24.03.2014г ТВМС - лек.

Основни дискретни разпределения

1. Разпределение на Бернули

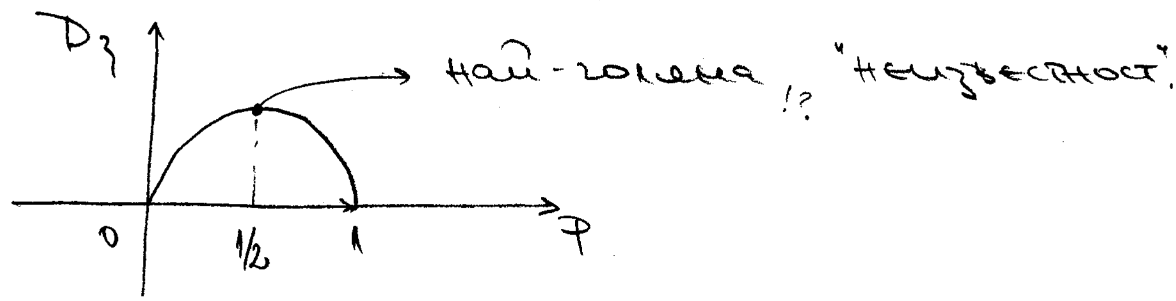
(случайната вел. с такова разпр. има следния з-н:)

ξ	0	1
P	$q=1-p$	p

$\xi^2=\xi$

$$E\xi = 0.(1-p)+1.p = p$$ (мат. очакване на това разпр.)

$$D\xi = E(\xi^2)-(E\xi)^2 = p - p^2 = p(1-p) = p.q$$



Пораждаща ф-ция: $\varphi_\xi(t) = Et^\xi = tp + 1.q = pt+q$

2. Биномно разпр.

(то е с 2 параметъра n, p)

имаме $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ независими случайни вел. с разпр. на Бернули с вероятност за успех p.

$$S_n = \xi_1+\xi_2+\dots+\xi_n \sim B:(n,p)$$ биномно разпр.

(= броят на успехите в n незав. прости опити с вер. за успех p)

Закон за биномно разпр.:

S_n	0	1	...	k	...	n
p	q^n	npq^{n-1}		$C_n^k p^k q^{n-k}$		p^n

$$E S_n \overset{(\text{св.}3)}{=} \sum_{k=1}^{n} \underbrace{E\xi_k}_{\substack{\| \\ p \text{ (от преди малко)}}} = n.p$$

$$D S_n = \sum_{k=1}^{n} D\xi_k = npq$$

$$\varphi_{S_n}(t) = E t^{S_n} = E\left(\prod_{k=1}^{n} t^{\xi_k}\right) = \prod_{k=1}^{n} E\left(t^{\xi_k}\right) = (pt+q)^n.$$

$$\left(t^{a+b\dots} = t^a . t^b \dots\right)$$

$$pt+q \quad \left(\text{от } \varphi_\xi(t)\right)$$

3. Геометрично разпределение.
имаме $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$ - независими сл.вел. и имат разпр на Бернули с вер. за успех p.

$\tau = \min(n : \xi_n = 1)$ (първата 1-ца в редицата)

τ	1	2	...	n	...
p	p	pq	...	pq^{n-1}	...

$$E\tau = 1.p + 2p.q + 3pq^2 + \dots + n.p.q^{n-1} + \dots =$$
$$= 1-q + 2(1-q)q + 3(1-q).q^2 + \dots =$$
$$= 1-q + 2q - 2q^2 + 3q^2 - 3q^3 + \dots =$$
$$= 1 + q + q^2 + q^3 + \dots = \leftarrow \left(\frac{\infty}{\infty}\right)$$
$$= \frac{1}{1-q} = \frac{1}{p}.$$

$D\tau$ е сложно без производна ϕ.

