III. 1. Аналитична геометрия – доц. Александров

записки: Ивания Иванова-Каратопраклиева, АГ

Гроздан Станилов, АГ

Станилов и Габрилов – Л.А. и А.Г.

Изпит: теория + задачи (тест 60% – теория
40% – задачи)

Освобождаване от задачи: контролни на 1.XII. и 26.I

средно ≥ 4,5 се осв. от изпит на задачи

4 зад. – за 2 часа 50% за 3
90% за 5

Релация за еквивалентност

неформална дефиниция на релация: Казваме, че в множеството X е зададена (двуместна) релация R, ако за ∀ x, y ∈ X е казано дали x е в релация R с y (и в тоя случай пишем xRy) или не.

Примери:

1) Релация = $x = y$
2) Всяка ф-я $f: X \to X$ задава релация R по следния начин: $xRy \Leftrightarrow y = f(x)$
3) Рел. ≤ в $\mathbb{R}$ $x \le y$
4) Рел. успоредност на прави в пространството $a \parallel b$

формална дефиниция на релация: Нека X е множество. Означаваме с X^2 – множеството от всички наредени двойки с елем. от X, т.е. $X^2 = \{(x,y) : x, y \in X\}$ (аналогично X^n е множ. от наредени n-орки с елем. от X)

Деф: Двуместна релация в множ. X ~~е подмнож.~~ подмножество $R \subset X^2$

Ако $(x,y) \in R$, то казваме, че x е ~~в рел. R~~ в рел. R с y и пишем xRy

Примери:
1) $R = \{(x,x) : x \in X\}$
2) $R = \{(x, f(x)) : x \in X\}$
3) $R = \{(x,y) : x,y \in \mathbb{R}, x \leq y\}$
4) $R = \{(a,b) : a, b$ - прави, $a \parallel b\}$

Деф. на релация на еквивалентност: Казваме че релацията $\sim$ в множ. X е релация на еквивалентност, ако има свойствата:
1) за всяко $x \in X$ е в сила $x \sim x$ (рефлексивност)
2) Ако $x \sim y$, то $y \sim x$ (симетричност)
3) Ако $x \sim y$ и $y \sim z$, то $x \sim z$ (транзитивност)

$\simeq$ $\equiv$ (други означения за еквивалентност)

Примери:
1) $=$ е релация на еквивалентност
2) Единсвената функция, която е релация на еквивалентност е тъждествена функция, т.е. $f(x) = x$
3) $\leq$ не е релация на еквивалентност, защото не е симетрична
4) Ако се договорим да считаме, че всяка права е успоредна на себе си, то успоредността на прави е релация на еквивалентност в множ. на правите в пространството.

III: 1.2

~~Клас~~ Дефиниция: Нека $\sim$ е рел. на еквив. в множ. X. Клас на еквив. на елем. $x \in X$ се нарича множ. $[x] := \{y \in X : x \sim y\}$

Твърдение: Нека $\sim$ е релац. на еквив. в X и $x, y \in X$ тогава:

1) $[x] = [y] \iff x \sim y$

2) Ако $x \not\sim y$, то ~~класа на екв.~~ $\Rightarrow [x] \cap [y] = \emptyset$

В частност, за всеки два елем. $x, y \in X$ имаме такива алтернативи или $[x] = [y]$, или $[x] \cap [y] = \emptyset$ т.е. X се разпада на непресичащи се класове на еквивалентност.

Доказателство:

1) Нека $[x] = [y]$ Имаме ~~y~~ $x \sim x \Rightarrow x \in [x]$ $\Rightarrow x \in [y] \Rightarrow y \sim x \Rightarrow x \sim y$

Обр. ~~доказателство~~: Нека $x \sim y$

Нека $z \in [x] \Rightarrow x \to z$

От $x \sim y \Rightarrow y \sim x \Rightarrow$ имаме $y \sim x$ и $x \sim z \xRightarrow{\text{транзитивност}} y \sim z$ $\Rightarrow z \in [y]$

$[x] \subset [y]$ Аналог. $[y] \subset [x] \Rightarrow [x] = [y]$

2) Да допуснем че $[x] \cap [y] \neq \emptyset \Rightarrow \exists z \in [x] \cap [y]$ $\Rightarrow z \in [x] \Rightarrow x \sim z$ $z \in [y] \Rightarrow y \sim z \Rightarrow z \sim y$ $\Rightarrow$ имаме $x \sim z, z \sim y \xRightarrow{\text{транз.}} x \sim y$ – противоречие

$\Rightarrow [x] \cap [y] = \emptyset$

Примери:

1) За $=$ $[x] = \{x\}$

2) За $\parallel$ класовете на еквив. се наричат направления и съдържат безброй много прави

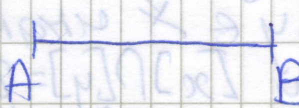
III. 1. 3

Вектори

Деф: Отворена отсечка с крайща точките А и В се нарича множеството от точките лежащи м/у А и В.

Затворена отсечка с крайща А и В към множ. състоящо се от т. А и В и точките на отв. отс. с крайща А и В

Вместо затв. отсечка ще казваме само отсечка.



Забележка: 1) В деф. се допуска и $A=B$ в случай AA се състои само от точката A.

2) И отв. отсечка и затв. отсечка с крайща A и B и правата определена от A и B ще означаваме с AB. Ако има опасност от объркване ще поясняваме за кое става дума.

Лъчи

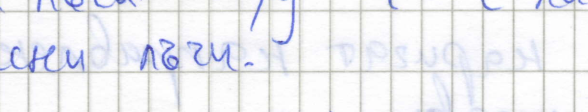
Деф. ~~на лъч~~: 1) Нека l е права и $P \in l$. ~~P точка от~~

Тогава $l \setminus \{P\}$ се разпада на 2 непресичащи се подмножества като 2 точки A и $B \in l \setminus \{P\}$ са от различни подмножества $\Leftrightarrow$ $P \in$ отв. отс. AB (т.е. P е м/у A и B). Тия две подмнож. се наричат отворени лъчи с начало P.

Затворен лъч (лъч) с начало P е множ. състоящо се от т. P и точките на отв. лъч с начало P.

Ако ч е лъч с начало P и т. $A \in P$ и $A \neq P$, то озн. ч с $\overrightarrow{PA}$

Двата лъча в/у l с начало P се наричат противоположни лъчи.



III-1-4

Полуравнини и (полупространства)

2) Нека π е равн. и l е права в π (π е равн. в пространството A_3). ~~Тогава~~ Тогава $\pi \setminus l$ ($A_3 \setminus \pi$) се разпада на 2 непресичащи се подмножества като 2 т. A и B са от различни подмножества $\Leftrightarrow$ отв. отс. AB пресича l (съотв. π)

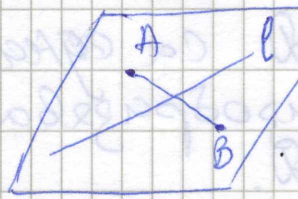
A и $B \in \pi \setminus l$ (съотв. A и $B \in A_3 \setminus \pi$)

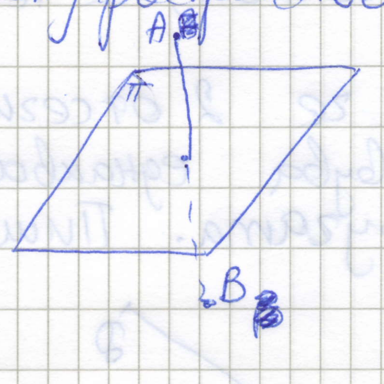
Тия подмнож. се нарич. полуравнини (съотв отв. полупространства) с контур l (съотв. π)

Затворена полуравнина (затв. полупространство) е множеството състоящо се от l (съотв. π) и точките на отв. полуравнина (отв. полупространство) с контур l (съотв. π)

Полуравнина = затв. полуравнина

Полупространство = затв. полупространство





Еднопосочност на лъчи

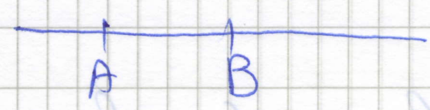
Деф: Казваме че лъчите a и b са еднопосочни и пишем $a \uparrow\uparrow b$, ако правите на a и b са успоредни (съвпадащите прави също считаме за успоредни)

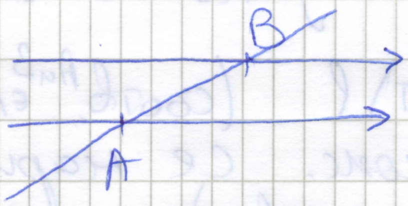
а) Ако правите на a и b съвпадат, то $a \supset b$ или $b \supset a$

б) Ако правите на a и b са различни, и A и B са началните точки на a и b, то a и b лежат в една и съща полуравнина относно правата

AB в равнината определена от правите на а и в.

Казваме че а и в са противопосочни и пишем $a \uparrow\downarrow b$, ако правите на а и в са успоредни, но а и в не са еднопосочни.

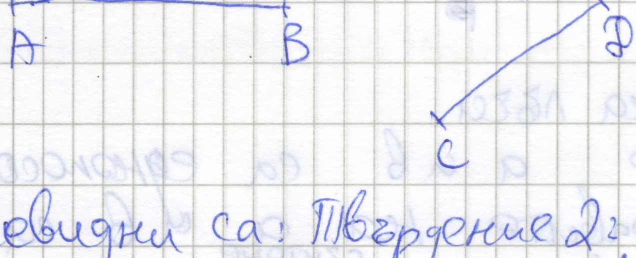
а) 

б) 

Твърдение 1: Релацията еднопосочност на лъчи е релация на еквивалентност в множ. на всички лъчи.

Деф: Класовете на еквивалентност спрямо релацията $\uparrow\uparrow$ (еднопосочност на лъчи) се наричат посоки.

Деф: Казваме че 2 отсечки AB и CD са еднакви когато съществува еднаквост, която изобразява едната в другата. Пишем $AB \cong CD$.



Очевидни са: Твърдение 2: Нека да е фиксирана единична отсечка за измерване на дължину. Тогава отс. AB и CD са еднакви $\Leftrightarrow$ $|AB| = |CD|$
($|AB|$ - дълж. на отс. AB)

Твърдение 3: Релацията $\cong$ (еднаквост на отс.) е релация на еквивалентност в множеството на всички отсечки.

III. 1.6

Насочена отсечка

Деф: Насочена отсечка (свързан вектор) е отс., на която единия край A е избран за първи, а другия край B за втори. Означаваме с $\overrightarrow{AB}$ (A – начало, B – край)

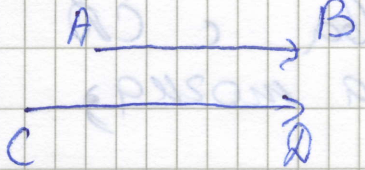
Забележка: 1) Ако $A = B$, то насочената отс. AA се нарича нулева насочена отс.

2) Отсечките AB и BA са равни, но при $A \neq B$ насочените отс. $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BA}$ са различни.

Деф. Казваме, че насочените отсечки $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ са еднопосочни и пишем $\overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{CD}$, ако е изпълнено едно от условията:

а) поне една от $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ е нулева, (т.е. $A = B$ или $C = D$)

б) $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ са ненулеви (т.е. $A \neq B$ и $C \neq D$) и лъчите $AB^{\rightarrow} \uparrow\uparrow CD^{\rightarrow}$



Казваме, че $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ са противопосочни и пишем $\overrightarrow{AB} \uparrow\downarrow \overrightarrow{CD}$, когато е изпълнено едно от условията а) и б'), където б') се получава от б) като се замени $AB^{\rightarrow} \uparrow\uparrow CD^{\rightarrow}$ с $AB^{\rightarrow} \uparrow\downarrow CD^{\rightarrow}$

Твърдение 4: Релацията еднопосочност на насочени отсечки е релация на еквивалентност в множеството на всички насочени отсечки – следва лесно от твърдение 1.

Деф: Казваме, че насочените отсечки $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ са равни и пишем $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, ако отсечките $AB \cong CD$ и $\overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{CD}$

($|AB| = |CD|$)

Пример:

Всеки 2 нулеви насочени отсечки са равни

$\dot{\overrightarrow{AA}}$ $\dot{\overrightarrow{BB}}$

Твърдение 5: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \iff \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$

Док: Достатъчно е да докажем $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Rightarrow \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$, защото обратното се получава като в това се разменят B и C. Нека $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$

$\Rightarrow AB \cong CD$ и $\overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{CD}$

1) $A = B$

$\Rightarrow$ и $C = D$ (защото $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AA}$ се състои само от една точка, ~~като~~ и тъй като е еднаква с $\overrightarrow{CD}$ $\Rightarrow$ и $\overrightarrow{CD}$ се състои само от една точка, т.е. $C = D$)

$\Rightarrow \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$

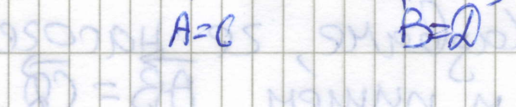
2) $A \neq B$

$\Rightarrow$ и $C \neq D$ (защото ако $C = D$ ще получим като в 1), че $A = B$ – противоположно)

$\Rightarrow AB \cong CD$ и $\overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{CD}$

а) правите AB и CD съвпадат $\Rightarrow \overrightarrow{AB} \supset \overrightarrow{CD}$ или $\overrightarrow{CD} \supset \overrightarrow{AB}$

а$_1$) точката $A = C$



$\Rightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$

Имаме $AB \cong CD = AD$ и $D \in \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}$

$\Rightarrow B = D$

$\Rightarrow \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{BB} = \overrightarrow{BD}$

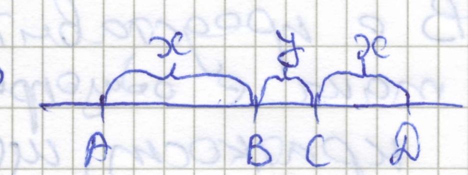
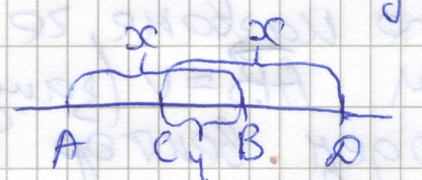
нулеви отсечка

$a_2)$ $A \neq C$

Б.О.О. считаме че $\overrightarrow{AB} \supset \overrightarrow{CD}$

нека е фиксирана единична отсечка за измерване и

нека $|AB| = x = |CD|$, и нека $|BC| = y$

$\Rightarrow$  или 

$|AC| = x + y = |BD|$ | $|AC| = x - y = |BD|$

~~$\Rightarrow |AC| \cong |BD|$~~ | ~~$\Rightarrow |AC| \cong |BD|$~~

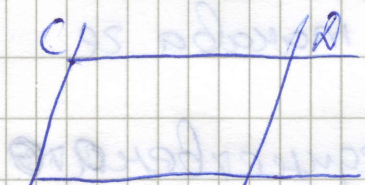
$\Rightarrow AC \cong BD$ | $\Rightarrow AC \cong BD$

и в двата случая $\overrightarrow{AC} \uparrow\uparrow \overrightarrow{BD}$

$\Rightarrow$ и в двата случая $AB \cong CD$ и $\overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{CD}$

$\Rightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$

2) правите AB и CD са различни



$\Rightarrow AB \cong CD$ правите $AB \parallel CD$

B и D са от една и съща страна на AC

$\Rightarrow ABDC$ е успоредник $\Rightarrow AC \cong BD$, $AC \parallel BD$ и

C и D ~~ае~~ са от една и съща страна на AB

(защото $AB \parallel CD$ и $\Rightarrow CD$ не пресича AB)

$\Rightarrow \overrightarrow{AC} \uparrow\uparrow \overrightarrow{BD} \Rightarrow AC \cong BD$, $\overrightarrow{AC} \uparrow\uparrow \overrightarrow{BD} \Rightarrow \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$

III.1.9

От твърдение 3 и 4 получаваме

Твърдение 5: Релацията равенство на насочени отсечки е релация на еквивалентност в множеството на всички насочени отсечки.

Деф: Класовете на еквивалентност относно релацията равенство на насочени отсечки се наричат свободни вектори. Ако v е свободен вектор

Ако $\overrightarrow{AB} \in v$, то казваме, че $\overrightarrow{AB}$ е представител на v и пишем $\overrightarrow{AB} = v$ (защото така е общоприето)

Вместо свободен вектор за краткост, ще казваме само вектор.

Линейни операции с вектори

Видяхме, че всеки 2 насочени отсечки са равни $\Rightarrow$ нулевите насочени отсечки образуват 1 клас на еквивалентност (т.е. един свободен вектор) който се нарича нулев вектор и се бележи с 0.

Теорема 1: Ако v е вектор и O е точка, то съществува единствена т. P, такава че $\overrightarrow{OP} = v$

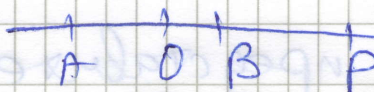
Док: Ако $v = 0$, то очевидно единствената т. P, която върши работа е $P = O$.

Нека $v \neq 0$ и $\overrightarrow{AB}$ е представител на $v \Rightarrow A \neq B$

Ако O не лежи на правата AB

III 1 10

то P е единствената точка, за която ABPO е успоредник.
Ако O лежи на AB пак е ясно че има единствена т. P $\vec{OP} = \vec{AB}$



Линейни операции с вектори

$v \; O \Rightarrow \exists!\, P : \vec{OP} = v$

Деф: Нека v е вектор и $\vec{AB}$ е представител на v. Векторът P е представителя ~~на~~ $\vec{BA}$ се нарича противоположен на v и се означава с v.

Коректност: Т.е. независимост от избора на представителя $\vec{AB}$

Нека $\vec{CD}$ е друг представител на v.

$\Rightarrow \vec{AB} = \vec{CD}$

$\Rightarrow \vec{AC} = \vec{BD}$

$\Rightarrow \vec{BD} = \vec{AC}$

$\Rightarrow \vec{BA} = \vec{DC}$

$\Rightarrow \vec{BA}$ и $\vec{DC}$ са представители на един и същ вектор от твърдение 5 от миналия път

Пример: $-0 = 0$, защото ако O е точка то $\vec{OO} = 0 \Rightarrow \vec{OO} = -0 \Rightarrow -0 = 0$

III.1.11

Деф: Събиране на вектори
Нека u и v са вектори.
Нека O е произволна точка, точка P е такава, че $\overrightarrow{OP}$ е представител на u и точка Q е такава, че $\overrightarrow{PQ}$ е представител на v.

Тогава векторът с представител $\overrightarrow{OQ}$ се нарича сбор (или сума) на векторите u и v и се означава $u+v$.

