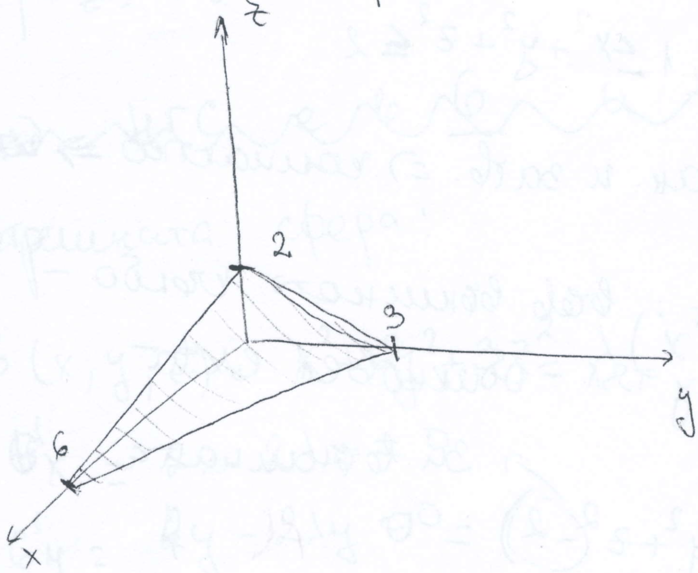
~ДИС~ 15.05.2013 г. ~учр.~

<u>зад.1</u> $F(x, y, z) = xy^2z^3$ в мн-вото $x + 2y + 3z = 6$ } F
$x, y, z > 0$

Има ли max, min? Да се намерят

$x + 2y + 3z = 6$ – равнина



(!) т-те на равнината са получени с избиране на др. две коорд. за нули

Мн. не е затворено, защот н-вото е строго! Озн. с F – мн., а с $\bar{F}$ – затв. обвивка.

$\bar{F}$: $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$. Това мн. е затв. и огран. => е компактно => важи Тм на Вайерщрас, ф-ята има НБ и НМ ст-ст, ф-ята е непрек.

По контура НМ ст-ст на ф-ята е 0, но във вътр. точки е > 0 => няма НМ ст-ст.

НГ ст-ст не може да е по контура, защото има във вътр. точки => ще има лок. max.

Прил. Тм на Лагранж в тази точка:

$G(x, y, z) = xy^2z^3 - \lambda(x + 2y + 3z - 6)$

$$\begin{cases} G'_x = y^2z^3 - \lambda = 0 \\ G'_y = xz^3 2y - 2\lambda = 0 \\ G'_z = xy^2 3z^2 - 3\lambda = 0 \\ x + 2y + 3z - 6 = 0 \end{cases}$$

$y^2z^3 = xyz^3 = xy^2z^2 \mid : y.z^2$

$yz = xz = xy$

$\Rightarrow x = y = z \Rightarrow 6x = 6 \Rightarrow x = y = z = 1 \Rightarrow$ в т. $(1,1,1)$ има НГ ст-ст.

Зад. (От изпит): Да се нам. НГСи НМС на ф-ята:

ПМ

$f(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2$ в множ. $1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 2$

Множ. (две кълбета едно в др.) е огран. и затв. $\Rightarrow$ компактно $\Rightarrow$ има НГС и НМС.

3 случая (варианта за НГС и НМС: във външното кълбо — Лагранж, вътрешното — Лагранж, м/у тях — обикновен екст.

$$H(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2 - \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 2) = 0$$

за външната

$$\begin{cases} H'_x = 2x - 2\lambda x = 0 \\ H'_y = 4y - 2\lambda y = 0 \\ H'_z = 6z - 2\lambda z = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \lambda = 1 & \text{или } x = 0 \\ \lambda = 2 & / \; y = 0 \\ \lambda = 3 & / \; z = 0 \end{matrix}$$

I сл. $\lambda = 1$, ~~или~~, $y = 0$, $z = 0$, $x = \pm\sqrt{2} \rightarrow$ т. P

II сл. $\lambda = 2$, $x = 0$, $z = 0$, $y = \pm\sqrt{2} \rightarrow Q$

III сл. $\lambda = 3$, $x = 0$, $y = 0$, $z = \pm\sqrt{2} \rightarrow R$

~~I сл.~~ $F(P) = 2$

$F(Q) = 4$

$F(R) = 6$

т-те по контура

За вътрешността:

$F = x^2 + 2y^2 + 3z^2$

$$\begin{cases} F'_x = 2x \\ F'_y = 4y \\ F'_z = 6z \end{cases} \qquad т.(0,0,0) \notin M$$

~~⇒ НГС е 6 а НМС е 2~~

вътрешната сфера:

$G(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2 - \lambda(x^2+y^2+z^2-1)$

$$\begin{cases} G'_x = 2x - 2\lambda x = 0 \\ G'_y = 4y - 2\lambda y = 0 \\ G'_z = 6z - 2\lambda z = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ т. $(1,0,0)\ S$, $F(S) = 1$ НМС

$(0,1,0)\ T$, $F(T) = 2$

$(0,0,1)\ V$, $F(V) = 3$

$F(R) = 6$ НГС

Зад. ? НГС и НМС на $u = xyz$; $\begin{cases} x+y-z=15 \\ x\cdot y - xz - yz = 72 \end{cases}$

Дали множ-то е компактно?