$$\varphi_\tau(t) = E(t^\tau) = \sum_{k=1}^{\infty} t^k p q^{k-1} = \frac{p}{q} \cdot \sum_{k=1}^{n} (tq)^k =$$

$$= pt \sum_{k=0}^{\infty} (tq)^k = \frac{pt}{1-qt}.$$

$$\varphi'_\tau(t) = \frac{p(1-qt)+qpt}{(1-qt)^2} = \frac{p}{(1-qt)^2}.$$

$$\varphi''_\tau(t) = 2p \cdot \frac{q}{(1-qt)^3} = \frac{2pq}{(1-qt)^3}.$$

$$\varphi''_\tau(1) = \frac{2q}{p^2} = \underbrace{E(\tau^2)}_{\text{втори}} - \underbrace{E\tau}_{\text{първи}}$$

момент

$$E(\tau^2) = \frac{2q}{p^2} + \frac{1}{p}$$

$$D\tau = \frac{2q}{p^2} + \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} = \frac{2q+p-1}{p^2} = \frac{q}{p^2}.$$

4. Разпределение на Поасон

π	0	1	2	......	n	......
p	$e^{-\lambda}$	$\lambda \cdot e^{-\lambda}$	$\frac{\lambda^2}{2!} e^{-\lambda}$	...	$\frac{\lambda^n}{n!} \cdot e^{-\lambda}$	......

$$E\pi = \lim_{n\to\infty} E S_n = \lim_{n\to\infty} (n \cdot p) = \lambda$$

съгласно предположението на Поасон $n \cdot p = \lambda$.

$$D\pi = \lim_{n\to\infty} D S_n = \lim_{n\to\infty} \underbrace{np}_{\lambda} q = \lambda \underbrace{\lim_{n\to\infty} q}_{1} = \lambda, \quad \begin{pmatrix} p \to 0 \\ q \to 1 \end{pmatrix}$$

$$\varphi_\pi(t) = \lim_{n\to\infty} \varphi_{s_n}(t) = \lim_{n\to\infty} (pt+q)^n = \lim_{n\to\infty} (1+p(t-1))^n =$$

$$p(t-1) = x \Rightarrow p = \frac{x}{t-1}$$

$$n.p = \lambda \Rightarrow n = \frac{\lambda}{p}.$$

$$n = \frac{\lambda(t-1)}{x}.$$

$$= \lim_{x\to 0} (1+x)^{\frac{\lambda(t-1)}{x}} = e^{\lambda(t-1)}.$$

5. Неравенство на Чебишев

$\xi \geq 0$ - сл. вел. $\varepsilon > 0$ - число.

$$\mathbb{P}(\xi > \varepsilon) \leq \frac{E\xi}{\varepsilon}.$$

ξ	x_1	x_2	...	x_n	...
p	p_1	p_2	...	p_n	...

Д-во: $E\xi = \sum_n x_n p_n = \sum_{n: x_n > \varepsilon} x_n p_n + \sum_{n: x_n \leq \varepsilon} x_n p_n \geq$

$$\geq \sum_{n: x_n > \varepsilon} x_n . p_n > \varepsilon . \sum_{n: x_n > \varepsilon} p_n =$$

$$= \varepsilon . \mathbb{P}(\xi > \varepsilon).$$

Гранични св-ва на схемата на Бернули

$(n \to \infty)$

$p \to fix$ (вероятността е фиксирана)

1. Закон за големите числа на Бернули.

Сл.: (от неравенството на Чебишев):

$$P(|\xi - E\xi| > \varepsilon) < \frac{D\xi}{\varepsilon^2}.$$ ξ - произволна сл. вел.

Д-во: $$P(|\xi - E\xi| > \varepsilon) =$$
$$= P\left((\xi - E\xi)^2 > \varepsilon^2\right) < \frac{E(\xi - E\xi)^2}{\varepsilon^2} = \frac{D\xi}{\varepsilon^2}.$$

З-н за гол. числа на Бернули: $$P\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| > \varepsilon\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

от първата лек.:
$$\lim_{n\to\infty} \frac{k}{n} = \underline{\underline{P(A)}}$$

$S_n = k$

Сходимост по вероятност:

$\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ случайна редица, ξ е сл. вел.