Коректност: т.е. независимост от избора на т. O
Нека O' е друга точка, P' е такава, че $\overrightarrow{O'P'} = u$ и $Q' : \overrightarrow{P'Q'} = v$

$\Rightarrow \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{O'P'} \Rightarrow \overrightarrow{OO'} = \overrightarrow{PP'}$

$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{P'Q'} \Rightarrow \overrightarrow{PP'} = \overrightarrow{QQ'}$

$\Rightarrow \overrightarrow{OO'} = \overrightarrow{QQ'} \Rightarrow \overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{O'Q'}$

$\Rightarrow \overrightarrow{OQ}$ и $\overrightarrow{O'Q'}$ са представители на един и същи вектор

Теорема 2: Събирането на вектори има следните свойства:
1) $u+v = v+u$ (комутативност)
2) $(u+v)+w = u+(v+w)$ (асоциативност)
3) $u+0 = u$
4) $u+(-u) = 0$

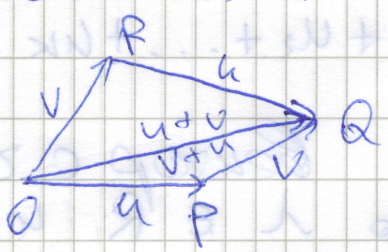
III.11.12

Доказателство: 1) Нека O е произволна точка
$\vec{OP} = u$, $\vec{PQ} = v \Rightarrow \vec{OQ} = u + v$

Нека R: $\vec{OR} = v$

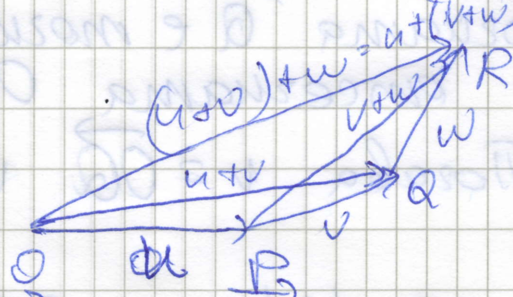
$\Rightarrow \vec{OR} = \vec{PQ} \Rightarrow \vec{OP} = \vec{RQ}$
$\Rightarrow \vec{RQ} = u$

Имаме $\vec{OR} = v$, $\vec{RQ} = u \Rightarrow \vec{OQ} = v + u \Rightarrow u + v = v + u$



2) Нека O е произволна точка P е такава, че
$\vec{OP} = u$, $\vec{PQ} = v \Rightarrow \vec{OQ} = u + v$

R: $\vec{QR} = w \Rightarrow \vec{OR} = (u+v) + w$



Имаме $\vec{PQ} = v$ и
$\vec{QR} = w$
$\Rightarrow \vec{PR} = v + w$

имаме $\vec{OP} = u$, $\vec{PR} = v + w \Rightarrow \vec{OR} = u + (v + w)$

$\Rightarrow (u+v) + w = u + (v + w)$

3) Нека $\overrightarrow{OP} = u$. Имаме $\overrightarrow{PP} = 0 \Rightarrow \overrightarrow{OP} = u + 0$
$\Rightarrow u + 0 = u$

4) Нека $\overrightarrow{OP} = u \Rightarrow \overrightarrow{PO} = -u \Rightarrow \overrightarrow{OO} = u + (-u) = 0$

Забележка: От свойствата 1 и 2 следва, че сборът на векторите $u_1, u_2, \ldots, u_k$ не зависи от това как са подредени и как са поставени скоби. За това обикновено не се пишат скоби, т.е. пише се $u_1 + u_2 + \ldots + u_k$

Дефиниция: Умножение на вектор с число
Произведение на числото $\lambda \in \mathbb{R}$ и вектора u се нарича векторът v, който е деф. по следния начин:
а) ако $\lambda = 0$ или $u = 0$, то $v = 0$
б) ако $\lambda \neq 0$ и $u \neq 0$, то:
Нека O е произволна точка, точката P е такава, че $\overrightarrow{OP} = u$. Нека точката Q е точката върху правата OP, за която отсечката $OQ = |\lambda| . OP$ и
$\overrightarrow{OQ} \uparrow\uparrow \overrightarrow{OP}$ при $\lambda > 0$
$\overrightarrow{OQ} \uparrow\downarrow \overrightarrow{OP}$ при $\lambda < 0$. Тогава $v = \overrightarrow{OQ}$. v се означава с λ отсечка

Забележка: отсечката $OQ = |\lambda|$ отс. OP означава, че ако е фиксирана единична отсечка за измерване на дължини, имаме $|OQ| = |\lambda| . |OP|$
Очевидно това равенство не зависи от избора на единичната отсечка. В частност, ако OP е единична отсечка, то условието става $|OQ| = |\lambda|$

III.1.14

Коректност: т.е. независимост от избора на т. O:

Нека O' е друга точка, P' : $\overrightarrow{O'P'} = u$ и

Q' е върху правата O'P' : отс. $O'Q' = |\lambda|$ отс. O'P' и

$\overrightarrow{O'Q'} \uparrow\uparrow \overrightarrow{O'P'}$ при $\lambda > 0$

$\overrightarrow{O'Q'} \uparrow\downarrow \overrightarrow{O'P'}$ при $\lambda < 0$

Трябва да се докаже че $\overrightarrow{O'Q'} = \overrightarrow{OQ}$

Нека фиксираме единична отсечка за измерване на дължини $\Rightarrow \overrightarrow{OP} = u = \overrightarrow{O'P'}$

$\Rightarrow |OP| = |O'P'|$ и $\overrightarrow{OP} \uparrow\uparrow \overrightarrow{O'P'}$

$|O'Q'| = |\lambda| . |O'P'| = |\lambda| . |OP| = |OQ|$

$\Rightarrow$ отс. $O'Q' \cong$ отс. OQ

Ако $\lambda > 0$ имаме $\overrightarrow{O'Q'} \uparrow\uparrow \overrightarrow{O'P'}$, $\overrightarrow{OQ} \uparrow\uparrow \overrightarrow{OP}$ и $\overrightarrow{OP} \uparrow\uparrow \overrightarrow{O'P'} \Rightarrow \overrightarrow{O'Q'} \uparrow\uparrow \overrightarrow{OQ}$

Ако $\lambda < 0$ имаме $\overrightarrow{O'Q'} \uparrow\downarrow \overrightarrow{O'P'}$, $\overrightarrow{OQ} \uparrow\downarrow \overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{O'P'} \uparrow\uparrow \overrightarrow{OP} \Rightarrow \overrightarrow{O'Q'} \uparrow\uparrow \overrightarrow{OQ}$ и в двата случая отсечките са еднакви

отс $O'Q' \cong$ отс. OQ и $\overrightarrow{O'Q'} \uparrow\uparrow \overrightarrow{OQ} \Rightarrow$

$\Rightarrow \overrightarrow{O'Q'} = \overrightarrow{OQ}$

Теорема 3: Умножението на вектор с число има следните свойства
5) $1.u = u$
6) $\lambda(\mu.u) = (\lambda.\mu)u$ (асоциативно свойство)
7) $(\lambda+\mu)u = \lambda.u + \mu.u$ } дистрибутивни свойства
8) $\lambda(u+v) = \lambda.u + \lambda.v$ }

Забележка: Считаме, че умножението с число има по-висок приоритет от събирането на вектори (за да пишем по-малко скоби)

Доказателство: 5) следва лесно от деф.
Считаме, че сме фиксирали единична отсечка
6) $\lambda = 0$ или $\mu = 0$, или $u = 0$ лесно се вижда, че и двете страни са нули
Нека $\lambda \neq 0, \mu \neq 0, u \neq 0$
Нека $\overrightarrow{OP} = u$, $\overrightarrow{OQ} = \mu.u$, $\overrightarrow{OR} = \lambda(\mu.u)$, $\overrightarrow{OS} = (\lambda.\mu)u$
$|OR| = |\lambda|\,|OQ| = |\lambda|.|\mu|.|OP|$

$|OS| = |\lambda\mu|.|OP| = |\lambda|.|\mu|.|OP| \Rightarrow |OR| = |OS|$

Ако $\lambda > 0$ и $\mu > 0 \Rightarrow \lambda.\mu > 0$ и имаме $\overrightarrow{OQ} \uparrow\uparrow \overrightarrow{OP}$ и $\overrightarrow{OR} \uparrow\uparrow \overrightarrow{OQ} \Rightarrow \overrightarrow{OR} \uparrow\uparrow \overrightarrow{OP}$ и $\overrightarrow{OS} \uparrow\uparrow \overrightarrow{OP} \Rightarrow \overrightarrow{OR} \uparrow\uparrow \overrightarrow{OS}$

Ако $\lambda > 0, \mu < 0 \Rightarrow \lambda.\mu < 0 \Rightarrow \overrightarrow{OQ} \uparrow\downarrow \overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{OR} \uparrow\uparrow \overrightarrow{OQ} \Rightarrow$
$\Rightarrow \overrightarrow{OR} \uparrow\downarrow \overrightarrow{OP}$ и $\overrightarrow{OS} \uparrow\downarrow \overrightarrow{OP} \Rightarrow \overrightarrow{OR} \uparrow\uparrow \overrightarrow{OS}$

В другите два случая $\lambda < 0, \mu > 0$ и $\lambda < 0, \mu < 0$ по подобен начин пак получаваме $\overrightarrow{OR} \uparrow\uparrow \overrightarrow{OS}$
$\Rightarrow$ винаги $OR \cong OS$ и $\overrightarrow{OR} \uparrow\uparrow \overrightarrow{OS} \Rightarrow \overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OS} \Rightarrow \lambda.(\mu.u) = (\lambda.\mu)u$

III.1.16

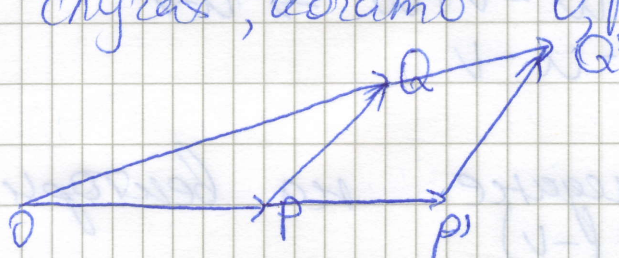
7) Ще разгледаме случая $\lambda > 0$! Нека $\overrightarrow{OP} = u$, $\overrightarrow{OQ} = \lambda . u$, ($\mu > 0$, $u \neq 0$)
$\overrightarrow{OR} = \mu . u$, $\overrightarrow{OS} = (\lambda+\mu) u$, $\overrightarrow{QT} = \mu . u \Rightarrow \overrightarrow{OQ} \uparrow\uparrow \overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{OR} \uparrow\uparrow \overrightarrow{OP}$,
$\overrightarrow{OS} \uparrow\uparrow \overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{QT} \uparrow\uparrow \overrightarrow{OP} \Rightarrow \overrightarrow{OQ} \uparrow\uparrow \overrightarrow{QT}$

$\Rightarrow$ Q е между O и T $\Rightarrow$ ~~$\overrightarrow{OT} \uparrow\uparrow \overrightarrow{OQ}$~~
$\Rightarrow \overrightarrow{OT} \uparrow\uparrow \overrightarrow{OQ} \uparrow\uparrow \overrightarrow{OP} \uparrow\uparrow \overrightarrow{OS} \Rightarrow \overrightarrow{OT} \uparrow\uparrow \overrightarrow{OS}$

Имаме $\overrightarrow{OT} = \lambda u + \mu . u$, $|OT| = |OQ| + |QT| = \underset{\lambda}{|\lambda|} . |OP| +$
$+ \underset{\mu}{|\mu|} . |OP| = (\lambda + \mu)|OP|$

$|OS| = |\lambda + \mu| . |OP| = (\lambda+\mu)|OP| \Rightarrow |OT| = |OS| \Rightarrow (\lambda+\mu)u =$
$= \lambda u + \mu . u$

8) Ще разгледаме случая $\lambda > 0$, $u \neq 0$, $v \neq 0$
Нека $\overrightarrow{OP} = u$, $\overrightarrow{PQ} = v \Rightarrow \overrightarrow{OQ} = u + v$
Нека P' : $\overrightarrow{OP'} = \lambda . u$
Нека Q' : $\overrightarrow{OQ'} = \lambda . (u+v)$
Ще разглеждаме случая, когато O, P, Q не са на една права



(при $\lambda > 1$)

$|OP'| = |\lambda| . |OP|$
$|OQ'| = |\lambda| . |OQ|$
$\Rightarrow \dfrac{|OP'|}{|OP|} = |\lambda| = \dfrac{|OQ'|}{|OQ|}$

Теорема на Талес:
$PQ \parallel P'Q'$ и $\dfrac{|P'Q'|}{|PQ|} = |\lambda|$

$\Rightarrow |P'Q'| = |\lambda| . |PQ|$

Q и Q' са от една и съща страна OP и
$\Rightarrow$ $\overrightarrow{PQ} \uparrow\uparrow \overrightarrow{P'Q'}$

Тъй като $\lambda > 0 \Rightarrow \overrightarrow{P'Q'} = \lambda . \overrightarrow{PQ} \Rightarrow \overrightarrow{P'Q'} = \lambda . v$

$\overrightarrow{OQ'} = \overrightarrow{OP'} + \overrightarrow{P'Q'} = \lambda . u + \lambda . v = \lambda (u+v)$

Забележка: От теореми 2 и 3 получаваме следната
Теорема 4: Множеството на векторите в пространството е реално линейно пространство
От свойствата на линейните пространства получаваме:
Твърдение: Събирането на вектори и умножаването на вектор с число имат още следните свойства
1) $-0 = 0$
2) $-(-u) = u$
3) Ако $u+w = v+w \Rightarrow u = v$
4) $-(u+v) = -u - v$

Деф: Изваждане на вектори
$u - v := u + (-v)$

5) $0 . u = 0$
6) $\lambda . 0 = 0$
7) $(-1) . u = -u$
8) $(\lambda - \mu) . u = \lambda . u - \mu . u$
9) $\lambda (u - v) = \lambda . u - \lambda . v$
10) Ако $\lambda u = 0$, то $\lambda = 0$ или $u = 0$

III. 1.18

11) Ако $\lambda \cdot u = \lambda \cdot v$ и $\lambda \neq 0$, то $u = v$

12) Ако $u \neq 0$ и $\lambda u = \mu u$, то $\lambda = \mu$

Условия за колинеарност и за компланарност на вектори

Деф: 1) Казваме, че векторът v е колинеарен с правата l, ако v има представител, лежащ в/у l.
Еквивалентна дефиниция е всеки представител на v да е успореден на l.
Пишем $v \parallel l$.

2) Казваме, че векторите $v_1, \dots, v_k$ са колинеарни, ако $\exists$ права l, така че всеки от тях е колинеарен с l.
Пишем $v_1 \parallel \dots \parallel v_k$.

3) Казваме, че векторът v е компланарен с равнината π, ако v има представител, лежащ в π.
Еквивалентна дефиниция е всеки представител на v да е успореден на π. Пишем $v \parallel \pi$.

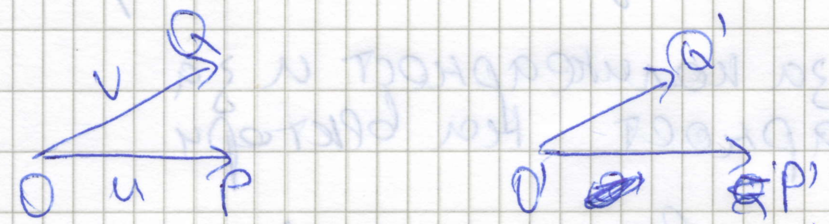
4) Казваме, че векторите $v_1, \dots, v_k$ са компланарни, ако съществува равнина π, така че всеки от тях е компланарен с π.
Деф: Под ъгъл м/у ненулевите вектори u и v разбираме ъгъла м/у произволни техни представители с общо начало.

III. 1. 19

~~Кол:~~ Коректността е ясна:

$\overrightarrow{OP} = u$, $\overrightarrow{OQ} = v$

$\overrightarrow{O'P'} = u$, $\overrightarrow{O'Q'} = v$



$\Rightarrow \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{O'P'} \Rightarrow \overrightarrow{OP} \uparrow\uparrow \overrightarrow{O'P'}$

$OQ = O'Q' \Rightarrow OQ \uparrow\uparrow O'Q'$

$\Rightarrow \sphericalangle POQ = \sphericalangle P'O'Q'$

ъгъла м/у u и v ще означаваме с $\sphericalangle(u,v)$

Деф: Нека е фиксирана единична отсечка за измерване на дължини. Дължината на вектора u се нарича дължината на произволен негов представител. Означава се с $|u|$.

Коректност: $\overrightarrow{AB} = u$, $\overrightarrow{CD} = u \Rightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Rightarrow$

$\Rightarrow AB \cong CD \Rightarrow |AB| = |CD|$

Теорема 1: Нека u и v са вектори и $u \neq 0$. Тогава u и v са колинеарни $\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}$. $v = \lambda . u$

Числото λ в това равенство е единствено.

Доказателство: Нека $v = \lambda . u$

От дефиницията на умножение на вектор с число следва $u \parallel v$.

III.1.20

Единственост на λ:
Нека е фиксирана единична отсечка тогава $|v| = |\lambda| \cdot |u|$ и $\lambda > 0$ при $u \uparrow\uparrow v$

$\lambda < 0$ при $u \uparrow\downarrow v$

$\lambda = 0$ при $v = 0$

$\Rightarrow |\lambda| = \frac{|v|}{|u|}$

$$\Rightarrow \lambda = \begin{cases} 0 & \text{ако } v = 0 \\ \frac{|v|}{|u|} & \text{ако } v \neq 0 \text{ и } v \uparrow\uparrow u \\ -\frac{|v|}{|u|} & \text{ако } v \neq 0 \text{ и } v \uparrow\downarrow u \end{cases}$$

$\Rightarrow \lambda$ е единствено

Обратно: Нека $u \parallel v$. Деф. $\lambda = \begin{cases} 0, & \text{ако } v = 0 \\ \frac{|v|}{|u|}, & \text{ако } v \neq 0 \; v \uparrow\uparrow u \\ -\frac{|v|}{|u|}, & \text{ако } v \neq 0 \; v \uparrow\downarrow u \end{cases}$

Ако $v = 0$, то $v = 0 = 0 \cdot u = \lambda \cdot u$
Ако $v \neq 0$, то $|\lambda| = \frac{|v|}{|u|}$, т.е. $|v| = |\lambda| \cdot |u| = |\lambda \cdot u|$ и $v \uparrow\uparrow \lambda \cdot u \Rightarrow v = \lambda \cdot u$

Следствие 1: Два вектора в пространството са колинеарни $\Leftrightarrow$ линейно зависими

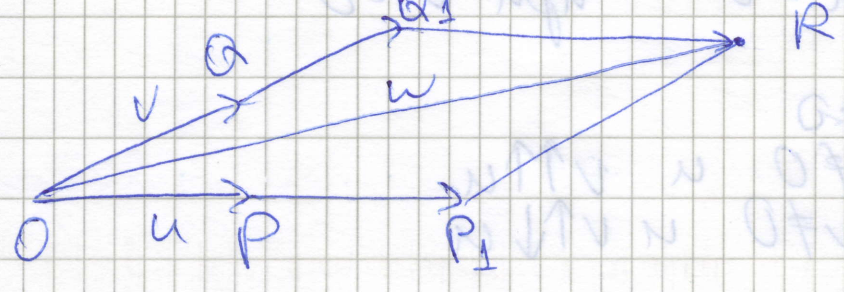
Следствие 2: Векторите, колинеарни с дадена права образуват едномерно реално линейно пространство.

Теорема 2: Нека u, v, w са вектори като u и v са неколинеарни. Тогава u, v, w са компланарни. $\Leftrightarrow \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R} : w = \lambda \cdot u + \mu \cdot v$
Числата λ и μ в това равенство са единствени.

III.1.21

Доказателство: Нека $w = \lambda . u + \mu . v$. Нека O е произволна точка. $\overrightarrow{OP} = u$, $\overrightarrow{OQ} = v$, $\overrightarrow{OR} = w$

$\overrightarrow{OP_1} = \lambda . u$ $\overrightarrow{OQ_1} = \mu . v$

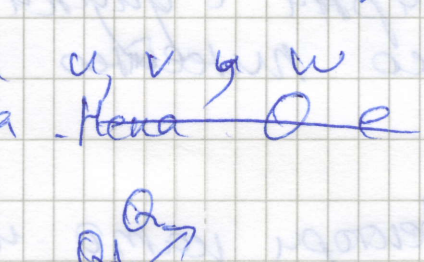


От деф. на умножение на вектор с число и събиране на вектори. Всички точки лежат в равнината OPQ $\Rightarrow$ u, v, w имат представители в тази равнина $\Rightarrow$ са компланарни.

