

III. 2. Анал. геометрия - упражнение

Домашните не са дадени. Яна Алексиева
 Руководство по АГ - Веселка Михова (Бнедохвалто)
 2 контролни - I. II ; 26. I
 yana_a_n (@fmi.uni-sofia.bg)

релация $\rightarrow$ отношение

$$N \subseteq Z \subseteq Q \subseteq R \subseteq C$$

$$a, b \in R, \quad "<", \quad a < b$$

$$>$$

$$\leq$$

$$=$$

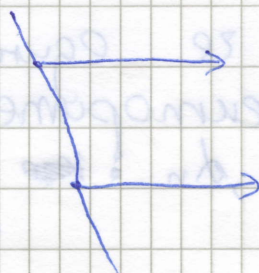
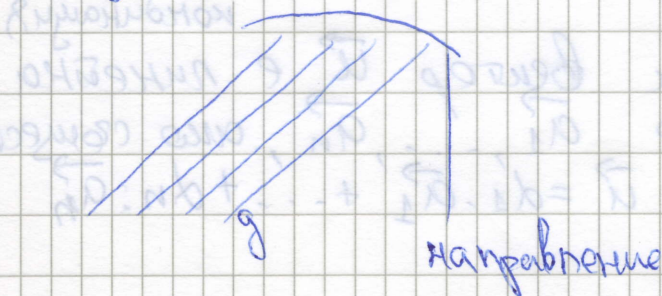
$$=$$

Свойства на $=$: 1) рефлексивност $a = a$
 2) симетричност $a = b \Leftrightarrow b = a$
 3) транзитивност $\text{От } a = b \text{ и } b = c \Rightarrow a = c$

$\Rightarrow$ релацията $=$ е релация на еквивалентност

Примери: $\cong$ 1) $\triangle ABC \cong \triangle ABC$
 2) $\triangle ABC \cong \triangle PQR \Rightarrow \triangle PQR \cong \triangle ABC$
 3) $\triangle ABC \cong \triangle PQR$ и $\triangle PQR \cong \triangle KLM \Rightarrow \triangle ABC \cong \triangle KLM$

$$g_1 \parallel g_2, \quad " \parallel " \quad g_1 \parallel g_2 \quad g_1 \parallel g_2 \Rightarrow g_2 \parallel g_1$$



Линейна зависимост.

Линейна независимост на вектори.

Базис и размерност на линейни пространства

$\vec{a} + \vec{b}$ - сбор на вектори

1) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$

2) $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$

3) $\vec{0}: \vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$

4) $\vec{a}: \exists! (-\vec{a}): \vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$

$k \in \mathbb{R}; \vec{a}$

$k \cdot \vec{a} = \vec{b}$

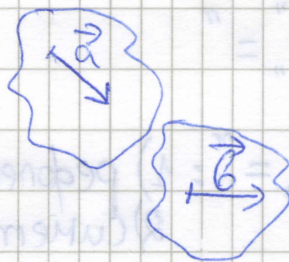
$|\vec{b}| = |k| \cdot |\vec{a}|$

5) $1 \in \mathbb{R}, 1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$

6) $k, m \in \mathbb{R}, k(m \cdot \vec{a}) = (km) \cdot \vec{a}$

7) $(k+m) \cdot \vec{a} = k \cdot \vec{a} + m \cdot \vec{a}$

8) $k(\vec{a} + \vec{b}) = k \cdot \vec{a} + k \cdot \vec{b}$



Определение: 1) $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n \in V$

$\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$

$(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \neq (0, 0, \dots, 0) \Leftrightarrow \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \dots + \alpha_n^2 \neq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow |\alpha_1| + \dots + |\alpha_n| \neq 0$

$\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ ~~не~~ наричат линейно зависими, ако съществува ~~наредена~~ $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \neq (0, \dots, 0): \alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \dots + \alpha_n \vec{a}_n = \vec{0}$

линейна комбинация

Забележка: Казваме, че един вектор $\vec{u}$ е линейна комбинация на векторите $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$, ако съществуват числа $\alpha_1, \dots, \alpha_n$: $\vec{u} = \alpha_1 \cdot \vec{a}_1 + \dots + \alpha_n \cdot \vec{a}_n$

$$\begin{aligned} 0.9\vec{a} + 0.6\vec{b} &= \vec{c} = 3\vec{a} + 4\vec{b} \\ 0.9\vec{a} + 0.6\vec{b} &= \vec{0} \end{aligned}$$

$$D_1 = 5 D_2$$

$$\vec{d} = 5\vec{a} + 10\vec{b}$$

$$\begin{aligned} \vec{c} &= 3\vec{a} + 4\vec{b} \Leftrightarrow \vec{c} - 3\vec{a} - 4\vec{b} = \vec{0} \\ \vec{d} &= 5\vec{a} \Leftrightarrow \vec{d} - 5\vec{a} = \vec{0} \end{aligned}$$

$$\vec{d} = 5\vec{a} \Leftrightarrow \vec{d} - 5\vec{a} = \vec{0}$$

При вектора са линейно зависими, ако същ. коеф. поне $\neq 0$ и от тях може да се изразят останалите.

Определение 2: $a_1, \dots, a_n$ се наричат линейно независими, ако поне 1 от тях може да се изрази като линейна комбинация на останалите

$$\alpha_1 \cdot \vec{a}_1 + \alpha_2 \cdot \vec{a}_2 + \dots + \alpha_i \cdot \vec{a}_i + \dots + \alpha_n \cdot \vec{a}_n = \vec{0}$$

$$d_i \cdot \vec{a_i} = d_1 \cdot \vec{a_1} + \dots + d_{i-1} \cdot \vec{a_{i-1}} + d_{i+1} \cdot \vec{a_{i+1}} + \dots + d_n \cdot \vec{a_n}$$

Определение 3: $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n \in V$ сд линейно независимы, ако $d_1 \vec{a}_1 + d_2 \vec{a}_2 + \dots + d_n \vec{a}_n = \vec{0} \Leftrightarrow d_1 = d_2 = \dots = d_n = 0$

$a_1, \dots, a_n$ — линейно независимы, ако $f(x_1, \dots, x_n) \neq f(0, \dots, 0)$:

$a_1, \dots, a_n$ — линейно независимы, ако $\Delta(x_1, \dots, x_n) \neq (0, \dots, 0)$:

$$\sum_{i=1}^n x_i \cdot \vec{a}_i \neq \vec{0}$$

$$\lambda_1 \cdot \vec{a}_1 + \dots + \lambda_n \cdot \vec{a}_n \neq \vec{0}$$

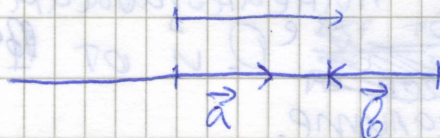
Примери:

1) Кога $\vec{a}$ е линейно зависим?
 $\exists \lambda \neq 0 : \lambda \cdot \vec{a} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0}$

2) Кога $\vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0}$ са линейно зависими?

$$\lambda \cdot \vec{a} + \beta \cdot \vec{b} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{a} = -\frac{\beta}{\lambda} \cdot \vec{b} \text{ - коллинеарни}$$

$$k = -\frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}$$



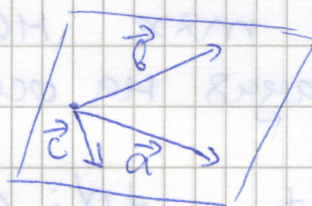
$$\vec{b} = k \cdot \vec{a}$$

$$k \leq 0$$

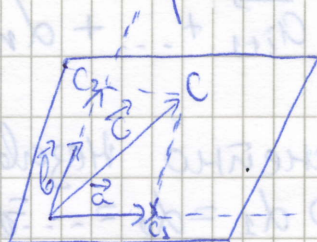
$$k = -\frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}$$

3) $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \neq \vec{0}$

ЛНЗ - линейно независими



Кога $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ са лине. зависими?
 компланарни



$$\vec{OC} = \vec{OC}_1 + \vec{OC}_2$$

$$\vec{OC}_1 \parallel \vec{a} \Rightarrow \exists! \lambda : \vec{OC}_1 = \lambda \cdot \vec{a}$$

$$\vec{OC}_2 \parallel \vec{b} \Rightarrow \exists! \beta : \vec{OC}_2 = \beta \cdot \vec{b}$$

$$\vec{OC} = \lambda \cdot \vec{a} + \beta \cdot \vec{b}$$

Свойство: Ако вектора $\vec{u} = \lambda_1 \cdot \vec{a}_1 + \dots + \lambda_n \cdot \vec{a}_n$ и $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ са ЛНЗ (линейно независими), то $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ са еднозначно определени.

Линейна обвивка

Определение 4: Линейна обвивка: Нека вектора $\vec{a} \neq \vec{0}$
 $l(\vec{a}) := \{ \vec{b} : \vec{b} = k \cdot \vec{a}, k \in \mathbb{R} \}$

$l(\vec{a}) = U \subset V \rightarrow$ линейно векторно пространство
 Маке. бр. ЛНЗ е 1. Всеки следващ може да се изрази останалите.

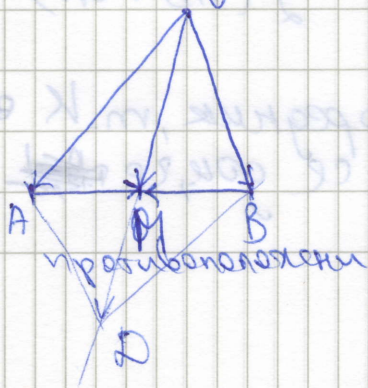
Базис: тези вектори, които са ЛНЗ и са макс. бр. и всеки приложен към тях може да се изрази от ЛНЗ или базиса.
 представи като комбинация от тях и $\in B$.

Крайно пространство: N вектора, ЛНЗ, базис.

Определение 5: Нека векторите $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ са ЛНЗ от линейното пространство V . Казваме, че $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ образуват базис на V , ако лн. обвивка $l(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n) = V$
 1) $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n, \vec{a}_{n+1}$ — Л.З.
 2) $\forall \vec{u} \in V$ може да се представи като линейна комбинация на $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ (по единствен начин)

Размерност на пространството: брой крайни базисни вектори $\dim V$

① зад. (основна) ОЗ: $A \neq B$ т. М е средата на AB
 т. О е произволна! Да се дои, че $\vec{OM} = \frac{1}{2} (\vec{OA} + \vec{OB})$



$$\left. \begin{aligned} \vec{OM} &= \vec{OA} + \vec{AM} \\ \vec{OM} &= \vec{OB} + \vec{BM} \end{aligned} \right\} 2 \vec{OM} = \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{AM} + \vec{BM}$$

Определение 1: Една точка M се нарича медицентър на системата от точки $A_1, \dots, A_n$, ако $\vec{MA}_1 + \vec{MA}_2 + \dots + \vec{MA}_n = \vec{0}$ (1)

Определение 2: Една точка M се нарича медицентър на системата от точки $A_1, \dots, A_n$, ако за произволна точка O е изпълнено:

$$(2) \vec{OM} = \frac{1}{n} (\vec{OA}_1 + \vec{OA}_2 + \dots + \vec{OA}_n)$$

За д-м. да се док., че $(1) \Leftrightarrow (2)$

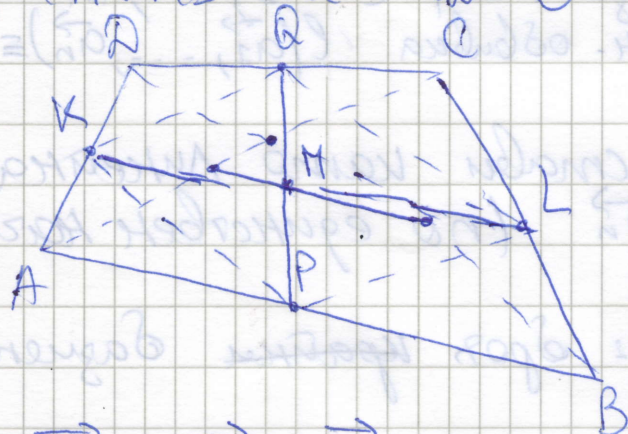
1) От (1) $\Rightarrow$ (2)

2) От (2) $\Rightarrow$ (1)

2 зад. $ABCD$ е произволен четириъгълник (изпъкнал)

Да се определи полож. на окази точка M от равнината на $ABCD$, за която е изпълнено:

$$\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} + \vec{MD} = \vec{0}$$



прихващаме точки P и Q среди
своств. на AB и $CD \Rightarrow$ от $\vec{OP}$

$$\vec{MP} = \frac{1}{2} (\vec{MA} + \vec{MB})$$

$$\vec{MQ} = \frac{1}{2} (\vec{MC} + \vec{MD})$$

$$\vec{MP} + \vec{MQ} = \frac{1}{2} (\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} + \vec{MD}) = \vec{0}$$

$$\vec{MP} + \vec{MQ} = \vec{0}$$

$$\vec{MP} = -\vec{MQ} \Rightarrow M \text{ е среда на } PQ$$

3 зад. за упражнение: $ABCD$ - четириъгълник; M - среда на AC ,
 N - средата на BD . Да се док., че $\vec{MN} = \frac{1}{2} (\vec{AB} + \vec{CD})$

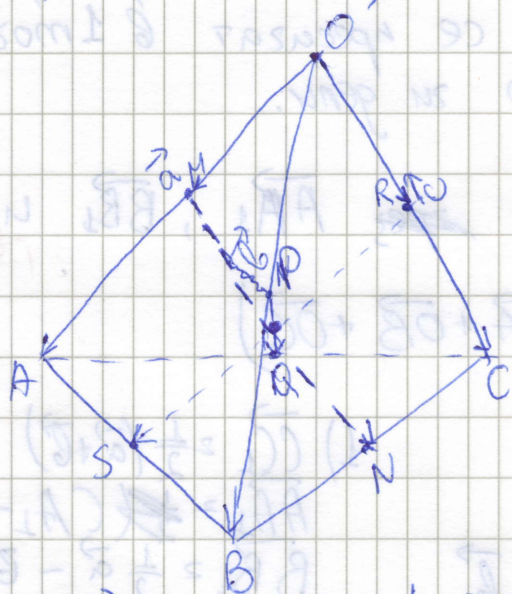
$$\vec{MN} = \frac{1}{2} (\vec{AB} + \vec{CD})$$

4 зад. за упражнение: $ABCD$ - успоредник, т. $K \in AD$:
 $\vec{AK} = \vec{AD}$ т. $L \in AC$: $\vec{AL} = \vec{AC}$. Да се док., че $\vec{KL} = \vec{AB}$
точките K, L и B - колинеарни

5.2 а) $OABC$ е тетраедър (произв. триъгълна пирамида)
 $\vec{OA} = \vec{a}$, $\vec{OB} = \vec{b}$, $\vec{OC} = \vec{c}$, $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ - линейно независими
 M, P, R са средите съответно на OA, OB, OC
 N, Q, S са средите съответно на BC, AC, AB

1) Да се изразят $\vec{MN}, \vec{PQ}, \vec{RS}$ чрез $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$

2) Да се док., че отс. MN, PQ и RS имат обща среда



$$1) \vec{MN} = \vec{ON} - \vec{OM}$$

$$\vec{OM} = \frac{1}{2} \vec{a} \quad \vec{ON} = \frac{1}{2} (\vec{OB} + \vec{OC}) = \frac{1}{2} (\vec{b} + \vec{c})$$

$$\vec{ON} = \frac{1}{2} (\vec{b} + \vec{c})$$

$$\vec{MN} = \frac{1}{2} (\vec{b} + \vec{c}) - \frac{1}{2} \vec{a} = \frac{1}{2} (\vec{b} + \vec{c} - \vec{a})$$

$$\vec{RS} = \vec{OS} - \vec{OR} \quad \vec{OR} = \frac{1}{2} \vec{c} \quad \vec{OS} = \frac{1}{2} (\vec{OA} + \vec{OB}) = \frac{1}{2} (\vec{a} + \vec{b})$$

$$\vec{RS} = \frac{1}{2} (\vec{a} + \vec{b} - \vec{c})$$

$$\vec{PQ} = \vec{OQ} - \vec{OP} \quad \vec{OP} = \frac{1}{2} \vec{b} \quad \vec{OQ} = \frac{\vec{a} + \vec{c}}{2}$$

$$\vec{PQ} = \frac{1}{2} (\vec{a} + \vec{c} - \vec{b})$$

2) Допускаме, че точките O_1, O_2 и O_3 са средите съотв. на MN, PQ, RS . Ще док., че $O_1 \equiv O_2 \equiv O_3$. Разглеждаме

$$\vec{OO_1} = \frac{1}{2} (\vec{OM} + \vec{ON})$$

$$\vec{OO_1} = \frac{1}{4} (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$$

$$\vec{OO_2} = \frac{1}{2} (\vec{OP} + \vec{OQ})$$

$$\vec{OO_3} = \frac{1}{2} (\vec{OR} + \vec{OS})$$

$$\vec{OP} = \frac{1}{2} \vec{b} \quad \vec{OQ} = \frac{1}{2} (\vec{a} + \vec{c}) \quad \vec{OR} = \frac{1}{2} \vec{c} \quad \vec{OS} = \frac{1}{2} (\vec{a} + \vec{b})$$

$$\vec{OO_2} = \frac{1}{4} (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) \quad \vec{OO_3} = \frac{1}{4} (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$$

$$\Rightarrow \vec{OO_1} = \vec{OO_2} = \vec{OO_3} \Rightarrow O_1 = O_2 = O_3 = G$$

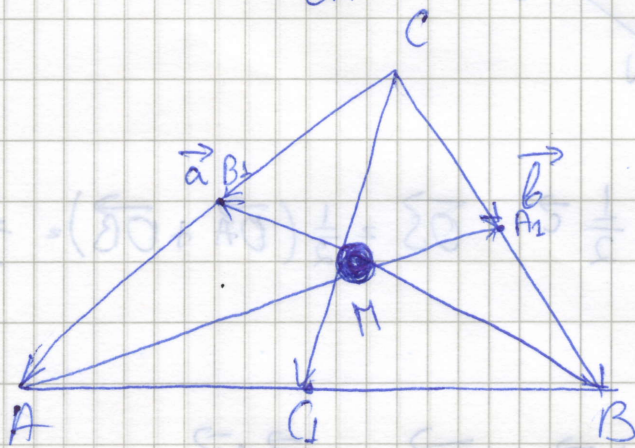
За упражнение: Да се дои, че $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} + \vec{GO} = \vec{0}$

6 зад. 03 $\triangle ABC$: $\vec{CA} = \vec{a}$; $\vec{CB} = \vec{b}$, $\vec{a}$ и $\vec{b}$ - линейно независими, защото не са колинеарни (не са от едно направление)

A_1, B_1, C_1 са средите съотв. на BC, CA, AB . Да се дои, че AA_1, BB_1 и CC_1 се пресичат в 1 точка M и да се намери отношението, в което ги дели.

1) Да се изразят медианите ~~през~~ $\vec{AA_1}, \vec{BB_1}$ и $\vec{CC_1}$ през $\vec{a}$ и $\vec{b}$

3) Да се дои., че $\vec{OM} = \frac{1}{3}(\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC})$



$$1) \vec{CC_1} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b})$$

$$\vec{AA_1} = \vec{CA_1} - \vec{CA} = \frac{1}{2}\vec{b} - \vec{a}$$

$$\vec{BB_1} = \frac{1}{2}\vec{a} - \vec{b}$$

2) Разн. $\vec{AA_1}$ и $\vec{BB_1}$

Ще дои., че $\vec{AA_1}$ и $\vec{BB_1}$ - ЛНЗ

Разн. д. $\vec{AA_1} + \beta \cdot \vec{BB_1} = \vec{0}$

$\alpha = ?$ и $\beta = ?$

$$\text{Занесваме: } \alpha \left(\frac{\vec{b}}{2} - \vec{a} \right) + \beta \left(\frac{\vec{a}}{2} - \vec{b} \right) = \vec{0}$$

$$\vec{a}(-\alpha + \frac{\beta}{2}) + \vec{b}(\frac{\alpha}{2} - \beta) = \vec{0}$$

$$\vec{a} \text{ и } \vec{b} \text{ са ЛНЗ (по усл.)} \Rightarrow \begin{cases} -\alpha + \frac{\beta}{2} = 0 \\ \frac{\alpha}{2} - \beta = 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha = \beta = 0 \Rightarrow \vec{AA_1} \text{ и } \vec{BB_1} \text{ са ЛНЗ}$$

$\Rightarrow \exists !$ точка $M = AA_1 \cap BB_1$

Ще дои., че $M \in CC_1$

? ze m. $M \in (C_1 \Leftrightarrow) C, M, C_1$ са коллинеарни
 $\{M = AA_1 \cap BB_1\}$

$$\overrightarrow{CC_1} = \frac{\vec{a} + \vec{b}}{2}$$

$$\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AM}$$

$$\overrightarrow{CM} = ?$$

$$\overrightarrow{AM} \parallel \overrightarrow{AA_1} \Rightarrow \exists! x: \overrightarrow{AM} = x \cdot \overrightarrow{AA_1}$$

$$\overrightarrow{AM} = x \cdot \left(\frac{\vec{b}}{2} - \vec{a} \right)$$

$$\overrightarrow{CM} = \vec{a} + x \cdot \left(\frac{\vec{b}}{2} - \vec{a} \right)$$

$$\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BM}$$

$$\overrightarrow{BM} \parallel \overrightarrow{BB_1} \Rightarrow \exists! y: \overrightarrow{BM} = y \cdot \overrightarrow{BB_1}$$

$$\overrightarrow{BM} = y \cdot \left(\frac{\vec{a}}{2} - \vec{b} \right)$$

$$\overrightarrow{CM} = \vec{b} + y \cdot \left(\frac{\vec{a}}{2} - \vec{b} \right)$$

$$\vec{a} + x \cdot \left(\frac{\vec{b}}{2} - \vec{a} \right) = \vec{b} + y \cdot \left(\frac{\vec{a}}{2} - \vec{b} \right)$$

$$\vec{a} + \frac{x}{2} \vec{b} - x \cdot \vec{a} - \vec{b} = \frac{y}{2} \vec{a} + y \vec{b} - \vec{b}$$

$$\vec{a} \left(1 - x - \frac{y}{2} \right) + \vec{b} \left(\frac{x}{2} - 1 + y \right) = \vec{0}, \vec{a}, \vec{b} - \text{ЛНВ}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1 - x - \frac{y}{2} = 0 \\ \frac{x}{2} - 1 + y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x + \frac{y}{2} = 1 \\ \frac{x}{2} + y = 1 \end{cases}$$

$$x = y = \frac{2}{3}$$

$$\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3} \overrightarrow{AA_1}$$

$$\overrightarrow{BM} = \frac{2}{3} \overrightarrow{BB_1}$$

$$\overrightarrow{CM} = \vec{a} + \frac{2}{3} \left(\frac{\vec{b}}{2} - \vec{a} \right) = \frac{\vec{a} + \vec{b}}{3}$$

$$\overrightarrow{CM} = \frac{\vec{a} + \vec{b}}{3} \Rightarrow \overrightarrow{CM} \parallel \left(\frac{1}{3} \vec{a} + \frac{1}{3} \vec{b} \right)$$

$$\overrightarrow{CC_1} = \frac{\vec{a} + \vec{b}}{2} \Rightarrow \overrightarrow{CC_1} \parallel \left(\frac{1}{2} \vec{a} + \frac{1}{2} \vec{b} \right)$$

$$\overrightarrow{CM} = \frac{2}{3} \overrightarrow{CC_1}$$

в) ? , се произв. т. O $\vec{OM} = \frac{1}{3} (\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC})$