К., че $\xi_n \xrightarrow[n\to\infty]{P} \xi$, ако $P(|\xi_n - \xi| > \varepsilon) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{P} p.$$

Д-во на закона:

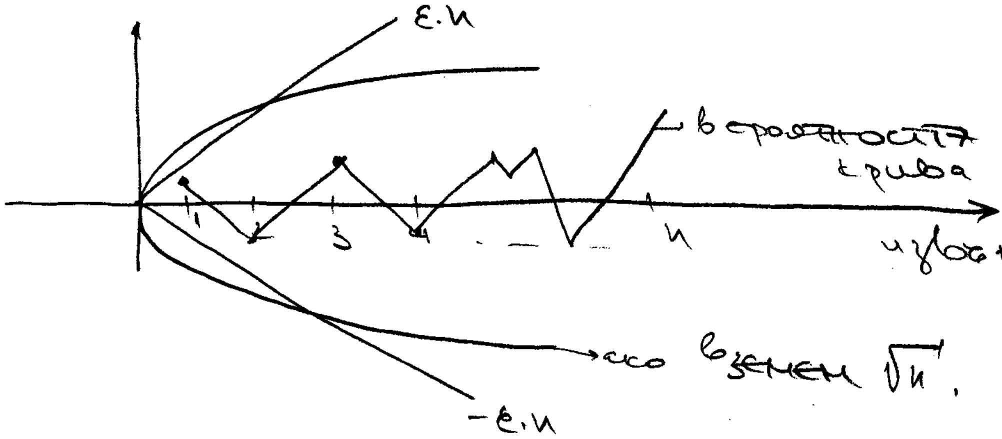
$$P\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| > \varepsilon\right) = P\left(\left|\frac{S_n}{n} - E\left(\frac{S_n}{n}\right)\right| > \varepsilon\right) <$$
$$< \frac{D\left(\frac{S_n}{n}\right)}{\varepsilon^2} = \frac{1/n^2\, DS_n}{\varepsilon^2} = \frac{npq}{n^2\varepsilon^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

2. Теореми на Моавър - Лаплас.

Запис на з-на за гол. числа:

$$P\left(|S_n - n.p| \geq \varepsilon n\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

(отклонението на $\overbrace{\text{успехите}}^{\text{относит.}}$ от n опита от очакваното ....)



вероятността тази крива да излиза извън намалява.

ако вземем $\sqrt{n}$.

+) Локална теорема на Моавър-Лаплас.

$P_k(n)$ вероятност за k успеха в n опита.

$$P_k(n) = C_n^k \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}.$$

но при големи n не е добре

$$\Rightarrow P_k(n) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} \cdot e^{-\frac{(k-np)^2}{2npq}}, \ n\to\infty. \quad \text{(асимптотична формула)}$$

$$\left(= \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} \cdot e^{-\frac{(k-np)^2}{2npq}} \left(1 + R(n)\right)\right)$$

$R(n) \to 0, \ n\to\infty.$

условие за k:

$$\left|\frac{k}{n} - p\right| = o\left(n^{-\frac{1}{3}}\right), \text{ т.е. } \sqrt[3]{n}\cdot\left|\frac{k}{n} - p\right| \to 0$$

следствие от условието:

1) $k, \ n-k \to \infty$.

$$\left|\frac{k}{n} \underbrace{-p+1}_{q} - 1\right| = \left|q - \frac{n-k}{n}\right|$$

Д-во: $P_k(n) = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} \sim$

асимптотична ф-ла на Стирлинг

$n! \sim \sqrt{2\pi n} \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^n, \quad n \to \infty.$

$$\sim \frac{\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}}{\sqrt{2\pi k}\left(\frac{k}{e}\right)^k \cdot \sqrt{2\pi(n-k)}\left(\frac{n-k}{e}\right)^{n-k}} =$$

делим чис. и знам на n^k

делим ч на n.