Единственост на λ и μ.
u и v са неколинеарни
$\Rightarrow$ (по Следствие 1) са линейно независими.

$\Rightarrow$ w е лин. комбинация на линейно независимите вектори u и v.
$\Rightarrow$ коеф. λ и μ са еднозначно определени.

Нека u, v, w са компланарни. Нека O е произв. точка. ~~Нека O е~~ $\overrightarrow{OP} = u$, $\overrightarrow{OQ} = v$, $\overrightarrow{OR} = w$



Нека P_1 е пресечна точка на правата OP и правата през R успоредна на OQ. Q_1 е пресечна точка на правата OQ и

III. 1. 22

правата през R, успоредна на $\vec{OP}$. Означаваме $u_1 = \vec{OP_1}$, $v_1 = \vec{OQ_1}$ $\Rightarrow$ $u_1 \parallel u$ $\Rightarrow$ (по Т1)

$\exists \lambda \in \mathbb{R} : u_1 = \lambda . u$ $\quad v_1 \parallel v \Rightarrow \exists \mu \in \mathbb{R} : v_1 = \mu . v$

Тъй като $w = u_1 + v_1 \Rightarrow w = \lambda . u + \mu . v$

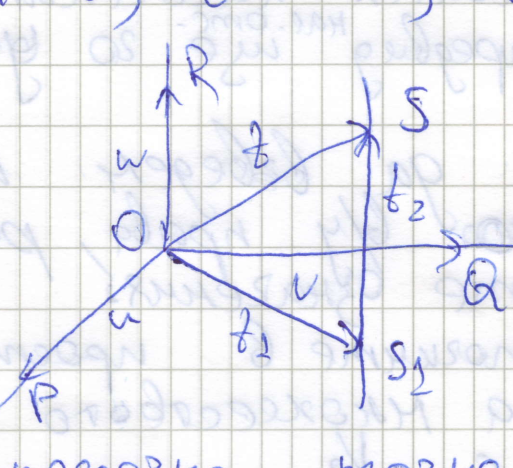
Следствие 3: Три вектора в пространството са компланарни $\Leftrightarrow$ линейно зависими.

Следствие 4: Векторите в пространството, които са компланарни с дадена равнина, образуват двумерно реално линейно пространство.

Теорема 3: Нека u, v, w са некомпланарни вектори, тогава за всеки вектори t $\exists! \lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}$

$t = \lambda . u + \mu . v + \nu . w$

Доказателство: Нека O е произволна точка. $\vec{OP} = u$, $\vec{OQ} = v$, $\vec{OR} = w$, $\vec{OS} = t$



Нека S_1 е пресечна точка на равнината OPQ с правата през S, която е успоредна на OR. Нека $\vec{OS_1} = t_1$, $\vec{S_1S} = t_2$ $\Rightarrow t = t_1 + t_2$

Имаме u, v, t_1 са компланарни (имат представители в OPQ) $\Rightarrow$ (по теорема 2) $\Rightarrow \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R}$:

$t_1 = \lambda . u + \mu . v$ (u и v са неколинеарни)

Също $t_2 \parallel w$ и $w \neq 0$ по теорема 1 $\Rightarrow$

$\Rightarrow \exists \nu \in \mathbb{R} : t_2 = \nu . w \Rightarrow t = \lambda . u + \mu . v + \nu . w$

Числата λ, μ, ν са единствени, защото u, v, w са линейно независими (по следствие 3)

Следствие 5: Всеки четири вектора в пространството са линейно зависими.

Следствие 6: Векторите в пространството образуват тримерно реално линейно пространство

Координатни системи

Отсега нататък под $\overline{OP}$ ще разбираме свободния вектор с представител насочената отсечка OP. Ако имаме предвид нас. отс. ще го уточняваме изрично.

Тъй като искаме да въведем координатни системи едновременно в/у права, равнина, пространство, въвеждаме следните означения:

Множеството от точките в пространството означаваме с A_3, а множеството от векторите в пространството с V_3.

Ако Π е равнина, то множ. от точките в/у Π озн. с A_2, а множ. от векторите, компланарни

с Π - с V_2.
Ако l е права, то множ. от точки в/у l означаване с A_1, а множ. от векторите, колинеарни с l - с V_1. От предишния въпрос, знаем че V_n е n-мерно реално линейно пространство $n=1,2,3$.
A - афинна пространство V - векторно пространство.
Дефиниция: Координатна система K в A_n е двойка състояща се от точка $O \in A_n$ и базис $(e_1, e_2, \dots e_n)$ на V_n. Точка O се нарича начало на координатната система, а векторите $e_1, e_2, \dots e_n$ - базисни или координатни вектори. Пишем $K = O e_1 \dots e_n$.

Ако е фиксирана единична отсечка и $|e_1| = \dots = |e_n| = 1$ и $e_i \perp e_j$ при $i \neq j$, то казване, че координатната с-ма K е ортонормирана. Нека $v \in V_n$. Тогава $\exists! (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$: $v = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n$ - защото $(e_1, \dots, e_n)$ е базис. Числата $x_1, \dots, x_n$ се нарича координати на v спрямо K (или спрямо базиса $(e_1, \dots, e_n)$). Пишем $v(x_1, \dots, x_n)$. Нека $P \in A_n$. Координатите на P се наричат координатите на вектора $\overrightarrow{OP}$. Ако $\overrightarrow{OP}(x_1, \dots, x_n)$, то пишем $P(x_1, \dots, x_n)$

Правата през O, която е колинеарна с e_i и е ориентирана с e_i се нарича i-тата координатна ос и често се означава с Ox_i $i = 1, \dots, n$.
(Ориентацията на права и ос - след малко)
Оста Ox_1 се нарича ~~абц~~ абсцисна ос, а координатата x_1 - абсциса и x_1 се бележи често с x вместо с x_1.

При $n \geq 2$ оста Ox_2 се нарича ординатна ос, а координатната x_2 – ордината и x_2 често се бележи с y вместо с x_2.

При $n \geq 3$ оста Ox_3 се нарича апликатна ос, а координатната x_3 – апликатата и x_3 често се бележи с z вместо с x_3.

„Припомняне" от линейната алгебра

Нека $a = (a_1, \dots, a_n)$ и $b = (b_1, \dots, b_n)$ са два базиса на V_n.

Матрицата на прехода от базиса a към базиса b се нарича матрицата $T = (t_{ij})$ $i, j = 1, \dots, n$, която се получава по следния начин:

$b_1 = t_{11} a_1 + t_{21} a_2 + \dots + t_{n1} a_n$

$b_2 = t_{12} a_1 + t_{22} a_2 + \dots + t_{n2} a_n$

$- - - - - - - - - - - - -$

$b_n = t_{1n} a_1 + t_{2n} a_2 + \dots + t_{nn} a_n$

(координатите на b-тата спрямо a-тата са стълбовете на T)

Това се пише накратко така:

$(b_1, \dots, b_n) = (a_1, \dots, a_n) \cdot T$ или $b = a \cdot T$

Матрицата на прехода е обратима, в частност $\det(A) \neq 0$.

III.1.26

Дефиниция: Казваме, че базисите a и b на V_n са еднакво ориентирани, ако $\det(T) > 0$, където T е матрица на прехода от a към b. Пишем $a \sim b$.
Казваме, че a и b са противоположно ориентирани, ако не са еднакво ориентирани, т.е. ако $\det(T) < 0$.

Примери:
1) Базисите $(b_1, b_2, \dots b_n)$ и $(-b_1, b_2, \dots, b_n)$ са противоположно ориентирани.

2) При $n \geq 2$ базисите $(b_1, b_2, \dots b_n)$ и $(b_2, b_1, b_3, \dots b_n)$ са противоположно ориентирани.

3) При $n = 3$ базисите (b_1, b_2, b_3) и (b_2, b_3, b_1) са еднакво ориентирани.

Координатни системи

A_1 = права A_2 = равнина A_3 = пространство
V_n - векторите в A_n n-мерно ~~...~~ реално линейно пространство

Афинна координатна система $K = Oe_1 \dots e_n$ в A_n се състои от точка $O \in A_n$ и базис $(e_1, \dots, e_n)$ на V_n.
$v \in V_n$ има координати $v(x_1, \dots, x_n)$ спрямо K, ако $v = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$

$P \in A_n$ има координати $P(x_1, \dots x_n)$ спрямо K, ако $\overrightarrow{OP}(x_1, \dots, x_n)$

III.1.27

Нека $a = (a_1, \dots, a_n)$ и $b = (b_1, \dots, b_n)$ са базиси на V_n.
Матрица на прехода от a към b е матрица $T = (t_{ij}) : b = aT$

(t_{ij} е i-тата координата на b_j спрямо a)

T е обратима $\Rightarrow \det(T) \neq 0$
a и b са еднакво ориентирани ($a \sim b$) ако $\det(T) > 0$. Ако $\det(T) < 0$ – противоположно ориентирани.

Твърдение 1: Релацията еднаква ориентираност на базиси е релация на еквивалентност в множеството на всички базиси на V_n.

Твърдение 2: Класовете на еквивалентност спрямо $\sim$ са два: Ако b е един базис на V_n, то те са $\{a : a \sim b\}$ и $\{a : a \not\sim b\}$.

Доказателство 1: Рефлексивност
Нека a е базис на V_n

$$E = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow a = a.E \text{ и } \det(E) = 1 > 0$$

$\Rightarrow$ Матрицата на прехода от a към a е E и $\det(E) > 0$
$\Rightarrow a \sim a$

Симетричност: Нека $a \sim b$ и нека T е матрицата на прехода от a към $b \Rightarrow b = a.T$ и $\det(A) > 0$
$\Rightarrow a = b.T^{-1} \Rightarrow$ матрицата на прехода от b към a е T^{-1} и $\det(T^{-1}) = \frac{1}{\det(T)} > 0 \Rightarrow b \sim a$

транзитивност: Нека $a \sim b$ и $b \sim c$, и нека S и T са матрици на прехода от a към b и от b към c $\Rightarrow b = a.S$ и $c = b.T$ и $\det(S) > 0$, $\det(T) > 0 \Rightarrow c = (a.S).T = a.(S.T) \Rightarrow$
$\Rightarrow$ матрицата на прехода от a към c е ST и $\det(ST) = \det(S).\det(T) > 0 \Rightarrow a \sim c$
$\Rightarrow \sim$ е релация на еквивалентност

Доказателство 2: Знаем, че $\{a : a \sim b\}$ е клас на еквивалентност – тоя на b $\Rightarrow$ трябва да док., че $\{a : a \nsim b\}$ също е клас на еквивалентност, т.е. $a \nsim b$ и $c \nsim b$, то $a \sim c$. Нека S и T са матриците на прехода от a към b и от b към c $\Rightarrow b = a.S$, $c = b.T$ и $\det(S) < 0$, $\det(T) < 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow c = a.S.T$, т.е. матрицата на прехода от a към c е ST и $\det(ST) = \underbrace{\det(S)}_{<0}.\underbrace{\det(T)}_{<0} > 0 \Rightarrow a \sim c$

Дефиниция: Ориентация във V_n (и в A_n) се нарича клас на еквивалентност относно релацията еднаква ориентираност на базиси на V_n. Казваме, че V_n (и A_n) е ориентирано, ако е избрана едната от двете ориентации. Избраната ориентация се нарича положителна, а другата – отрицателна. Ясно е, че ориентацията може да се зададе като се избере един базис b на V_n.

Забележка: Ориентация в/у права се нарича още посока в/у правата, а ориентирана права се нарича още ос. Ориентация в равнина се нарича още посока на въртене в равнината.

Дефиниция: Афинната координатна система $K = Oe_1 \dots e_n$ в ориентираното пространство A_n се нарича положително ориентирана или дясна (съотв. отриц. ориентирана или лява), ако ~~ориентацията~~ базисът $e = (e_1 \dots e_n)$ задава положителната (съотв. отриц.) ориентация в A_n.

Аналитично представяне на линейните операции с вектори

Отново работим едновременно в/у права ($n = 1$), в равн. ($n=2$) и в пространство ($n=3$). Нека $K = Oe_1 \dots e_n$ е афинна координатна с-на в A_n.

Теорема 1: Векторите $u(x_1, \dots, x_n)$ и $v(y_1, \dots, y_n)_{e_n}$ са равни $\Leftrightarrow$ $x_i = y_i$, $i = 1, \dots, n$

Доказателство 1: ~~Вектора~~ Имаме $u = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n$, $v = y_1 e_1 + y_2 e_2 + \dots + y_n e_n \Rightarrow u = v \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x_1 e_1 + \dots + x_n e_n = y_1 e_1 + \dots + y_n e_n \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x_i = y_i$, $i = 1, \dots, n$ защото $(e_1, \dots, e_n)$ е базис.

Теорема 2: Нека $\lambda_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, k$,
$u_i(x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_n}) \in V_n$, $i = 1, \dots, k$ и
$v(y_1, y_2, \dots, y_n) \in V_n$
Тогава $v = \lambda_1 . u_1 + \lambda_2 u_2 + \dots + \lambda_k . u_k \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow y_j = \lambda_1 x_{1j} + \lambda_2 x_{2j} + \dots + \lambda_k x_{kj}$, $j = 1, \dots, n$

III. 1.30

~~Итане~~ Доказателство: Имаме $u_i = \sum_{j=1}^{n} x_{ij} e_j \Rightarrow$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{k} \lambda_i u_i = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \left(\sum_{j=1}^{n} x_{ij} e_j\right) = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n} \lambda_i x_{ij} e_j =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_{ij}\right) e_j \Rightarrow$$ j-тата коорд. на $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i u_i$ е $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_{ij}$

От теорема 1 $\Rightarrow$ $v = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i u_i \Leftrightarrow y_j = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_{ij}$, $j = 1, \dots, n$

От следствие 1 и следствие 3 от въпроса за колинеарност и ком~~лана~~планарност на вектори получава

Следствие 1: Векторите $u(x_1, \dots, x_n)$ и $v(y_1, \dots, y_n)$ са колинеарни $\Leftrightarrow$ рангът на матрицата от координатите им

$$\begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ \vdots & \vdots \\ x_n & y_n \end{pmatrix}$$ е ≤ 1. (това следствие е безинтересно при $n=1$)

Следствие 2: 1) Векторите $u(x_1, x_2)$, $v(y_1, y_2) \in V_2$ са колинеарни $\Leftrightarrow \det\begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix} = 0$

~~Следствие 3~~: 2) Векторите $u(x_1, x_2, x_3)$, $v(y_1, y_2, y_3) \in V_3$ са колинеарни $\Leftrightarrow$ $\det\begin{pmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{pmatrix} = 0$

$$\det\begin{pmatrix} x_3 & y_3 \\ x_1 & y_1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\det\begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix} = 0$$

Следствие 3: Векторите $u(x_1, x_2, x_3)$, $v(y_1, y_2, y_3)$, $w(z_1, z_2, z_3) \in A_3$ са компланарни $\Leftrightarrow$ матрицата от координатите им

$$\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix} \text{ има ранг } \leq 2$$

$$\Leftrightarrow \det \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix} = 0$$

Теорема 3: Ако $P(x_1, \ldots, x_n)$, $Q(y_1, \ldots, y_n) \in A_n$, то векторът $\overrightarrow{PQ}$ има координати $\overrightarrow{PQ}(y_1 - x_1, y_2 - x_2, \ldots, y_n - x_n)$

Доказателство: Имаме, че векторът $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP}$

По дефиниция: $\overrightarrow{OP}(x_1, \ldots, x_n)$

$\overrightarrow{OQ}(y_1, \ldots, y_n)$

По теорема 2 $\Rightarrow \overrightarrow{PQ}(y_1 - x_1, \ldots, y_n - x_n)$

Смяна на координатната с-ма

Отново работим едновременно в/у права ($n = 1$), в равнината ($n = 2$) и в пространството ($n = 3$).

Теорема: Нека $K = Oe_1 \ldots e_n$ и $K' = O'e_1' \ldots e_n'$ са две афинни координатни системи в A_n, координатите на O' спрямо K са $(s_1, \ldots, s_n)$, матрицата на прехода от базиса $e = (e_1, \ldots, e_n)$ към базиса $e' = (e_1', \ldots, e_n')$ е $T = (t_{ij})$, $i, j = 1, \ldots, n$

Тогава:

1) Ако $v \in V_n$ и $v(x_1, ..., x_n)$ спрямо K и $v(x_1', ..., x_n')$ спрямо K', то

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} t_{ij} x_j', \quad i = 1, ..., n$$

Ако озн. $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ $x' = \begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix}$, то

тия формули са еквивалентни на матричното равенство $x = Tx'$

2) Ако P е точка от A_n ($P \in A_n$) и $P(x_1, ..., x_n)$ спрямо K и $P(x_1', ..., x_n')$ спрямо K', то

$$x_i = S_i + \sum_{j=1}^{n} t_{ij} x_j', \quad i = 1, ..., n$$

Ако означим $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ $x' = \begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix}$, $S = \begin{pmatrix} S_1 \\ \vdots \\ S_n \end{pmatrix}$,

то тия формули са еквивалентни на матрично равенство $x = S + Tx'$

Имаме $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'P}$

Доказателство: 2) По деф. координатите на P спрямо K съвпадат с коорд. на $\overrightarrow{OP}$ спрямо K. Аналог. коорд. на O' спрямо K съвпадат с координатите на $\overrightarrow{OO'}$ спрямо K. Аналогично координатите на $\overrightarrow{O'P}$ спрямо K' съвпадат с координатите на P спрямо K'. $\Rightarrow \overrightarrow{O'P} = \sum_{j=1}^{n} x_j' e_j'$ (защото $\overrightarrow{O'P}(x_1', ..., x_n')$ спрямо K')

$\Rightarrow \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OO'} + \sum_{j=1}^{n} x_j' e_j'$

По теорема 2 от предишния въпрос

$\Rightarrow$ (i-тата координата на $\overrightarrow{OP}$ спрямо K) =

= (i-тата координата на $\overrightarrow{OQ'}$ спрямо K) +

+ $\sum_{j=1}^{n} x_j'$ (i-тата координата на e_j' спрямо K)

$\Rightarrow x_i = s_i + \sum_{j=1}^{n} x_j' . t_{ij} \Rightarrow x_i = s_i + \sum_{j=1}^{n} t_{ij} x_j' \quad i = 1, \dots, n$

Забележка: От $x = s + Tx'$ можем да изразим и координатите спрямо K' чрез тези спрямо K

$-s + x = Tx' \Rightarrow x' = T^{-1}(-s + x) = -T^{-1}s + T^{-1}x$

В частния случай, когато K и K' са ортонормирани, т.е. базисите e и e' са ортонормирани, от линейната алгебра, следва че T е ортогонална, т.е. $T^{-1} = T^t$ и формулата се опростява: $x' = -T^t s + T^t x = T^t(-s + x)$

Скаларно произведение

Нека фиксираме единична отсечка за измерване (в тоя и следващите два въпроса)

Теорема 1: Нека $K = Oe_1e_2e_3$ е ортонормирана координатна с-ма. ~~Ако~~

1) Ако ~~вързът~~ векторът u има спрямо K коорд. (x_1, x_2, x_3), то $|u| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$

2) Ако т. P и Q имат спрямо K координати $P(x_1, x_2, x_3)$, $Q(y_1, y_2, y_3)$

$$|PQ| = \sqrt{(y_1-x_1)^2+(y_2-x_2)^2+(y_3-x_3)^2}$$

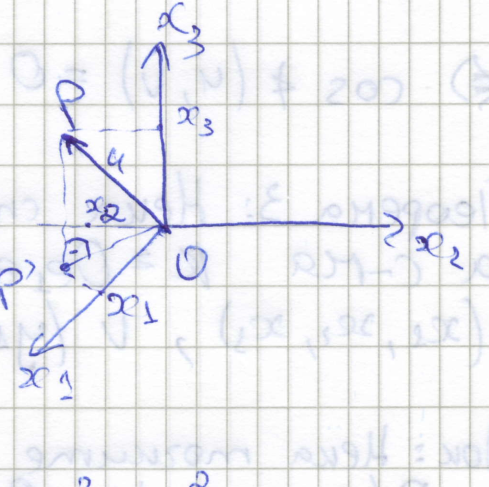
Док:

1) $u = \overrightarrow{OP}$ където $P(x_1, x_2, x_3)$

Нека P' е ортогонална проекция на P в равн. Ox_1x_2

По теоремата на Питагор

$|OP|^2 = |OP'|^2 + |PP'|^2$



Имаме $P'(x_1, x_2, 0)$

По Питагор: $|OP'|^2 = |x_1|^2 + |x_2|^2 = x_1^2 + x_2^2$

$|PP'|^2 = |x_3|^2 = x_3^2 \Rightarrow |OP|^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$

$\Rightarrow |u| = |OP| = \sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}$

2) Имаме $\overrightarrow{PQ}(y_1-x_1, y_2-x_2, y_3-x_3)$

$$|PQ| = |\overrightarrow{PQ}| \underset{\text{от } 1)}{=} \sqrt{(y_1-x_1)^2+(y_2-x_2)^2+(y_3-x_3)^2}$$

Дефиниция: Скаларно произведение на векторите u и v се нарича числото $\langle u, v\rangle \in \mathbb{R}$, дефинирано по следния начин:

а) ако $u=0$ или $v=0$, то $\langle u,v\rangle = 0$

б) ако $u \neq 0$ и $v \neq 0$, то $\langle u,v\rangle = |u|\,|v| \cos\sphericalangle(u,v)$

Пример: $\langle u,u\rangle = |u|\,|u| \cos\sphericalangle(u,u) = |u|^2$, при $u \neq 0$

$\langle u,u\rangle = 0 = |u|^2$ при $u = 0$

Други означения: uv или (u,v)

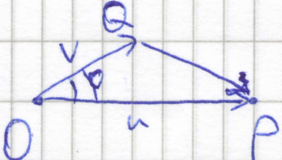
Теорема 2: Ненулевите вектори u и v са перпендикулярни $\Leftrightarrow$ $\langle u, v\rangle = 0$

Док: $\langle u, v \rangle = 0 \Leftrightarrow \underbrace{|u|}_{\neq 0} . \underbrace{|v|}_{\neq 0} \cos\sphericalangle(u,v) = 0$

$\Leftrightarrow \cos\sphericalangle(u,v) = 0 \Leftrightarrow \sphericalangle(u,v) = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow u \perp v$

Теорема 3: Нека спрямо ортонормираната квадратна с-ма $K = Oe_1e_2e_3$ вектори u и v имат коорд. $u(x_1, x_2, x_3)$, $v(y_1, y_2, y_3)$. Тогава $\langle u, v\rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$

Док: Нека точките P и Q са такива, че $u = \overrightarrow{OP}$, $v = \overrightarrow{OQ}$
$\Rightarrow P(x_1, x_2, x_3)$, $Q(y_1, y_2, y_3)$



Озн. $\sphericalangle(u,v) = \varphi \Rightarrow \varphi = \sphericalangle POQ$

$\cos T: |PQ|^2 = |OP|^2 + |OQ|^2 - 2|OP||OQ|\cos\varphi$

$|OP| . |OQ| . \cos\varphi = |u||v| . \cos\sphericalangle(u,v) = \langle u, v\rangle$

$|PQ|^2 = \underbrace{|OP|^2}_{=|u|^2} + \underbrace{|OQ|^2}_{=|v|^2} - 2\langle u, v\rangle$

$\Rightarrow \langle u, v \rangle = \frac{1}{2}\left[|u|^2 + |v|^2 - |PQ|^2\right]$

По теорема 1: $|u|^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$

$|PQ|^2 = (y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + (y_3 - x_3)^2$

$\Rightarrow \langle u, v\rangle = \ldots = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$, при $u, v \neq 0$

При $u = 0$ или $v = 0$ имаме $\langle u, v\rangle = 0 = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$

Ш.1.36

От теоремите 1, 2 и 3 получаваме:

Теорема 4: Нека спрямо ортонормираната коорд. с-ма ненулевите вектори u и v имат коорд. $u(x_1, x_2, x_3)$, $v(y_1, y_2, y_3)$

Тогава:

1) $u \perp v \Leftrightarrow x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 = 0$

2) $\cos \sphericalangle(u, v) = \dfrac{x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3}{\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2} \cdot \sqrt{y_1^2+y_2^2+y_3^2}}$

Теорема 5: Скаларното произведение има следните свойства:

1) $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$ симетричност

2) $\langle u+v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$ адитивност по първия аргумент

3) $\langle \lambda u, v \rangle = \lambda \langle u, v \rangle$ хомогенност по първия арг.

4) Ако $u \neq 0$, то $\langle u, u \rangle > 0$ положителна дефинитност

Доказателство: Нека сме фиксирали ортонормирана коорд. с-ма и спрямо нея u, v, w имат коорд. $u(x_1, x_2, x_3)$, $v(y_1, y_2, y_3)$, $w(z_1, z_2, z_3)$

1) $\langle v, u \rangle = y_1x_1 + y_2x_2 + y_3x_3 = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 = \langle u, v \rangle$
(следва директно от деф., защото $\sphericalangle(v, u) = \sphericalangle(u, v)$)

2) Имаме $u+v(x_1+y_1, x_2+y_2, x_3+y_3) \Rightarrow \langle u+v, w \rangle =$
$= (x_1+y_1)z_1 + (x_2+y_2)z_2 + (x_3+y_3)z_3 = (x_1z_1 + x_2z_2 + x_3z_3) +$
$+ (y_1z_1 + y_2z_2 + y_3z_3) = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$

3) Имаме $\lambda.u(\lambda.x_1, \lambda x_2, \lambda x_3) \Rightarrow \langle \lambda u, v \rangle =$
$= (\lambda x_1)y_1 + (\lambda x_2)y_2 + (\lambda x_3)y_3 = \lambda(x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3) =$
$= \lambda \langle u, v \rangle$

④ Ако $u \neq 0$, то поне една коорд. е $\neq 0$

г) $\langle u,u\rangle = x_1^2+x_2^2+x_3^2 > 0$

(следва и от деф., защото $\langle u,u\rangle = |u|^2 > 0$

От ~~...~~ тая точка получаваме:

Следствие: Скаларното произведение на вектора е скаларно произведение в смисъл на линейната алгебра.

Следователно векторите в пространството образуват тримерно пространство (евклидово) в смисъл на линейната алгебра.

Забележка: 1) Ако $u=0$ $\langle u,u\rangle = 0$ - следва и от деф., и от ③ с $\lambda = 0$. Така, че ④ може да се напише:

$\langle u,u\rangle \geq 0$ $u = \Leftrightarrow u=0$

2) Свойствата ② и ③ са еквивалентни заедно на свойството $\langle \lambda u+\mu v, w\rangle = \lambda\langle u,w\rangle + \mu\langle v,w\rangle$ за $\lambda, \mu \in R$ - линейност по първия аргумент.

3) От симетричността следва, че скаларното произв. е адитивно, хомогенно и линейно и по втория си аргумент т.е. $\langle u, v+w\rangle = \langle u,v\rangle + \langle u,w\rangle$

$\langle u, \lambda v\rangle = \lambda\langle u,v\rangle$; $\langle u, \lambda v+\mu w\rangle = \lambda\langle u,v\rangle + \mu\langle u,w\rangle$

Твърдение: Нека спрямо произволна афинна коорд. с-ма $K_{Oe_1e_2e_3}$ векторите u и v имат коорд. $u(x_1, x_2, x_3)$ $v(y_1, y_2, y_3)$. Тогава:

$$\langle u, v \rangle = \sum_{i,j=1}^{3} g_{ij} x_i y_j = g_{11} x_1 y_1 + g_{22} x_2 y_2 + g_{33} x_3 y_3 +$$
$$+ g_{12}(x_1 y_2 + x_2 y_1) + g_{13}(x_1 y_3 + x_3 y_1) + g_{23}(x_2 y_3 + x_3 y_2),$$

където $g_{ij} = \langle e_i, e_j \rangle$

Док: $\langle u, v \rangle = \langle \sum_{i=1}^{3} x_i e_i, \sum_{j=1}^{3} y_j e_j \rangle$

От линейността на скаларното произведение по двата аргумента:

$$\Rightarrow \langle u, v \rangle = \sum_{i,j=1}^{3} x_i y_j \underbrace{\langle e_i, e_j \rangle}_{= g_{ij}} = \sum_{i,j=1}^{3} x_i y_j g_{ij} =$$

$$= \sum_{i,j=1}^{3} g_{ij} x_i y_j$$

Второто равенство следва от това като се вземе предвид, че $g_{ji} = \langle e_j, e_i \rangle = \langle e_i, e_j \rangle = g_{ij}$

Забележка: Всичко в този въпрос важи и в равнината (а и върху права) като се махнат третите координати (а в/у права - вторите и третите) и в следствието пространството е двумерно (а в/у права - едномерно)

Векторно произведение

Нека в пространството е фиксирана ориентация и единична отсечка за измерване на дължини.

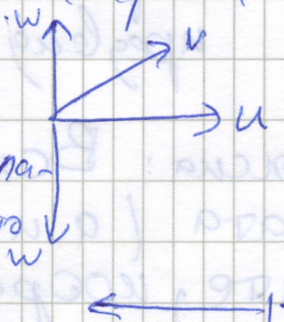
Дефиниция: Векторно произведение на векторите u и v се нарича векторът $u \times v$ (и вектор в/у u), деф. по следния начин:

а) Ако u и v са колинеарни, то $u \times v = 0$

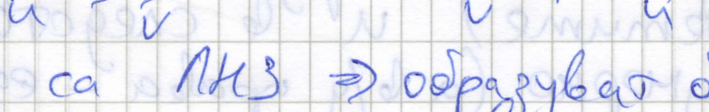
б) Ако u и v не са колинеарни, то $u \times v$ е единствения вектор, който има свойствата:

1) $|u \times v| = |u||v| \sin\sphericalangle(u,v)$
2) $u \times v \perp u, v$
3) $u, v, u \times v$ образуват положително ориентиран базис (дясна тройка)

Забележка: 1) Ясно е, че има точно 2 вектора w, които удовлетворяват усл. $|w| = |u||v| \sin\sphericalangle(u,v)$ и $\{w\} \perp u, v$ u и v – не са колинеарни



За всеки от тия два w векторите u, v, w не са компланарни (защото $\sin\sphericalangle(u,v) \neq 0$, защото $\sphericalangle(u,v) \neq 0$ и $\neq \pi$



$u \Rightarrow w \neq 0 \Rightarrow u, v, w$ са ЛНЗ $\Rightarrow$ образуват базис защото прост. е 3-мерно $\Rightarrow$ можем да говорим за ориентация на базиса

Двата базиса имат едни и същи първи два вектора,

П. 1.40

а третите са противоположни ⇒ двата вектора задават противоположни ориентации
⇒ точно един от тях, задава полож. ориентация
⇒ наистина $u \times v$ е единствен (и съществува)

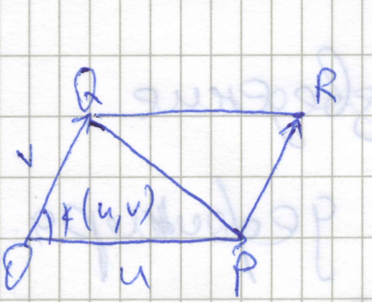
2) Ако $u \parallel v$, но $u \neq 0$, $v \neq 0$, то пак имаме $\underbrace{|u \times v|}_{0} = |u||v| \sin \underbrace{\sphericalangle(u, v)}_{0}$, защото $\sphericalangle(u,v) = 0$ или π

$\Rightarrow \sin \sphericalangle(u,v) = 0$

От дефо. ⇒ Теорема 1: ~~Нека~~ Векторите u и v са колинеарни $\Leftrightarrow u \times v = 0$

Теорема 2: Нека u и v са неколинеарни ⇒ $S_{усп.}$, построен в/у u и v е $|u \times v|$, а $S_{триъг.}$, построен в/у u и v е $\frac{1}{2}|u \times v|$

Доказателство: Нека O е произв. точка и точките P и Q: $\vec{OP} = u$ и $\vec{OQ} = v$. Нека R: $OPRQ$ е усп.



(т.е. $\vec{PR} = v$)
$OPRQ$ се нарича усп. построен в/у u и v.

$\sphericalangle POQ = \sphericalangle(u,v)$
OPQ е триъгълника построен в/у u и v. ~~Неговото~~

$S_{OPRQ} = |OP| \cdot |OQ| \sin \overset{POQ}{\sphericalangle(v,u)} =$
$= |u| \, |v| \cdot \sin \sphericalangle(u,v) = |u \times v|$
$S_{OPQ} = \frac{1}{2} S_{OPRQ} = \frac{1}{2}|u \times v|$

Теорема 3: Нека спрямо полож. ориентираната ортонорм. коорд. с-ма $K = Oe_1e_2e_3$ векторите u и v имат коорд. $u(x_1, x_2, x_3)$, $v(y_1, y_2, y_3)$. Тогава
$u \times v(x_2y_3 - x_3y_2,\ x_3y_1 - x_1y_3,\ x_1x_2 - x_2y_1)$

Забележка: формулата за коорд. на векторните произв. се помни така:

$$u \times v = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & e_1 \\ x_2 & y_2 & e_2 \\ x_3 & y_3 & e_3 \end{vmatrix} = z_1e_1 + z_2e_2 + z_3e_3$$

Тогава $u \times v(z_1, z_2, z_3)$. Ако развием det по 3-тия стълб, получаваме $\cancel{e_1}$. $z_1 = \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix}$ $z_2 = \begin{vmatrix} x_3 & y_3 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix}$
$z_3 = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}$ т.е. координатите на $u \times v$ са минорите на $\begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{pmatrix}$ (i-тата коорд. е минора, който се получава чрез задраскване на i-тия ред, като само при i=2 се взима с минус (или винаги се взима с +, но се започва от следващия ред.)

Векторно произведение

Деф. u, v - вектори $u \times v$ се дефинира е

а) ако $u \parallel v$, то $u \times v = 0$

б) ако u не е колинеарни на v, то $u \times v$ е единствения вектор, за който

III.1.42

$|u \times v| = |u||v| \sin \sphericalangle(u,v)$

$u \times v \perp u, v$

$u, v, u \times v$ е положе. ориент. базис

Т3: Нека спрямо положе. ориент. коорд. с-ма

$K = Oe_1e_2e_3$ векторите u и v имат коорд

$u(x_1, x_2, x_3)$, $v(y_1, y_2, y_3)$

Тогава $u \times v$ има спрямо K коорд.

$$u \times v(\underbrace{x_2y_3 - x_3y_2}_{\begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix}}, \underbrace{x_3y_1 - x_1y_3}_{\begin{vmatrix} x_3 & y_3 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix}}, \underbrace{x_1y_2 - y_2x_1}_{\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}})$$

Доказателство: Нека w е векторът с коорд.

$w(x_2y_3 - x_3y_2,\ x_3y_1 - x_1y_3,\ x_1y_2 - x_2y_1)$

Имаме да док, че $w = u \times v$

Нека $u \parallel v$. Ако $u = 0 \Rightarrow w = 0 = u \times v$

Нека $u \neq 0$, но $u \parallel v \Rightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} : v = \lambda u$

$\Rightarrow y_i = \lambda x_i,\ i = 1, 2, 3 \Rightarrow w = 0 = u \times v \Rightarrow$

$\Rightarrow$ имаме $u \parallel v$ имаме $w = u \times v$

Нека сега u и v не са колинеарни

$$|w|^2 = (x_2y_3 - x_3y_2)^2 + (x_3y_1 - x_1y_3)^2 + (x_1y_2 - x_2y_1)^2 =$$

$$= (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2) - (x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3)^2 =$$

$$= |u|^2 |v|^2 - \langle u, v\rangle^2 = |u|^2|v|^2 - |u|^2|v|^2 \cos^2 \measuredangle(u,v)$$

$$= |u|^2|v|^2(1 - \cos^2 \measuredangle(u,v)) = |u|^2|v|^2 \sin^2 \measuredangle(u,v)$$

$$\Rightarrow |w| = |u||v| \sin \measuredangle(u,v)$$

$$\langle w, u\rangle = (x_2y_3 - x_3y_2)x_1 + (x_3y_1 - x_1y_3)x_2 + (x_1y_2 - y_2x_1)x_3 =$$

$$= \ldots = 0 \Rightarrow w \perp u$$

Аналогично $w \perp v$

За да док, че u, v, w е полож. ориентиран базис, трябва да сметнем детерминантата на матрицата на прехода от базис e_1, e_2, e_3 към базис u, v, w

Тя е

$$\det\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & x_2y_3 - x_3y_2 \\ x_2 & y_2 & x_3y_1 - x_1y_3 \\ x_3 & y_3 & x_1y_2 - x_2y_1 \end{pmatrix} =$$

развиване по трети стълб

$$= (x_2y_3 - x_3y_1)\begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} + (x_3y_1 - x_1y_3)\begin{vmatrix} x_3 & y_3 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix} + (x_1y_2 - x_2y_1)\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} =$$

$$= (x_2y_3 - x_3y_2)^2 + (x_3y_1 - x_1y_3)^2 + (x_1y_2 - x_2y_1)^2 = |w|^2 > 0,$$ защото

$$|w|^2 = \underbrace{|u|^2}_{\neq 0} \underbrace{|v|^2}_{\neq 0} \underbrace{\sin^2 \measuredangle(u,v)}_{> 0},$$ (защото ако $\sin \measuredangle(u,v) = 0$, то

III. 1.44

$\sin \sphericalangle(u, v) = 0$ или π и бихме имали $u \parallel v$ (противоположни)

$\Rightarrow u, v, w$ е базис, който е еднакво ориентиран с e_1, e_2, e_3 K – положи. ориентиран $\Rightarrow$

~~$\Rightarrow e_1, e_2, e_3$~~ $\Rightarrow u, v, w$ е положи. ориентиран

$\Rightarrow w = u \times v$

ТЧ: Векторното произведение има следните свойства:

1) $v \times u = -u \times v$ (антисиметричност)

2) $(u+v) \times w = u \times w + v \times w$ (адитивност)
$u \times (v+w) = u \times v + u \times w$ по двата аргумента

3) Ако $\lambda \in \mathbb{R}$, то $(\lambda u) \times v = \lambda \cdot (u \times v)$
$u \times (\lambda v) = \lambda \cdot (u \times v)$ (хомогенност по двата аргумента)

Доказателство: Нека $K = Oe_1e_2e_3$ е положи. ориент. ортонорм. коорд. с-ма и нека коорд. на u, v, w спрямо K са $u(x_1, x_2, x_3)$, $v(y_1, y_2, y_3)$, $w(z_1, z_2, z_3)$.

