

10.03.2014г.

ТВМС - ЛЕК.

Условна вероятност и независимост

1. Условна вероятност. A, B - събития
↓
настъпило

$P(A|B)$ - условна вероятност на A ,
ако е настъпило B .

$\cup$	$\cap$	$-$	$ $
или	и	не ако	

пример: хвърляне на 2 монети

$$\Omega = \{ (E, E), (E, T), (T, E), (T, T) \}$$

$$A = \{ (E, E) \}, B = \{ (E, E), (E, T) \}$$

$$P(A|B) = 1/2 \neq P(A) = 1/4$$

$$P(A|B) = \frac{K_{A \cap B}}{K_B} = \frac{K_{A \cap B} / K_{\Omega}}{K_B / K_{\Omega}} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

2. Независими събития

пр.: като в 1), B - същото, $A = \{ (E, E), (T, E) \}$

$$P(A) = 1/2, \quad P(A|B) = 1/2$$

0: $A \cup B$ - независ., ако $P(A) = P(A|B)$ ($= \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$)

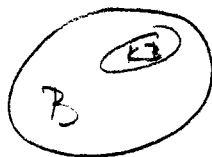
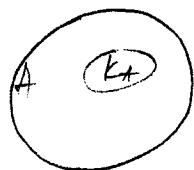
или еквивалент на, ако $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

3. Формули за събиране и умножаване на вероятности.

а) събиране: $P(A \cup B) = ?$

ако $A \cap B = \emptyset$

$$P(A \cup B) = \frac{k_{A \cup B}}{k_n} = \frac{k_A + k_B}{k_n} = \frac{k_A}{k_n} + \frac{k_B}{k_n} = P(A) + P(B)$$



ако $A \cap B \neq \emptyset$

$$P(A \cup B) = \frac{k_{A \cup B}}{k_n} = \frac{k_A + k_B - k_{A \cap B}}{k_n} = \frac{k_A}{k_n} + \frac{k_B}{k_n} - \frac{k_{A \cap B}}{k_n} = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

ако A, B - независими

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B)$$

$$P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$$

б) умножение: $P(A \cap B) = ?$

$$P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B)$$

ако A, B - незав., то $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

4. Формула за пълната вероятност

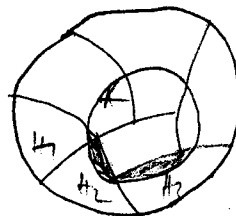
A - събитие, $H_1, H_2, \dots, H_n$ - ППТС

знаем $P(H_1), \dots, P(H_n)$

$P(A|H_1), P(A|H_2), \dots, P(A|H_n)$

търсим: $P(A) = ?$

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(A|H_i) \cdot P(H_i)$$



$$A = (A \cap H_1) \cup (A \cap H_2) \cup \dots \cup (A \cap H_n)$$

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(A \cap H_i) = \sum_{i=1}^n P(A|H_i) \cdot P(H_i)$$

пример:

2 големи производителя на майонеза

$\swarrow$
 $\searrow$

Краси 65%.

Омнеза 35%.

60% от Краси < 2 лв. кг.

40% от Омнеза < 2 лв. кг.

Търсим: колко % е евтиният майонеза.

$H_1 = \{ \text{Краси} \}$; $H_2 = \{ \text{Омнеза} \}$.

$P(H_1) = 0,65$, $P(H_2) = 0,35$

$A = \{ < 2 \text{ лв. кг.} \}$

$P(A|H_1) = 0,6$; $P(A|H_2) = 0,4$;

$P(A) = 0,6 \cdot 0,65 + 0,4 \cdot 0,35 = 0,39 + 0,14 = 0,53$.

5. Формули на Бейс

Дадено: като в 4. $P(H_k)$ - априори;

търсим: $P(H_k|A) = ?$ апостериорна /апостериори;

$$P(H_k|A) = \frac{P(A \cap H_k)}{P(A)} = \frac{P(A|H_k) \cdot P(H_k)}{\sum_{i=1}^n P(A|H_i) \cdot P(H_i)}$$

$P(H_1) = 0,65$

$$P(H_1|A) = \frac{P(A|H_1) \cdot P(H_1)}{P(A)} = \frac{0,6 \cdot 0,65}{0,53} = \frac{0,39}{0,53} \approx 0,74$$

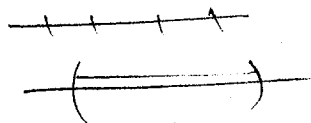
Дискретни случайни величини

1. Случайна величина

$$Z: \begin{cases} \Omega \rightarrow \mathbb{R} \\ \omega \rightarrow z(\omega) \end{cases} \quad (z(\omega))$$

2. Видове случайни вел.

→ дискретни;
→ непрекъснати;



пр.: СЕ - хвърляне на монета. $\Omega = \{E, T\}$

$$X = \begin{cases} 1, & \text{ако } \omega = E \\ 0, & \text{ако } \omega = T \end{cases}$$

ω	E	T
P	1/2	1/2

3. Закон за разпределение на дискр. сл. вел.

X	x_1	x_2	...	x_n	...
P	p_1	p_2	...	p_n	...

$$P_n = P(X = x_n) \quad 0 < P_n < 1$$

$$\sum_n P_n = 1$$

4. Числови характеристики (моменти, централни моменти, абсолютни моменти)

а) k -ти момент $\mu_k = \sum_n x_n^k P_n$

ако $k=1$ $\mu_1 = E_z$ - математическо очакване

$$= \left(\sum_n x_n P_n \right) \quad (\text{средна стойност})$$

б) централни моменти $\mu_k = \sum_n (x_n - E_z)^k P_n$

дисперсия = D = разсейване;

$\mu_2 = D_z$ - дисперсия на случаите в Z .

$$= \sum_n (x_n - E_z)^2 P_n = \sum_n (x_n^2 - 2x_n E_z + (E_z)^2) P_n =$$

$$= \sum_n x_n^2 P_n - 2E_z \sum_n x_n P_n + (E_z)^2 \sum_n P_n = E(Z^2) - 2(E_z)^2 + (E_z)^2$$

5. Свойства на E_z и D_z .

а) E_z - ако Z случайно вел. и c - число, то $E(cZ) = c \cdot E_z$ - ако

$E(cZ) = \sum_n c x_n P_n = c \cdot \sum_n x_n P_n = c E_z$ $\{, c = \text{а. вел. то}$

- ако $Z = c = \text{const}$ $E_z = c \rightarrow E_z = c \cdot 1 = c$ $E(Z+Y) = E_z + E_y$