищата схема
 до схемата на Фернунд.

3) "Схема до първи успех"
 правят k независими пропити опити
 с една и съща вероятност p за успех
 във всеки опит.
 правят k до първи успех.

k = брой проведенни опити.

$k = 1, 2, \dots$

$P(A_k) = ?$

$k=1, A_1 = \gamma \quad \rightarrow P(A_1) = p$
 $k=2, A_2 = \gamma\gamma \quad \rightarrow P(A_2) = p \cdot q$
 $k=3, A_3 = \gamma\gamma\gamma \quad \rightarrow P(A_3) = p \cdot q^2$

$$P(A_k) = p \cdot q^{k-1}$$

4) Схема на Пуассон

- какво става със схемата на Фернунд
 при $n \rightarrow \infty$.

тежък момент: без допълнително
 предположение рязко. $P(A_k) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$ за k

→ безсодържателно е да рязко.
 това в такава ситуация

$0 < p = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k}{n}$ → $k \rightarrow \infty \quad \rightarrow P(A_k) \rightarrow 0$.
 стационарността
 в ср. - в.

→ трябва ни допълнително
 предположение

Предположение на Пуассон:

$n \rightarrow \infty$ и $p \rightarrow 0$, така че $n \cdot p = \lambda = \text{const}$

а Пуассон доказва: $P(A_k) = \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda}$, $k=0,1,2,\dots$

$$\text{от сх. на БЕР: } P(A_k) = C_n^k \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} = \\ = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} =$$

$$= \frac{n \cdot (n-1) \cdot p \dots (n-k+1) \cdot p \cdot (1-p)^{n-k}}{k!} =$$

$$= \frac{n \cdot p \cdot (n-p) \dots (n-p+k-p)}{k!} \cdot (1-p)^{n-k} \rightarrow \frac{\lambda^k}{k!} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} (1-p)^{n-k} =$$

$$\text{имаме, че } (1+x)^{\frac{1}{x}} \rightarrow e$$

$$= \frac{\lambda^k}{k!} \cdot (1+x)^{-\frac{1}{x}}$$

полагаме $x = -p$, $p = -x$

$$n \cdot p = \lambda \Rightarrow n = \frac{\lambda}{p} = -\frac{\lambda}{x}$$

$$\frac{\lambda^k \cdot e^{-\lambda}}{k!}$$

Пр.: Във Vivacom 1% от разговорите звънват с грешка.

Като е бер. от 500 разговора да имаме 3 грешки.

схема на Бернули:

$$p = 0,01, n = 500, k = 3$$

$$P(A_3) = ?$$

$$P(A_3) = C_{500}^3 \cdot 0,01^3 \cdot 0,99^{497} \rightarrow ?$$

схема на Пуассон:

$$\lambda = p \cdot n = 0,01 \cdot 500 = 5$$

$$P(A_3) = \frac{5^3}{3!} \cdot e^{-5} = \frac{5^3}{6} \cdot e^{-5}$$

$$e = 2,7172 \approx 2,5$$

$$\frac{8}{6} \cdot e^{-2} = \frac{8}{6 \cdot (2,5)^2} = \frac{8}{6 \cdot 6,25}$$