1) $u \times v \left(\begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_3 & y_3 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \right)$

$v \times u \left(\begin{vmatrix} y_2 & x_2 \\ y_3 & x_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} y_3 & x_3 \\ y_1 & x_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} y_1 & x_1 \\ y_2 & x_2 \end{vmatrix} \right)$

$$\begin{array}{ccc} \parallel & \parallel & \parallel \\ -\begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} x_3 & y_3 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \end{array}$$

$\Rightarrow v \times u = -u \times v$

② $u+v(x_1+y_1, x_2+y_2, x_3+y_3)$

$$\Rightarrow (u+v)\times w\left(\begin{vmatrix} x_2+y_2 & z_2 \\ x_3+y_3 & z_3\end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_3+y_3 & z_3 \\ x_1+y_1 & z_1\end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1+y_1 & z_1 \\ x_2+y_2 & z_2\end{vmatrix}\right)$$

$$\begin{vmatrix} x_2 & z_2 \\ x_3 & z_3\end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y_2 & z_2 \\ y_3 & z_3\end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} x_3 & z_3 \\ x_1 & z_1\end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y_3 & z_3 \\ y_1 & z_1\end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2\end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2\end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow (u+v)\times w = u\times w + v\times w$$

$$u\times(v+w) = -(v+w)\times u = -(v\times u + w\times u) =$$

$$= u\times v + u\times w$$

③ $\lambda u(\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3) \Rightarrow (\lambda u)\times v\left(\begin{vmatrix} \lambda x_2 & y_2 \\ \lambda x_3 & y_3\end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \lambda x_3 & y_3 \\ \lambda x_1 & y_1\end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \lambda x_1 & y_1 \\ \lambda x_2 & y_2\end{vmatrix}\right)$

$$\lambda\begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3\end{vmatrix} \quad \lambda\begin{vmatrix} x_3 & y_3 \\ x_1 & y_1\end{vmatrix} \quad \lambda\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2\end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow (\lambda u)\times v = \lambda(u\times v)$$

$$u\times(\lambda v) = -(\lambda v)\times u =$$

$$= -\lambda\cdot(v\times u) = \lambda(-v\times u) = \lambda(u\times v)$$

Забележка: (Свойствата 2 и 3 заедно са еквивалентни на свойството:

$$(\lambda u+\mu v)\times w = \lambda(u\times w) + \mu v\times w$$
$$u\times(\lambda v+\mu w) = \lambda(u\times v) + \mu(u\times w)$$

(- линейност по двата аргумента
билинейност по двата аргумента)

П 1.46

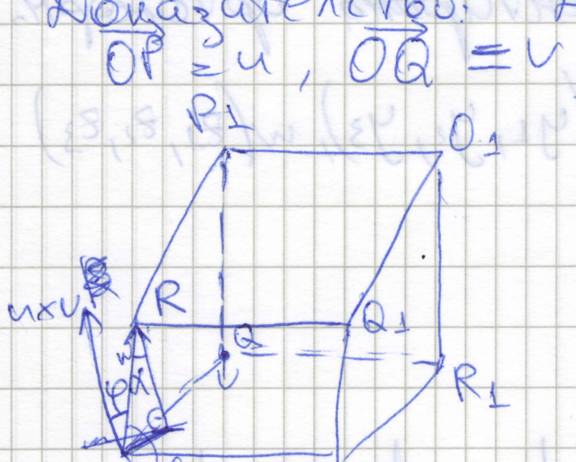
Смесено произведение

Отново считаме, че в пространството е зададена ориентация и единична отсечка

Дефиниция: Смесено произведение на векторите u, v, w се нарича числото $(u, v, w) := \langle u \times v, w \rangle$
друго означение: uvw

Т1: Нека u, v, w са некомпланарни вектори. Тогава обемът на паралелепипеда, построен в/у тях, е ~~смесеното произведение~~ $|(u, v, w)|$, а обемът на тетраедъра, построен в/у тях е $\frac{1}{6}|(u, v, w)|$.

Доказателство: Нека т. P, Q, R са ~~точки~~ такива, че $\overrightarrow{OP} = u$, $\overrightarrow{OQ} = v$, $\overrightarrow{OR} = w$



$OPR_1QRQ_1O_1P_1$ е паралелепипед построен в/у u, v, w
Нека h е височината от R към OPR_1Q
$\Rightarrow V = S_{OPR_1Q}\, h$

OPR_1Q е успоредник, построен в/у u и v

$\Rightarrow S_{OPR_1Q} = |u \times v| \Rightarrow h = |w|\cos\alpha \quad \varphi = \sphericalangle(u \times v, w)$

Ако $\varphi \le \frac{\pi}{2}$, то $\alpha = \varphi \Rightarrow \cos\alpha = \cos\varphi \ge 0$

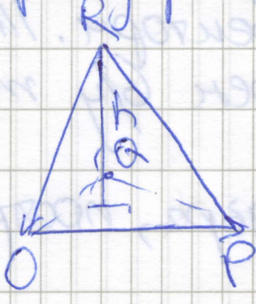
Ако $\varphi > \frac{\pi}{2}$, то $\alpha = \pi - \varphi \Rightarrow \cos\alpha = \cos(\pi - \varphi) = -\cos\varphi > 0$

$\Rightarrow$ винаги $\cos\alpha = |\cos\varphi|$

$\Rightarrow V = |u \times v| \cdot |w| \cdot \cos\alpha = |u \times v| \cdot |w| \cdot |\cos\varphi| =$

$= \big| |u \times v| \cdot |w| \cdot \cos\varphi \big| = |\langle u \times v, w \rangle| = |(u, v, w)|$

Тетраедърът, построен в/у u, v, w е $OPQR$



$\Rightarrow V_{OPQR} = \frac{1}{3} S_{OPQ} \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} S_{OPR_1Q} \cdot h =$

$= \frac{1}{6} V_{\text{паралелепипед}} = \frac{1}{6} |(u, v, w)|$

Т2: Нека спрямо полож. ориентирана ортонорм. коорд. с-ма $K = Oe_1e_2e_3$ вектори $u(x_1, x_2, x_3)$, $v(y_1, y_2, y_3)$, $w(z_1, z_2, z_3)$

Тогава:

$$(u, v, w) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

Доказателство:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} \xlongequal[\text{по 3-ти стълб}]{\text{развие}} \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} z_1 + \begin{vmatrix} x_3 & y_3 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix} z_2 +$$

$$+ \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} z_3 = \langle u \times v, w \rangle = (u, v, w)$$

Т3: Векторите u, v, w са компланарни $\Leftrightarrow (u, v, w) = 0$

Док: Нека K е ортонорм. полож. ориентирана коорд. с-ма.
Тогава $(u, v, w) = 0 \Leftrightarrow$ детерм. от коорд. на u, v, w е 0.
$\Leftrightarrow$ u, v, w са компланарни
по следствие 3 от въпроса за аналитичното представяне на линейна с вектори.

Т4: Смесеното произведение има следните свойства:

① $(u, v, w) = -(v, u, w) = -(w, v, u) = -(u, w, v)$ (антисиметричност)

② $(u, v, w) = (v, w, u) = (w, u, v)$ (цикличност)

③ $(u_1+u_2, v, w) = (u_1, v, w) + (u_2, v, w)$
$(u, v_1+v_2, w) = (u, v_1, w) + (u, v_2, w)$
$(u, v, w_1+w_2) = (u, v, w_1) + (u, v, w_2)$
(адитивност по трите аргумента)

④ $\lambda (u, v, w) = (\lambda u, v, w) = (u, \lambda v, w) = (u, v, \lambda w)$ за $\lambda \in \mathbb{R}$ (хомогенност по трите аргумента)

~~Доказа~~ Доказателство:
Следва от свойствата на det или от свойствата на скаларното и векторното произведение.

Забележка: Смесеното произведение е линейно по трите си аргумента. 3 и 4 - свойства са еквивалентност по трите аргумента.

$(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2, v, w) = \lambda_1 (u_1, v, w) + \lambda_2 (u_2, v, w)$

(трилинейност)

Т.5: Нека спрямо афинната коорд. с-ма $K = Oe_1e_2e_3$ векторите u, v, w имат коорд. $u(x_1, x_2, x_3)$, $v(y_1, y_2, y_3)$, $w(z_1, z_2, z_3)$

Тогава:

$$(u, v, w) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} \cdot (e_1, e_2, e_3)$$

Доказателство: $(u, v, w) = \left(\sum_{i=1}^{3} x_i e_i, \sum_{j=1}^{3} y_j e_j, \sum_{k=1}^{3} z_k e_k\right)$

$\Rightarrow \sum_{i,j,k=1}^{3} x_i y_j z_k (e_i, e_j, e_k)$ - от трилинейността

Ако в (e_i, e_j, e_k) два вектора съвпадат, то от антисиметричността $(e_i, e_j, e_k) = 0$

$\Rightarrow$ различни от 0 са само когато e_i, e_j, e_k са различни

От Т.4 в този случай (e_i, e_j, e_k) се изразява чрез (e_1, e_2, e_3), като се направи това се получава

$(u, v, w) = (x_1 y_2 z_3 - x_1 y_3 z_2 - x_2 y_1 z_3 + x_2 y_3 z_1 + x_3 y_1 z_2 - x_3 y_2 z_1)(e_1, e_2, e_3)$

III. 1.50

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} \cdot (e_1, e_2, e_3)$$

Общи бележки

Нека $X \subset A_n$ множества и $K = Oe_1e_2 \ldots e_n$ е афинна коорд. с-ма

1) Нека A е множество и $f, g : X \to A$

Ако $P(x_1, \ldots, x_n) \in X \Leftrightarrow f(x_1, \ldots, x_n) = g(x_1, \ldots, x_n)$, то казваме че $f(x_1, \ldots, x_n) = g(x_1, \ldots, x_n)$ е уравнение на X спрямо K и пишем $X : f(x_1, \ldots, x_n) = g(x_1, \ldots, x_n)$

2) Нека Λ е множе. и $h : \Lambda \to \mathbb{R}^n$, $h = (h_1, \ldots, h_n)$

Ако $P(x_1, \ldots, x_n) \in X \Leftrightarrow \exists \lambda \in \Lambda : x_1 = h_1(\lambda), \ldots, x_n = h_n(\lambda)$, то казваме, че

$x_1 = h_1(\lambda), \ldots, x_n = h_n(\lambda)$ са (скаларни) параметрични уравнения на X и пишем:

$$X: \begin{cases} x_1 = h_1(\lambda) \\ \vdots \\ x_n = h_n(\lambda) \end{cases}, \quad \lambda \in \Lambda$$

Понякога се поставя изискването λ да е единствена.

3) Нека Λ е множ. и $\vec{h}: \Lambda \to V_n$

За $P \in A_n$ озн. $r = \overrightarrow{OP}$

(r се нарича радиус-вектор на P ~~спр~~ относно K)

Ако $P \in X \iff \exists \lambda \in \Lambda: r = \vec{h}(\lambda)$, то казваме се

$r = \vec{h}(\lambda)$ е векторно параметрично уравнение на X спрямо K (всъщност зависи само от началото O) и пишем $X: r = \vec{h}(\lambda), \lambda \in \Lambda$.

~~спрямо~~

4) Връзка м/у скаларни параметрични уравнения и векторно параметрично уравнение:

Имаме $\varkappa: V_n \to \mathbb{R}^n: v(x_1, \dots, x_n) \longmapsto (x_1, \dots, x_n)$

н. $\varkappa$ е биекция

Нека $X: r = \vec{h}(\lambda), \lambda \in \Lambda$ – векторно параметрично уравнение

Деф: $h: \Lambda \to \mathbb{R}^n: \underbrace{h}_{(h_1 \dots h_n)} = \varkappa \circ \vec{h}$

III. 152

Имаме, че коорд. спрямо K на P и r са едни и същи $\Rightarrow P(x_1, \dots, x_n) \in X \Leftrightarrow \exists \lambda \in \Lambda :$
$r = \bar{h}(\lambda) \Leftrightarrow \exists \lambda \in \Lambda : x(r) = x(\bar{h}(\lambda))$

$\Leftrightarrow \exists \lambda \in \Lambda : (x_1, \dots, x_n) = \bar{h}(\lambda)$

$\Leftrightarrow \exists \lambda \in \Lambda : x_1 = h_1(\lambda), \dots, x_n = h_n(\lambda)$

$$\Rightarrow X : \begin{cases} x_1 = h_1(\lambda) \\ x_n = h_n(\lambda) \end{cases}, \lambda \in \Lambda$$

са скаларни параметрични уравнения на X

Обратно, ако $X : \begin{cases} x_1 = h_1(\lambda) \\ x_n = h_n(\lambda) \end{cases}, \lambda \in \Lambda$

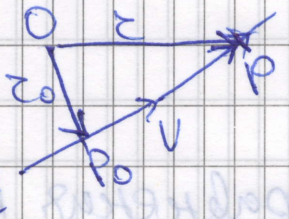
са скаларни параметрични уравнения на X, то деф. $\bar{h} : V_n \to \Lambda : \bar{h} = x_0^{-1} \cdot h$ където $h = (h_1, \dots, h_n) \Lambda \to R^n$ и аналогично на по-горе получаваме, че $X : r = \bar{h}(\lambda), \lambda \in \Lambda$

$\Rightarrow$ скаларните параметрични уравнения са векторното параметрично уравнение описано покоординатно.

Параметрични уравнения на права и отсечка

1) Нека l е права, $v \neq 0$ е вектор колинеарен с l и $P_0 \in l$.

Тогава ако $P \in l$, то $\overrightarrow{P_0P} \parallel l \Rightarrow \overrightarrow{P_0P} \parallel v$



$\Rightarrow \exists \lambda \in R : \overrightarrow{P_0P} = \lambda v$.

Обратно, ако $\overrightarrow{P_0P} = \lambda \cdot v$, то очевидно $P \in l$.

$\Rightarrow P \in l \Leftrightarrow \exists \lambda \in R : \overrightarrow{P_0P} = \lambda v$

Нека K е коорд. с-ма спрямо O

Нека r_0 и r са радиус-векторите на P_0 и P

$\Rightarrow \overrightarrow{P_0P} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OP_0} = r - r_0 \Rightarrow P \in l \Leftrightarrow \exists \lambda \in R : r - r_0 = \lambda v$

$\Leftrightarrow \exists \lambda \in R : r = r_0 + \lambda v$

$\Rightarrow l : r = r_0 + \lambda v, \lambda \in R$ е векторно параметрично уравнение на l спрямо K.

2) Нека $K = Oxyz$ и нека коорд. спрямо K на P_0 и v са $P_0(x_0, y_0, z_0)$, $v(a, b, c)$. за $\lambda \in R$

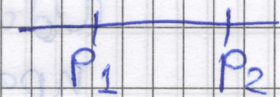
Тогава $P(x, y, z) \in l \Leftrightarrow x = x_0 + \lambda a$ $y = y_0 + \lambda b$ $z = z_0 + \lambda c$ (защото векторното параметрично уравнение е еквивалентно на уравненията, които се получават, когато то се запише покоординатно)

⇒ Скаларни параметрични уравнения на l са

$$(1)\quad l: \begin{cases} x = x_0 + \lambda a \\ y = y_0 + \lambda b \\ z = z_0 + \lambda c \end{cases}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

3) Параметрични уравнения на права, зададена с две точки. Нека P_1 и $P_2 \in l$, $P_1 \neq P_2$ и спрямо K имат координати

$P_1(x_1, y_1, z_1)$ $\quad P_2(x_2, y_2, z_2)$



Тогава в предишните разсъждения можем да вземем $P_0 := P_1$, $v = \overrightarrow{P_1P_2}$ и получаваме скаларни параметрични уравнения

$$(2)\quad P_1P_2: \begin{cases} x = x_1 + \lambda(x_2 - x_1) \\ y = y_2 + \lambda(y_2 - y_1) \\ z = z_2 + \lambda(z_2 - z_1) \end{cases}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

$\Rightarrow v(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$

или еквивалентно

$$(3)\quad P_1P_2: \begin{cases} x = (1-\lambda)x_1 + \lambda x_2 \\ y = (1-\lambda)y_1 + \lambda y_2 \\ z = (1-\lambda)z_1 + \lambda z_2 \end{cases}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

4) Параметрични уравнения на отсечка

Нека $P_1 \neq P_2$ $\quad P \in$ затворена отсечка P_1, P_2

$\Leftrightarrow \overrightarrow{P_1P} = \lambda \cdot \overrightarrow{P_1P_2}$, където $\lambda \in [0, 1]$

$P \in$ отворена отсечка $P_1P_2 \Leftrightarrow \exists \lambda \in (0, 1)$: $\overrightarrow{P_1P} = \lambda \overrightarrow{P_1P_2}$ ⇒ с аналогични разсъждения като полузаване, че отс. P_1P_2 има параметрични уравнения (2) или еквивалентното (3), само че с $\lambda \in [0,1]$ в случая на затворена отсечка и с $\lambda \in (0,1)$ в случая на отворена отсечка!

Забележка: В равнината всичко е същото, като се махне третата координата.

Общо уравнение на права в равнината

Нека $K = Oxy$ е афинна коорд. с-ма в равнината

Т1: ~~Има 2 слоя~~ 1) Всяка права l има спрямо K уравнение от вида $Ax + By + C = 0$, където $(A,B) \neq (0,0)$

2) Всяко уравнение от вида $Ax + By + C = 0$, където $(A,B) \neq (0,0)$, е уравнение спрямо K на някоя права

Доказателство: 1) Нека $P_0(x_0, y_0) \in l$ и $v(a,b) \parallel l$, $v \neq 0$

$\Rightarrow P(x,y) \in l \Leftrightarrow \overrightarrow{P_0P} \parallel v \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ От следствие 2 от аналитично изразяване на линейни операции с вектори

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-x_0 & a \\ y-y_0 & b \end{vmatrix} = 0$$

$\uparrow$ коорд. на $\overrightarrow{P_0P}$ $\quad$ $\uparrow$ коорд. на v

$\Leftrightarrow b(x-x_0) - a(y-y_0) = 0$

$\Leftrightarrow bx - ay - bx_0 + ay_0 = 0$

Означаваме $A := b$, $B := -a$, $C := -bx_0 + ay_0$

$\Rightarrow P(x,y) \in l \Leftrightarrow Ax + By + C = 0$

$\Rightarrow Ax + By + C = 0$ е уравнение на l

$(A,B) = (b,-a) \neq (0,0)$, защото $v(a,b) \neq 0$

2) $Ax+By+C=0$ има решение, защото $(A,B) \neq (0,0)$

(Ако $A \neq 0$ уравнението е еквивалентно на

$x = -\frac{B}{A}$, $y = -\frac{C}{A}$ и едното решение е $y=0$,

$x = -\frac{C}{A}$

Ако $B \neq 0$ аналог. има реш.)

Нека (x_0, y_0) е едното решение $\Rightarrow Ax_0 + By_0 + C = 0$

$\Rightarrow C = -Ax_0 - By_0$

Нека P_0 е т. к коорд. (x_0, y_0) и v е вектор с коорд. $(-B, A)$. $\Rightarrow v \neq 0$

Нека l е правата определена от т. P_0 и вектора v.

Озн. $a = -B$, $b = A$, т.е. $v(a, b)$

От 1) получаваме, че l има уравнение

$bx - ay - bx_0 + ay_0 = 0$

$\Rightarrow l : Ax + By \underbrace{\boxed{-Ax_0 - By_0}}_{C} = 0$

$\Rightarrow l : Ax + By + C = 0$

Деф: Уравнение на права, което има вида $Ax + By + C = 0$ (където $(A, B) \neq (0,0)$), се нарича общо уравнение на правата спрямо K.