Доказателство: $\vec{CM} = \frac{2}{3} \vec{CC_1}$

$$\vec{OM} = \vec{OC} + \frac{2}{3} (\vec{OC_1} - \vec{OC})$$

$$\vec{OC_1} = \frac{\vec{OA} + \vec{OB}}{2}$$

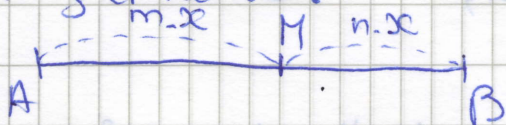
$$\vec{OM} = \frac{\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}}{3}$$

ОЗ зад. 1: $A \neq B$ т. O е произволна $m, n \in \mathbb{R}^+$

? е точката M дели отс. AB , вътрешно в отношение $m:n$ считано от A .

$$\vec{OM} = \frac{n}{m+n} \cdot \vec{OA} + \frac{m}{m+n} \cdot \vec{OB}$$

Доказателство:



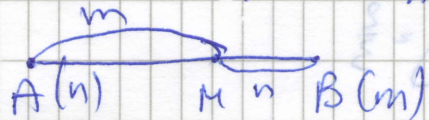
Нека $m, M \in AB$ и да е, такава че $\frac{|AM|}{|MB|} = \frac{m}{n}$

$$\vec{AM} \parallel \vec{AB} \Rightarrow \exists! k$$

$$\vec{AM} = k \cdot \vec{AB} \Rightarrow k > 0$$

$$k = \frac{|AM|}{|AB|} = \frac{m \cdot x}{(m+n)x} = \frac{m}{m+n}$$

$$\vec{OM} = \frac{n}{m+n} \vec{OA} + \frac{m}{m+n} \vec{OB}$$



$$\vec{AM} = \frac{m}{m+n} \cdot \vec{AB}$$

$$\vec{OM} - \vec{OA} = \frac{m}{m+n} \cdot (\vec{OB} - \vec{OA})$$

$$\vec{OM} = \frac{n}{m+n} \vec{OA} + \frac{m}{m+n} \vec{OB}$$

$$\text{II} \quad \vec{OM} = \frac{n}{m+n} \vec{OA} + \frac{m}{m+n} \vec{OB}$$

$$(m+n) \cdot \vec{OM} = n \vec{OA} + m \vec{OB}$$

$$n(\vec{OM} - \vec{OA}) = m(\vec{OB} - \vec{OM})$$

$$n \cdot \vec{AM} = m \cdot \vec{MB}$$

$$\vec{AM} = \left(\frac{m}{n}\right) \vec{MB}$$

$M \in AB$ $\vec{AM} \uparrow \vec{MB}$

$M \in \text{втр. за отс. } AB$

$$\left| \frac{\vec{AM}}{\vec{MB}} \right| = \frac{m}{n}$$

Координатни системи.

Координати на вектори и точки.

Координатни условия за коллинеарност и компланарност на вектори и точки

Аффинна координатна система (АКС)

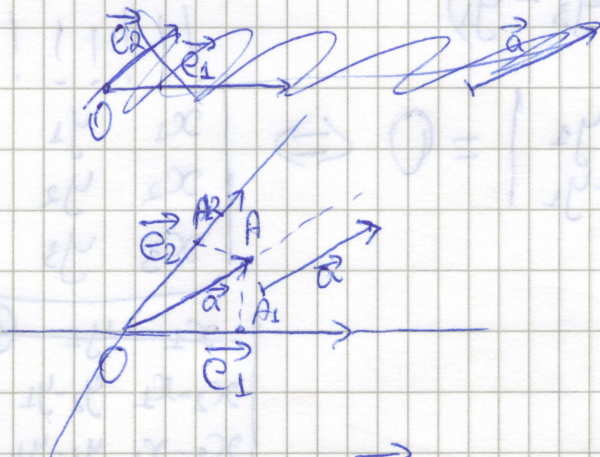
т. O , $\vec{e}_1, \vec{e}_2$
ЛНЗ

$$\vec{OA} = \vec{a}$$

$$\vec{OA} = \vec{OA_1} + \vec{OA_2}$$

$$\parallel \quad \parallel$$

$$d_1 \cdot \vec{e}_1 \quad d_2 \cdot \vec{e}_2$$



$$\vec{OA} = d_1 \cdot \vec{e}_1 + d_2 \cdot \vec{e}_2$$

$\Downarrow$
 $\vec{a}(d_1, d_2)$ спрямо $O \vec{e}_1 \vec{e}_2$

$\vec{OA}$ - радиус вектор

т. $O(0,0)$
 $\vec{OA}(d_1, d_2) \Leftrightarrow \text{т. } A(d_1, d_2)$

Разглеждаме: $\vec{a}(a_1, a_2)$
 $\vec{b}(b_1, b_2)$

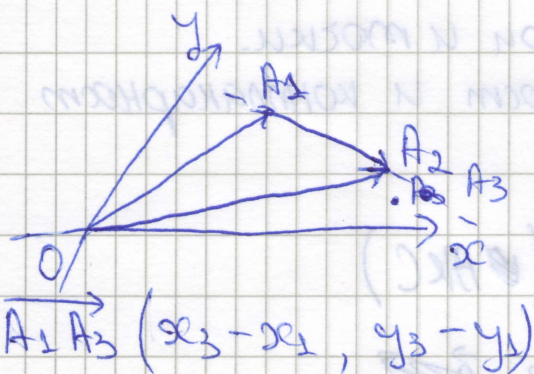
Кога $\vec{a}$ и $\vec{b}$ са линейно зависими?

$(\vec{a} \text{ и } \vec{b} \text{ са линейно зависими}) \Leftrightarrow \exists! \text{ число } k = \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2}$
 $\Leftrightarrow a_1 b_2 = a_2 b_1 \Leftrightarrow a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = 0$

$\vec{a}, \vec{b}$ са ЛНЗ $\Leftrightarrow \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$

Разглеждаме: $A_1(x_1, y_1)$
 $A_2(x_2, y_2)$
 $A_3(x_3, y_3)$

Кога ~~са~~ A_1, A_2 и A_3 в една права са коллинеарни?



$$\overrightarrow{A_1 A_2} = \overrightarrow{OA_2} - \overrightarrow{OA_1}$$

$$\overrightarrow{A_1 A_2} (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$$

ЛЗ $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{I.(-1)} = 0$$

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & 0 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$1 \cdot (-1)^4 \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix} = 0$$

$\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$
ЛНЗ

$\vec{a} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$
 $\vec{b} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$
 $\vec{c} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$

$$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \text{ са л.з.} \Leftrightarrow \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} \Leftrightarrow$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \text{ са л.з.} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0$$

Скалярно произведение на 2 вектора

$$\vec{a} \neq \vec{0}, \vec{b} \neq \vec{0} \quad (\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \angle(\vec{a}, \vec{b})$$

$$\angle(\vec{a}, \vec{b}) \in [0; \pi]$$

Свойства:

$$1) (\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{b}, \vec{a})$$

$$2) (\vec{a}, \vec{b}) = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$$

$$3) (\lambda \vec{a}, \vec{b}) = \lambda (\vec{a}, \vec{b})$$

$$4) \vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a}, \vec{b}) + (\vec{a}, \vec{c})$$

$$5) (\vec{a}, \vec{a}) = \vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}^2}$$

$$6) \cos \angle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{(\vec{a}, \vec{b})}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

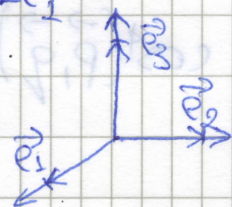
Координатно представяне на скалярно произведение

$\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ - произволна афинна коорд. с-ма

ЛНЗ $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$

Ако $\vec{e}_1 \perp \vec{e}_2 \perp \vec{e}_3$, коорд. с-ма е ортогонална

Ортонормирана коорд. с-ма $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_1 \perp \vec{e}_2 \perp \vec{e}_3 \perp \vec{e}_1$
 $|\vec{e}_1| = |\vec{e}_2| = |\vec{e}_3| = 1$



$$(\vec{e}_1, \vec{e}_2) = 0, (\vec{e}_i, \vec{e}_j) = 0 \quad \forall i \neq j, i, j = 1, \dots, 3$$

$$\vec{e}_1^2 = \vec{e}_2^2 = \vec{e}_3^2 = 1$$

$$\vec{a} (a_1, a_2, a_3) \Rightarrow (\vec{a}, \vec{b}) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 \leftarrow \begin{array}{l} \text{Ортонормиран} \\ \text{Координатна} \\ \text{Система} \\ \text{(ОКС)} \end{array}$$

$$\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 \Leftrightarrow \text{ОКС}$$

$$\textcircled{1} \quad \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} - \text{НХЗ}$$

$$|\vec{a}| = 1 \quad |\vec{b}| = 2 \quad |\vec{c}| = \sqrt{2}$$

$$\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{2} \quad \angle(\vec{b}, \vec{c}) = \frac{\pi}{2} \quad \angle(\vec{a}, \vec{c}) = \frac{\pi}{4}$$

$$\vec{a}^2 = 1 \quad \vec{b}^2 = 4 \quad \vec{c}^2 = 2$$

$$(\vec{a}, \vec{b}) = 0 \quad (\vec{b}, \vec{c}) = 0 \quad (\vec{a}, \vec{c}) = 1 \cdot \sqrt{2} \cdot \cos \frac{\pi}{4} = 1$$

Спрямую ОаВс $\rightarrow$ АКС (аффинна коорг. с-ма)

$$\vec{p} = \vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$$

$$\vec{q} = 2\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$$

$$\vec{r} = \vec{a} + \lambda \vec{b} - \vec{c}$$

$$a) |\vec{p}| = ?$$

$$|\vec{p}|^2 = \vec{p}^2 = (\vec{a} + \vec{b} - \vec{c})^2 =$$

$$= \vec{a}^2 + \vec{b}^2 + \vec{c}^2 + 2(\vec{a}, \vec{b}) - 2(\vec{a}, \vec{c}) - 2(\vec{b}, \vec{c}) =$$

$$= 1 + 4 + 2 - 2 - 2 = 3$$

$$|\vec{p}| = \sqrt{3}$$

$$|\vec{q}|^2 = \vec{q}^2 = (2\vec{a} - \vec{b} + \vec{c})^2 = 4\vec{a}^2 + \vec{b}^2 + \vec{c}^2 +$$

$$+ 2(\vec{a}, \vec{b}) - 2(\vec{a}, \vec{c}) - 2(\vec{b}, \vec{c}) = 4 + 4 + 2 + 2 - 2 - 2 = 9$$

$$\cos(\vec{p}, \vec{q}) = ?$$

$$6) \vec{c} = \vec{a} + \lambda \vec{b} - \vec{c} \quad \lambda = ? \quad |\vec{c}| = \sqrt{5}$$

$$|\vec{c}|^2 = (\vec{a} + \lambda \vec{b} - \vec{c})^2 = 5$$

$$\vec{a}^2 + \lambda^2 \vec{b}^2 + \vec{c}^2 + 2\lambda (\underbrace{\vec{a}\vec{b}}_0) - 2 \underbrace{(\vec{a}\vec{c})}_1 - 2\lambda \underbrace{(\vec{b}\vec{c})}_0 = 5$$

$$1 + \lambda^2 \cdot 4 + 2 - 2 = 5 \quad \lambda = \pm 1$$

Упражнение: $\lambda = ? \quad \vec{p} \perp \vec{c} \quad (\vec{p}\vec{c}) = 0$

$$2) \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} - \text{ЛНЗ} \quad \angle(\vec{a}, \vec{b}) = \angle(\vec{b}, \vec{c}) = \angle(\vec{c}, \vec{a}) = \frac{\pi}{3}$$

$$|\vec{a}| = 2$$

$$|\vec{b}| = 1$$

$$|\vec{c}| = 3$$

OABC - тетраэдр

$$\vec{OA} = \vec{a} \quad \vec{OB} = \vec{b} \quad \vec{OC} = \vec{c}$$

$$a) AA_1 \perp (BOC), A_1 \in (BOC)$$

$$\vec{OA_1} = ? \quad \text{через } \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$$

$$\text{Упраж. } |\vec{OA_1}| = ? \quad |\vec{OA_1}| = \frac{2}{3}\vec{b} + \frac{2}{9}\vec{c}$$

$\vec{OA_1}, \vec{b}, \vec{c}$ - лнз. зависимы

$$\vec{OA_1} = \vec{a} \Rightarrow \exists! x, y: \vec{OA_1} = x\vec{b} + y\vec{c}$$

$$\text{Разность} \quad \vec{AA_1} = \vec{OA_1} - \vec{OA} = x\vec{b} + y\vec{c} - \vec{a}$$

$$\vec{AA_1} \perp \vec{b} \Rightarrow (\vec{AA_1}, \vec{b}) = 0$$

$$\vec{AA_1} \perp \vec{c} \Rightarrow (\vec{AA_1}, \vec{c}) = 0$$

$$(x\vec{b} + y\vec{c} - \vec{a}) \cdot \vec{b} = 0$$

$$(x\vec{b} + y\vec{c} - \vec{a}) \cdot \vec{c} = 0$$

$$x\vec{b}^2 + y(\vec{c}\vec{b}) - (\vec{a}\vec{b}) = 0$$

$$x(\vec{b}\vec{c}) + y\vec{c}^2 - (\vec{a}\vec{c}) = 0$$

$$\vec{b}^2 = 1$$

$$(\vec{a}\vec{b}) = 1$$

$$\vec{c}^2 = 9$$

$$(\vec{c}\vec{b}) = 3 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{2}, (\vec{a}\vec{b}) = 2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = 1$$

$$(\vec{b}\vec{c}) = \frac{3}{2}$$

$$(\vec{a}\vec{c}) = 2 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} = 3$$

$$\begin{cases} x \cdot 1 + y \cdot \frac{3}{2} = 1 \\ \frac{3}{2}x + 9y = 3 \end{cases} \quad | :3$$

$$2x = 2 - 3y$$

$$x = 1 - \frac{3}{2}y$$

$$4 - 12y = 2 - 3y$$

$$9y = 2$$

$$y = \frac{2}{9}$$

$$y = \frac{2}{9}$$

$$y = \frac{2}{9}$$

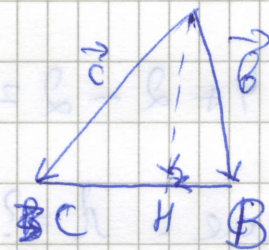
$$\begin{cases} x + \frac{3}{2} = 1 \\ \frac{x}{2} + 3y = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} -6y + \frac{3}{2}y = 1 - 2 \\ -\frac{9y}{2} = -1 \end{cases} \quad \begin{cases} y = \frac{2}{9} \\ x = 1 - \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{9} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \end{cases}$$

д) $OH \perp BC$, $H \in BC$

$$\vec{OH} = ? \quad \text{през } \vec{b} \text{ и } \vec{c}$$

$$\vec{OH} = \vec{OB} + \vec{BH}$$

$$\vec{BH} \parallel \vec{BC} \Rightarrow \exists! z: \vec{BH} = z \cdot \vec{BC}$$



$$\vec{OH} = \vec{OB} + z \vec{BC}$$

$$\vec{OH} \perp \vec{BC} \Rightarrow$$

$$(\vec{OH} \cdot \vec{BC}) = 0$$

$$(\vec{OB} + z \cdot \vec{BC}) \cdot \vec{BC} = 0$$

$$z = -\frac{\frac{1}{2}}{\frac{7}{4}} = -\frac{1}{14}$$

$$(\vec{OB} \cdot \vec{BC}) + z(\vec{BC} \cdot \vec{BC}) = 0$$

$$z = -\frac{(\vec{OB} \cdot \vec{BC})}{(\vec{BC} \cdot \vec{BC})} \quad (\vec{OB} \cdot \vec{BC}) = \vec{b} \cdot (\vec{c} - \vec{b}) =$$

$$= (\vec{b} \cdot \vec{c}) - (\vec{b} \cdot \vec{b}) = 1 \cdot \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}$$

$$\vec{BC} \cdot \vec{BC} = (\vec{c} - \vec{b})^2 = \vec{c}^2 - 2(\vec{b} \cdot \vec{c}) + \vec{b}^2 =$$

$$= 9 - 2 \cdot \frac{3}{2} + 1 = 7$$

$$\Rightarrow \vec{OH} = \vec{b} - \frac{1}{14}(\vec{c} - \vec{b}) = \frac{15}{14}\vec{b} - \frac{1}{14}\vec{c}$$

① ОКС (ортонорм. коорг. с-на $K \geq Oxyz$)

$$A(0, 2, 4)$$

$$B(1, 0, 2)$$

$$C(-4, 2, 1)$$

за упражнение. Да се види, че A, B, C не лежат на една права

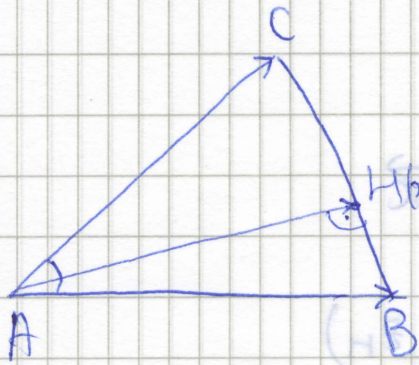
$$\vec{AB} \times \vec{AC} \neq \vec{0}$$

1) $P_{ABC} = ?$, $S_{ABC} = ?$

2) $\cos \angle BAC = ?$

3) $AH \perp BC$, т. $H \in BC$

? коорг. на $\triangle H$



$$\begin{aligned} 1) \quad & \vec{AB} (1, -2, -2) \\ & \vec{AC} (-4, 0, -3) \\ & \vec{BC} (-5, 2, -1) \end{aligned}$$

ортогонализация по формуле

$$|\vec{AB}|^2 = \vec{AB}^2 = 1^2 + (-2)^2 + (-2)^2 = 9$$

$$|\vec{AB}| = 3$$

$$|\vec{AC}|^2 = \vec{AC}^2 = (-4)^2 + 0^2 + (-3)^2 = 25$$

$$|\vec{AC}| = 5$$

$$|\vec{BC}| = \sqrt{30}$$

векторно
произведение!

$$S_{\triangle ABC} = \frac{|\vec{AC} \times \vec{BC}|}{2}$$

$$\begin{aligned} \vec{AC} & (-4, 0, -3) \\ \vec{BC} & (-5, 2, -1) \end{aligned}$$

$$\vec{AC} \times \vec{BC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -4 & 0 & -3 \\ -5 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -3 & -4 \\ -5 & -1 & -5 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -3 & -4 \\ -5 & -1 & -5 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

ОКЕ

$$\vec{AC} \times \vec{BC} (6, 11, -8)$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{\sqrt{221}}{2}$$

$$|\vec{AC} \times \vec{BC}|^2 = 6^2 + 11^2 + (-8)^2 = 36 + 121 + 64 = 221$$

$$2) \cos \alpha = \frac{(\vec{AB} \cdot \vec{AC})}{|\vec{AB}| \cdot |\vec{AC}|} = \frac{-4 + 0 + 6}{3 \cdot 5} = \frac{2}{15}$$

$$(\vec{AB} \cdot \vec{AC}) = 1(-4) + (-2)0 + (-2)(-3)$$

$$3) \text{т.н. } \vec{AH} \perp \vec{BC} \Rightarrow \vec{AH} \cdot \vec{BC} = 0$$

$$\vec{AH} = \vec{AB} + \vec{BH}, \vec{BH} \parallel \vec{BC} \Rightarrow \exists! k: \vec{BH} = k \cdot \vec{BC}$$

$$\vec{AH} = \vec{AB} + k \cdot \vec{BC}$$

$$(\vec{AH} \cdot \vec{BC}) = 0 = (\vec{AB} \cdot \vec{BC}) + k \cdot \vec{BC}^2$$

$$k = -\frac{(\vec{AB} \cdot \vec{BC})}{\vec{BC}^2}$$

$$(\vec{AB} \cdot \vec{BC}) =$$

$$= -5 - 4 + 2 = -7$$

$$k = -\frac{7}{30}$$

$$\vec{BH} = \frac{7}{30} \vec{BC}$$

$$\vec{OH} - \vec{OB} = \frac{7}{30} \vec{BC}$$

$$\vec{OH} = \vec{OB} + \frac{7}{30} \vec{BC}$$

Нека $T.H$ има коорд. $H(x_H, y_H, z_H)$

$$\vec{OH} (x_H, y_H, z_H)$$

$$\vec{OB} (1, 0, 2)$$

$$\vec{BC} (-5, 2, -1)$$

$$x_H = 1 + \frac{7}{30} \cdot (-5) = -\frac{1}{6}$$

$$y_H = 0 + \frac{7}{30} (2) = \frac{7}{15}$$

$$z_H = 2 + \frac{7}{30} (-1) = \frac{53}{30}$$

$$H\left(-\frac{1}{6}, \frac{7}{15}, \frac{53}{30}\right)$$

② ОКС $kz = 0xyz$

$$A(0, 0, -2)$$

$$B(4, 0, -4)$$

$$C(2, 0, 0)$$

$$D(5, 3, -3)$$

да се провери, че 4-те точки не лежат
една равнина

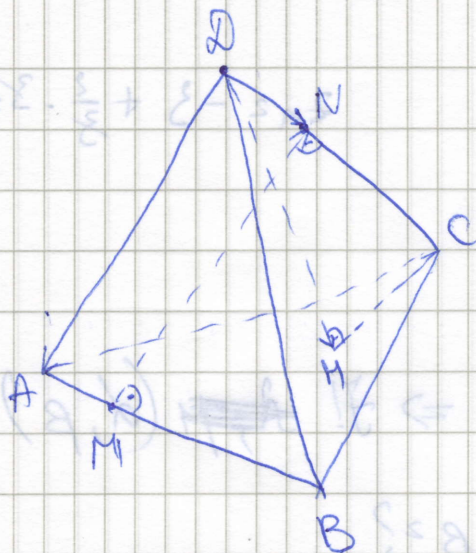
$$\vec{DA}, \vec{DB}, \vec{DC}$$

~~ABCD~~ - ПНЗ ? че скаларното произведение $\neq 0$
на $\vec{DA}, \vec{DB}, \vec{DC} \neq 0$