Изкл. z от у-нята, за да пренесем в равн.:

$xy - (x+y)(x+y-15) = 72$

$xy - (x+y)^2 + 15(x+y) = 72$

$\cancel{xy - (x+y)^2}$ $xy - x^2 - 2xy - y^2 + 15x + 15y = 72$

$x = \frac{1}{\sqrt2}u + \frac{1}{\sqrt2}v$

$y = \frac{1}{\sqrt2}u - \frac{1}{\sqrt2}v$

Завъртане на $45°$

* В общия случай!

$u = x\cos\alpha - y\sin\alpha$

$v = x\sin\alpha + y\cos\alpha$

$-\frac{1}{2}(u+v)^2 - \left(\frac12 u^2 - \frac12 v^2\right) + \frac{15 \cdot 1}{\sqrt2}(u+v) + \frac{15\cdot 1}{\sqrt2}(u-v) - \frac12 (u-v)^2 = 72$

$-\frac12 u^2 - \cancel{uv} - \frac12 v^2 - \frac12 u^2 + \cancel{\frac12 v^2} + \frac{15}{\sqrt2}u + \cancel{\frac{15}{\sqrt2}v} + \frac{15}{\sqrt2}u - \cancel{\frac{15}{\sqrt2}v} - \frac12 u^2 + \cancel{uv} - \frac12 v^2 = 72$

$-\frac32 u^2 - \frac32 v^2 + \frac{30}{\sqrt2}u = 72$

$-\frac32 u^2 - \frac12 v^2 + 15\sqrt2 u = 72 \quad |\cdot 2$

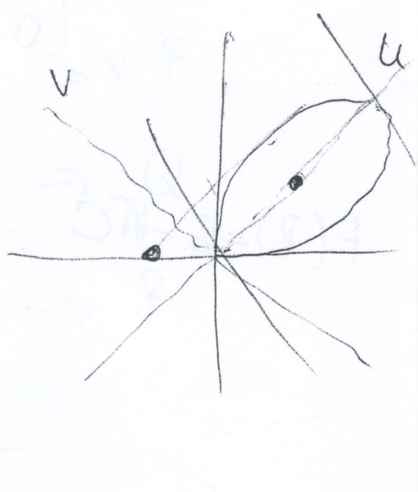
$u + \alpha = t$

$3u^2 + v^2 - 30\sqrt2 u = -144$

$3(t-\alpha)^2 + v^2 - 30\cdot\sqrt2(t-\alpha) = -144$

$3t^2 - 6t\alpha + 3\alpha^2 + v^2 - 30\sqrt2 t + 30\sqrt2\cdot\alpha = -144$

$-6\cdot\alpha - 30\sqrt2 = 0$, $\alpha = -5\sqrt2$



$\Rightarrow$ множ. е ограничено

$$G(x,y,z) = xyz + \lambda(x+y-z-15) + \mu(xy-yz-xz-72)$$

$$\left|\begin{array}{l} G'_x = yz+\lambda+\mu y-\mu z = 0 \\ G'_y = xz+\lambda+\mu x-\mu z=0 \\ G'_z = xy+\lambda-\mu y-\mu x = 0 \\ x+y-z=15 \\ xy-xz-yz=72 \end{array}\right. \quad + \quad \sim$$

$$\sim \left|\begin{array}{ll} x(z+y)-\mu(z+y)=0 & \to z=-y \ , \ x=\mu \\ y(x+z)-\mu(x+z)=0 & \to x=-z \ , \ y=\mu \\ z(-x+y)+\mu(-x+y)=0 & \to x=y \ , \ z=-\mu \\ x+y-z=15 & \\ xy-xz-yz=72 & \end{array}\right.$$

$3x = 15$

$x^2+x^2+x^2=72$ $\quad \mathring{x}$

$x^2 = 24$

I сл.) $x=\mu=-z$

$$\left|\begin{array}{l} \mu+y+\mu=15 \\ \mu y+\mu^2+y\cdot\mu=72 \end{array}\right. \quad \left|\begin{array}{l} 2\mu+y=15 \\ 2\mu\cdot y+\mu^2=72 \end{array}\right. \qquad \mu=\frac{15-y}{2}$$

$(15-y)y+\frac{(15-y)^2}{4}=72$

$(15-y)\left(y+\frac{1}{4}(15-y)\right)=72$

I $\quad \mu_1=6, \quad \mu_2=4 \quad$ II

$x=6$ $\quad | \quad x=4$

$z=-6$ $\quad | \quad z=-4$

$y=3$ $\quad | \quad y=7$

2сл.)

$y = \mu$ $\rightarrow$ $\begin{cases} x + 2\mu = 15 \\ \mu x + \mu x + \mu^2 = 72 \end{cases}$, $x = 15 - 2\mu$

$z = -\mu$

$\mu_3 = 4$ $\mu_4 = 6$

III $y = 4$

$z = -4$

$x = 7$

IV $y = 6$

$z = -6$

$x = 3$

$f(\mathrm{I}) = -108$ — нб с

$f(\mathrm{II}) = -112$ — нм с