Тв 1: 1) Правата l, която се задава с т. $P_0(x_0, y_0)$ и вектора $v(a, b) \neq 0$ има спрямо K общо уравнение $l : \begin{vmatrix} x - x_0 & a \\ y - y_0 & b \end{vmatrix} = 0$

2) Ако $P_1(x_1, y_1)$ и $P_2(x_2, y_2)$ са различни, то правата P_1P_2 има общо уравнение

$$P_1P_2 : \begin{vmatrix} x - x_1 & x_2 - x_1 \\ y - y_1 & y_2 - y_1 \end{vmatrix} = 0$$

или еквивалентно $\begin{vmatrix} x & x_1 & x_2 \\ y & y_1 & y_2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$

Т1 1.58

Доказателство: 1) Това го доказване в 1) на Т.1
2) правата P_1P_2 се определя от т. $P_0 = P_1$ и вектора $v = \overrightarrow{P_1P_2}(x_2 - x_1, y_2 - y_1)$

Като заместим в първата част получаваме първото уравнение. Второто уравнение следва от първото, защото: $\begin{vmatrix} x & x_1 & x_2 \\ y & y_1 & y_2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$

$$= \begin{vmatrix} x - x_1 & x_1 & x_2 - x_1 \\ y - y_1 & y_1 & y_2 - y_1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} x - x_1 & x_2 - x_1 \\ y - y_1 & y_2 - y_1 \end{vmatrix}$$

Тв. 2: Нека правата l има общо уравнение $Ax + By + C = 0$ ~~тогава първото твърдение~~ тогава: 1) Векторът $v(-B, A)$ е колинеарен с l
2) Векторът $u(a, b)$ е колинеарен с l $\Leftrightarrow$ $Aa + Bb = 0$

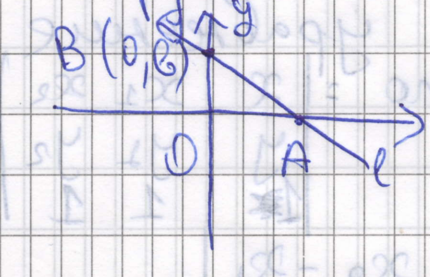
Доказателство: 1) Това го доказване в 2) част на Т1.
2) $u \parallel l \Leftrightarrow u \parallel v$ (защото ~~$v \neq 0$~~ v е ненулев вектор, $v \parallel l$) $\Leftrightarrow \begin{vmatrix} a & -B \\ b & A \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow Aa + Bb = 0$

$\square$

III.1.59

Отрезово уравнение на права

Нека ℓ е права която не минава през началото на коорд. с-ма и не е успоредна на коорд. оси



Нека $A(a,0) = \ell \cap Ox$
$B(0,b) = \ell \cap Oy$

$\Rightarrow A \neq O \Rightarrow a \neq 0$
$B \neq O \Rightarrow b \neq 0$

$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ е уравнение на ℓ (защото е еквивалентно $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1 = 0$ и A и B удовлетворяват това уравнение, т.е. това е общо уравнение на правата $AB = \ell$.

Това уравнение се нарича отрезово уравнение на ℓ спрямо K.

Декартово уравнение на права

Нека правата ℓ не е успоредна на оста Oy
Нека $Ax + By + C = 0$ е общо уравнения на ℓ.
Твърдим, че $B \neq 0$, защото ако $B = 0$ то $\cancel{A.0 + B.1 \neq 0}$
$A.0 + B.1 = 0 \Rightarrow$ (по Тв. 2) $e_2(0,1) \parallel \ell \Rightarrow Oy \parallel \ell$ - противоречие

$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$ Озн $k = -\frac{A}{B}$, $m = -\frac{C}{B} \Rightarrow$

$\Rightarrow \ell : y = kx + m$

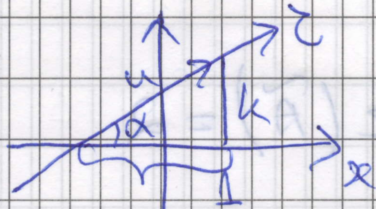
Уравнение на l от този вид се нарича декартово уравнение на l спрямо K. k се нарича ъглов коеф. на l.

Ако $u(a,b) \parallel l$, $u \neq 0$, то тъй като

$l: kx - y + m = 0$ е общо уравнение на l,

иначе $ka - b = 0$ т.е. $k = \frac{b}{a}$ ($a \neq 0$, защото ако $a = 0$, от $ka - b = 0 \Rightarrow b = 0 \Rightarrow u = 0$ – противоречие

Нека K е ортонормирана ~~коорд~~. Тогава $k = tg\,\alpha$, където $\alpha = \sphericalangle(Ox, \vec{r})$, където $\vec{r}$ е пол. в/у l сочещ в горната полуравнина.



$u(1, k) \parallel l$ (защото $k \cdot 1 - k = 0$)

и $-u(-1, -k) \parallel l$ При $k \geq 0$ $u \uparrow\uparrow \vec{r}$

При $k < 0$ $-u(-1, -k) \uparrow\uparrow \vec{r}$

При $k \geq 0$ $tg\,\alpha = \frac{k}{1} = k$

При $k < 0$ $tg\,\beta = -\frac{k}{1} = -k$

~~$\Rightarrow tg\,\alpha = k$~~

$\beta = \pi - \alpha \Rightarrow tg\,\beta = -tg\,\alpha \Rightarrow$

$\Rightarrow tg\,\alpha = k$

III. 1.61

Взаимно положение на 2 прави в равнината

Нека $K = Oxy$ е афинна коорд. с-ма

Т1: Нека правите l_1 и l_2 имат спрямо K общи уравнения:

$l_1: A_1 x + B_1 y + C_1 = 0$
$l_2: A_2 x + B_1 y + C_2 = 0$

Озн: $A = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{pmatrix}$ $\widetilde{A} = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix}$

Тогава:

1) $l_1 = l_2 \Leftrightarrow r(\widetilde{A}) = 1$ (и следователно $r(A) = 1$) $\Leftrightarrow \exists \lambda \neq 0$:

2) $l_1 \parallel l_2$ и $l_1 \neq l_2 \Leftrightarrow r(A) = 1,\ r(\widetilde{A}) = 2$

$\Leftrightarrow \exists \lambda \neq 0: A_2 = \lambda A_1,\ B_2 = \lambda B_1$, но $C_2 \neq \lambda C_1$

3) l_1 и l_2 са пресичащи се $\Leftrightarrow r(A) = 2$ (и $\Rightarrow$ и $r(\widetilde{A}) = 2$) $\Leftrightarrow \det(A) \neq 0 \Leftrightarrow \nexists \lambda \in \mathbb{R}$:
$A_2 = \lambda A_1,\ B_2 = \lambda B_1$

Док:

Общите точки на l_1 и l_2 се дават от решенията на системата

$$\begin{cases} A_1 x + B_1 y + C_1 = 0 \\ A_2 x + B_2 y + C_2 = 0 \end{cases}$$

Имаме, че A е матрица на с-мата, а $\tilde{A}$ е разширената матрица на с-мата.

От теоремата на Руше с-мата има решение $\Leftrightarrow$ $r(A) = r(\tilde{A})$

$r(A) \geq 1$ ~~(защото~~ $\cancel{A \neq 0}$ ~~$(A_1, B_1) \neq 0$~~
защото $A \neq 0$ (защото $(A_1, B_1) \neq 0$, защото

$A_1 x + B_1 y + C_1 = 0$ е уравнение на l)

$\tilde{A}$ е 2×3 $\Rightarrow r(\tilde{A}) \leq 2$

A е подматрица на $\tilde{A}$ $\Rightarrow r(A) \leq r(\tilde{A})$

$\Rightarrow 1 \leq r(A) \leq r(\tilde{A}) \leq 2$

$\Rightarrow$ имаме следните възможности

$r(A) = 1$, $r(\tilde{A}) = 1$

$r(A) = 1$, $r(\tilde{A}) = 2$

$r(A) = 2$, $r(\tilde{A}) = 2$

От теорема на Руше, втората възможност е налице $\Leftrightarrow$ с-мата няма решение.

$\Leftrightarrow$ l_1 и l_2 нямат обща точка ~~$\Leftrightarrow l_1 \parallel l_2$ и~~

$\Leftrightarrow$ $l_1 \parallel l_2$ и $l_1 \neq l_2$

Така док. първата еквивалентност в 2)

Нека $r(\tilde{A}) = 1$ ($\Rightarrow r(A) = 1$)

$\Rightarrow$ двата реда на $\tilde{A}$ са пропорционални.

Тъй като първият ред е $\neq 0$
(защото $(A_1, B_1) \neq 0$)

$\Rightarrow$ втория ред $= \lambda$(първия ред), $\lambda \in \mathbb{R}$

При това $\lambda \neq 0$, защото и втория ред е $\neq 0$
(защото $(A_2, B_2) \neq 0$)

$\Rightarrow A_2 = \lambda A_1, \ B_2 = \lambda B_1, \ C_2 = \lambda C_1$

$\Rightarrow$ уравн. ℓ_2 е $\lambda(A_1x + B_1y + C_1) = 0$, което

при $\lambda \neq 0$ е еквивалентно на $A_1x + B_1y + C_1 = 0$

- уравнение на $\ell_1 \Rightarrow \ell_1 = \ell_2$

Нека $\ell_1 = \ell_2$, тъй като имаме $(A_1, B_1) \neq 0$. Нека $A_1 \neq 0$

Тогава у-нието на ℓ_1 е еквивалентно на
$x = -\frac{B_1}{A_1}y - \frac{C_1}{A_1} \Rightarrow \forall y$ т. $P(-\frac{B_1}{A_1}y - \frac{C_1}{A_1}, y) \in \ell_1 = \ell_2$

$\Rightarrow$ коорд. удовлетворяват коорд. на ℓ_2

$\Rightarrow A_2\left(-\frac{B_1}{A_1}y - \frac{C_1}{A_1}\right) + B_2y + C_2 = 0$

$\Rightarrow \left(B_2 - \frac{A_2}{A_1}B_1\right)y + \left(C_2 - \frac{A_2}{A_1}C_1\right) = 0$

III.1.64

$\Rightarrow B_2 - \frac{A_2}{A_1} B_1 = 0, \quad C_2 - \frac{A_2}{A_1} C_1 = 0$

Означаваме: $\lambda := \frac{A_2}{A_1} \Rightarrow A_2 = \lambda A_1, B_2 = \lambda B_1,$

$C_2 = \lambda C_1 \quad \Rightarrow r(\bar{A}) = 1$

При това $\lambda \neq 0$, ако $\lambda = 0 \Rightarrow$ получаваме $A_2 = B_2 = C_2 = 0$ против.

{С това док. 1)}

$\Rightarrow$ третата възможност е т.е. $r(A) = r(\bar{A}) = 2$ съответства на l_1 и l_2 са пресичащи се.

Очевидно от $r(A) = 2 \Rightarrow r(\bar{A}) = 2$

Остава да се док. вторите еквивалентности на 2) и 3).

$r(A) = 1 \Leftrightarrow$ редовете на A са пропорционални $\Leftrightarrow \exists \lambda \neq 0 : A_2 = \lambda A_1$

$B_2 = \lambda B_1$ ($\lambda \neq 0$, защото и $(A_2, B_2) \neq 0$)

В този случай $r(\bar{A}) = 2 \Leftrightarrow C_2 \neq \lambda C_1$

(защото ако и $C_2 = \lambda C_1$, то $r(\bar{A}) = 1$)

{С това е док. 2)}

$r(A)=2 \Leftrightarrow$ редовете на A не са пропорционални, $\Leftrightarrow \nexists \lambda \in \mathbb{R}$

$\nexists$ $A_2=\lambda A_1$, $B_2=\lambda B_1$

~~Същ~~ Също $r(A)=2 \Leftrightarrow \det(A) \neq 0$

(защото A е 2×2)

(това е док. и 3)

Първата част може да се формулира и така:

Т2: Нека правата l има спрямо K общо уравнение $Ax+By+C=0$. Тогава всяко общо уравнение на l има вида: $\lambda(Ax+By+C)=0$, където $\lambda \neq 0$

Обратно: Всяко уравнение от този вид е общо уравнение на l.

Полуравнини

Нека $K=Oxy$ е афинна коорд. с-ма.
Теоремата за полуравнините: Нека спрямо K права l има общо уравнение $Ax+By+C=0$, а коорд. $P_1(x_1,y_1)$, $P_2(x_2,y_2)$ и не ~~означава~~ лежат на l.
Озн. с $L(x,y)=Ax+By+C$
Тогава:
1) P_1 и P_2 лежат в различни полуравнини относно $l \Leftrightarrow L(x_1,y_1)\cdot L(x_2,y_2)<0$.

III. 1. 66

(т.е. когато $L(x_1, y_1)$ и $L(x_2, y_2)$ имат различни знаци)

2) P_1 и P_2 лежат в една полуравнина относно $\ell \Leftrightarrow L(x_1, y_1) \cdot L(x_2, y_2) > 0$

(т.е. когато $L(x_1, y_1)$ и $L(x_2, y_2)$ имат еднакви знаци)

Сл.: Нека спрямо K правата L има уравнение $Ax + By + C = 0$

Озн: $L(x, y) = Ax + By + C$

Тогава двете отворени полуравнини на ℓ са множества:

$\{P(x, y) : L(x, y) > 0\}$

$\{P(x, y) : L(x, y) < 0\}$

~~Нека~~ Нормално уравнение на права в равнината

Деф: Един вектор се нарича нормален за дадена права, ако е перпендикулярен на векторите, колинеарни с правата.

Оттук нататък работим в равнината. Считаме, че сме ~~в~~ фиксирали ортонормирана коорд. с-ма $K = Oxy$

Тв.1: Нека правата l има спрямо K общо уравнение $Ax+By+C=0$

Тогава векторът $N(A,B)$ е нормален за l.

Док: N е нормален за $l \Leftrightarrow N \perp v$, за ~~който~~ някой вектор $v \neq 0$, който е колинеарен с l.

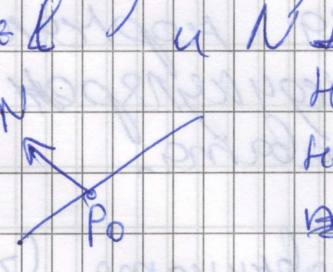
Знаем, че $v(-B, A) \parallel l$.

$\langle N, v \rangle = A.(-B) + B.A = 0 \Rightarrow N \perp v \Rightarrow N \perp l$

Твърдение 2: Нека ненулевият вектор N има коорд. спрямо K $N(A,B)$, а т. P_0 има коорд. спрямо K $P_0(x_0, y_0)$. Тогава правата l, която минава през P_0 и е перпендикулярна на N, има спрямо K общо уравнение.

$l: A(x-x_0)+B(y-y_0)=0$

Док: Очевидно е, че l е еднозначно определена от усл. $P \in l$ и $N \perp l$.



Нека m е правата с общо уравнение

$m: A(x-x_0)+B(y-y_0)=0$

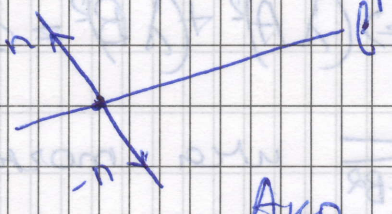
(това наистина е общо уравнение следва от $N \neq 0 \Rightarrow (A,B) \neq 0$)

П. 1.68

$P_0 \in m$, защото $A(x_0 - x_0) + B(y_0 - y_0) = 0$

От Тв. 1 $N(A, B) \perp m \Rightarrow m = l$

Ако имаме права l в равнината, то ~~всички~~ очевидно ~~то~~ всички нормални вектори на l са колинеарни.



~~Ако N~~

$\Rightarrow$ има точно 2 единични нормални вектора.

Ако $N(A, B) \neq 0$ е нормален вектор, то те са $n := \frac{N}{|N|}$ и $-n$

$$\Rightarrow n\left(\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}, \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}\right) \text{ и } -n\left(-\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}, -\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}\right)$$

Деф: Едно общо уравнение на l спрямо K се нарича нормално, ако нормалния вектор с коорд. коеф. пред x и y е единичен.

$\Rightarrow l: \alpha x + \beta y + \gamma = 0$ е норм. уравнение

$\Leftrightarrow \alpha^2 + \beta^2 = 1$

Тв. 3: Всяка права l има, спрямо K, точно 2 нормални уравнения. Ако $Ax + By + C = 0$ е едно общо уравнение на l спрямо K, то норм. уравнения са $\pm \frac{Ax+By+C}{\sqrt{A^2+B^2}} = 0$.

Доказателство: ~~Ако~~ Нека $l: Ax+By+C=0$

$\Rightarrow$ произволно общо уравнение на l има вида

$\lambda(Ax+By+C)=0$, където $\lambda \neq 0$, т.е. $(\lambda A)x+(\lambda B)y+(\lambda C)=0$

Това уравнение е нормално $\Leftrightarrow (\lambda A)^2+(\lambda B)^2=1$

$\Leftrightarrow \lambda^2(A^2+B^2)=1 \Leftrightarrow \lambda = \pm\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2}}$ има точно

2 ~~точно~~ нормални уравнения и те са точно написаните във ~~формулировката~~ формулировката.

Приложение на нормалното уравнение:

1) Разстояние от точка до права

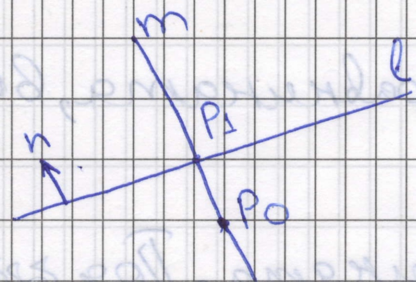
Тв. 4: Нека спрямо К правата l има нормално уравнение: $\alpha x+\beta y+\gamma=0$, а т. P_0 има ~~точно~~ коорд. $P_0(x_0,y_0)$. Озн. $L(x,y)=\alpha x+\beta y+\gamma$.

Тогава разстоянието $d(P_0,l)$ от P_0 до l е

$d(P_0,l)=|L(x_0,y_0)|$

Док: Нека n е един нормален ~~вектор~~ вектор с коорд. коеф. пред x и y в норм. у-ние: $l(x,y)=0$, т.е. $n(\alpha,\beta)$. Нека m е правата през P_0, ~~кая~~ която е $\perp l$. Нека $P_1=l\cap m \Rightarrow d(P_0,l)=|P_0P_1|$

Ш. 1.70



$\overrightarrow{P_1P_0} \perp l$

$n \perp l \Rightarrow \overrightarrow{P_1P_0} \parallel n \quad n \neq 0$

$\Rightarrow \overrightarrow{P_1P_0} = \lambda n$ за някое $\lambda \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow d(P_0, l) = |P_0P_1| = |\overrightarrow{P_1P_0}| =$

$= |\lambda n| = |\lambda| . \underbrace{|n|}_{1} = |\lambda|$

Имаме $\overrightarrow{P_1P_0}(x_0 - x_1, y_0 - y_1)$, където $P_1(x_1, y_1)$

От $\overrightarrow{P_1P_0} = \lambda n \Rightarrow x_0 - x_1 = \lambda\alpha$

$y_0 - y_1 = \lambda\beta$

$\Rightarrow x_1 = x_0 - \lambda\alpha, \ y_1 = y_0 - \lambda\beta$

$P_1 \in l \Rightarrow L(x_1, y_1) = 0$ ~~$\Rightarrow \alpha(x_0 - \lambda\alpha) + \beta(y_0 - \lambda\beta$~~

$\Rightarrow \alpha(x_0 - \lambda\alpha) + \beta(y_0 - \lambda\beta) + \gamma = 0$

$-\lambda\underbrace{(\alpha^2 + \beta^2)}_{=1} + \underbrace{(\alpha x_0 + \beta y_0 + \gamma)}_{= L(x_0, y_0)} = 0$

$\Rightarrow \lambda = L(x_0, y_0)$

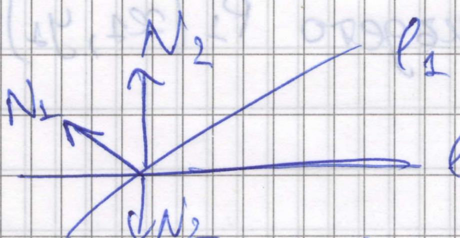
$\Rightarrow d(P_0, l) = |\lambda| = |L(x_0, y_0)|$

Забележка: Числото $\delta(P_0, l) := L(x_0, y_0)$ се нарича ориентирано разстояние от P_0 до l спрямо n.
Видяхме, че $\overrightarrow{P_1P_0} = \lambda n$ и $\lambda = L(x_0, y_0) = \delta(P_0, l)$

$\Rightarrow \overrightarrow{P_1P_0} = \delta(P_0, l) n \Rightarrow \delta(P_0, l) > 0 \Leftrightarrow P_0$ лежи в полуравнината, в която сочи n.