~~че сме~~ с детерминанта от коорд. на 3-те вектора

а) ~~се на кръстосан~~ ? да се намерят коорд. на точка
 $M \in AB, N \in CD$: $MN \perp AB$ се на кръстосани
 $MN \perp CD$ прави

б) $DH \perp (ABC), H \in (ABC)$? коорд. на $T.H$



$$a) \vec{MN} = \vec{DN} - \vec{DM}$$

$$\vec{DN} \parallel \vec{DC} \Rightarrow \exists! x: \boxed{\vec{DN} = x \cdot \vec{DC}}$$

$$\vec{DM} = \vec{DA} + \vec{AM}$$

$$\vec{AM} \parallel \vec{AB} \Rightarrow \exists! y: \boxed{\vec{AM} = y \cdot \vec{AB}}$$

$\vec{MN}$ - ос отсечка

$$\vec{MN} = x \cdot \vec{DC} - \vec{DA} - y \cdot \vec{AB} =$$

$$\begin{cases} (\vec{MN} \cdot \vec{DC}) = 0 \\ (\vec{MN} \cdot \vec{AB}) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} (x \cdot \vec{DC} - y \cdot \vec{AB} - \vec{DA}) \cdot \vec{DC} = 0 \\ (x \cdot \vec{DC} - y \cdot \vec{AB} - \vec{DA}) \cdot \vec{AB} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \cdot \vec{DC}^2 - y \cdot (\vec{AB} \cdot \vec{DC}) - (\vec{DA} \cdot \vec{DC}) = 0 \\ x (\vec{DC} \cdot \vec{AB}) - y \cdot \vec{AB}^2 - (\vec{DA} \cdot \vec{AB}) = 0 \end{cases}$$

$$\vec{DC}^2 = (-3, -3, +3) \Rightarrow \vec{DC}^2 = 27$$

$$\vec{AB} (4, 0, -2) \Rightarrow \vec{AB}^2 = 20$$

$$\vec{DA} (-5, -3, 1) \Rightarrow$$

$$(\vec{AB} \cdot \vec{DC}) = -12 - 6 = -18$$

$$(\vec{DA} \cdot \vec{DC}) = 15 + 9 + 3 = 27$$

$$(\vec{DA} \cdot \vec{AB}) = -20 - 2 = -22$$

$$|\vec{DC}|^2 = \vec{DC}^2$$

$$\vec{a}^2 = (\vec{a} \cdot \vec{a}) = |\vec{a}| \cdot |\vec{a}| \cos 0$$

$$\begin{cases} 27x + 18y - 27 = 0 \\ -18x - 20y + 22 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 27x + 18y = 27 & / : 3 \\ -18x - 20y = -22 & / : 2 \end{cases} \quad \begin{cases} 9x + 6y = 9 \\ -9x - 10y = -11 \end{cases}$$

$$-4y = -2$$

$$y = \frac{1}{2}$$

$$x = \frac{2}{3}$$

$$\vec{ON} - \vec{OD} = \frac{2}{3} \vec{DC}$$

$$\vec{ON} = \vec{OD} + \frac{2}{3} \vec{DC}$$

$$\vec{AM} = \frac{1}{2} \vec{AB} \Rightarrow M \text{ е средата на } AB$$

$$\vec{DN} = \frac{2}{3} \vec{DC}$$

$$M(2, 0, -3)$$

средно аритметична

$$x_N = 5 + \frac{2}{3}(-3) = 3 \quad y_N = 3 + \frac{2}{3}(-3) = 1$$

$$z_N = -3 + \frac{2}{3} \cdot 3 = -1$$

$$\begin{pmatrix} M(2, 0, -1) \\ N(3, 1, -1) \end{pmatrix} \quad |\overrightarrow{MN}|$$

д) $\overrightarrow{CH}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ са компланарни $\Rightarrow \exists! \alpha, \beta$:

$$\overrightarrow{CH} = \alpha \cdot \overrightarrow{AB} + \beta \cdot \overrightarrow{AC} \quad \alpha = ? \quad \beta = ?$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{DH} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CH} = \overrightarrow{DC} + \alpha \overrightarrow{AB} + \beta \overrightarrow{AC}$$

$$\begin{cases} (\overrightarrow{DH}, \overrightarrow{AB}) = 0 \\ (\overrightarrow{DH}, \overrightarrow{AC}) = 0 \end{cases} \quad \text{за управление}$$

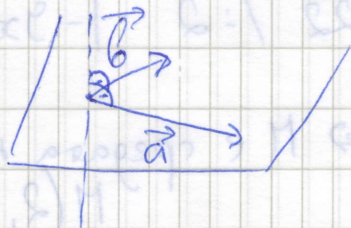
$$\begin{cases} (\overrightarrow{DC} + \alpha \overrightarrow{AB} + \beta \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}) = 0 \\ (\overrightarrow{DC} + \alpha \overrightarrow{AB} + \beta \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AC}) = 0 \end{cases} \quad \text{за управление}$$

Отг: $H(5, 0, -5)$

Векторно и смешанное произведение
на векторы

$$\vec{a} \neq \vec{0}, \vec{b} \neq \vec{0}; \quad \vec{a}, \vec{b} - \text{ЛНЗ}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c} - \text{вектор (направление, посылка, длина)}$$



$$\vec{c} \perp \vec{a}, \vec{c} \perp \vec{b} \quad \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in S^+ \quad |\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\angle(\vec{a}, \vec{b}))$$

положительно
ориентированная
тройка в пространстве

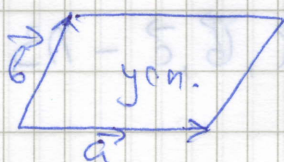
$$1) \vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a} \quad (\text{антикоммутативность})$$

$$2) \vec{a} \times \vec{b} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{a} \parallel \vec{b}$$

$$3) \lambda(\vec{a} \times \vec{b}) = \lambda(\vec{a} \times \vec{b})$$

$$4) (\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$$

$$5) S_{\text{уч.}} = |\vec{a} \times \vec{b}|$$



$$6) \text{ОКС } K=0 \underbrace{\vec{e}_1 \vec{e}_2 \vec{e}_3}_{S^+}$$



$$\vec{e}_1 \times \vec{e}_1 = \vec{0} = \vec{e}_2 \times \vec{e}_2 = \vec{e}_3 \times \vec{e}_3$$

$$\vec{e}_1 \times \vec{e}_2 = \vec{e}_3$$

$$\vec{e}_2 \times \vec{e}_3 = \vec{e}_1$$

$$\vec{e}_3 \times \vec{e}_1 = \vec{e}_2$$

! триге детерминанты

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

Смешанное произведение
 $\vec{a} \neq \vec{0}, \vec{b} \neq \vec{0}, \vec{c} \neq \vec{0}$
 $(\vec{a} \vec{b} \vec{c})' = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} \rightarrow \text{число}$

$$1) (\vec{a} \vec{b} \vec{c}) = (\vec{b} \vec{c} \vec{a}) = (\vec{c} \vec{a} \vec{b})$$

$$(\vec{a} \vec{b} \vec{c}) = (\vec{b} \vec{c} \vec{a})$$

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = (\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{a}$$

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) !!!$$

$$(\vec{a} \vec{b} \vec{c}) = -(\vec{b} \vec{a} \vec{c})$$

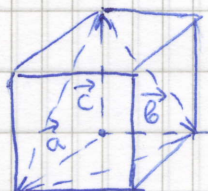
$$2) !!! (\vec{a} \vec{b} \vec{c}) = 0 \Leftrightarrow \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} - \text{ЛЗ (линейно зависимы)}$$

$$(\vec{a} \vec{b} \vec{a}) = 0$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{a} \parallel \vec{b}$$

$$(\vec{a} \vec{b}) = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$$

3)



$$V_{\text{парал.}} = |(\vec{a} \vec{b} \vec{c})|$$

$$V_{\text{теор.}} = V_{OABC} = \frac{|(\vec{a} \vec{b} \vec{c})|}{6} !!!$$

$$4) \text{ОКС } K = \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, (\vec{e}_1 \vec{e}_2 \vec{e}_3) = 1$$

$$\vec{a} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{b} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{c} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

$$(\vec{a} \vec{b} \vec{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$(\vec{e}_1 \vec{e}_2 \vec{e}_3) =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

за не ОКС

5) $\vec{a} \vec{b} \vec{c}$ - произвольны. Известны $|\vec{a}|, |\vec{b}|, |\vec{c}|$ и углы $\angle(\vec{a}, \vec{b}), \angle(\vec{b}, \vec{c})$ и $\angle(\vec{c}, \vec{a})$

$$(\vec{a} \vec{b} \vec{c})^2 = \begin{vmatrix} \vec{a}^2 & (\vec{a} \vec{b}) & (\vec{a} \vec{c}) \\ (\vec{b} \vec{a}) & \vec{b}^2 & (\vec{b} \vec{c}) \\ (\vec{c} \vec{a}) & (\vec{c} \vec{b}) & \vec{c}^2 \end{vmatrix}$$

детерминанта
на Грам

III. 2.22

6) К.С. (координатна система)

$$K = 0 \vec{e}_1 \vec{e}_2 \vec{e}_3$$

(~~$\vec{a} \vec{b} \vec{c}$~~) ориентация

$$(\vec{a} \vec{b} \vec{c}) \begin{cases} > 0 \Leftrightarrow S^- \\ = 0 \Leftrightarrow \text{компланарни} \\ < 0 \Leftrightarrow \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in S^+ \end{cases}$$

① $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ - ЛНЗ

?, че $\vec{a} \times \vec{b}, \vec{b} \times \vec{c}, \vec{c} \times \vec{a}$ също са ЛНЗ

Разглеждаме $\alpha \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) + \beta \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) + \gamma \cdot (\vec{c} \times \vec{a}) = \vec{0}$ / $\cdot \vec{a}$
 $\alpha = ?$, $\beta = ?$, $\gamma = ?$ / $\cdot \vec{b}$
 $\cdot \vec{c}$

$$\alpha \cdot [(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{a}] + \beta \cdot [(\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{a}] + \gamma \cdot [(\vec{c} \times \vec{a}) \cdot \vec{a}] = 0$$

$$\alpha \underbrace{(\vec{a} \vec{b} \vec{a})}_0 + \beta \underbrace{(\vec{b} \vec{c} \vec{a})}_{\neq \text{ЛНЗ}} + \gamma \underbrace{(\vec{c} \vec{a} \vec{a})}_0 = 0 \Rightarrow \beta \cdot (\vec{b} \vec{c} \vec{a}) = 0 \Rightarrow \beta = 0$$

$$\alpha \underbrace{(\vec{a} \vec{b} \vec{b})}_0 + 0 \cdot (\vec{b} \vec{c} \vec{b}) + \gamma \underbrace{(\vec{c} \vec{a} \vec{b})}_{\neq \text{ЛНЗ}} = 0 \Rightarrow \gamma = 0$$

аналогично за $\alpha = 0$

$\alpha = \beta = \gamma = 0 \Rightarrow \vec{a} \times \vec{b}, \vec{b} \times \vec{c}, \vec{c} \times \vec{a}$ са ЛНЗ

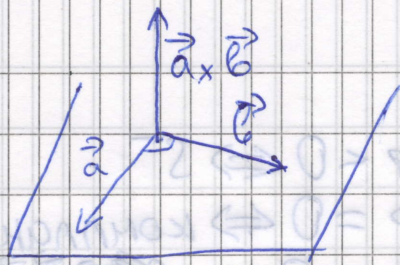
② $\vec{a}, \vec{b}$: $|\vec{a}| = 2$ $|\vec{b}| = 1$ $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{2}$

Да се определи неизвестния вектор $\vec{p}$ от равенствата

$$(\vec{a} \cdot \vec{p}) = 4$$

$$(\vec{b} \cdot \vec{p}) = 2$$

$(\vec{a} \vec{b} \vec{p}) = -8 \Rightarrow \vec{a}, \vec{b}, \vec{p}$ - ЛНЗ $\vec{p}$ не може да се изрази само чрез $\vec{a}, \vec{b}$



Разгледваме координатна система образувана от $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{a} \times \vec{b}$.

Нека $\vec{p} = \alpha \vec{a} + \beta \vec{b} + \gamma (\vec{a} \times \vec{b})$ $1. \vec{a}$

$$(\vec{a}, \vec{p}) = \alpha \vec{a}^2 + \beta (\vec{a}, \vec{b}) + \gamma (\vec{a}, \vec{b} \times \vec{a})$$

$$(\vec{b}, \vec{p}) = \alpha (\vec{a}, \vec{b}) + \beta \vec{b}^2 + \gamma (\vec{a}, \vec{b} \times \vec{b})$$

$$(\vec{a} \times \vec{b}, \vec{p}) = \alpha (\vec{a} \times \vec{b}, \vec{a}) + \beta (\vec{a} \times \vec{b}, \vec{b}) + \gamma (\vec{a} \times \vec{b})^2$$

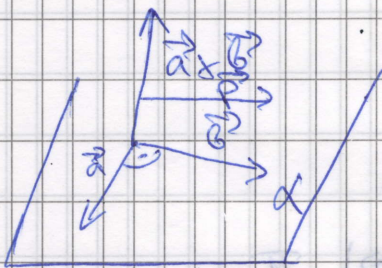
$$4 = \alpha \cdot 4 + \beta \cdot 0 + \gamma \cdot 0 \Rightarrow \alpha = 1$$

$$2 = \alpha \cdot 0 + \beta \cdot 1 + \gamma \cdot 0 \Rightarrow \beta = 2$$

$$-8 = \alpha \cdot 0 + \beta \cdot 0 + \gamma \cdot 4 \Rightarrow \gamma = -2$$

$$(\vec{a} \times \vec{b})^2 = \vec{a}^2 \vec{b}^2 - (\vec{a}, \vec{b})^2 = 4$$

Формули за двойно векторно произведение
 $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{p} \Rightarrow \vec{p} \perp (\vec{a} \times \vec{b}) \Rightarrow \vec{p} \parallel \vec{c}$
 $\vec{p} \perp \vec{c}$



$\vec{p}$ винаги може да се изрази чрез векторите в скобите

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{p} = (\vec{a}, \vec{c}) \cdot \vec{b} - (\vec{b}, \vec{c}) \cdot \vec{a}$$

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{q} = ?$$

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = -(\vec{b} \times \vec{c}) \times \vec{a} = -[(\vec{b}, \vec{a}) \cdot \vec{c} - (\vec{c}, \vec{a}) \cdot \vec{b}] =$$

$$= (\vec{a}, \vec{c}) \cdot \vec{b} - (\vec{a}, \vec{b}) \cdot \vec{c}$$

За упражнение: Докажете, че
 $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) + \vec{b} \times (\vec{c} \times \vec{a}) + \vec{c} \times (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{0}$

3) $\vec{a}, \vec{b}: |\vec{a}| = 1, |\vec{b}| = 1, \angle(\vec{a}, \vec{b}) = \varphi, \vec{a}^2 = \vec{b}^2 = 1, (\vec{a} \vec{b}) = \cos \varphi$

$$\vec{OA} = \vec{a}$$

$$\vec{OB} = (\vec{a} \times \vec{b}) \times (\vec{a} + \vec{b})$$

$$\vec{OC} = [(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{a}] \times [(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{b}]$$

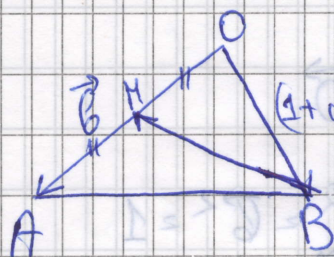
а) $\varphi = ?$: медианата BM на $\triangle AOB$ да е коллинеарна на вектора $\vec{a}$ ($\parallel \vec{a}$)

б) ~~Изправете~~ $V_{OABC} = ?$

$$\begin{aligned} \vec{OB} &= (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{a} + (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{b} = \vec{a}^2 \cdot \vec{b} - (\vec{b} \vec{a}) \cdot \vec{a} + \\ &+ (\vec{a} \cdot \vec{b}) \cdot \vec{b} - \vec{b}^2 \vec{a} = 1 \cdot \vec{b} - \cos \varphi \cdot \vec{a} + \cos \varphi \cdot \vec{b} - 1 \cdot \vec{a} = \\ &= \vec{b}(1 + \cos \varphi) - \vec{a}(1 + \cos \varphi) = (1 + \cos \varphi)(\vec{b} - \vec{a}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{OC} &= [(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{a}] \times [(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{b}] = [\vec{a}^2 \vec{b} - (\vec{b} \vec{a}) \vec{a}] \times \\ &\times [(\vec{a} \cdot \vec{b}) \vec{b} - \vec{b}^2 \vec{a}] = [\vec{b} - \cos \varphi \cdot \vec{a}] \times [\cos \varphi \vec{b} - \vec{a}] = \\ &= \cos \varphi (\vec{b} \times \vec{b}) - (\vec{b} \times \vec{a}) - \cos^2 \varphi (\vec{a} \times \vec{b}) + \cos \varphi (\vec{a} \times \vec{a}) = \\ &= (\vec{a} \times \vec{b})(1 - \cos^2 \varphi) = \sin^2 \varphi (\vec{a} \times \vec{b}) \end{aligned}$$

a)



$$\vec{BM} \parallel \vec{a}$$

$$\vec{BM} = k \cdot \vec{a}$$

$$\vec{BM} = \vec{OM} - \vec{OB} = \frac{\vec{b}}{2} - (1 + \cos \varphi)(\vec{b} - \vec{a}) = k \cdot \vec{a}$$

$$\vec{b} \left(\frac{1}{2} - 1 - \cos \varphi \right) + (1 + \cos \varphi) \vec{a} = k \cdot \vec{a}$$

$$-\frac{1}{2} - \cos \varphi = 0$$

$$\cos \varphi = -\frac{1}{2}$$

$$\varphi = 120^\circ = \frac{2\pi}{3}$$

$$S_{AOB} = ? \quad S = \frac{|\vec{OA} \times \vec{OB}|}{2}$$

$$\vec{OA} = \vec{b}$$

$$\vec{OB} = \left(1 - \frac{1}{2}\right)(\vec{b} - \vec{a}) = \frac{\vec{b} - \vec{a}}{2}$$

$$\vec{OA} \times \vec{OB} = \vec{b} \times \left(\frac{\vec{b} - \vec{a}}{2}\right) = \frac{1}{2} (\vec{b} \times \vec{b} - \vec{b} \times \vec{a}) = \frac{\vec{a} \times \vec{b}}{2}$$

$$|\vec{OA} \times \vec{OB}| = \frac{|\vec{a} \times \vec{b}|}{2} = \frac{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)}{2} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$S_{AOB} = \frac{\sqrt{3}}{8}$$

$$d) V_{OABC} = \frac{|(\vec{OA} \times \vec{OB}) \cdot \vec{OC}|}{6} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{8} \cdot \frac{1}{2}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{96}$$

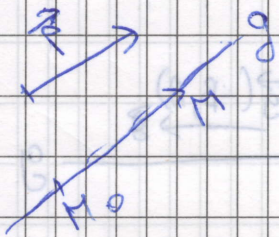
$$(\vec{OA} \times \vec{OB}) \cdot \vec{OC} = \frac{(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \sin^2 \varphi \left(\frac{2\pi}{3}\right)}{2} (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} (\vec{a} \times \vec{b})^2 = \frac{3}{8} (\vec{a}^2 \vec{b}^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2) = \frac{3}{8} (1 \cdot 1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^2) = \frac{3}{8} \cdot \frac{3}{4} = \frac{9}{32}$$

Уравнения на права в равнината

ОКС $k \neq 0$ $z = y$

↑ Координатни уравнения ~~система~~ параметрични



$\vec{r}(p_1, p_2)$
 $M_0(x_0, y_0)$

$\exists! g \mid \parallel \vec{r}$
 M_0

Нека $T. M(x, y)$

е произв. от g

Как (x, y) зависят от $\vec{r}$ и $T. M_0$?