$$= \frac{p^k \cdot (1-p)^{n-k}}{\left(\frac{k}{n}\right)^k \cdot \left(\frac{n-k}{n}\right)^{n-k}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot \frac{k}{n} \cdot \frac{(n-k)}{n} \cdot n}} =$$

$\hat{p} = \frac{k}{n}, \quad \hat{q} = \frac{n-k}{n}$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot n \cdot \hat{p} \cdot \hat{q}}} \cdot \underbrace{\left(\frac{p}{\hat{p}}\right)^k \cdot \left(\frac{q}{\hat{q}}\right)^{n-k}}_{= I}$$

ново следствие:
$\hat{p} \to p$
$\hat{q} \to q$

антилогаритмуване I.

$$I = e^{-\ln\left(\frac{\hat{p}}{p}\right)^k \cdot \left(\frac{\hat{q}}{q}\right)^{n-k}} =$$

$$= e^{-n\left(\frac{k}{n} \cdot \ln\frac{\hat{p}}{p} + \frac{(n-k)}{n} \cdot \ln\frac{1-\hat{p}}{1-p}\right)} = e^{-n\overbrace{\left(\hat{p} \cdot \ln\frac{\hat{p}}{p} + (1-\hat{p}) \cdot \ln\frac{1-\hat{p}}{1-p}\right)}^{f(\hat{p})}}$$

Развиване $f(\hat{p})$ в ред на Тейлор в ок-ст на p.

$$f(\hat{p}) = \underset{0}{f(p)} + f'(p)(\hat{p}-p) + \frac{1}{2} \cdot f''(p) \cdot (\hat{p}-p)^2 + \dots$$

$$f'(\hat{p}) = \ln\frac{\hat{p}}{p} + \cancel{\hat{p} \cdot \frac{1 \cdot p}{\hat{p}} \cdot \frac{1}{p}} - \ln\frac{1-\hat{p}}{1-p} \cancel{-1} = \ln\frac{\hat{p}}{p} - \ln\frac{1-\hat{p}}{1-p}.$$

$= f'(p) = 0.$

$$f''(\hat{p}) = \frac{1}{\hat{p}} + \frac{1}{1-\hat{p}} = \frac{1}{\hat{p}\cdot(1-\hat{p})}$$

$$\Rightarrow f(\hat{p}) = \text{-----} = \frac{1}{2pq}\cdot\left(\frac{k}{n}-p\right)^2$$

$$f(\hat{p}) = \underset{0}{\underset{\parallel}{f(p)}} + f'(p)\cdot(\hat{p}-p) + \frac{1}{2}\cdot f''(p)(\hat{p}-p)^2 + \frac{1}{6} f^{(3)}(p)\cdot(\hat{p}-p)^3 + \dots$$

$$\left(\frac{k}{n}-p\right)^3 = o(n^{-1})$$

Това

е всичко.

$$\Rightarrow n\cdot\left(\frac{k}{n}-p\right)^3 = o(1)$$

т.е. клони към 0.

б) Интегрална теорема на Моавър-Лаплас.

$$P_k(n) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}}\cdot e^{-\frac{(k-np)^2}{2npq}}$$

Полагаме $x = \frac{k-np}{\sqrt{npq}}\cdot\sqrt{n}$ p, q са фикс.

$\Rightarrow x$ зависи от k и n,

$\Rightarrow o(n^{-\frac{1}{2}})$

$\Rightarrow x = o(n^{\frac{1}{6}})$

$x = \frac{k-np}{\sqrt{npq}}$ нормиран бр. успехи в n опита.

$$\Rightarrow P_k(n) \sim \dots \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}}\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Т. гласи:

$$P(a<x<b) \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_a^b e^{-\frac{t^2}{2}}dt$$

$\frac{\xi - E\xi}{\sqrt{D\xi}}$ - нормиран ξ

заместване X с новото

равно, умножаване по $\sqrt{n}$,

$a=-\varepsilon$ $b=+\varepsilon$ $\Rightarrow$ параболата - 8 - изчертана