$\delta(P_0, l) < 0 \Leftrightarrow P_0$ лежи в полуравнината, в която сочи $-n$.

2) Ъгъл м/у две прави в равнината. Под ъгъл м/у две прави l_1 и l_2 се разбира по-малкият от двата ъгъла, които те сключват.



Нека ~~[illegible]~~ N_1 и N_2 са норм. вектори към l_1 и l_2.

~~Ъгълът м/у l_1 и l_2 =~~

$$\Rightarrow \angle(l_1, l_2) = \begin{cases} \angle(N_1, N_2), & \text{ако } \angle(N_1, N_2) \le \frac{\pi}{2} \\ \pi - \angle(N_1, N_2), & \text{ако } \angle(N_1, N_2) > \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \cos\angle(l_1, l_2) = |\cos\angle(N_1, N_2)|$$

Нека l_1 и l_2 имат нормални уравнения
$\alpha_i x + \beta_i y + \gamma_i = 0$, $i = 1, 2$

$\Rightarrow$ ~~един. норм. вект.~~ единичните нормални вектори са $n_1(\alpha_1, \beta_1)$ и $n_2(\alpha_2, \beta_2)$

$$\cos\angle(n_1, n_2) = \frac{\langle n_1, n_2 \rangle}{|n_1||n_2|} = \langle n_1, n_2 \rangle = \alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2$$

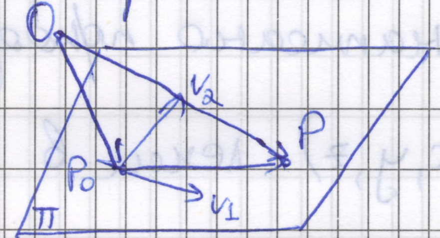
$$\Rightarrow \cos\angle(l_1, l_2) = |\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2|$$

$$\Rightarrow \angle(l_1, l_2) = \arccos|\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2|$$

Параметрични уравнения на равнина

1. Векторно параметрично уравнение.

Нека π е равнина, т. $P_0 \in \pi$ и неколинеарните вектори v_1 и v_2 са компланарни с π.



Нека т. $P \in \pi$

$\Rightarrow \overrightarrow{P_0P}, v_1, v_2$ са компланарни

$\Rightarrow \exists \lambda_1 \lambda_2 \in R : \overrightarrow{P_0P} = \lambda_1 . v_1 + \lambda_2 v_2$

Обратно: ако $\overrightarrow{P_0P} = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2$ за някои $\lambda_1, \lambda_2 \in R$

$\Rightarrow P \in \pi$

$\Rightarrow P \in \pi \Leftrightarrow \exists \lambda_1 \lambda_2 \in R :$ ~~Нека~~ $\overrightarrow{P_0P} = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2$

Нека K е афинна коор. с-ма с начало O.

Нека r и r_0 са радиус-векторите на P и P_0, т.е.

$r = \overrightarrow{OP}, \; r_0 = \overrightarrow{OP_0} \Rightarrow \overrightarrow{P_0P} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OP_0} = r - r_0$

$\Rightarrow P \in \pi \Leftrightarrow \exists \lambda_1 \lambda_2 \in R : r - r_0 = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2$

$\Leftrightarrow \exists \lambda_1, \lambda_2 \in R : r = r_0 + \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 \Rightarrow$ вект. парам. уравнение на π е

$$(1) \; \pi : r = r_0 + \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 \; , \; \lambda_1, \lambda_2 \in R$$

2. Скаларни параметрични уравнения:

Нека спрямо $K = Oxyz$ т. P_0 и векторите v_1 и v_2 имат коорд. $P_0(x_0, y_0, z_0)$, $v_1(a_1, b_1, c_1)$, $v_2(a_2, b_2, c_2)$

Знаем, че скаларните параметрични уравнения представляват векторните параметрични уравнения написано по координатите:

$\Rightarrow P(x, y, z)$ лежи в $\pi \Leftrightarrow$
$$(2)\ \pi: \begin{cases} x = x_0 + \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 \\ y = y_0 + \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 \\ z = z_0 + \lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2 \end{cases} \quad \lambda_1, \lambda_2 \in R$$

– скаларни параметрични уравнения на π

3. Параметрични уравнения на равнина през три точки.

Нека π е зададена чрез трите неколинеарни точки P_1, P_2, P_3, като спрямо K $P_i(x_i, y_i, z_i)$.

$\Rightarrow \pi$ се задава с $P_0 := P_1$ и ~~на~~ неколинеарните вектори $\overrightarrow{P_1P_2}(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$ и $\overrightarrow{P_1P_3}(x_3 - x_1, y_3 - y_1, z_3 - z_1)$

$\Rightarrow \pi$ има скаларни параметрични уравнения

$$(3)\quad \pi: \begin{cases} x = x_1 + \lambda_1 (x_2 - x_1) + \lambda_2 (x_3 - x_1) \\ y = y_1 + \lambda_1 (y_2 - y_1) + \lambda_2 (y_3 - y_1) \\ z = z_1 + \lambda_2 (z_2 - z_1) + \lambda_2 (z_3 - z_1) \end{cases}, \ \lambda_1, \lambda_2 \in R$$

или еквивалентно на

Т. 1.74

$$(4)\quad \pi : \begin{cases} x = (1-\lambda_1-\lambda_2)\,x_1 + \lambda_1 x_2 + \lambda_2 x_3 \\ y = (1-\lambda_1-\lambda_2)\,y_1 + \lambda_1 y_2 + \lambda_2 y_3 \\ z = (1-\lambda_1-\lambda_2)\,z_1 + \lambda_1 z_2 + \lambda_2 z_3 \end{cases}$$

$$\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$$

Общо уравнение на равнина

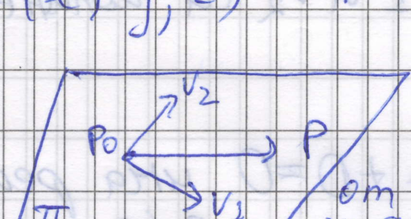
Нека $K = Oxyz$ е афинна коорд. с-ма.

Теорема 1: 1) Всяка равнина π има спрямо K, уравнение от вида $Ax + By + Cz + D = 0$, където ~~A, B, C, D~~ $(A, B, C, D) \neq (0, 0, 0)$

2) Обратно: Всяко уравнение от вида $Ax + By + Cz + D = 0$, където $(A, B, C) \neq (0, 0, 0)$ е уравнение спрямо K на някоя равнина.

Доказателство: Нека т. $P_0(x_0, y_0, z_0) \in \pi$ и неколинеарните вектори $v_1(a_1, b_1, c_1)$ и $v_2(a_2, b_2, c_2)$ са компланарни с π.

$\Rightarrow P(x, y, z) \in \pi \Leftrightarrow \overrightarrow{P_0P}, v_1, v_2$ са компланарни.



Имаме $\overrightarrow{P_0P}(x-x_0, y-y_0, z-z_0)$

$\overset{\text{от въпроса за аналитично представяне на лин. опер. с вектори}}{\Longrightarrow}$ $\overrightarrow{P_0P}, v_1, v_2$ са колинеарни $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \det\begin{pmatrix} x-x_0 & a_1 & a_2 \\ y-y_0 & b_1 & b_2 \\ z-z_0 & c_1 & c_2 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow (x-x_0)\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} + (y-y_0)\begin{vmatrix} c_1 & c_2 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix} + (z-z_0)\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = 0$$

Озн: $A := \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}$ $B := \begin{vmatrix} c_1 & c_2 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix}$ $C := \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$, ~~D := A~~

$D := -Ax_0 - By_0 - Cz_0$

$\Rightarrow P(x,y,z) \in \pi \Leftrightarrow A(x-x_0) + B(y-y_0) + C(z-z_0) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow Ax + By + Cz \underbrace{-Ax_0 - By_0 - Cz_0}_{=D} = 0$

$\Leftrightarrow Ax + By + Cz + D = 0 \Rightarrow \pi$ има уравнение

$Ax + By + Cz + D = 0$

$(A, B, C) \neq (0,0,0)$, защото A, B, C са минорите от 2-ри ред на матрицата $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{pmatrix}$ и ако те са 0, то !!!

Матрицата има ранг $\leq 1 \Rightarrow v_1$ и v_2 са колинеарни - противоречие.

2) Обратно: Уравнението $Ax + By + Cz + D = 0$ има решение, защото $(A,B,C) \neq (0,0,0)$. Например ако $A \neq 0$, то уравнението е еквивалентно на $x = -\frac{B}{A}y - \frac{C}{A}z - \frac{D}{A}$ и решението е например: $y = 0$, $z = 0$, $x = -\frac{D}{A}$

Нека (x_0, y_0, z_0) е едно решение $\Rightarrow Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$
$\Rightarrow D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0$.

Тн 1.76

Нека P_0 е т. с коорд. $P_0(x_0, y_0, z_0)$. От док. на 1) е ясно, че е достатъчно да намерим два неколинеарни вектора $v_1(a_1, b_1, c_1)$ и $v_2(a_2, b_2, c_2)$, за които са изпълнени:

$$A = \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} c_1 & c_2 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix}, \quad C = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}.$$

Считаме, че $A \neq 0$

Нека $b_1 = A$, $c_2 = 1$, $b_2 = 0$, $c_1 = 0$, $a_1 = -B$, $a_2 = -\frac{C}{A}$

т.е. $v_1(-B, A, 0)$, $v_2\left(-\frac{C}{A}, 0, 1\right)$

v_1 и v_2 са неколинеарни, защото измежду минорите на матрицата от коорд. има ~~е~~ различен от 0 $\left(\text{например } \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} = A \neq 0\right)$

$\Rightarrow$ P_0, v_1, v_2 задават равнина π и от док. на 1) тя има уравнение

$$(x - x_0)\underbrace{\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}}_{=A} + (y - y_0)\underbrace{\begin{vmatrix} c_1 & c_2 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix}}_{=B} + (z - z_0)\underbrace{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}}_{=C} = 0$$

т.е. $\pi: Ax + By + Cz \underbrace{- Ax_0 - By_0 - Cz_0}_{=D} = 0$

$\Rightarrow$ $\pi: Ax + By + Cz + D = 0$

Дефиниция: Нека π е равнина. Уравнение спрямо K на π от вида $Ax+By+Cz+D=0$ (където $(A,B,C)\neq(0,0,0)$) се нарича общо уравнение на π спрямо K.

Твърдение 1: 1) Нека равнината π е зададена от т. $P_0(x_0,y_0,z_0)$ и неколинеарни вектори $v_1(a_1,b_1,c_1)$ и $v_2(a_2,b_2,c_2)$. Тогава π има спрямо K общо уравнение

$$\pi: \begin{vmatrix} x-x_0 & a_1 & a_2 \\ y-y_0 & b_1 & b_2 \\ z-z_0 & c_1 & c_2 \end{vmatrix} = 0$$

2) Нека равн. π е зададена с трите неколинеарни точки $P_1(x_1,y_1,z_1)$, $P_2(x_2,y_2,z_2)$, $P_3(x_3,y_3,z_3)$. Тогава π има спрямо K общо уравнение

$$\pi: \begin{vmatrix} x-x_1 & x_2-x_1 & x_3-x_1 \\ y-y_1 & y_2-y_1 & y_3-y_1 \\ z-z_1 & z_2-z_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0$$ или еквивалентното

$$\pi: \begin{vmatrix} x & x_1 & x_2 & x_3 \\ y & y_1 & y_2 & y_3 \\ z & z_1 & z_2 & z_3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Док: 1) Това го видяхме в док. на 1) на T

2) Първото уравнение следва от 1), защото се задава с т. P_1 и неколинеарните вектори:
$\overline{P_1P_2}(x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1)$ и
$\overline{P_1P_3}(x_3-x_1, y_3-y_1, z_3-z_1)$
Второто уравнение следва от първото, защото

$$\begin{vmatrix} x & x_1 & x_2 & x_3 \\ y & y_1 & y_2 & y_3 \\ z & z_1 & z_2 & z_3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-x_1 & x_1 & x_2-x_1 & x_3-x_1 \\ y-y_1 & y_1 & y_2-y_1 & y_3-y_1 \\ z-z_1 & z_1 & z_2-z_1 & z_3-z_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \xlongequal[\text{по 4-ти ред}]{\text{развиние}}$$

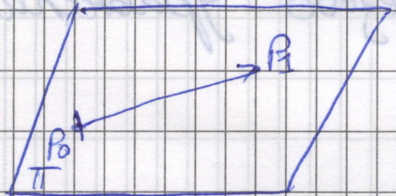
$$= \begin{vmatrix} x-x_1 & x_2-x_1 & x_3-x_1 \\ y-y_1 & y_2-y_1 & y_3-y_1 \\ z-z_1 & z_2-z_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}$$

Твърдение 2: Нека равнината π има спрямо K общо уравнение $Ax+By+Cz+D=0$. Тогава векторът $u(a,b,c)$ е компланарен с $\pi \Leftrightarrow Aa+Bb+Cc=0$

Доказателство: Нека $P_0(x_0,y_0,z_0)\in\pi$

$\Rightarrow Ax_0+By_0+Cz_0+D=0$

Нека $\overrightarrow{P_0P_1}$ е представител на u с начало P_0, тогава $u \parallel \pi \Leftrightarrow$ краят $P_1\in\pi$.



Нека $P_1(x_1,y_1,z_1)$

$\Rightarrow \overrightarrow{P_0P_1}(x_1-x_0,\ y_1-y_0,\ z_1-z_0)$

Тъй като $\overrightarrow{P_0P_1}=u \Rightarrow x_1-x_0=a,\ y_1-y_0=b,\ z_1-z_0=c$

$\Rightarrow x_1=x_0+a,\ y_1=y_0+b,\ z_1=z_0+c$

$\Rightarrow u\parallel\pi \Leftrightarrow P_1\in\pi \Leftrightarrow Ax_1+By_1+Cz_1+D=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow A(x_0+a)+B(y_0+b)+C(z_0+c)+D=0$

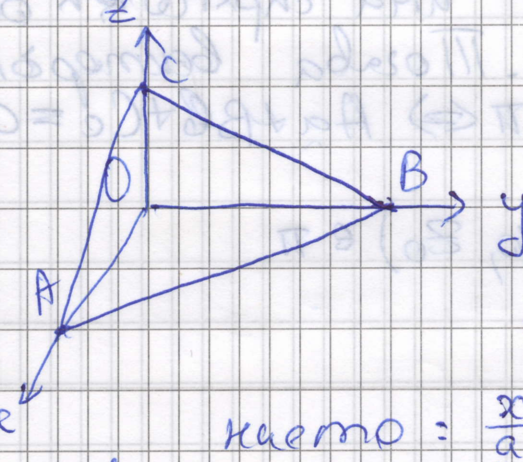
$\Leftrightarrow \underbrace{(Ax_0+By_0+Cz_0+D)}_{=0}+(Aa+Bb+Cc)=0$

$\Leftrightarrow Aa + Bb + Cc = 0$

Отрезово уравнение на равнина

Нека равнината π не е успоредна на коорд. оси и не минава през началото на коорд-та.

Нека $\pi \cap Ox = A(a, 0, 0)$, $\pi \cap Oy = B(0, b, 0)$, $\pi \cap Oz = C(0, 0, c)$.



$a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$, защото π не минава през O.
$\Rightarrow \pi$ има спрямо K уравн.
$\pi: \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$
(защото неколинеарните точки A, B, C удовлетворяват уравнението: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} - 1 = 0$ и $\Rightarrow$ това е общо уравнение на равнината определена от тях).

Това уравнение се нарича отрезово уравнение на π спрямо K.

Декартово уравнение на равнина

Нека равнината π не е успоредна на оста Oz.

Нека π има общо уравнение $Ax+By+Cz+D=0$.

$C\neq 0$, защото ако доп. че $C=0$, то :

$A.0+B.0+C.1=0 \Rightarrow e_3\ (0,0,1)\parallel\pi$ – от Тв. 2

$\Rightarrow \pi\parallel Oz$ – противоречие $\Rightarrow C\neq 0$

$\Rightarrow$ уравнението на π е еквивалентно на

$z=-\frac{A}{C}x-\frac{B}{C}y-\frac{D}{C}$. Означаваме $k=-\frac{A}{C}$, $l=-\frac{B}{C}$ и

$m=-\frac{D}{C} \Rightarrow \pi: z=kx+ly+m$ Уравнение от този вид се нарича декартово уравнение на π спрямо K.

Взаимно положение на две равнини

Нека $K=Oxyz$ е афинна коорд. с-ма.

Теорема 1: Нека равнините π_1 и π_2 имат спрямо K общи уравнения:

$\pi_1: A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$

$\pi_2: A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$

Означаваме: $A=\begin{pmatrix}A_1 & B_1 & C_1\\ A_2 & B_2 & C_2\end{pmatrix}$ $\tilde{A}=\begin{pmatrix}A_1 & B_1 & C_1 & D_1\\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2\end{pmatrix}$

Тогава:

1) $\pi_1=\pi_2 \Leftrightarrow r(\tilde{A})=1$ (и $\Rightarrow$ и $r(A)=1$) $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \exists\lambda\neq 0: A_2=\lambda A_1,\ B_2=\lambda B_1,\ C_2=\lambda C_1,\ D_2=\lambda D_1$

2) $\pi_1 \parallel \pi_2$, $\pi_1 \neq \pi_2 \Leftrightarrow r(A) = 1$, $r(\overline{A}) = 2$

$\Leftrightarrow \exists \lambda \neq 0 : A_2 = \lambda A_1, B_2 = \lambda B_1, C_2 = \lambda C_1$, но $D_2 \neq \lambda D_1$.

3) π_1 и π_2 са пресичащи се $\Leftrightarrow r(A) = 2$ (и $\Rightarrow$ и $r(\overline{A}) = 2$)

$\Leftrightarrow \nexists \lambda \in \mathbb{R} : A_2 = \lambda A_1, B_2 = \lambda B_1, C_2 = \lambda C_1$

Доказателство:
Аналогично на док. на теоремата Т за взаимно положение на две прави в равнината.

Първата част на Т1 може да се формулира така:

Т2: Нека равнината π има спрямо К ~~коор~~ общо урав. $Ax + By + Cz + D = 0$. Тогава всяко общо уравнение на π спрямо К има вида

$\lambda(Ax + By + Cz + D) = 0$, къд. $\lambda \neq 0$ и всяко уравнение от тоя вид е общо уравнение на π спрямо К.

Задаване на права с двойка уравнения

Нека $K = Oxyz$ е афинна коорд. с-ма

Т1: 1) Всяка права l се задава спрямо K с уравнения от вида

$$l: \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

където рангът на матрицата $\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix}$ е 2.

2) Обратно: Всяка двойка у-ния от вида:

$$(1) \quad \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$ където рангът на $\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix}$ е 2,

са у-ния на някоя права спрямо K.

Док:

1) Нека π_1 и π_2 са две равн., които се пресичат по правата l.

Нека уравн. на π_1 и π_2 са

$\pi_1: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$

$\pi_2: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$

$\Rightarrow l$ има ур. от вида 1.

При това рангът на $\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix}$ е 2, защото π_1 и π_2 са пресичащи се (от Т1 от „Взаимно полож. на две равнини.")