$\vec{M_0M} \parallel \vec{r} \Rightarrow \exists! s \in \mathbb{R}$

$\vec{M_0M}(x - x_0, y - y_0)$
 $\vec{r}(p_1, p_2)$

$x - x_0 = s \cdot p_1$

$y - y_0 = s \cdot p_2$

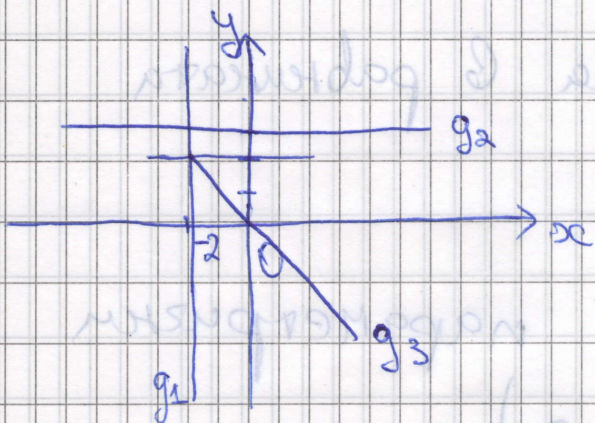
$g \mid \begin{cases} x = x_0 + s \cdot p_1 \\ y = y_0 + s \cdot p_2 \end{cases}$

$s \in \mathbb{R}$

Функцията пише при вектора

II Общо уравнение на права в равнината

$g \equiv: A \cdot x + B \cdot y + C = 0$
 $A, B, C \in \mathbb{R} \quad (A, B) \neq (0, 0)$



Примери:

1) $g_1: x+2=0 \Leftrightarrow x=-2$

2) $P(-2, 7) \Rightarrow PA: x=-2$
 $Q(-2, 121)$

3) $g_2: y-3=0$

4) $g_3: \boxed{x+y=0} \Rightarrow g_3 \text{ з.т. } 0$

$\Rightarrow g \parallel \vec{g}(-B, A)$

$g \perp \vec{n_g}(A, B)$

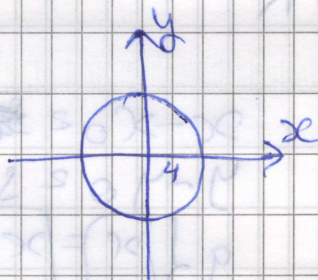
$\vec{g}(-B, A)$
 $\vec{n_g}$

$\vec{g} \cdot \vec{n_g} = 0$

Oxy g_3 -права

$Oxyz$ g_3 -равнина

$Oxy: x^2 + y^2 = 16$



$Oxyz: x^2 + y^2 = 16 \rightarrow \text{цилиндър}$

① Т.Р (1, -2)
 Т.Q (0, -1)

ОКС
 Охх

$a: 3x + 4y + 2 = 0$

$b: 5x - 12y + 1 = 0$

$g_2: x + y - 1 = 0$

а) да се напише у-ния на правата PQ
 $\perp PQ \Rightarrow P(1, -2) \Rightarrow PA$
 $\parallel PQ \Rightarrow PA$
 $\begin{cases} x = 1 + s \cdot (-1) \\ y = -2 + s \cdot (1) \end{cases}, s \in \mathbb{R}$

II н. ~~не~~ погледно събиране
 $x + y = -1$

$PQ: x + y + 1 = 0$ провери чрез заместване на
 (x, y) от г. P или г. Q

III н. Усп. за коллинеарност на три точки

$\begin{array}{c} M \\ \hline P \quad Q \end{array}$

$$\begin{array}{l} M(x, y) \\ P(1, -2) \\ Q(0, -1) \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} M(x, y) \\ P(1, -2) \\ Q(0, -1) \end{array}} \right\} \text{коллинеарни} \Leftrightarrow \Delta = \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$\Delta \neq 0 \Rightarrow S_{MPQ} = \frac{1}{2} |\Delta|$ - формулата важи само за
 равнинна координатна система Oxy

б) Да се напише уравнение на права $l \begin{cases} \perp a \\ \parallel a \end{cases}, P \neq a \Rightarrow$
 ~~$P \in a$~~ $\Rightarrow \exists! l \begin{cases} \perp a \\ \parallel a \end{cases}$

$a: 3x + 4y + 2 = 0$

~~$l: (3k)x + (4k)y + C_l = 0$~~

$l: 3x + 4y + C_l = 0$

$a \parallel l \Leftrightarrow \frac{A_a}{A_l} = \frac{B_a}{B_l} \neq \frac{C_a}{C_l}$

т. $P(1, -2) \in l \Rightarrow 3 \cdot 1 + 4 \cdot (-2) + C_l = 0$
 $C_l = 5$

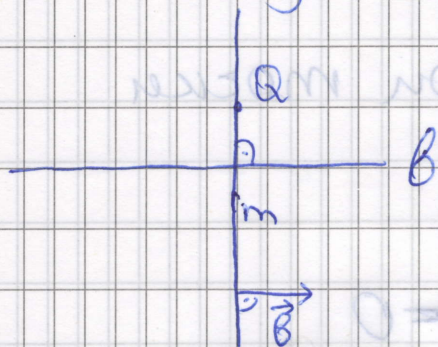
$l: 3x + 4y + 5 = 0$

б) Да се намери уравнение на права m

$$m \begin{cases} \perp r \\ \perp Q \end{cases}$$

$$Q(0, -1)$$

$$b: 5x - 12y + 1 = 0$$



$$\vec{b} \parallel b$$

$$b \perp m$$

нормален вектор на правата m

$$\vec{b}(\vec{r} - B, A)$$

от уравнение на Q

$$\vec{b} \begin{pmatrix} 12 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\vec{b}(12, 5) \perp m$$

$$m: 12x + 5y + C = 0$$

$$\text{т. } Q(0, -1) \in m \Rightarrow 12 \cdot 0 + 5(-1) + C = 0$$

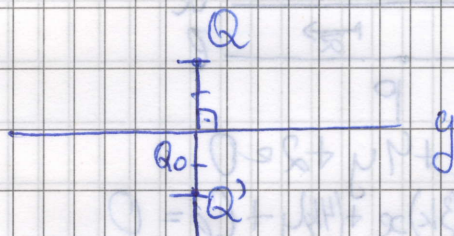
$$C = -5$$

$$m: 12x + 5y - 5 = 0$$

$$b: 5x - 12y + 1 = 0$$

$$2) g: x + y - 1 = 0$$

$$\text{т. } Q(0, -1)$$



Q_0 - ортогоналната проекция Q на правата g

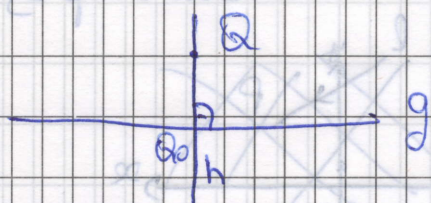
σ - симетрия

σ_g - осева симетрия относно правата g

т. $Q \xrightarrow{\sigma_g} \text{т. } Q'$ (т. Q под действие на симетрия се изобразява в т. Q')

$$\sigma_g(Q) = Q'$$

Осва симетрия ще има задоволява на контролно



$$h: x - y - 1 = 0$$

1) търсим уравнение на правата h , която да минава през $T(Q)$ и да $\perp g$

$$h \perp g$$

$$g: x + y - 1 = 0$$

$$h: x - y + C = 0$$

$$T(Q) = (0, -1) \in h \Rightarrow 0 - (-1) + C = 0$$

$$C = -1$$

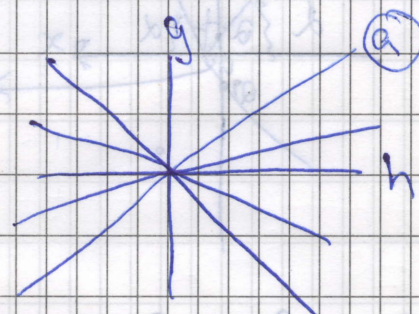
2) $T(Q_0) = h \cap g$

$$\begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ x - y - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ x - y - 1 = 0 \end{cases}$$

$$x_0 = 1, y_0 = 0$$

$$Q_0(1, 0)$$



3)

$$Q(0, -1)$$

$Q_0(1, 0)$ - ср. аритм. от коорд. на $T(Q)$ и Q'

$$Q'(x, y)$$

$$\frac{0 + 2x}{2} = 1$$

$$\frac{-1 + y}{2} = 0 \Rightarrow Q'(2, 1)$$

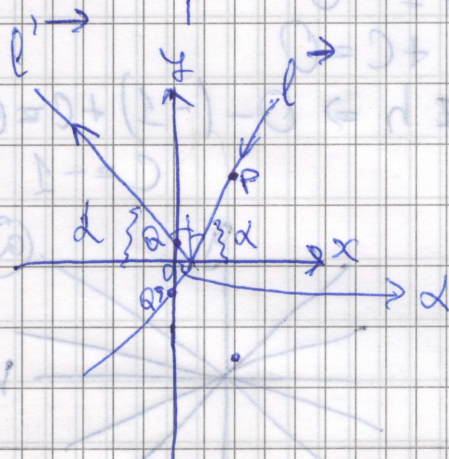
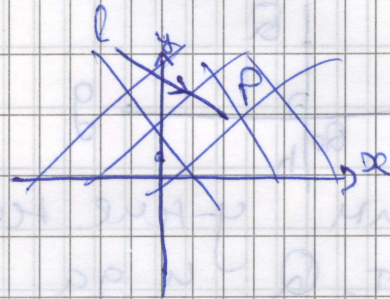
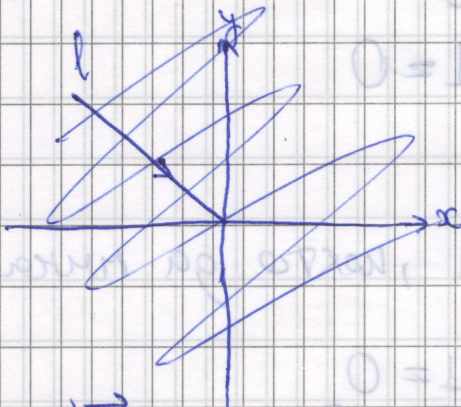
$$0 + 2x = 2$$

$$y = 1$$

$$x = 1$$

② OKC Oxy $T.P(2,4)$
 $T.Q(0,1)$

свѣтлинен лѳг $l \rightarrow$
 минава през $T.P$, отразѳва
 се от Ox и образува
 лѳг $l' \rightarrow$ минава през $T.Q$.



1) Нека $T.Q'$ е симетрична на $T.Q$
 относно Ox , тогава $T.Q' \in l$

$$T.Q(0,1) \xrightarrow{\text{свѣтлинен лѳг}} Q'(0,-1) \text{ ???!!!}$$

$$\begin{aligned} l &\ni P(2,4) \\ l &\ni Q'(0,-1) \end{aligned} \Rightarrow l: \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$l: 5x - 2y - 2 = 0$$

$$2) L = l \cap Ox$$

$$\begin{aligned} l: 5x - 2y - 2 &= 0 \\ Ox: y &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5x - 2y - 2 &= 0 \\ y &= 0 \end{aligned} \Rightarrow x = \frac{2}{5}$$

$$L\left(\frac{2}{5}, 0\right)$$

$$3) L' = \begin{cases} \ni Q(0,1) \\ \ni L\left(\frac{2}{5}, 0\right) \end{cases}$$

$$l' = \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ \frac{2}{5} & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

2 зад. за вектори
2 зад. за права в равн.

09.2. ХФ210

1, 2: височина на триъгълник, S_{Δ} , $V_{\text{тетраедър}}$

3, 4: права в равн. - пъти; права по 2 точки, права по 2 точка и колинеарен вектор

1) зад. ОКС $K = Oxy$

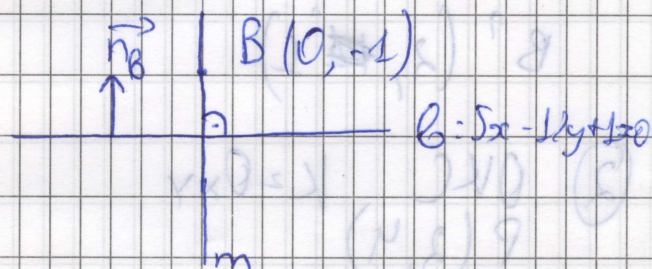
$$A(1, -2), B(0, -1)$$

$$a: 3x + 4y + 2 = 0$$

$$b: 5x + 12y + 1 = 0$$

$$g: x + y - 1 = 0$$

б) уравнение на $m: \begin{cases} \perp b \\ \# \perp b \end{cases}$



$$\vec{n}_b \perp b \Rightarrow \vec{n}_b = \begin{pmatrix} 5 \\ -12 \end{pmatrix}$$

$$\vec{n}_b \parallel m$$

$$m: -12x + 5y + C = 0$$

$$\text{т. } B(0, -1) \in m \Rightarrow C = -5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m: 12x - 5y + 5 = 0$$

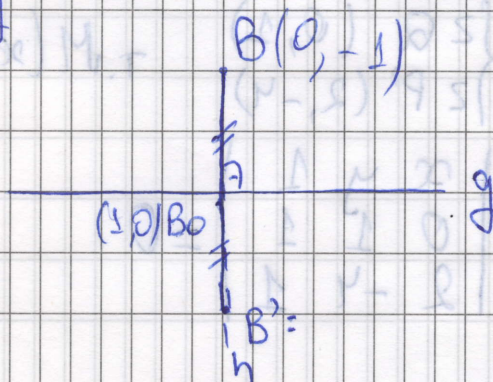
$$m: -12x + 5y + C = 0$$

2) да се намери точката B' ортогонално симетрична на B отнсно правата g

$$B' = \sigma_g(B)$$

$$1) h: \begin{cases} \perp g \\ \text{п. } B \end{cases} \quad 2) B_0 = h \cap g$$

$$3) \vec{OB} = \frac{1}{2}(\vec{OB} + \vec{OB'})$$



$$1) h: \begin{cases} 2B \\ \perp g \end{cases}$$

$$g: x+y-1=0$$

$$h: x-y+c=0$$

$$B(0,-1) \in h \Rightarrow C=-1$$

$$h: x-y-1=0$$

$$2) \begin{cases} x-y-1=0 \\ x+y-1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x=2 \\ 2y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=0 \end{cases}$$

$$3) \vec{OB}_0 = \frac{1}{2} (\vec{OB} + \vec{OB}')$$

$$\vec{OB}' = 2 \cdot \vec{OB}_0 - \vec{OB} \quad x' = 2 \cdot 1 - 0 \quad y' = 2 \cdot 0 - 1$$

$$B'(2, -1)$$

$$(2) OKC \quad K=Oxy$$

$$P(2, 4)$$

$$Q(0, 1)$$

$$P(2, 4)$$

$$Q(0, 1)$$

$l \rightarrow z, P$, отразва се от Ox , $l' \rightarrow z, Q$

светлинен лъч $\rightarrow$ пада минава през т. P отразва се от Ox и отразения лъч $\rightarrow$ минава през т. Q .

? - y -ния на правите съдържа отражения и отразения лъч.

$$1) P' \in Ox \quad (P)$$

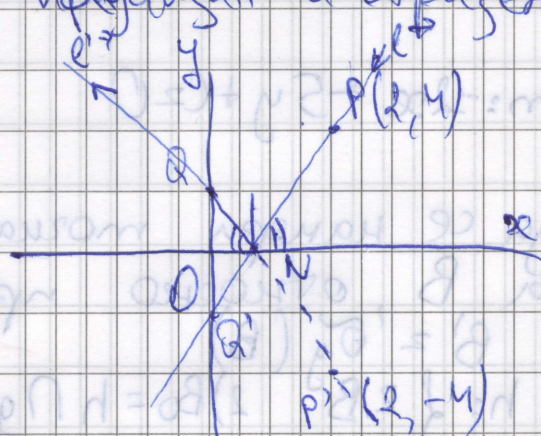
$$P' \neq (2, -4)$$

$$2) l' = \begin{cases} zQ(0, 1) \\ zP'(2, -4) \end{cases} \quad \text{т. } M(x, y) \in l'$$

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -4 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$x - 2y - 2 + 4x - 2 = 0$$

$$5x - 2y - 4 = 0$$



$$\vec{QP} = (x, y-1)$$

$$Q P' (2, -5)$$

$$3) \tau. N = \ell' \cap Ox$$

$$\begin{cases} y=0 \\ 5x+2y-2=0 \end{cases}$$

$$x = \frac{2}{5}$$

$$N(\frac{2}{5}, 0) \quad 4) \ell: \frac{1}{2} N(\frac{2}{5}, 0) P(2, 4)$$

$$\vec{NP} \parallel \ell \Rightarrow \vec{NP}(\frac{8}{5}, 4)$$

$$\ell: \begin{cases} x=2+\frac{8}{5}\lambda \\ y=4+4\lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}$$

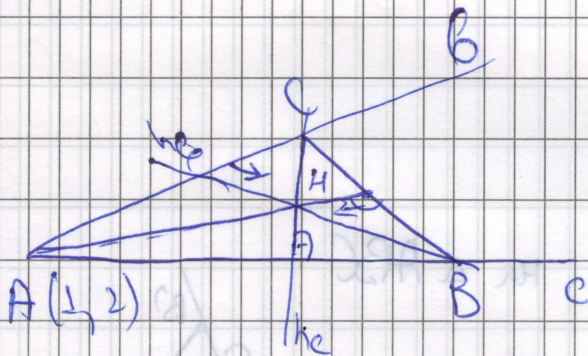
$$③ \quad OKC \quad K \in Ox$$

$$b: 5x+4y-13=0$$

$$c: x+2y-5=0$$

$$H(14, 15)$$

? коорд. на върховете на $\triangle ABC$
 $\tau. A, B, C$, ако правата b
 b съдържа правата c , а не сгу. a
 $AB \in c$
 $AC \in b$
 H -ортоцентър на триъгълник ABC



$$1) A = b \cap c$$

$$\begin{cases} 5x+4y-13=0 \\ x+2y-5=0 \end{cases}$$

$$x=1 \quad y=2$$

$$2) h_c: \begin{cases} \perp AC \\ \perp c \end{cases} \Rightarrow \vec{h_c} \perp \vec{AC} \Rightarrow \vec{h_c}(\frac{1}{-B}, \frac{2}{A})$$

$$h_c: 2x - y + D = 0$$

$$\tau. H \in h_c \Rightarrow 2 \cdot 14 - 15 + D = 0$$

$$D = -13$$

$$h_c: 2x - y - 13 = 0$$

$$3) \tau. C = h_c \cap b$$

$$\begin{cases} 2x - y - 13 = 0 \\ 5x + 4y - 13 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow C(5, -3)$$

$$4) h_B = \begin{cases} z_H(14, 15) \\ \perp h_B \end{cases} \quad h_B(5, 4) \perp h_B$$

$$h_B = \begin{cases} x = 14 + 5\lambda \\ y = 15 + 4\lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}$$

$$5) \tau_B = h_B \cap l_C$$

$$\begin{cases} x + 2y - 5 = 0 \\ x = 14 + 5\lambda \\ y = 15 + 4\lambda \end{cases}$$

$$14 + 5\lambda + 30 + 8\lambda - 5 = 0$$

$$13\lambda + 39 = 0$$

$$\lambda = -3 \Rightarrow \tau_B(-1, 3)$$

$$B: \begin{cases} x_B = 14 - 15 = -1 \\ y_B = 15 - 12 = 3 \end{cases}$$

④ 3ag. OKC

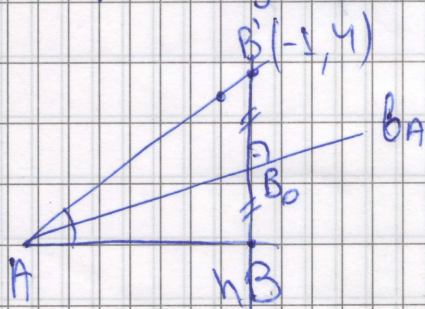
$$b_A: x - 2y - 1 = 0$$

$$m_A: 2x - y - 8 = 0$$

b_A - вѣтвь $\left. \begin{array}{l} \text{при вершине } A \\ \text{на } \triangle ABC \end{array} \right\}$
 m_A - медиана

Ано $\tau_B(3, -4)$? $S_{ABC} = ?$

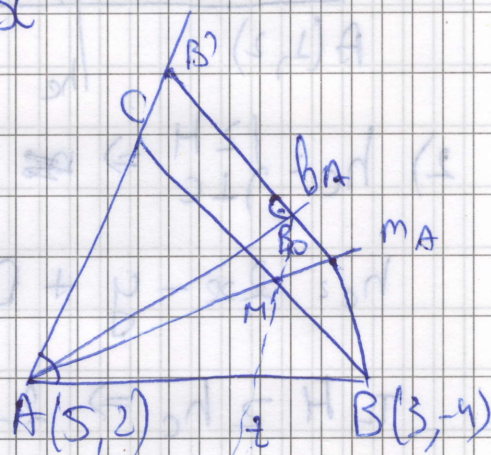
$$1) \begin{cases} \tau_A = b_A \cap m_A \\ \begin{cases} x - 2y - 1 = 0 \\ 2x - y - 8 = 0 \end{cases} \end{cases}$$



$$\begin{aligned} A(5, 2) \\ x &= 1 + 2y = 5 \\ 2 + 4y - y - 8 &= 0 \\ 3y &= 6 \\ y &= 2 \end{aligned}$$

$$B' = \tau_A(B)$$

$$B' \neq AB'$$



$$2) B' = \sigma_{h_A}(B)$$

$$h = \begin{cases} z B(3, -4) \\ \perp b_A \end{cases}$$

$$b_A: x - 2y - 1 = 0$$

$$h: 2x + y + 1 = 0$$

$$h: 2x + y - 2 = 0$$

$$\begin{aligned} \perp B(3, -4) \perp h &\Rightarrow \\ \Rightarrow C = -2 \end{aligned}$$

$$\perp B_0 = h \cap b_A$$

$$\begin{cases} 2x + y - 2 = 0 \\ x - 2y - 1 = 0 \end{cases}$$

$$x = 1 + 2y = 1$$

$$2 + 4y + y - 2 = 0$$

$$y = 0$$

$$B_0(1, 0)$$

$$\vec{OB}_0 = 2\vec{OB}_0 - \vec{OB}$$

$$(\vec{OB}_0 = \frac{1}{2}(\vec{OB} + \vec{OB}'))$$

$$x' = 2 \cdot 1 - 3 = -1$$

$$B'(-1, 4)$$

$$y' = 2 \cdot 0 + 4 = 4$$

$$3) AB' \equiv AC$$

$$\perp P(x, y) \perp AB'$$

$$AB' : \begin{cases} z A(5, 2) \\ z B'(-1, 4) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \vec{AP} &(x-5, y-2) \\ \vec{AB} &(-6, 2) \end{aligned}$$

$$\begin{vmatrix} x-5 & y-2 \\ -6 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$2x - 10 + 6y - 12 = 0$$

$$2x + 3y - 11 = 0$$

$$AB \perp AC: 2x + 3y - 11 = 0$$

4) M - середина на BC г. $M(x_m, y_m)$

$$t: \begin{cases} z B_0(1, 0) \\ \parallel AB' \end{cases}$$

$$AB': x + 3y - 11 = 0$$

$$t: x + 3y + c = 0$$

$$B_0(1, 0) \in t \Rightarrow c = -1$$

$$t: x + 3y - 1 = 0$$

$$5) t \cap m_a = M$$

$$\begin{cases} x + 3y - 1 = 0 \\ 2x - y - 8 = 0 \end{cases}$$

$$2x - y - 8 = 0$$

$$\Rightarrow M\left(\frac{25}{7}, -\frac{6}{7}\right)$$

$$x = 1 - 3y = \frac{25}{7}$$

$$2 - 6y - y - 8 = 0$$

$$-7y = 6$$

$$y = -\frac{6}{7}$$

$$x = \frac{25}{7}$$

$$6) BM: \begin{cases} z H\left(\frac{25}{7}, -\frac{6}{7}\right) \\ z B(3, -4) \end{cases}$$

$$P_Q(x, y) \in BM$$

$$\begin{aligned} \vec{BQ} &= (x-3, y+4) \\ \vec{BM} &= \left(\frac{4}{7}, \frac{22}{7}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{vmatrix} x-3 & y+4 \\ \frac{4}{7} & \frac{22}{7} \end{vmatrix} = 0$$

$$\frac{22}{7}x - \frac{22 \cdot 3}{7} - \frac{4}{7}y + \frac{16}{7} = 0$$

$$22x - 82 - 4y + 16 = 0$$

$$11x - 2y - 41 = 0$$

$$7) AB \cap BM = C$$

$$\Rightarrow C\left(\frac{29}{7}, \frac{16}{7}\right)$$

$$\begin{cases} x + 3y - 11 = 0 \\ 11x - 2y - 41 = 0 \end{cases}$$

$$x = 11 - 3y$$

$$121 - 33y - 2y - 41 = 0$$

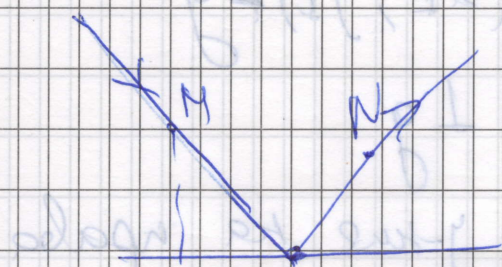
$$35y = 80$$

$$y = \frac{16}{7}$$

$$x = \frac{77 - 21 - 16}{7} = \frac{29}{7}$$

$$8) S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 3 & -4 & 1 \\ \frac{29}{7} & \frac{16}{7} & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \cdot (-20 + \frac{58}{7} + \frac{48}{7} -$$

$$+ \frac{116}{7} - \frac{80}{7} - 6) = \left(\frac{1}{2} (-26 - 10) \right) = +18$$



$$g: 2x + 3y + 5 = 0$$

$$1) h = \frac{1}{2} g$$

$$h: 3x - 2y + c = 0$$

$$M(4, 1) \in h$$

$$12 - 2 + c = 0$$

$$h: 3x - 2y - 10 = 0$$

$$M(4, 1)$$

$$N(6, 0)$$

$$\vec{OA} = \vec{a}$$

$$\vec{OB} = \vec{b}$$

$$\vec{OC} = \vec{c}$$

$$c = \frac{1}{4}$$

$$V_{OABC} = \frac{1}{6} (\vec{OA} \cdot \vec{OB} \cdot \vec{OC})$$

$$(\vec{OA} \cdot \vec{OB} \cdot \vec{OC})^2 = \begin{vmatrix} \vec{OA} \cdot \vec{OA} & \vec{OA} \cdot \vec{OB} & \vec{OA} \cdot \vec{OC} \\ \vec{OB} \cdot \vec{OA} & \vec{OB} \cdot \vec{OB} & \vec{OB} \cdot \vec{OC} \\ \vec{OC} \cdot \vec{OA} & \vec{OC} \cdot \vec{OB} & \vec{OC} \cdot \vec{OC} \end{vmatrix}$$

Ориентированное расстояние от точки до прямой.
Вспомогательные.

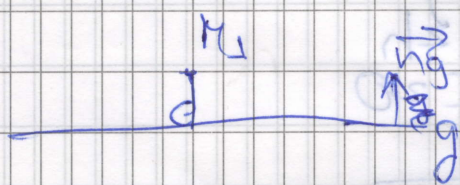
Ориентированное расстояние от точки до прямой
оке $K: \alpha x + \beta y + \gamma = 0$

$$g: Ax + By + C = 0$$

$$(A, B) \neq (0, 0)$$

$$T. M_1(x_1, y_1) \notin g$$

$$\overrightarrow{MM_1} \perp g$$



1) Норм. у-ние к прямой

$$|\vec{n}_g| = 1$$

$$\vec{n}_g(A, B) \perp g$$

$$|\vec{n}_g| = \sqrt{A^2 + B^2}$$

$$|\vec{n}_g| = 1 \Rightarrow \frac{\vec{n}_g}{|\vec{n}_g|} = \left(\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}, \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right)$$

Нормирование

$$g: \pm \frac{Ax + By + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} = 0$$

$$\delta(M_1, g) = \frac{Ax_1 + By_1 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

$$\delta(M_1, g) > 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MM_1} \uparrow \uparrow \vec{n}_g$$

$$\delta(M_1, g) < 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MM_1} \uparrow \downarrow \vec{n}_g$$

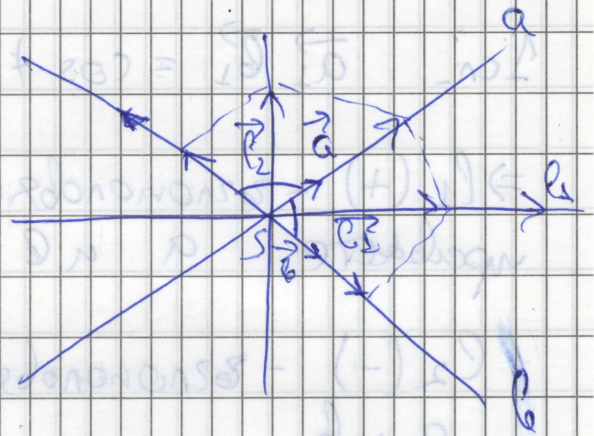
III. 2.40

II Задача об уравнении

$$a: A_1x + B_1y + C_1 = 0$$

$$b: A_2x + B_2y + C_2 = 0$$

$$a \cap b = S$$



$$\vec{a} \perp a \Rightarrow \vec{a} = (-B_1, A_1)$$

$$\vec{b} \perp b \Rightarrow \vec{b} = (-B_2, A_2)$$

$$1) \vec{a} + \vec{b} = \vec{c}_1 \perp l_1$$

$$2) \vec{a} - \vec{b} = \vec{c}_2 \perp l_2$$

$$l_1: \begin{cases} z = S \\ \perp \vec{c}_1 (= \vec{a} + \vec{b}) \end{cases}$$

$$l_2: \begin{cases} z = S \\ \perp \vec{c}_2 (= \vec{a} - \vec{b}) \end{cases}$$

Крит

2. Критерии за взаимоположение двух прямых

$$\vec{a}_1: \begin{cases} \perp \vec{a} \\ |\vec{a}_1| = 1 \end{cases} \Rightarrow \vec{a}_1 = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} \Rightarrow \vec{a}_1 = \left(-\frac{B_1}{|\vec{a}|}, \frac{A_1}{|\vec{a}|} \right)$$

$$\vec{b}_1: \begin{cases} \perp \vec{b} \\ |\vec{b}_1| = 1 \end{cases} \Rightarrow \vec{b}_1 = \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|} \Rightarrow \vec{b}_1 = \left(-\frac{B_2}{|\vec{b}|}, \frac{A_2}{|\vec{b}|} \right)$$

$$1 \text{ сл. } \vec{a}_1 \vec{b}_1 = \cos \varphi (\vec{a}_1 \vec{b}_1) > 0 \Rightarrow \varphi < \frac{\pi}{2}$$

$\Rightarrow l_1(+)$ - възпопоящата при острия ъгъл м/у правите а и б

$l_2(-)$ - възпопоящата при тупия ъгъл м/у а и б

$$2 \text{ сл. } \vec{a}_1 \vec{b}_1 < 0 \Rightarrow \varphi > \frac{\pi}{2}$$

$l_1(+)$ - възпопоящата при тупия ъгъл м/у правите а и б

$l_2(-)$ - възпопоящата при острия ъгъл м/у правите а и б

① У-иата на правите
ОКС $K \neq 0$ ху

$$a: 3x + 4y + 2 = 0$$

$$b: 5x - 12y + 1 = 0$$

$$A(1, -2), B(0, -1)$$

а) ? разс. ~~на~~ от точките до правите

$$\delta(A, a) = ?$$

$$\delta(A, b) = ?$$

$$\delta(B, a) = ?$$

$$\delta(B, b) = ?$$

$$H_a(3, 4)$$

$$|\vec{n}_a| = 5 = \sqrt{3^2 + 4^2}$$

$$\Rightarrow \text{а! } \frac{3x + 4y + 2}{5} = 0$$

$$\delta, l_1 \text{ и } l_2 = ?$$

$$8/4) \begin{array}{l} \vec{a} \begin{pmatrix} -4, 3 \end{pmatrix} \parallel a \\ \vec{b} \begin{pmatrix} 12, 5 \end{pmatrix} \parallel b \end{array} \quad T.S: a \cap b \Rightarrow \begin{cases} 3x + 4y + 2 = 0 \\ 5x - 12y + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow S$$

$$\Rightarrow S \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{8} \right)$$

$$\begin{array}{c} A \quad B \quad C \\ a: 3x + 4y + 2 = 0 \\ \vec{a} \begin{pmatrix} -B, A \end{pmatrix} \end{array}$$

$$l_1: \begin{cases} \perp S \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{8} \right) \\ \parallel \vec{a} = \vec{a} + \vec{b} \end{cases} \begin{pmatrix} 8, 8 \end{pmatrix} \quad (\vec{a} \begin{pmatrix} 1, 1 \end{pmatrix})$$

$$l_1: 8x - 8y + C = 0$$

$$T.S: \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{8} \right) \in l_1 \Rightarrow C = 3$$

$$l_1: 8x - 8y + 3 = 0$$

$$l_2: \begin{cases} \perp S \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{8} \right) \\ \parallel \vec{b} = \vec{a} - \vec{b} \end{cases} \begin{pmatrix} -16, -2 \end{pmatrix} \quad (8, 1)$$

$$l_2: \begin{cases} x = -\frac{1}{2} + (-16)\lambda \\ y = -\frac{1}{8} + (-2)\lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}$$

4) га се опредељуе кога е зана при томе и кога при одређу зана

$$6) \vec{a}_2 = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \frac{\vec{a}}{5} \Rightarrow \vec{a}_2 \left(-\frac{4}{5}, \frac{3}{5} \right)$$

$$\vec{b}_2 = \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|} = \frac{\vec{b}}{13} \Rightarrow \vec{b}_2 \left(\frac{12}{13}, \frac{5}{13} \right)$$

$$\vec{a}_2 \vec{b}_2 = -\frac{4 \cdot 12}{5 \cdot 13} + \frac{3 \cdot 5}{13 \cdot 5} < 0$$

$\rho_1(+)$ - затн. при тѣния затн. н/у 2те прави
 $\Rightarrow \rho_2(-)$ - затн. при острия затн. н/у 2те прави

28.1 - практика 10г. 30ч
 02.11 - теория

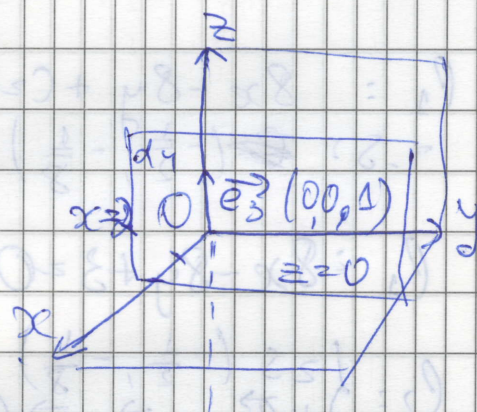
Уравнение на права ~~и~~ равнина в
 пространството

ОКС $K = Oxyz$

I Равнина

$$L: Ax + By + Cz + D = 0$$

$$(A, B, C) \neq (0, 0, 0)$$



Примери:

1) $\alpha \perp z \Rightarrow Ox + y = z = 0$
 $A=0, B=0, C=1, D=0$

$\alpha_2 \perp x \Rightarrow x = 0$
 $\alpha_3 \perp y \Rightarrow y = 0$

$x + y - z = 0$
 Oxy - права
 Oxz - равнина

2) $\alpha_4: x - 2 = 0$
 $x = 2$

2. Условие за компланарни на вектор и равнина

$$L: Ax + By + Cz + D = 0$$

$$\vec{p} = (p_1, p_2, p_3)$$

$$\alpha \parallel \vec{p} \Leftrightarrow Ap_1 + Bp_2 + Cp_3 = 0$$

III 2.44

Пример:

$$\alpha: x+y-3z=0$$

$$A=1 \quad B=1$$

$$C=0$$

$$\vec{p} \perp \alpha \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} = 0$$

$$\alpha \parallel \vec{p}(0,0,1)$$

$$x+y-3z=0 \Leftrightarrow \alpha \parallel Oz$$

$$\beta: y-z+4=0 \Leftrightarrow \beta \parallel Ox$$

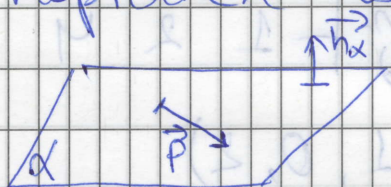
$$\alpha_1: 2x-3y+4z+5=0$$

$$\alpha_2: 2x-3y+4z+10=0$$

D - отстояние от

началото на коорд. сис.

3. Нормален вектор на равнина



$$\alpha: Ax+By+Cz+D=0$$

$$\vec{p} \parallel \alpha \Rightarrow Ap_1+Bp_2+Cp_3=0$$

$$\vec{n} \perp \alpha \Rightarrow \vec{n} \perp \vec{p}$$

$$\Rightarrow \vec{n} = (A, B, C) !!!$$

① ОКС

$$M(3, 1, 2)$$

$$N(2, 1, 4)$$

$$P(1, 3, 8)$$

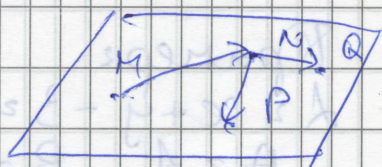
Да се намери уравнение на равнината α определена от M, N, P

$$\vec{MN} = (-1, 0, 2)$$

$$\vec{NP} = (-1, 2, 4)$$

АНЗ $\Rightarrow$ т. M, N, P не лежат на една права

$$\vec{n} \begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 8 & 1 \end{vmatrix} = 0$$



$Q(x, y, z)$ са компланарни
M, N, P

$$4x + 2y + 6z + 24 - 2 - 2z - 24y - 12x = 0$$

$$-8x - 22y + 4z + 24 = 0$$

$$8x + 22y - 4z - 24 = 0$$

$$4x + 11y - 2z - 12 = 0$$

За упражнение

II н. $\vec{n}_Q (x-2, y-1, z-4)$ са $\begin{vmatrix} x-2 & y-1 & z-4 \\ -1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 20$
 $\vec{MN} (-1, 0, 2)$
 $\vec{NP} (-1, 2, 4)$
 норм. (1, -3)

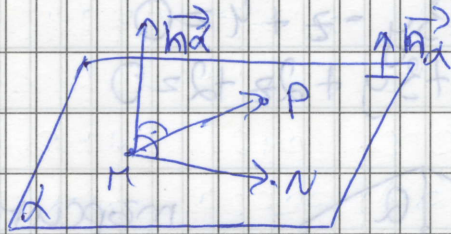
III н. $\vec{MN} (-1, 0, 2)$
 $\vec{MP} (-2, 2, 6)$

? Как операция приложена за векторите $\vec{MN}$ и $\vec{MP}$ ще даде норм. вектор $\vec{n}_2$

12.12.2012.

① ОКС $K = Oxyz$

$$\left. \begin{array}{l} M(3, 1, 2) \\ N(2, 1, 3) \\ P(1, 2, -1) \end{array} \right\}$$



а) ? уравн. на $\alpha \ni M, N, P$

Как се смята $\vec{n}_\alpha$ по дадени 2 компланарни на α вектора

$$\alpha: Ax + By + Cz + D = 0$$

$$\vec{n}_\alpha(A, B, C)$$

$$\vec{n}_\alpha = \vec{MN} \times \vec{MP}$$

векторно произведение

$$\vec{MN}(-1, 0, -1) \times \vec{MP}(-2, 1, -5)$$

$$\vec{MN} \times \vec{MP} \left(\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -5 & -2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -5 & -2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} \right) = (1, -3, -1)$$

$$\vec{n}_\alpha \left(\underset{A}{1}, \underset{B}{-3}, \underset{C}{-1} \right)$$

$$\alpha: x - 3y - z + D = 0$$

равнината на какво разст. от началото на координатите

$$\alpha \ni N(2, 1, 3)$$

$$\alpha: x - 3y - z + 4 = 0$$

$$2 - 3 - 3 + D = 0$$

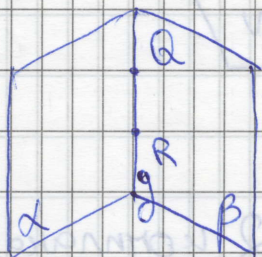
$$D = 4$$

$$\beta: 2x + 3y + 2z + 2 = 0$$

!!! ? координатни параметрични у-ния на правата $g = \alpha \cap \beta$.

III.2.47

$$g = \begin{cases} x - 3y - z + 4 = 0 \\ 2x + 3y + 2z + 2 = 0 \end{cases}$$



можем можа от правата g и вектор $\vec{g} \parallel g$

Или изберем 2 различни точки от правата g

За т. R от g издирате $z_R = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} x - 3y + 4 = 0 \\ 2x + 3y + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x + 6 = 0 \\ x = -2 \end{cases} \quad y = \frac{2}{3}$$

$$R(-2, \frac{2}{3}, 0)$$

За т. Q от правата g издирате $x_Q = 1$

$$\begin{cases} 1 - 3y - z + 4 = 0 \\ 2 + 3y + 2z + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3 + z + 6 = 0 \\ z = -9 \end{cases} \quad y = -\frac{14}{3}$$

$$Q(1, -\frac{14}{3}, -9)$$

$$g \begin{cases} z = R(-2, \frac{2}{3}, 0) \\ z = Q(1, -\frac{14}{3}, -9) \end{cases} \Rightarrow g \parallel \vec{g} = \vec{RQ}(3, 4, -9)$$

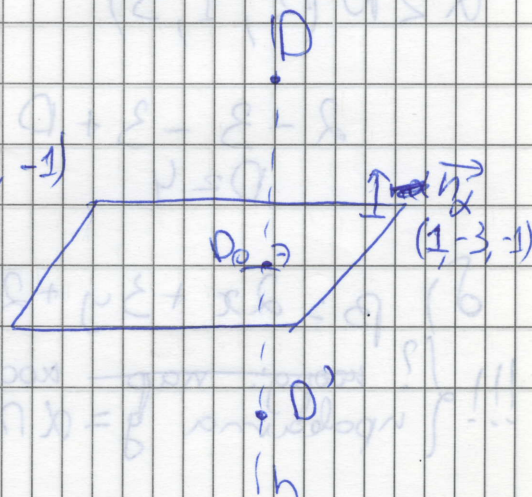
$$g: \begin{cases} x = -2 + 3 \cdot s \\ y = \frac{2}{3} + 4 \cdot s \\ z = 0 + (-9) \cdot s \end{cases}, s \in \mathbb{R}$$

b) ? координата на $D' = \sigma_\alpha(D)$

$$D(0, -3, 2) \xrightarrow{\sigma_\alpha} D'$$

1) ? y-лине на $h \parallel \vec{n}_\alpha(1, -3, -1)$

$$h: \begin{cases} x = 0 + 1 \cdot p \\ y = -3 - 3 \cdot p \\ z = 2 - 1 \cdot p \end{cases}, p \in \mathbb{R}$$



III. 2.48

2) ? , m. $D_0 = h \cap \alpha$

$$\begin{cases} x = p \\ y = -3 - 3p \\ z = 2 - p \\ x - 3y - z + 4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} p + 9 + 2p + p - 2 + 4 &= 0 \\ 12p + 7 &= 0 \\ p &= -\frac{7}{12} \end{aligned}$$

$D_0(-1, 0, 3)$

3) $D(0, -3, 2)$

$D_0(-1, 0, 3)$ - среда

$D'(x', y', z')$

$$\frac{x' + 0}{2} = -1$$

$$\frac{y' - 3}{2} = 0$$

$$\frac{z' + 2}{2} = 3$$

$$x' = -2$$

$$y' = 3$$

$$z' = 4$$

$$D'(-2, 3, 4)$$

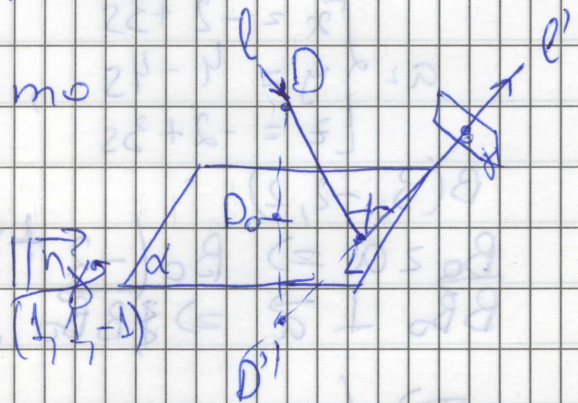
(векторен път l минава през т. D , отразява се от равнината α и отражения път l' става перпендикулярен на равнината $\gamma: x + y - z + 1 = 0$? γ -ния на правите l и l' ~~става перпендикулярен~~

Щом $m.D \xrightarrow{\Phi_\alpha} m.D'$, то

$m.D' \perp l'$

$l' \begin{cases} z \in D'(-2, 3, 4) \\ \perp \gamma: x + y - z + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow l' \parallel \vec{n}_\gamma$

$l: \begin{cases} x = -2 + 1\lambda \\ y = 3 + 1\lambda \\ z = 4 + (-1)\lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}$



Параметрич. коорг. на $m.L = l' \cap d$

$$\begin{cases} x = -2 + \lambda \\ y = 3 + \lambda \\ z = 4 - \lambda \end{cases} \quad \begin{cases} -2 + \lambda - 9 - 3\lambda - 4 + \lambda + 4 = 0 \\ -\lambda - 11 = 0 \end{cases}$$

$$\lambda = -11 \Rightarrow m.L(-13, 8, 15)$$

$$x - 3y - z + 4 = 0$$

$$l = \begin{cases} z = 0 \\ z = L(-13, -8, 15) \end{cases}$$

$$l \parallel \vec{OL}(-13, -8, 15)$$

$$l = \begin{cases} x = 0 - 13M \\ y = -3 - 5M \\ z = 2 + 13M \end{cases}, M \in \mathbb{R}$$

2) $S_{MNP} = ?$

$$S = \frac{|\vec{MN} \times \vec{MP}|}{2}$$

$$\begin{matrix} \vec{MN}(-1, 0, -1) \\ \vec{MP}(-2, 1, -5) \end{matrix}$$

$$\vec{MN} \times \vec{MP} = (1, -3, -1) \text{ Визначено от а)}$$

$$|\vec{MN} \times \vec{MP}| = \sqrt{1^2 + (-3)^2 + (-1)^2} = \sqrt{11} \quad S = \frac{\sqrt{11}}{2}$$

② ОКС $K = \{A, B, C\}$

$$B(3, -2, 2)$$

$$a = \begin{cases} x = -2 + 3s \\ y = 4 - 4s \\ z = -2 + 3s \end{cases}, s \in \mathbb{R}$$

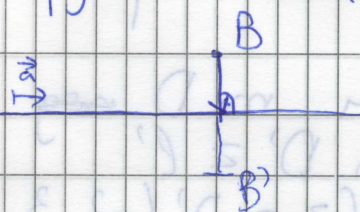
$$B(3, -2, 2)$$

$$B_0 \in a \Rightarrow B_0(-2 + 3s_0, 4 - 4s_0, -2 + 3s_0)$$

$$\vec{BB_0} \perp \vec{a} \Rightarrow \vec{BB_0} \cdot \vec{a} = 0$$

$$\begin{matrix} \vec{BB_0}(-5 + 3s_0, 6 - 4s_0, -4 + 3s_0) \\ \vec{a}(3, -4, 3) \end{matrix}$$

а)? разст. от м. В до права а
б)? коорг. на $B' = \pi_a(B)$



$$\vec{BB_0} \cdot \vec{a} = -15 + 9S_0, -24 + 16S_0, -12 + 9S_0 = 0$$

$$34S_0 = 51$$

$$S_0 = \frac{3}{2}$$

$$\vec{B_0} \left(\frac{5}{2}, -2, \frac{5}{2} \right) \quad \vec{BB_0} \left(-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2} \right)$$

$$\vec{B} (3, -2, 2) \quad |\vec{BB_0}| = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$d) \sigma_a(B) = B'$$

$$B' (2, -2, 3)$$

$$(3) \text{ Разглеждаме ОКС } \vec{K} \leftarrow \vec{Ox}$$

$$a: \begin{cases} x = 5 + s \\ y = -1 + 2s \\ z = 11 - s \end{cases}, s \in \mathbb{R}$$

$$b: \begin{cases} x = -4 - 7p \\ y = 3 + 2p \\ z = 4 + 3p \end{cases}, p \in \mathbb{R}$$

а) какво е взаимното положение на a и b ?

$$\begin{cases} a \parallel \vec{a} (1, 2, -1) \\ b \parallel \vec{b} (-7, 2, 3) \end{cases} \quad \Delta H3 \Rightarrow a \times b$$

Разглеждаме $a \cap b = ?$

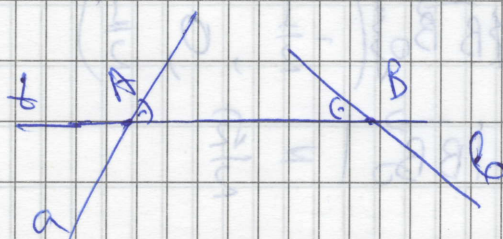
$$\begin{cases} 5 + s = -4 - 7p \\ -1 + 2s = 3 + 2p \\ 11 - s = 4 + 3p \end{cases} \quad \begin{cases} s + s = -4 - 7p \\ -1 + 2s = 3 + 2p \Rightarrow -1 + 2s = 3 - 8 \\ 16 = -4p \Rightarrow p = -4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2s = -4 \\ s = -2 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ същата няма решение $\Rightarrow a \cap b = \emptyset$

a и b са крџстосани

δ_1 ? , y -ниџ на оета на крџстосани прави a и b



$$\left. \begin{array}{l} t \cap a = m.A \\ t \cap b = m.B \\ t \perp a \\ t \perp b \end{array} \right\} \begin{array}{l} t \text{ е ос } \\ \text{на крџстосани} \\ \text{прави на} \\ a \text{ и } b \end{array}$$

AB е ос-отсезка

$|AB|$ е разст. м/у крџстосаните прави a и b

$$A \in a \Rightarrow A(5+s, -1+2s, 11-s)$$

$$B \in b \Rightarrow B(-4-7p, 3+2p, 4+3p)$$

$$\vec{AB}(-9-7p-s, 4+2p-2s, -7+3p+s)$$

$$a \parallel \vec{a} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$b \parallel \vec{b} \begin{pmatrix} -7 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{l} \vec{AB} \cdot \vec{a} = 0 \\ \vec{AB} \cdot \vec{b} = 0 \end{array}$$

$$-9-7p-s+8-4s+4p+7-s-3p=0$$

$$-6s+4p+7s+8+4p-8s-21+9p+3s=0$$

$$-6p-6s+6=0$$

$$6s+6p-5=0$$

$$p=-1$$

$$s=1-p=2$$

$$A(7, 3, 9) \text{ и при } s=2$$

$$B(3, 1, 1)$$

$$\begin{pmatrix} 2 & A & (7, 3, 9) \\ 2 & B & (3, 1, 1) \end{pmatrix}$$

$$\vec{AB}(-4, -2, -8)$$

$$\begin{cases} x = 3 - 4q \\ y = 1 - 2q \\ z = 1 - 8q \end{cases}, q \in \mathbb{R}$$

$$(4) \quad a: \begin{cases} x = p \\ y = -2 + p \\ z = -1 + 2p \end{cases}, p \in \mathbb{R}$$

$$b: \begin{cases} x + z = 0 \\ y + z - 2 = 0 \end{cases}$$

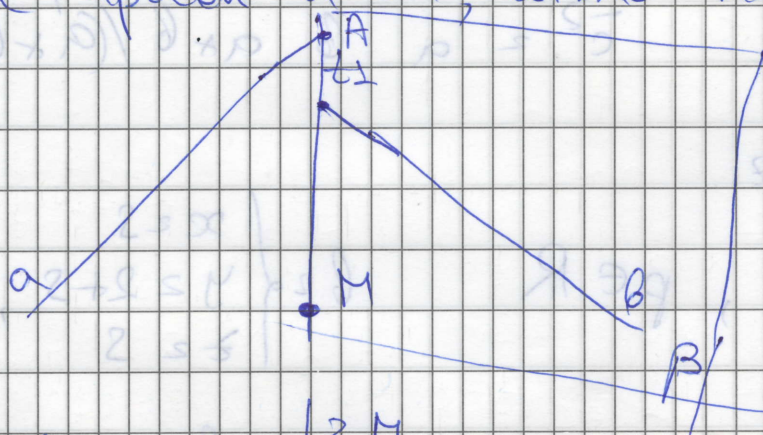
за упрощение

$$b: \begin{cases} x = 0 + s \\ y = 2 + s \\ z = 0 - s \end{cases}, s \in \mathbb{R}$$

Да се провери док., че ~~A и B са~~ а и б са
кръстосани.

$$a) M(6, 0, 4)$$

? ч-ния на $\vec{AB}$ окази трансверзала $\vec{t}_1$ на кръстоса-
ните прави а и б, която минава през т. М
($\perp M$)

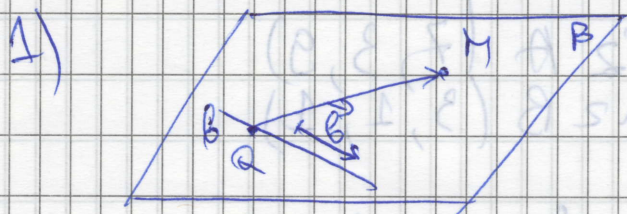


Търсена равнина
 β , която минава

$$1) ? \text{ равнина } \beta \begin{cases} \perp M \\ \supset b \end{cases} \text{ (сдържа б)}$$

$$2) ? \text{ т. } A \in a \cap \beta \text{ за упроще.}$$

$$3) ? \vec{t}_1 \begin{cases} \perp M \\ \perp a \end{cases} \text{ за упроще.}$$



$$B \parallel \vec{B}(1, 1, -1)$$

$$\Rightarrow \vec{B} \parallel B$$

$$B \approx Q(0, 2, 0)$$

$$\Rightarrow \vec{QM} \parallel \vec{B}$$

$$\vec{B} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \vec{QM} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \text{NH3}$$

$$\vec{n}_B = \vec{B} \times \vec{QM}$$

$$\vec{B} \times \vec{QM} \begin{pmatrix} | 1 & -1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 6 & -2 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

$$\parallel \vec{n}_B \begin{pmatrix} 2 \\ -10 \\ -8 \end{pmatrix}$$

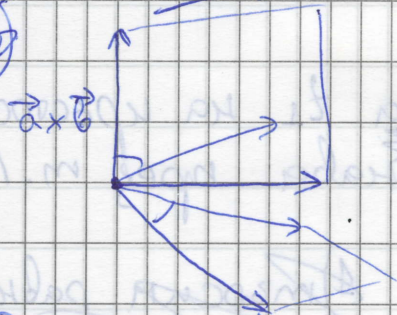
$$B: 2x - 10y - 8z + D = 0$$

$$B \approx Q(0, 2, 0) \quad D = 20$$

$$B: 2x - 10y - 8z + 20 = 0 \quad | : 2$$

$$19.8.11 \quad 20.12.21$$

④



$$\vec{c} = \frac{\vec{c}}{|\vec{c}|} \Rightarrow \vec{c}_1 (\cos \beta, \cos \gamma, \cos \alpha)$$

$$\vec{c} = a \quad b \quad a+b \quad (a+b)$$

⑤ OKC $k \geq 0 \wedge r \geq z$

$$a = \begin{cases} x = p \\ y = -2 + p \\ z = -1 + 2p \end{cases}, p \in \mathbb{R}$$

$$b = \begin{cases} x = s \\ y = 2 + s \\ z = s \end{cases}, s \in \mathbb{R}$$

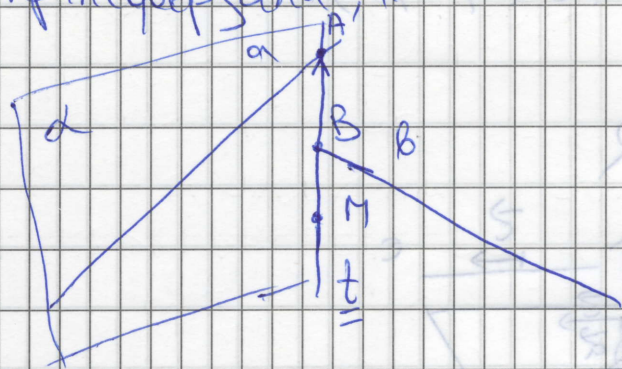
a u b sa uprostocanin (ga se upodrepu)

$$c = \begin{cases} x = 1 + 2g \\ y = -1 + 6g \\ z = 2 - g \end{cases}, g \in \mathbb{R}$$

III. 2.54

? да се намери у-тиче на трансформирала на
пръстосагите прави a и b , която е $\parallel c$ ($t \parallel c$)

За центр. или оста изпитан. ос на симетрия или
трансформирала, *



~~т.~~

за управление

1) построяваме равнина α $\begin{cases} \perp a \\ \parallel c \end{cases}$!!

2) ?, т. $B = b \cap \alpha$

$\vec{AM} \parallel \vec{BM}$

3) $t \begin{cases} \perp b \\ \parallel c \end{cases}$

П.н. Нека $t \cap a = A(p, -2+p, -1+2p)$
 $t \cap b = B(s, 2+s, s)$

$$\begin{aligned} \vec{AB} &\parallel \vec{c} \\ \vec{AB} &= (s-p, 4+s-p, 1+s-2p) \\ \vec{c} &= (2, 6, -1) \end{aligned} \Rightarrow \text{A-3.}$$

$$\frac{s-p}{2} = \frac{4+s-p}{6} = \frac{1+s-2p}{-1}$$

$$\begin{cases} 6(s-p) = 8+2s-2p \\ -s+p = 2+2s-4p \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6s-6p = 8+2s-2p \\ 3s-5p = -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} s-2p = 2 \\ 4s-8p = 8 \\ 3s-5p = -2 \end{cases}$$

III 2.55

$$\begin{cases} s - p = 2 \\ -3s + 5p = 2 \end{cases} \quad 1.3$$

$$\begin{aligned} 2p &= 8 \\ p &= 4 \\ s &= 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A(4, 2, 4) \\ B(6, 8, 6) \end{aligned}$$

$$\vec{a} = \vec{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$t = \begin{cases} x = 4 + 2\lambda \\ y = 2 + 6\lambda \\ z = 4 - \lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\alpha \perp \vec{a} \quad \alpha \perp \vec{c}$$



$$\begin{aligned} \alpha \perp \vec{a} \quad (1, 1, 2) &\Rightarrow \alpha \perp \vec{a} \\ \alpha \perp \vec{c} \quad (2, 6, -1) &\Rightarrow \alpha \perp \vec{c} \end{aligned}$$

$$\alpha \perp P(0, -2, -1) \text{ (npu } p=0)$$

$$\alpha: Ax + By + Cz + D = 0$$

$$\vec{a} \times \vec{c} = \vec{n}_\alpha$$

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ \vec{c} &= \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\vec{a} \times \vec{c} = \begin{pmatrix} -13 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \vec{n}_\alpha = \begin{pmatrix} -13 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

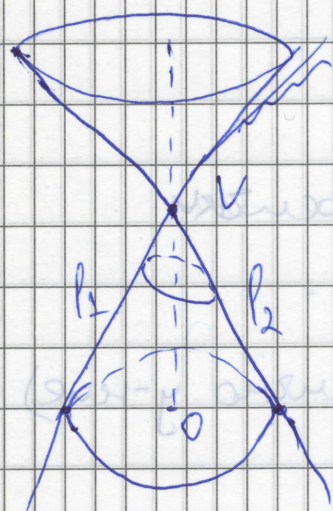
$$\alpha: -13x + 5y + 4z + D = 0$$

$$\alpha: -13x + 5y + 4z + 14 = 0$$

$$P(0, -2, -1)$$

$$-10 - 4 = -D$$

$$D = 14$$



конични сечения

1 сп. S-конус

α - равнина

$\alpha \perp VO$ (ос на конуса S)

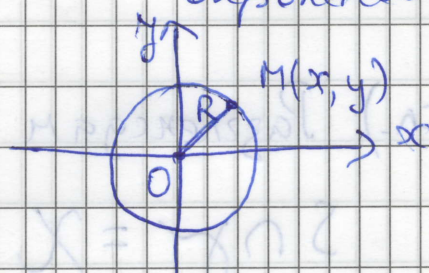
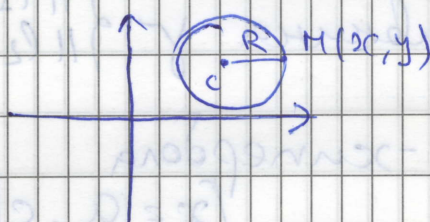
$\alpha \neq V$

$k = S \cap \alpha$ е окръжност

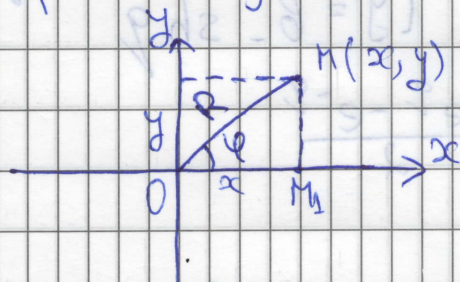
$k: x^2 + y^2 = R^2$ (центр. у-ние на окръжност)

$$k_1: (x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$$

$$m \in (a, b)$$



Параметрични у-ния на окръжност



$m. M(x, y)$

$$|\vec{OM}| = R$$

$$\angle(\vec{OM}, Ox^+) = \varphi$$

$$\text{от } \triangle OMM_1 \Rightarrow \frac{x}{R} = \cos \varphi$$

$$\frac{y}{R} = \sin \varphi$$

$M(x, y)$ ↗ - декартови коорд.
 $M(R, \varphi)$ ↖ - полярни коорд.

$$\begin{cases} x = R \cos \varphi \\ y = R \sin \varphi \end{cases} \quad \begin{matrix} R \in (0, +\infty) \\ \varphi \in [0, 2\pi) \end{matrix}$$

$$\begin{cases} x = R \cos \varphi + a, R \in [0, +\infty) \\ y = R \sin \varphi + b, \varphi \in [0, 2\pi) \end{cases}$$

Парам. уравн. на окр.

$$x^2 + y^2 = R^2$$

$$k: \begin{cases} x = R \cos \varphi \\ y = R \sin \varphi \end{cases} \quad \begin{matrix} \varphi \in [0, 2\pi) \\ \text{параметр} \end{matrix}$$

$$2 \text{ сл.) } S \cap \beta = E$$

E е елипс
 β е равнина, която пресича всички образуватели на конуса S

$$E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (\text{метрично канонично у-ние})$$

$$a \neq 0 \quad a \geq 0 \quad b \geq 0$$

$$E: \begin{cases} x = a \cdot \cos \varphi \\ y = b \cdot \sin \varphi \end{cases} \quad \varphi \in [0, 2\pi)$$

3 сл.) Разглеждам равнина $\gamma \parallel l_1$

$$S \cap \gamma = X \text{ (хипербола)}$$

$$X: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad X: \begin{cases} x = a \cdot \operatorname{ch} q \\ y = b \cdot \operatorname{sh} q \end{cases}, q \in \mathbb{R}$$

$$\operatorname{ch} q = \frac{e^q + e^{-q}}{2}, \quad \operatorname{sh} q = \frac{e^q - e^{-q}}{2}$$

$$(\operatorname{ch} q)' = \operatorname{sh} q$$

$$\operatorname{ch}^2 q - \operatorname{sh}^2 q = 1$$

$$(\operatorname{sh} q)' = \operatorname{ch} q$$

4 сл.) Разглеждам равнина $\pi \parallel l_1$

$$S \cap \pi = \pi \rightarrow \text{парабола}$$

$$\pi: y^2 = 2px$$

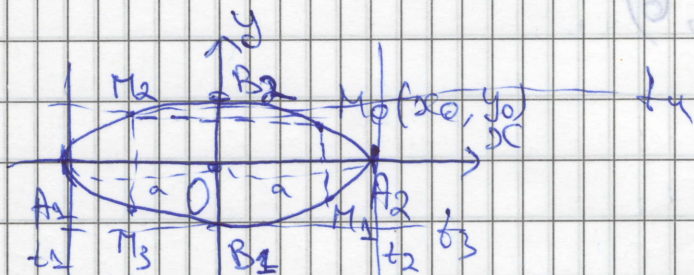
1) Елипса

OKC $K = O_{xy}$

$$\varepsilon: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

АГОРА

mathworld



1) Нека т. $M_0(x_0, y_0) \in \varepsilon \Rightarrow$ т. $M_1(x_0, -y_0) = \sigma_{Ox}(M_0)$
 $M_1 \in \varepsilon$, защото $\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{(-y_0)^2}{b^2} = 1$

$\Rightarrow \varepsilon$ елипсата е симетрична отн. Ox

$M_2(-x_0, y_0) = \sigma_{Oy}(M_0) \in \varepsilon \Rightarrow \varepsilon$ е симетр. отн. Oy

$M_0(x_0, y_0) \xrightarrow{\text{централна симетрия отн. т. } O} M_3(-x_0, -y_0)$

$\Rightarrow \varepsilon$ е симетрична отн. т. O

2) Върхове и върскови дотирателни на ε
 $\varepsilon \cap Ox = \{A_1, A_2\}$

$$\begin{array}{l} A_1 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ y = 0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} x^2 = a^2 \\ x_{1,2} = \pm a \end{array} \quad \begin{array}{l} A_1(-a, 0) \\ A_2(a, 0) \end{array}$$

$$\begin{array}{l} t_1 \geq A_1, t_1 \parallel Oy \Rightarrow t_1: x = -a \\ t_2 \geq A_2, t_2 \parallel Oy \Rightarrow t_2: x = a \end{array}$$

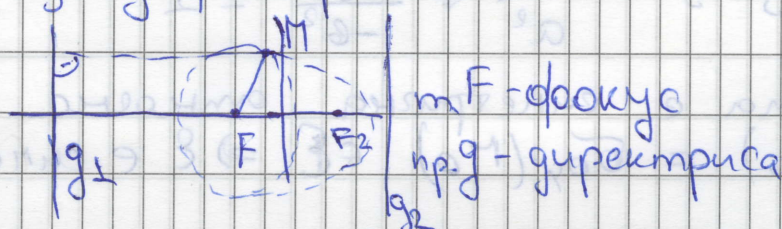
$$\{ \Pi O_y = \{ B_1, B_2 \} \}$$

$$\begin{cases} y = \pm b \\ B_1(0, -b) \\ B_2(0, b) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} t_3: y &= -b \\ t_4: y &= b \end{aligned}$$

3) фокуси и директриси

Друг начин за дефинирање на конични сеченија

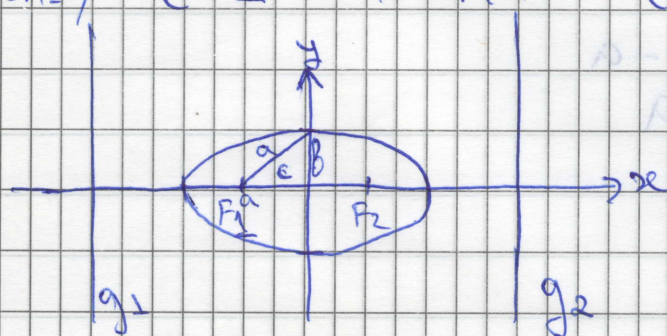


Геометричното место на ~~внатрешни~~ точки (ГМТ), за
којто ~~отнош.~~ ~~ка~~ ~~разноста~~
 $\frac{|MF|}{d(M, g)} = \text{const.} = e \neq 1$
е ~~гипербол~~
ексцентриситет

1сл.) $e < 1 \Rightarrow$ ГМТ е елипса

2сл.) $e = 1 \Rightarrow$ ГМТ е парабола

3сл.) $e > 1 \Rightarrow$ ГМТ е хипербола



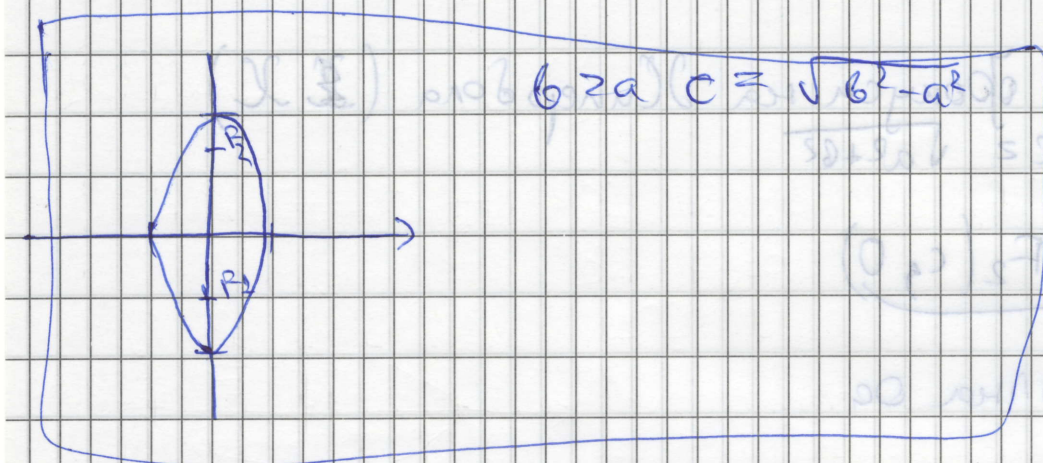
$$a > b > 0$$

$$c = \sqrt{a^2 - b^2}$$

$$F_1(-c, 0)$$

$$F_2(c, 0)$$

фокусите винага
лежат на
големата ос



$$g_2: x^2 = \frac{a^2}{c^2}$$

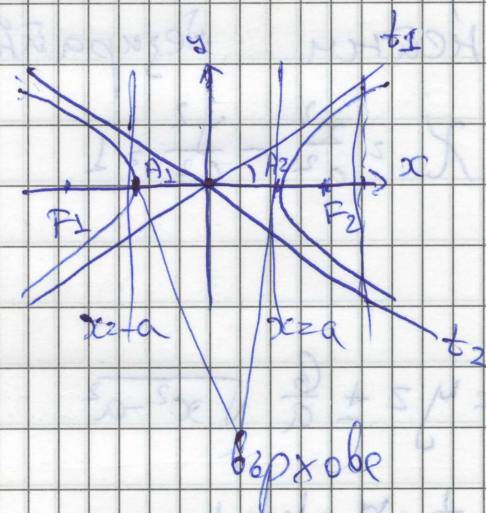
08.1.2013г.

II Гипербола: ОКС $K = 0 \times y$

$$X: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

1) симетрии

2) $X \cap OX = ?$



$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$x^2 = a^2$$

$$x_{1,2} = \pm a$$

$$A_1(-a, 0)$$

$$A_2(+a, 0)$$

$\Rightarrow$ Ох е реална ос
(защото пресича хиперболата
в 2 реални точки)

$$X \cap O_y = \emptyset$$

O_y е имагинерна ос

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1 \Rightarrow O_y \text{ реална}$$

O_x имагинерна

$$F_1(0, -c) \rightarrow O_y$$

$$F_2(0, c)$$

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$a > 0, b > 0$$

Фокуси на Хипербола ($\mathbb{R}^2$)
 $c = \sqrt{a^2 + b^2}$

$$F_1(-c, 0) \quad F_2(c, 0)$$

Ox - реална ос

3) асимптоти - допирателни към крива в нейни безкрайни точки

$$x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$$

$$y^2 = \frac{b^2 x^2 - a^2 b^2}{a^2}$$

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2} (x^2 - a^2)$$

$$f(x) = y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}$$

$$x \in (-\infty, -a] \cup [a, +\infty)$$

$$t_1: y = kx + n$$

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}}{x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \frac{1 - \frac{a^2}{x^2}}{x} = \frac{b}{a}$$

$$t_1: y = \frac{b}{a} x + n$$

$$n = y - kx$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(f(x) - kx \right) = \dots = 0$$

$$t_1: y = \frac{b}{a} x$$

$$t_2: y = -\frac{b}{a} x$$

асимптоти на Хипербола

III Парабола Π

$$\Pi: y^2 = 2px, \quad p > 0$$

т.О $(0,0)$ - връх

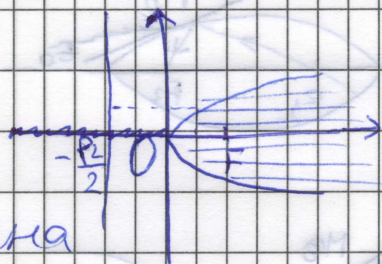
Oy: $x=0$ - върхова допирателна

$$y \in (-\infty; +\infty)$$

$$x \in [0; +\infty)$$

F $(\frac{p}{2}, 0)$ - фокус

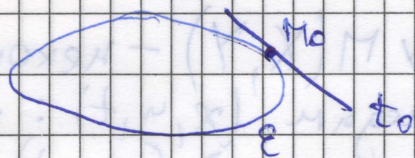
~~l~~ $x = -\frac{p}{2}$ - ~~директриса~~ директриса



IV Уравнения на допирателни към крива от втора степен в точка от кривата

1) $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ т. $M_0(x_0, y_0) \in E$, тогава

правата $t_0: \frac{x \cdot x_0}{a^2} + \frac{y \cdot y_0}{b^2} = 1$ е допирателната към елипсата E в т. M_0



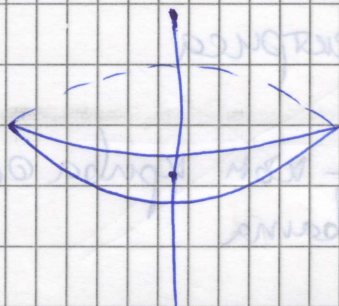
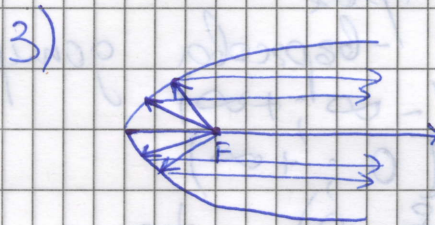
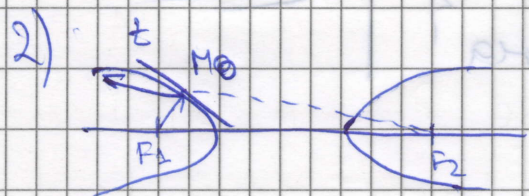
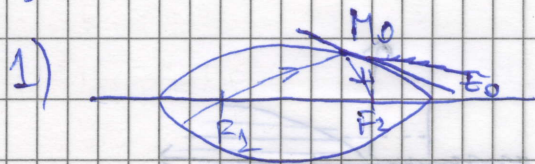
2) $\chi: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ $M_0 \in \chi$

$t_0: \frac{x \cdot x_0}{a^2} - \frac{y \cdot y_0}{b^2} = 1$ е допирателната към хипербола χ в т. M_0

3) $\Pi: y^2 = 2px$ $M_0(x_0, y_0) \in \Pi$

$t_0: y \cdot y_0 = p(x + x_0)$ е допирателна към параболата Π в т. M_0

1) Оптични свойства на E, X, π



Хомогенни координати и
Безиратни елементи

1) $M(x, y, t)$ — нехомогенни коорг.
Разделяме $(x, y, t) : \begin{cases} \frac{x}{t} = X \\ \frac{y}{t} = Y \end{cases} \Rightarrow$ тройка ~~нехомоген~~ ^{хомоген} координати $\Rightarrow (x, y, t)$ са хомогенни координати на M

$$M(x, y) \quad M(x, y, t) \quad \frac{x}{t} = X \quad \frac{y}{t} = Y$$

$$M(1, 3)$$

$$M(1, 3, 1)$$

$$M(2, 6, 2)$$

$$M(-4, -12, -4)$$

Ако λ е, се гъртае $\Rightarrow M(-\frac{4}{\lambda}, -\frac{12}{\lambda})$

$$M(kx, ky, kt) \quad k \neq 0$$

тройка хомогенни коорг. на π (8)
една и съща точка

Разделив на $g = \frac{Ax}{\frac{1}{2}} + \frac{By}{\frac{1}{2}} + \frac{C}{0} = 0$

$$g: Ax + By + C = 0$$

$$E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

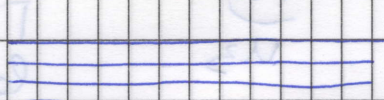
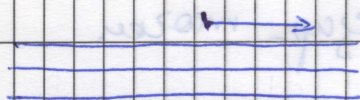
$$\Pi: y^2 = 2px$$

II Безграничные элементы:

$$g: Ax + By + C = 0$$

$$g: Ax + By + C = 0$$

$$g \parallel \vec{g}(-B, A)$$



$$U_g = \{t \vec{g} | g, g\}$$

безграничная точка на прямой g (множество от упорядоченных прямых на g с заданным направлением)

"безграничная точка" $\Leftrightarrow$ направление
 $a \parallel g \Leftrightarrow a \parallel g \Leftrightarrow U_a \in U_g \Leftrightarrow a \in U_g$

$$\vec{g}(-B, A)$$

$$U_g(-B, A, 0)$$

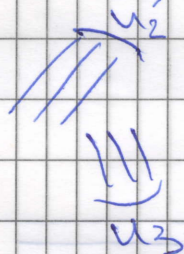
$M(x, y, t), t \neq 0 \Rightarrow M$ е крайна
 $U(x, y, 0), t=0 \Rightarrow U$ е безкрайна
 $(x, y) \neq (0, 0)$
 $\rightarrow (0, 0, 0)$ не определя направление
 проективната равнина

Разширена Евклидова равнина E_2^*

$\nexists$ крайни точки $M(x, y, t), t \neq 0$
 $\nexists$ крайни прави $g: Ax + By + Ct = 0$
 $(A, B) \neq (0, 0)$

$\nexists$ безкрайни точки

$U_1: U(x, y, 0) = (x, y) \neq (0, 0)$



ω - безкрайна права
 (геометрично място - ГМ $\Leftrightarrow$)
 ГМ на $\nexists$ безкр. точки
 в E_2^*

$U \supset \omega \Leftrightarrow t=0$

$\omega: t=0 \quad [0, 0, 1]$

Примери: 1) $g: 2x - 3y + 4t = 0$ $(x, y, t) \rightarrow M$ - точка
 $[2, -3, 4] \rightarrow g$ - права

$U_g = g \cap \omega$

$U_g(3, 2, 0)$

$$\begin{cases} 2x - 3y + 4t = 0 \\ t = 0 \end{cases} \Rightarrow 2x - 3y = 0$$

$$2x = 3y \Rightarrow x = 3, y = 2$$

Криви от втора степен

$$E_2^* \quad K: F(x, y, z) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + a_{33}z^2 = 0$$

дефиниция на крива от втора степен

Афоризма (Безиратна) класификация на криви от втора степен (Безирати дрой безиратни точки)
 $K \cap \omega = ?$

$$\left| \begin{array}{l} F(x, y, z) = 0 \\ z = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left| \begin{array}{l} a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 = 0 \\ (x, y) \neq (0, 0) \end{array} \right.$$

$$D = a_{12}^2 - a_{11}a_{22}$$

1сл.) $D < 0 \Rightarrow K \cap \omega = \emptyset$

кривата K не съдържа безиратни точки
 (K е от елиптически тип)

2сл.) $D = 0 \Rightarrow \cancel{K \cap \omega = \emptyset}$

кривата K се допират 1 безиратна точка
 (K е от параболически тип)

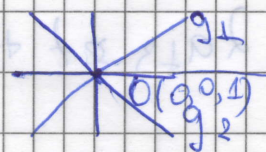
3сл.) $D > 0 \Rightarrow \cancel{K \cap \omega = \emptyset} \quad 2 \neq$ реални безиратни точки

(K е от хиперболически тип)

II Проективна класификация на криви от втора степен (проверява дали K съдържа особени точки)

Примери: 1) $x^2 + y^2 = 4t^2$
 2) $x^2 - y^2 = 0$
 $(x-y)(x+y) = 0$

$g_1: x=y \cup g_2: x=-y$



3) $x^2 - 4t^2 = 0$
 $(x-2t)(x+2t) = 0$

$x = 2t \quad x = -2t$

$x = 2 \quad x = -2$

$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} \rightarrow \neq 0$
 $\rightarrow = 0$

$x = -2$

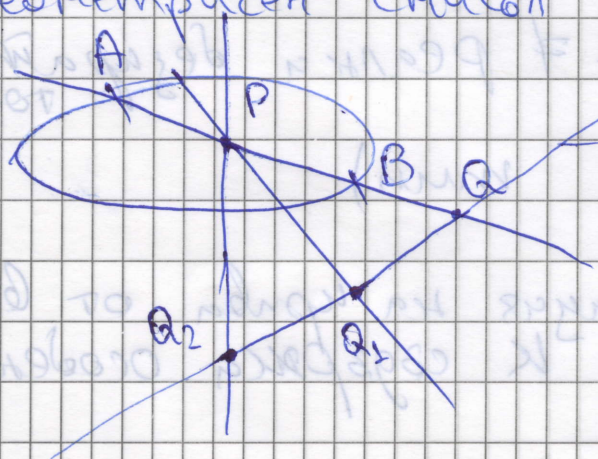
$x = 2$

k е действителна крива (не съдържа особени точки)
 ~~k е изродена крива~~
 (се разпада на две прави линии)

16.1.2013г. Полярност спрямо крива от втора степен (E_2^* , хомогенни координати)

$k: F(x, y, t) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}xt + 2a_{23}yt + a_{33}t^2 = 0$
 неизродена (не съдържа особени точки)
 $\det A \neq 0$

Геометричен смисъл на изобразението полярност



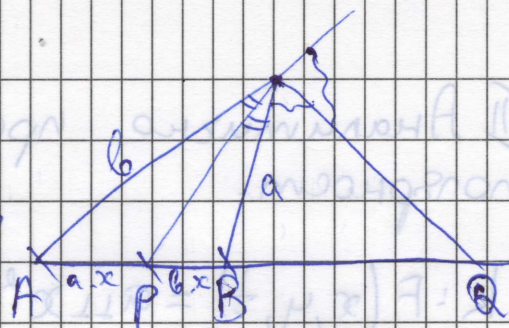
поляра на т. P
 $\Pi(P)$

т. P - произволна точка
 $g = P$
 $g \cap k = \{A, B\}$

Разглеждаме гисото :

$$\frac{|AP|}{|PB|} = \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \exists Q \in g: \frac{|AQ|}{|QB|} = \lambda$$

$$\frac{AP}{BP} = \frac{a}{b} = \frac{AQ}{BQ}$$



Определение : т. Q се нарича полърносрезката на т. P спрямо кривата K.

Геометричното място на всички точки, които са полърносрезкати на т. P спрямо кривата K е права линия. Правата се нарича полъра на т. P спрямо K $\rightarrow \pi(P)$.

Определение : Полърност спрямо кривата K от втора степен е изображение, което на т. P сг разширениата Евклидова равнина (E_2^*) съпоставя права $\pi(P)$.

$$\underbrace{\pi: P \rightarrow \pi(P)}_{\substack{\text{полърност} \\ \text{спрямо} \\ \text{кривата K}}} \quad \underbrace{\pi(P)}_{\text{полъра}}$$

Ако $\det A \neq 0$, то изображението π е взаимно еднозначно.

II Аналитично представяне на изобразението полярност.

$K: F(x, y, z) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + a_{33}z^2 = 0$, неизродека (не съдържа особени точки) $\det A \neq 0$

$m = P(x_p, y_p, z_p)$

$$K: F(x, y, z) = 0$$

$$\pi(P) = ? x + ? y + ? z = 0 \quad \text{търсим коеф.}$$

$$F_1(x, y, z) = \frac{1}{2} \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{1}{2} (2a_{11}x + 2a_{12}y + 2a_{13}z) =$$

$$= a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z$$

$$F_2(x, y, z) = \frac{1}{2} \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{1}{2} (2a_{12}x + 2a_{22}y + 2a_{23}z) =$$

$$= a_{12}x + a_{22}y + a_{23}z$$

$$F_3(x, y, z) = \frac{1}{2} \frac{\partial F}{\partial z} = a_{13}x + a_{23}y + a_{33}z$$

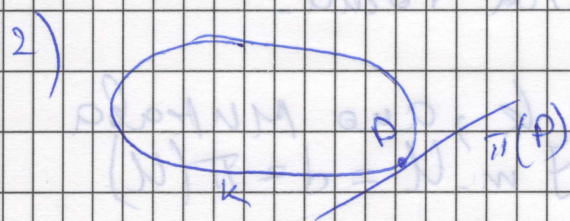
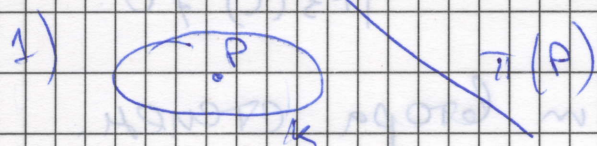
$$F_1(P), F_2(P), F_3(P)$$

$$\pi(P) = \underline{F_1(P)}x + \underline{F_2(P)}y + \underline{F_3(P)}z = 0$$

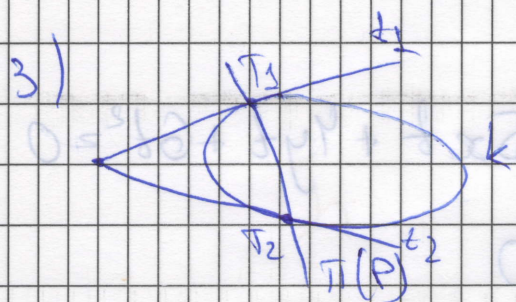
$$(F_1, F_2, F_3) \neq (0, 0, 0)$$

III. 2.70

II Приложения на изобразението = поляриност



$P \in k \Rightarrow \pi(P)$ е допирателната към крива k в т. P



3.1.) $\pi(P)$

3.2.) $\pi(P) \cap k = \{T_1, T_2\}$

3.3.) $t_1 \equiv PT_1 = \pi(T_1)$

$t_2 \equiv PT_2 = \pi(T_2)$

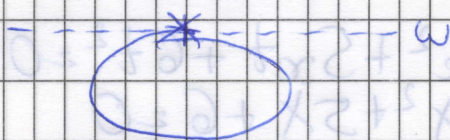
4) асимптоти - допирателни към крива k в безкрайни точки:

ε - няма асимптота

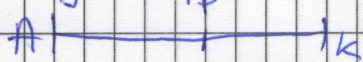
Параболата има само 1 асимптота

Х - има 2 различни безкрайни точки

$\Rightarrow$ Х има 2 асимптоти

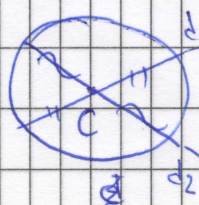


5) Център на крива от втора степен



$$\frac{AP}{KP} = 1$$

$$\frac{A \cup AK}{K \cup AK} = 1$$



$*u_1$

$$\pi(C) \equiv \omega$$

$*u_2$

т. C е центърът на кривата k от втора степен,

II.2.71

ако $\boxed{\pi(C) = w} \Rightarrow w:t = 0 \Rightarrow \begin{cases} F_1(C) = 0 \\ F_2(C) = 0 \\ F_3(C) \neq 0 \end{cases}$

6) Диаметър на криви от втора степен.
Ако е полара на безкрайна точка.

d е диаметър на крива k , ако минава през центъра или ако $f.m.C = d = \pi(C)$

(E_2^*) , $\det A \neq 0$

Изг. Кривата $k: x^2 - 2y^2 - 5xt + 4yt + 6t^2 = 0$

$\Leftrightarrow X^2 - 2Y^2 - 5X + 4Y + 6 = 0$

? у-тия на генераторите към кривата k в пресечните ѝ точки с кривата y , която има у-тия: $y=0$

1) $k \cap y = \begin{cases} x^2 - 2y^2 - 5xt + 4yt + 6t^2 = 0 \\ y = 0 \end{cases}$

$x^2 + 5xt + 6t^2 = 0 \quad 1:t^2 \neq 0$

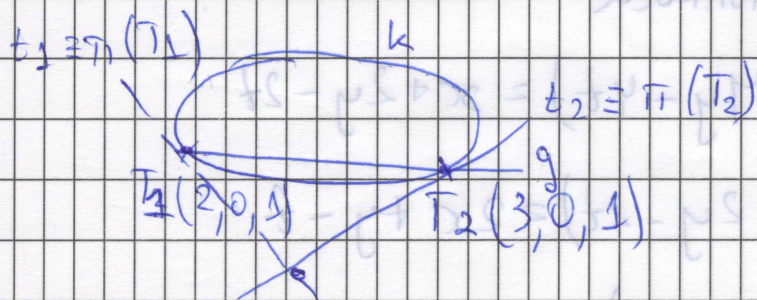
$X^2 + 5X + 6 = 0$

$\left(\frac{x}{t}\right)^2 + 5\left(\frac{x}{t}\right) + 6 = 0$

$\left(\frac{x}{t}\right) = z \quad \begin{cases} z^2 - 5z + 6 = 0 \\ z_1 = 2 \quad z_2 = 3 \end{cases}$

1cn) $\frac{x}{z} = 2$ — условие $x = 2z$, $t_1 = 1 \Rightarrow \pi_1(2, 0, 1)$

2cn) $T_2(3, 0, 1)$



2) $\left. \begin{array}{l} t_1 \equiv \pi(T_1) \\ t_2 \equiv \pi(T_2) \end{array} \right\}$ — на пересечении гиперплоскостей

$$F_1 = \frac{1}{2} \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{1}{2} (2x - 5t) = x - \frac{5}{2}t$$

$$F_2 = \frac{1}{2} \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{1}{2} (-4y + 4t) = -2y + 2t$$

$$F_3 = \frac{1}{2} \frac{\partial F}{\partial t} = \frac{1}{2} (-5x + 4y + 12t) = -\frac{5}{2}x + 2y + 6t$$

$$\pi(T_1): F_1(T_1)x + F_2(T_1)y + F_3(T_1)t = 0$$

$$T_1(2, 0, 1)$$

$$F_1(T_1) = 2 - \frac{5}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$T_2(3, 0, 1)$$

$$F_2(T_1) = 2$$

$$F_3(T_1) = -\frac{5}{2} \cdot 2 + 6 = 1$$

$$t_1 \equiv \pi(T_1): -\frac{1}{2}x + 2y + t = 0$$

$$F_1(T_2) = 3 - \frac{5}{2} = \frac{1}{2}$$

$$F_2(T_2) = 2$$

$$F_3(T_2) = -\frac{5}{2} \cdot 3 + 6 = -\frac{3}{2}$$

$$t_2 \equiv \pi(T_2): \frac{1}{2}x + 2y - \frac{3}{2}t = 0$$

② Кривата $k: x^2 + 4xy + y^2 - 4xt - 2yt = 0$

и правата $g: x + 2y - 3t = 0$

2 коорд. на g и P , която нейната норма да е

$$F_1(\cancel{x}) = \frac{1}{2} \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{1}{2} (2x + 4y - 4t) = x + 2y - 2t$$

$$F_2(\cancel{y}) = \frac{1}{2} \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{1}{2} (4x + 2y - 2t) = 2x + y - t$$

$$F_3(\cancel{t}) = \frac{1}{2} \frac{\partial F}{\partial t} = \frac{1}{2} (-4x - 2y) = -2x - y$$

1) $F_1(\cancel{x}) = x + 2y - 2t$

$F_2(\cancel{y}) = 2x + y - t$

$F_3(\cancel{t}) = -2x - y$

2) $\pi: P(x_p, y_p, t_p)$

$\pi(P) \leq g$

$\pi(P) = F_1(P)x + F_2(P)y + F_3(P)t = 0$
 $= 1x + 2y - 3t = 0$

$$\frac{F_1(P)}{1} = \frac{F_2(P)}{2} = \frac{F_3(P)}{-3}$$

$$\frac{x_p + 2y_p - 2t_p}{1} = \frac{2x_p + y_p - t_p}{2} = \frac{-2x_p - y_p}{-3}$$

$$2x_p + 4y_p - 4t_p = 2x_p + y_p - t_p$$

$$3(2x_p + y_p - t_p) = 2(2x_p + y_p)$$

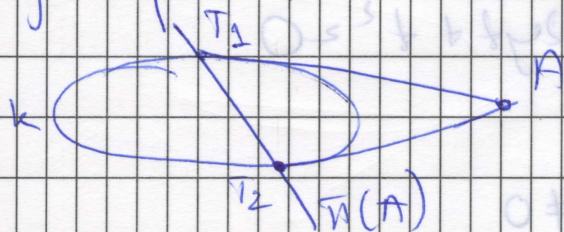
$$y_p = t_p = x_p$$

$$P(1, 1, 1)$$

$$(3) k: 3x^2 + 3y^2 + 2xy + 4xt + 4yt - 4t^2 = 0$$

$A = (3, 1, 1)$ въшка за кривата

? допирателната към k в $\Pi(A) \rightarrow t_1, t_2$



Решение: (за упражнение) 1) $\pi(A)$

$$\text{От } \pi(A): 5x + y + 2t = 0$$

$$2) k \cap \pi(A) = ?$$

(за упражнение)

$$\begin{cases} 3x^2 + 3y^2 - 2xy + 4xt + 4yt - 4t^2 = 0 \\ 5x + y + 2t = 0 \end{cases}$$

$$T_1(0, -2, 1)$$

$$T_2(-6, 8, 1) \text{ (за упражнение)}$$

$$3) t_1 \equiv \pi(T_1)$$

$$T_1(0, -2, 1)$$

$$F_1 = \frac{1}{2} \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{1}{2} (6x - 2y + 4t) = 3x - y + 2t$$

$$F_2 = -x + 3y$$

$$F_3 = 2x + 2y - 4t$$

$$F_1(T_1) = 4$$

$$F_2(T_1) = -4$$

$$F_3(T_1) = -8$$

$$t_1 \equiv \pi(T_1): x - y - 2t = 0$$

$$(1) k: 3x^2 + 10xy + 7y^2 + 4xt + 2yt + t^2 = 0 \quad (8)$$

? уравн. на асимптотите на кривата k
 $k \cap \omega = ?$

$$1) \begin{cases} 3x^2 + 10xy + 7y^2 + 4xt + 2yt + t^2 = 0 \\ t = 0 \end{cases}$$

$$3x^2 + 10xy + 7y^2 = 0 \quad | : y^2 \neq 0$$

$$3\left(\frac{x}{y}\right)^2 + 10\frac{x}{y} + 7 = 0$$

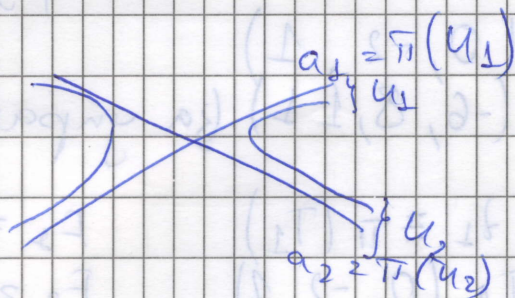
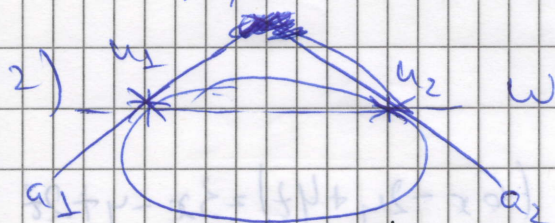
$$\left(\frac{x}{y}\right)_1 = -1 \quad \left(\frac{x}{y}\right)_2 = -\frac{7}{3}$$

$$x_1 = y_1 \neq 0$$

$$x_2 = 7y_2 \neq 0$$

$$u_1(1, 1, 0)$$

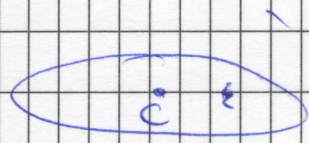
$$u_2(7, -3, 0)$$



$$a_1 \in \pi(u_1): 2x + 2y - t = 0$$

$$a_2 \in \pi(u_2): 6x - 14y + 11t = 0$$

⑤ Кривата $k = 3x^2 - 6xy + 5y^2 - 4xt + 8yt - 4t^2 = 0$
? коорд. на центъра

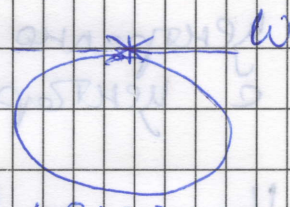


$$\pi(C) (x_c, y_c, t_c) = \omega$$

$$\pi(C) \equiv \omega$$

$$\pi(C): F_1(C)x + F_2(C)y + F_3(C)t = 0$$

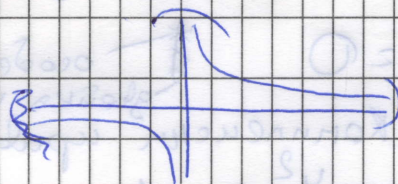
$$\omega: 0 \quad x + 0 \quad y + 1 \quad t = 0$$



$$\begin{cases} F_1(C) = 0 \\ F_2(C) = 0 \\ F_3(C) \neq 0 \end{cases} \begin{cases} 3x - 3y - 2t = 0 \\ -3x + 5y + 4t = 0 \\ -2x + 4y - 4t \neq 0 \end{cases} \begin{cases} \text{коорд. на} \\ \text{т. C} \end{cases} \begin{cases} \text{център} \\ y = x^2 \end{cases}$$

/т.с

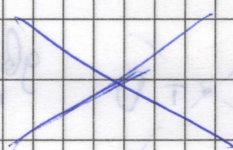
$$y = \frac{1}{x} \Leftrightarrow x - y = 1$$



$$\begin{cases} 3x - 3y - 2t = 0 \\ -3x + 5y + 4t = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2y + 2t = 0 \\ 3x + 3t - 2t = 0 \end{cases} \begin{cases} y = -t \\ 3x = -t \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -\frac{t}{3} \\ y = -t \end{cases}$$



Избираме $t(C) = -3 \Rightarrow x_c = 1 \quad y_c = 3$
 $C(1, 3, -3)$

$$F_3(C) \neq 0 \quad F_3(C) = 2 - 12 - 12 = -22 \neq 0$$

⑥ $k: x^2 + 2xy - 3y^2 - 6xt + t^2 \geq 0$ т. $P(1, 1, -1)$

$$a: 2x + y - t \geq 0$$

? коорд. на т. Q от правата a, която га е
полярно спрямо на т. P спрямо кривата k.

1) $\pi(P) = ?$

2) $Q = \pi(P) \cap a$

Отг: $Q(2, 7, 11)$

III.2.77

23.1.2013г. Матрични канонични уравнения на кривите от II степен

$$OKC = K = 0_{xy}$$

$$k: 5x^2 + 8xy + 5y^2 - 18x - 18y + 9 = 0$$

$$1) E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

централно у-ние: Ако началото на кривата съвпада с центъра. Няма първа степен, няма xy .

Изредни криви от втора степен

$$4) \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$$

$$5) \frac{x^2}{a^2} = 1$$

една точка

||

* безкрайна точка

$$2) X: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$3) \Pi: y^2 = 2p$$

$$6) x^2 = 0$$

особени точки
двойка прави

Комплексни криви от втора степен

$$7) \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$$

(имагинерна елипса)

елипса е точки, тъй като коорд. са комплексни числа

$$8) \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$$

< 0

двойка комплексно сопряжени
пресичащи се прави

$$\left(\frac{x}{a} + i\frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a} - i\frac{y}{b}\right)$$

$$9) \frac{x^2}{a^2} = -1$$

$$x^2 = -a^2$$

$$x = \pm i \cdot a$$

двойка комплексно сопряжени
паралелни прави

① ? метрично канонично у-ние на кривата k и последователните координатни трансформации, които водят до него.

I Проверка бр. особени точки (проеktivна класификация - дали кривата k е изродена)

$$\det A = \begin{vmatrix} 5 & 4 & -9 \\ 4 & 5 & -9 \\ -9 & -9 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 4 & -1 \\ 4 & 5 & -1 \\ -9 & -9 & 1 \end{vmatrix} = 9 \cdot (25 + 36 + 36 - 45 - 16 - 45) = 9 \cdot (-81) = -81 \neq 0$$

$$\Rightarrow k \text{ не съдържа особени точки} \Rightarrow k \text{ е не изроден}$$

$\det A \neq 0$ особени точки = 0 ; $\det A = 0$ $\Rightarrow g(A) \geq 2$ (1 особ. точка)
 $\Rightarrow g(A) = 1$ (без особ. точки)

II Проверка за бр. безкрайни точки

(адитивна класификация)

$k \cap \omega, \omega: t=0$

$$\begin{cases} F(x, y, t) = 0 \\ t = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 5x^2 + 8xy + 5y^2 - 18xt - 18yt + 9t^2 = 0 \\ t = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 = 0 \\ (2x - 3y + 4t)^2 = 0 \end{cases}$$

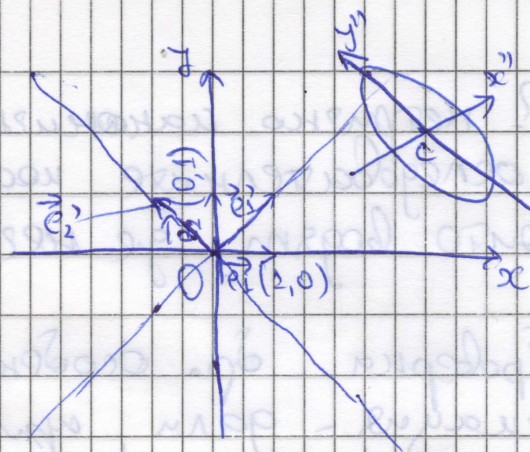
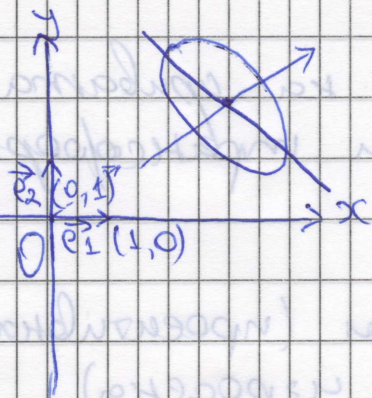
$\Rightarrow 5x^2 + 8xy + 5y^2 = 0 \Rightarrow$ бр. безкрайни точки, без коор. т.

$$\Rightarrow D = a_{12}^2 - a_{11}a_{22}$$

$$D = 16 - 5 \cdot 5 = -9 < 0$$

$\Rightarrow k$ е елипса (ε), ^{защото} не съдържа безкрайни точки.

II. 2. 79



III Определяне на главните направления на кривата:

$$\vec{e}_1' \text{ и } \vec{e}_2' : |\vec{e}_1'| = |\vec{e}_2'| = 1$$

Разглеждаме: $A_1 = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$

III изрисуем собств. стойк. на матр. A_1

$$|A_1 - sE| = 0$$

собств. стойности

$$\begin{vmatrix} 5-s & 4 \\ 4 & 5-s \end{vmatrix} = 0$$

$$(5-s)^2 - 16 = 0$$

$$s^2 + 25 - 10s - 16 = 0$$

$$s^2 - 10s + 9 = 0$$

$$s_1 = 9 \quad s_2 = 1$$

~~III~~ изрисуем собств. вектори на A_1 .

за $s_1 = 9 \rightarrow \vec{e}_1'(\alpha_1, \beta_1), |\vec{e}_1'| = 1$

$$(A_1 - s_1 E) \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 5-9 & 4 \\ 4 & 5-9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$-4\alpha_1 + 9\beta_1 = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \beta_1$$

$$\begin{cases} -4\alpha_1 + 9\beta_1 = 0 \\ \alpha_1^2 + \beta_1^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \alpha_1 = \beta_1 \quad (\text{добавяме см. уравн. от } |\vec{e}_1| = 1)$$

$$\begin{cases} \alpha_1 = \beta_1 \\ \alpha_1^2 + \beta_1^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \alpha_1 = \beta_1 = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \vec{v}_1 \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

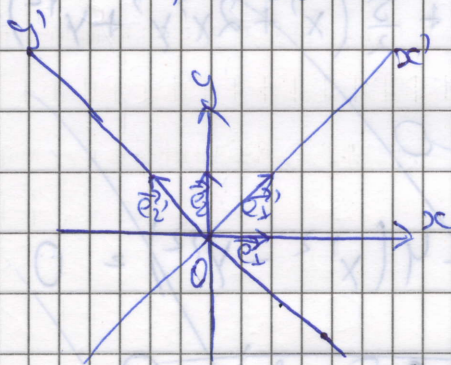
$$S_2 \geq 1 \rightarrow \vec{e}_2', (\alpha_2, \beta_2), |\vec{e}_2'| = 1$$

$$(A_1 - 1 \cdot E) \cdot \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(A_1 - 1 \cdot E) \cdot \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \left| \begin{array}{l} 4\alpha_2 + 4\beta_2 = 0 \\ \alpha_2^2 + \beta_2^2 = 1 \end{array} \right. \Rightarrow \vec{e}_2, \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

$$\begin{pmatrix} 5-1 & 4 \\ 4 & 5-1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$


$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{3 \times 3} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

IV Изграждане смяна на ОКС

$$K = O_{xy} \xrightarrow{T_1} K' = O_{x'y'} : O_{x'} \uparrow \uparrow \vec{e}_1' \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \leftrightarrow s_1 = 9$$

$$O_Y, \uparrow \uparrow \vec{e}_2' \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \Leftrightarrow s_2 = 1$$

$$\begin{array}{l} M(X, Y) \text{ спрямо } K \\ M(X', Y') \text{ спрямо } K' \end{array}$$

На ортог. матр. - обратната е ор

$$T_1 \begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2} x' - \frac{\sqrt{2}}{2} y' \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2} x' + \frac{\sqrt{2}}{2} y' \end{cases} \quad \text{смяна на коорд. с-ма}$$

у-ние на кривата k спрямо k'

$$k: 5x^2 + 8xy + 5y^2 - 18x - 18y + 9 = 0$$

$$5\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 (x' - y')^2 + 8\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 (x' - y')(x' + y') + 5\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 (x' + y')^2 - 18\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)(x' - y') - 18\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)(x' + y') + 9 = 0$$

$$\frac{5}{2}(x'^2 - 2x'y' + y'^2) + 4(x'^2 - y'^2) + \frac{5}{2}(x'^2 + 2x'y' + y'^2) - 9\sqrt{2}(x' - y') - 9\sqrt{2}(x' + y') + 9 = 0$$

$$5(x'^2 + y'^2) - 9\sqrt{2}(x'^2 - y'^2) + 4(x'^2 - y'^2) = 0$$

$$5(x'^2 + y'^2) - (y'^2 - x'^2)(9\sqrt{2} - 4) = 0$$

$$5x'^2 + 5y'^2 - 9\sqrt{2}x'^2 + 9\sqrt{2}y'^2 + 4x'^2 - y'^2 = 0$$

$$9x'^2$$

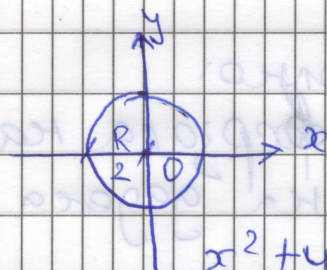
$$k = \frac{5}{2} x'^2 - \cancel{5x'y'} + \frac{5}{2} y'^2 + 4x'^2 - 4y'^2 + \frac{5}{2} x'^2 + \cancel{5x'y'} + \frac{5}{2} y'^2 - 18\sqrt{2}x' + 9 = 0$$

$$k = \underbrace{9x'^2}_{S_1} + \underbrace{4y'^2}_{S_2} - 18\sqrt{2}x' + 9 = 0$$

$$S_1, S_2 > 0 \rightarrow E$$

$$S_1, S_2 < 0 \rightarrow X$$

$$S_1 = 0 \text{ или } S_2 = 0 \rightarrow \Pi$$



$$\underbrace{x^2 + y^2 \leq 4}_{\substack{R^2 \\ \text{отсева} \\ \text{крес}}}$$

$$\underbrace{x^2 + y^2 = 4}_{\substack{R^2 \\ \text{отсева} \\ \text{окресе}}}$$

$P_3(x_0, y_0, t_0)$ = свободный член

$$A_1 = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow A_1' = \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

↓ Изображение второй сменя на ОКС от ~~$K' = O_{x'y'}$~~

$$\text{от } K' = O_{x'y'} \xrightarrow{T_2} K'' = (x'', y'')$$

$$C_{x''} \uparrow \uparrow O_{x'}, C_{y''} \uparrow \uparrow O_{y'}, C(p, q)$$

$$T_2: \begin{cases} x' = x'' + p \\ y' = y'' + q \end{cases} \rightarrow \text{заместивание в уравнение на } k$$

$$k = 9(x'' + p)^2 + (y'' + q)^2 - 18\sqrt{2}(x'' + p) + 9 = 0$$

$$k = 9x''^2 + y''^2 + x''(18p - 18\sqrt{2}) + \cancel{29}2qy'' + 9p^2 + q^2 - 18\sqrt{2}p + 9 = 0$$

$$p=? \quad q=? \quad \begin{cases} 18p - 18\sqrt{2} = 0 \\ 2q = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} p = \sqrt{2} \\ q = 0 \end{matrix} \Rightarrow C(\sqrt{2}, 0)$$

$$9(\sqrt{2})^2 + 0 - 18\sqrt{2}\sqrt{2} + 9 = 18 + 9 - 36 = -9$$

Спрямо (x'', y'') $k: 9x''^2 + y''^2 = 9 \quad / : 9$

$$k: \frac{x''^2}{1^2} + \frac{y''^2}{3^2} = 1$$

Контролно:

1. трансформация на кръгосани прави в успоредна дадена права

2. перпендикулярност от точка до права в пространството

3. безиздатни точки и асимптоти на дадена фигура от втора степен

4. канонични г-ния 27.30 мин. 4 задачи

Изпит
вектори, пространство, ос, полярност, канонични и фокуси — 37. 4 задачи

$$\textcircled{2} \quad k: 9x^2 - 27xy + 16y^2 - 10x - 70y + 125 = 0$$

$$\uparrow \det A = \begin{vmatrix} 9 & -12 & -5 \\ -12 & 16 & -35 \\ -5 & -35 & 125 \end{vmatrix} = 25 \begin{vmatrix} 9 & -12 & -1 \\ -12 & -16 & 7 \\ -1 & -7 & 5 \end{vmatrix} \neq 0$$

$\Rightarrow k$ е неизродена

$$\text{I} \quad D = a_{12}^2 - a_{11} \cdot a_{22} = (-12)^2 - 9 \cdot 16 = 0$$

$\Rightarrow k$ е парабола

Вижам когато квадратния триглен на кривата е токен квадрат $\Rightarrow$ парабола

II Соедств. стойност и соедств. вектори на

$$A_1 = \begin{pmatrix} 9 & -12 \\ -12 & 16 \end{pmatrix}$$

$$|A_1 - s \cdot E| = 0$$

$$\begin{vmatrix} 9-s & -12 \\ -12 & 16-s \end{vmatrix} = 0$$

$$(9-s)(16-s) - 144 = 0$$

$$s^2 - 25s + 144 = 0$$

$$s_1 = 0 \quad s_2 = 25$$

$$s_1 = 0$$

$$s_2 = 25$$

$$s_1 = 0 \rightarrow \vec{e}_1' (d_1, \beta_1), |\vec{e}_1'| = 1$$

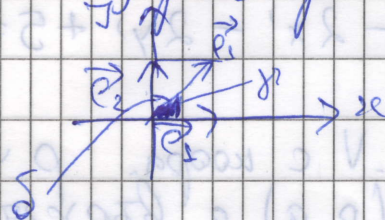
$$\begin{pmatrix} 9-0 & -12 \\ -12 & 16-0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{cases} 9d_1 - 12\beta_1 = 0 \\ d_1^2 + \beta_1^2 = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} d_1 = \frac{4}{5}\beta_1 \\ d_1^2 + \beta_1^2 = 1 \end{cases}$$

$$\frac{16}{9} \beta_1^2 + \beta_1^2 = 1$$

$$\beta_1^2 = \frac{9}{25} \Rightarrow \beta_1 = \frac{3}{5} \quad d_1 = \frac{4}{5}$$

гурситорни, косинуси

$$\vec{e}_1' \left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5} \right)$$



$$\begin{cases} \angle(\vec{e}_1', \vec{e}_1) = \gamma \\ \angle(\vec{e}_1', \vec{e}_2) = \delta \\ |\vec{e}_1'| = 1 \end{cases} \Rightarrow \vec{e}_1' (\cos \gamma, \cos \delta)$$

$$s=25 \rightarrow \vec{e}_2' (\alpha_2, \beta_2)$$

$$\begin{pmatrix} 9-25 & -12 \\ -12 & 16-25 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \left| \begin{array}{l} 16\alpha_2 - 12\beta_2 = 0 \\ \alpha_2^2 + \beta_2^2 = 1 \end{array} \right.$$

$$\alpha_2 = -\frac{3}{4}\beta_2$$

$$\alpha_2 = -\frac{3}{5} \quad \beta_2 = \frac{4}{5} \Rightarrow \vec{e}_2'$$

II Смяна на коорг. с-ма

$$K = Oxy \xrightarrow{T_1} K' = Ox'y'$$

$$Ox' \uparrow \vec{e}_1' \left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right) \rightarrow s_1 = 0$$

$$Oy' \uparrow \vec{e}_2' \left(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right) \rightarrow s_2 = 25$$

$$T_1: \begin{cases} x = \frac{4}{5}x' - \frac{3}{5}y' \\ y = \frac{3}{5}x' + \frac{4}{5}y' \end{cases} \Rightarrow \text{срочно } K'$$

$$\text{Срочно } K': Ox'^2 + Ox'y' + 25y'^2 - \frac{10}{5}(4x' - 3y') - \frac{20}{5}(3x' + 4y') + 125$$

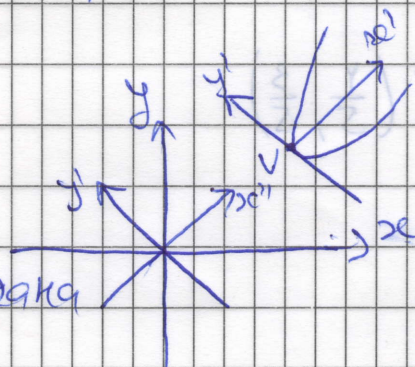
$$K = 25y'^2 - 50x' - 50y' + 125 = 0 \quad | :25$$

$$y'^2 - 2x' - 2y' + 5 = 0$$

III Нека m, V с коорг. p и q

$m, V(p, q)$ е върхът на π

Извършваме смяна на ортогонализираща коорг. с-ма. (OKC)



$$K' = Ox'y' \xrightarrow{T_2} K'' = Vx''y''$$

$$\begin{matrix} V_{x''} & \uparrow\uparrow & 0_{x'} \\ V_{y''} & \uparrow\uparrow & 0_{y'} \end{matrix}$$

$$T_2 = \begin{cases} x' = x'' + p \\ y' = y'' + q \end{cases}$$

Сурямо k''

$$k_2 (y'' + q)^2 - 2(x'' + p) - 2(y'' + q) + 5 = 0$$

$$\underbrace{y''^2 - 2x''}_{\text{сурямо } k''} - 2qy'' + q^2 - 2p - 2y'' - 2q + 5 = 0$$

$$y''^2 - 2x'' + \underbrace{2y''(q-1)}_{\text{сурямо } k''} + \underbrace{q^2 - 2p - 2q + 5}_{\text{сурямо } k''} = 0$$

$$p = ? \quad q = ?$$

$$\begin{cases} q = 1 = 0 \\ q^2 - 2p - 2q + 5 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} q = 1 \\ p = 2 \end{cases}$$

$V(2, 1)$ сурямо k''
 ~~$\neq$~~ (x'', y')

$$\pi = y''^2 = 2x''$$