2) Имаме $r(A)=2$, където $A=\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix} \Rightarrow$ редовете на A са ненулеви.

$\Rightarrow A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ и $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ са общи у-ния на равн. π_1 и π_2.

Щом $r(A)=2$, от Т. 1 от миналия път

$\Rightarrow \pi_1$ и π_2 са пресичащи се

Нека $l=\pi_1 \cap \pi_2$ - прес. права

Дефиниция: Уравнение на права l спрямо K от вида

$l: (1)$

(където ~~_~~ рангът на $\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix}$ е 2), се нарича двойка уравнения на l спрямо K.

От док. на Т1 получаваме

Тв1: Правата l има спрямо ~~_~~ K двойка у-ния (1) $\Leftrightarrow$ у-ния

$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ и $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ са общи у-ния на две равнини π_1 и π_2, които се пресичат по l.

Тв2: Нека правата l има спрямо K двойка у-ния (1). Тогава равнината π минава през $l \Leftrightarrow \pi$ има у-ние спрямо K от вида:

$\lambda_1(A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0)+\lambda_2(A_2x+B_2y+C_1z+D_2)=0$, където $(\lambda_1,\lambda_2)\neq(0,0)$.

Доказателство:

1) $\Rightarrow$

Нека π минава през ℓ $\quad \pi: A_3x+B_3y+C_3z+D_3=0$

Разглеждаме с-мата:

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \\ A_3x+B_3y+C_3z+D_3=0 \end{cases}$$

Тази с-ма има решения и то безброй много – коорд. на всяка точка от ℓ са реш.

По теоремата на Руше: $r(A)=r(\bar{A})$

където $A=\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{pmatrix}$, а $\bar{A}=\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \end{pmatrix}$

Ако $r(A)=3$, то с-мата има единств. реш. – противоречие

$\Rightarrow r(A)\leq 2$.

Тъй като на матр. от първите два реда на A рангът е 2, $\Rightarrow r(A)\geq 2$. $\Rightarrow r(A)=2 \Rightarrow r(\bar{A})=2$

$\Rightarrow$ трите реда на $\bar{A}$ са линейно-зависими

$\Rightarrow$ един от тях е лин. комбин. на другите 2 от тях

Но рангът на матрицата от първите два реда на $\bar{A}$ е 2. $\Rightarrow$ те са лин. незав. $\Rightarrow$ третият ред е лин. комб. на първите два, т.е. $\exists\, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}: A_3=\lambda_1A_1+\lambda_2A_2$, $B_3=\lambda_1B_1+\lambda_2B_2$, $C_3=\lambda_1C_1+\lambda_2C_2$, $D_3=\lambda_1D_1+\lambda_2D_2$

$\Rightarrow \pi: \lambda_1(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)+\lambda_2(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0$

$(\lambda_1,\lambda_2)\neq(0,0)$, защото ако $\lambda_1=\lambda_2=0 \Rightarrow A_3=B_3=C_3=D_3=0$

т.е. уравн. на π е урав. на равн.

2) $\Leftarrow$

Ясно, защото, очев. всяка точка на ℓ удовлетворява у-нието $\lambda_1(\ldots) + \lambda_2(\ldots) = 0$

Преминаване от парам. у-ния към двойка уравнения и обратното

Нека $\ell: \begin{cases} x = x_0 + \lambda a \\ y = y_0 + \lambda b \\ z = z_0 + \lambda c \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow v(a, b, c) \neq 0$

$\Rightarrow$ поне едно от a, b, c е $\neq 0 \Rightarrow$ едно от уравненията може да се реши относно λ.

Заместване в другите две и получаване двойка уравнения

Нека ℓ е задад. с двойка у-ния. Тъй като матрицата на с-мата има ранг 2, то с-мата може да се реши относно две неизв.

Нека сме я решили например относно x и y.

$\Rightarrow x = a + bz$

$y = e + dz$

Полагаме $z = \lambda$ и получаване парам. у-ния

$\ell: \begin{cases} x = a + b\lambda \\ y = e + d\lambda \\ z = \lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}$

III 1.86

Полупространства

Нека $K = Oxyz$ е афинна коорд. с-ма

Т1: Нека равн. π има ~~коор~~ спрямо K уравн. $Ax+By+Cz+D=0$ и т. $P_1(x_1,y_1,z_1)$ и $P_2(x_2,y_2,z_2)$ не лежат на π.

Озн. $L(x,y,z) = Ax+By+Cz+D$

Тогава:

1) P_1 и P_2 са в ≠ разл. пространства относно π $\Leftrightarrow$ $L(x_1,y_1,z_1)\,L(x_2,y_2,z_2)<0$ (т.е. когато $L(x_1,y_1,z_1)$ $L(x_2,y_2,z_2)$ имат различни знаци)

2) P_1 и P_2 са от едно и също пространство относно π.
$\Rightarrow L(x_1,y_1,z_1)\,L(x_2,y_2,z_2)>0$, т.е. когато $L(x_1,y_1,z_1)$ и $L(x_2,y_2,z_2)$ имат еднакви знаци)

Доказателство: Имаме $P_1 \in \pi \Leftrightarrow L(x_1,y_1,z_1)=0$
~~$\Rightarrow P_1$ и P_2 не лежат~~ $P_2\in\pi \Leftrightarrow L(x_2,y_2,z_2)=0$
$\Rightarrow P_1$ и P_2 не лежат в $\pi \Leftrightarrow L(x_1,y_1,z_1)\neq 0$ и $L(x_2,y_2,z_2)\neq 0$
$\Leftrightarrow L(x_1,y_1,z_1)\,L(x_2,y_2,z_2)\neq 0 \Rightarrow$ 1) и 2) са еквивал.

Ще док. ~~2)~~ 1) P_1 и P_2 са в различни полупространства $\Leftrightarrow$ отв. отс. P_1P_2 пресича π.

$$\text{отв. отс. } P_1P_2: \begin{cases} x=(1-\lambda)x_1+\lambda x_2 \\ y=(1-\lambda)y_1+\lambda y_2 \\ z=(1-\lambda)z_1+\lambda z_2 \end{cases}, \quad \lambda\in(0,1)$$

$\pi : L(x,y,z) = 0 \Rightarrow \pi$ и отв. отс. P_1P_2 се пресичат
$\Leftrightarrow L(\cancel{x}(1-\lambda)x_1 + \lambda x_2, (1-\lambda)y_1 + \lambda y_2, (1-\lambda)z_1 + \lambda z_2) = 0$
има реш. $\lambda \in (0,1) \Leftrightarrow A((1-\lambda)x_1 + \lambda x_2) + B((1-\lambda)y_1 + \lambda y_2) +$
$C((1-\lambda)y_1 + \lambda y_2) + D = 0$ има реш. $\lambda \in (0,1)$

$(Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D) + \lambda[(Ax_2 + By_2 + Cz_2) - (Ax_1 + By_1 + Cz_1)]$
$= 0 \Leftrightarrow L(x_1,y_1,z_1) + \lambda(L(x_2,y_2,z_2) - L(x_1,y_1,z_1)) = 0$
има реш. $\lambda \in (0,1)$

Лема: Нека $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ $\quad f(\lambda) = a + b\lambda$

Тогава уравн. $f(\lambda) = 0$ има реш. $\lambda \in (c,d) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow f(c)\,f(d) < 0$ или $f \equiv 0$ (т.е. $a = b = 0$)

Прилагаме лемата за $a = L(x_1,y_1,z_1)$, ~~$b = L(x_2,y_2,z_2)$~~
$b = L(x_2,y_2,z_2) - L(x_1,y_1,z_1)$, $c = 0$, $d = 1$
Тъй като $a = L(x_1,y_1,z_1) \neq 0$ $\quad f \not\equiv 0$
$f(\lambda) = L(x_1,y_1,z_1) + \lambda(L(x_2,y_2,z_2) - L(x_1,y_1,z_1)) = 0$
има решение $\lambda \in (0,1)$.
$\Leftrightarrow f(0)\,f(1) < 0 \Leftrightarrow L(x_1,y_1,z_1)\,L(x_2,y_2,z_2) < 0$
$\Rightarrow P_1$ и P_2 са от разл. полупространства $\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow L(x_1,y_1,z_1)\,L(x_2,y_2,z_2) < 0$
Следствие: Нека π има спрямо K уравн.
$\pi : L(x,y,z) := Ax + By + Cz + D = 0$ Тогава двете отворени полупространства относно π са
$\{P(x,y,z) : L(x,y,z) > 0\}$ и
$\{P(x,y,z) : L(x,y,z) < 0\}$

П.1.88

Нормално уравнение на равнина

Дефиниция: Един вектор се нарича нормален за дадена равнина, ако е $\perp$ на равнината (т.е. е $\perp$ на всички вектори, които са компланарни с равнината)

От тук нататък считаме, че е фиксирана ортонормирана коорд. с-ма $K = Oxyz$

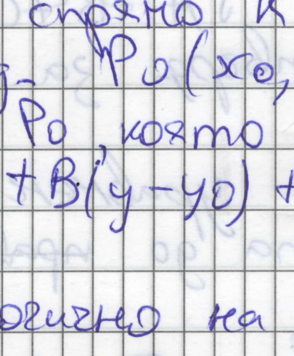
Тв 1: Нека равн. π има спрямо K уравн. $Ax+By+Cz+D=0$ Тогава векторът $N(A,B,C)$ е нормален за π.

Док: Векторът $v(a,b,c)$ е компланарен с $\pi \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow Aa+Bb+Cc=0 \Leftrightarrow \langle N, v\rangle = 0 \Leftrightarrow N \perp v \Rightarrow N$ е норм. за π

Тв. 2: Нека спрямо K т. P_0 и ненулевият вектор N имат коорд. $P_0(x_0, y_0, z_0)$ и $N(A,B,C)$. Тогава равн. през P_0, която е $\perp$ на N, има уравн.
$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$$

Док: - аналогично на съответното твърдение за права в равнината

Ясно е, че всеки два норм. вектора на ~~права~~ дадена равн. π са колинеарни



$\Rightarrow \exists$ точно два единични нормални вектора

Ако $N(A,B,C) \neq 0$ е произв. норм. вектор, то единичните нормални вектори са $n = \frac{N}{|N|}$ и $-n$, т.е.

$$n\left(\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\right) \text{ и } -n\left(-\frac{A}{\sqrt{\dots}}, -\frac{B}{\sqrt{\dots}}, -\frac{C}{\sqrt{\dots}}\right)$$

Деф: Нормално уравн. на π спрямо K се нарича общо уравн. на π спрямо K, за което норм. вектор с координати коефициентите пред x, y, z е единичен.

$\Rightarrow \pi: \alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0$ е нормално $\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$

Тв. 3: Всяка равнина π има спрямо K точно две нормални уравнения.

Ако $Ax + By + Cz + D = 0$ е едно ~~~~ общо у-ние на π, то норм. уравн. са $\pm \frac{Ax+By+Cz+D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = 0$

Док. - като на съотв. твърд. за права в равн.

Приложение на нормалното уравнение

1) Разстоянието от точката до ~~правата~~ равн.

Тв. 4: Нека спрямо K равн. π има норм. у-ние $\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0$ и т. P_0 има коорд. (x_0, y_0, z_0). Озн. $L(x,y,z) = \alpha x + \beta y + \gamma z + \delta$
Тогава разст. $d(P_0, \pi)$ от P_0 до π е
$d(P_0, \pi) = |L(x_0, y_0, z_0)|$

Док: - като на съотв. твърд. за права в равн.

Забележка: Числото $\delta(P_0, \pi) = L(x_0, y_0, z_0)$ се нарича ориентирано разстояние от P_0 до π, по отношение норм. вектор

$n(\alpha, \beta, \gamma)$
Както при права в равн. получаваме
$\delta(P_0, \pi) > 0 \Leftrightarrow P_0$ е в полупространството по отн. π, ~~на~~ в което сочи n

$\delta(P_0, \pi) < 0 \Leftrightarrow P_0$,, --- -- n

под ъгъл м/у две равнини - само да си док. се разбира ъгъл м/у съотв. 2 норм. вектора.

11.XII.2012г.

Реално проективно пространство

Точките, правите и равнините, които разглеждаме до сега ще наричаме крайни.
Ще въведем допълнителни точки, прави и равнини, които ще нарича безкрайни.
Знаем, че релацията успоредност на прави е релация на еквивалентност.
Ако l е крайна права, то означаваме с U_l класа на еквивалентност l.
U_l се нарича безкрайност на l.
Множеството от всички крайни точки и всички безкрайни точки в пространството се нарича разширено пространство или реално проективно пространство.

Прави в реалното проективно пространство:
1) Нека l е крайна права.
Тогава $\overline{l} := l \cup \{U_l\}$ се нарича разширена крайна

права.

2) Нека π е крайна равнина.

Означаване $u_\pi := \{u_\ell : \ell \parallel \pi\}$

u_π се нарича безкрайна права на равнината π

Прави в реално проективно пространство (проективни прави) са всички разширени крайни прави и всички безкрайни прави на ~~прави~~ крайни равнини.

Равнини в реалното проективно пространство (проективни равнини)

1) Нека π е крайна равнина.

Тогава $\overline{\pi} := \pi \cup u_\pi$ се нарича разширена крайна равнина.

2) Безкрайната равнина $\Omega := \{u_\ell : \ell$ е крайна права$\}$ (т.е. множ. от всички безкрайни точки)

Равнини в реалното проективно пространство са всички разширени крайни равнина и безкрайната равнина Ω.

Теорема: В реалното проективно пространство са в сила свойствата:

1) През две различни точки минава точно една права.

2) През три точки, които не лежат на една права, минава точно една равнина.

3) През права и нележаща на нея точка минава точно една равнина.

4) Всеки две различни равнини се пресичат по права.
5) Ако са дадени права и равнина, то или правата лежи в равнината, или се пресичат в една точка.
6) Две различни прави или се пресичат в една точка или не лежат в една равнина

Реална проективна равнина

Всичко е аналогично на реалното проективно пространство, но няма равнини.
Точките са крайни точки и безкрайни точки на правите в равнината.
Правите са разширените крайни прави в равнината и безкрайната права ω, състояща се от всички безкрайни точки

Теорема: В реалната проективна равнина са в сила свойствата:
1) През 2 различни точки минава точно 1 права.
2) Всеки 2 различни прави се пресичат точно в 1 точка.

Доказателство: Нека $P_1 \neq P_2$ са точки.
а) P_1 и P_2 са крайни точки $\Rightarrow \exists$ права l : $P_1, P_2 \in l$
$\Rightarrow P_1, P_2 \in \overline{l}$ $\Rightarrow$ доказахме съществуването.
Нека a е проективна права : $P_1, P_2 \in a$
$\Rightarrow$ a е разширена крайна права, защото ω не съдържа крайни точки $\Rightarrow a = \overline{m}$ за някоя крайна права $m \Rightarrow P_1$ и $P_2 \in \overline{m} = m \cup \{U_m\}$

$\Rightarrow P_1, P_2 \in \overline{m}$ (защото ~~доказахме~~ са крайни) $\Rightarrow \overline{m} = \overline{l} \Rightarrow a = \overline{l}$, с което доказахме и единствеността.

б) P_1 е крайна, P_2 е безкрайна, $P_2 = U_l$ за някоя крайна права l.
Нека m е крайна права през P_1, която е успоредна на l. $m \parallel l \Rightarrow U_m = U_l$.
$\Rightarrow \overline{m}$ е права през P_1 и $P_2 =$ ~~U_m (защото~~ $=$
$= U_l = U_m$ (защото $P_1 \in m \subset \overline{m}$)
Така доказваме съществуването.
Нека a е проективна права : $P_1, P_2 \in a$
$\Rightarrow a \neq \omega$, защото ω не съдържа крайни точки, а P_1 е крайна $\Rightarrow a = \overline{n}$ за някоя крайна права и $\overline{n} = n \cup \{U_n\}$
Тъй като единствената безкрайна точка на $\overline{n}$ е U_n, то $\underset{\overset{\|}{U_l}}{P_2} = U_n \Rightarrow l \parallel n$

Тъй като P_1 е крайна, от $P_1 \in \overline{n} \Rightarrow P_1 \in n$
$\Rightarrow n$ е правата през P_1, която е успоредна на $l \Rightarrow n = m \Rightarrow a = \overline{m}$, т.е. получихме единствеността.

в) P_1 и P_2 са безкрайни. $P_1, P_2 \in \omega$ и никоя друга права не ги съдържа, защото разширените крайни прави съдържат само по една безкрайна точка.

Пр 1.94

2) Нека $a \neq b$ са проективни прави

а) $a = \bar{l}$ и $b = \bar{m}$ са разширени крайни права

$\Rightarrow l \neq m$

a_1) l и m са пресичащи се $\Rightarrow$ не са успоредни и $\Rightarrow U_l \neq U_m \Rightarrow \bar{l} \cap \bar{m} = (l \cup \{U_l\}) \cap (m \cup \{U_m\})$

$\Rightarrow l \cap m$ - една точка

a_2) $l \parallel m \Rightarrow U_l = U_m \Rightarrow \bar{l} \cap \bar{m} = U_l$ - една точка

б) $a = \bar{l}$, $b = \omega \Rightarrow \bar{l} \cap \omega = U_l$ - една точка.

Хомогенни координати

§1. Хомогенни координати в реалното проективно пространство:

Нека $K = OXYZ$ (големи букви) е афинна коорд. с-ма в пространството, ~~...~~ то

Дефиниция: Координатите спрямо K на крайните точки, които използваме досега, ще наричаме нехомогенни координати и ще ги бележим с главни букви.

Дефиниция: 1) Нека крайната точка P има спрямо K нехомогенни координати (X, Y, Z). Хомогенни координати на P спрямо K се наричат всяка четворка $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$, за която $t \neq 0$ и
$\frac{x}{t} = X$, $\frac{y}{t} = Y$, $\frac{z}{t} = Z$

Нека l е крайна права. Хомогенни координати на безкрайната точка на U_l се нарича всяка четворка $(x, y, z, 0) \in \mathbb{R}^4$, където (x, y, z) са коорд. спрямо K на ненулев вектор v, който е неколинеарен с l.

~~Коментари~~ Забележка: 1) Всяка ненулева четворка $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$ представлява хомогенни коорд. на някоя точка

Четворката $(0, 0, 0, 0)$ не представлява хомогенни координати на никоя точка

2) Ако т. P има хомогенни коорд. (x, y, z, t), то P е крайна (безкрайна) $\Leftrightarrow t \neq 0$ (съотв. $t = 0$)

3) Ако P е крайна точка и има нехомогенни коорд. (X, Y, Z), то една четворка хомогенни коорд. е $(X, Y, Z, 1)$

Твърдение 1: Нека т. P има спрямо K хомогенни координати (x, y, z, t). Тогава четворката (x', y', z', t') представлява хомогенни координати на P спрямо K. $\Leftrightarrow \exists\, \rho \neq 0: x' = \rho x, y' = \rho y, z' = \rho z, t' = \rho t$

Доказателство: 1) Нека P е крайна точка и има спрямо K нехомогенни координати (X, Y, Z)
$\Rightarrow t \neq 0$ и $\frac{x}{t} = X, \frac{y}{t} = Y, \frac{z}{t} = Z$
Нека (x', y', z', t') са хомогенни коорд. на $P \Rightarrow$
$\Rightarrow t' \neq 0$ и $\frac{x'}{t'} = X, \frac{y'}{t'} = Y, \frac{z'}{t'} = Z$
Нека $\rho = \frac{t'}{t}$ ($\Rightarrow \rho \neq 0$, защото $t' \neq 0$)

$\Rightarrow x' = t'X = \frac{t'}{t}x = \rho x;\ y' = \rho y;\ z' = \rho z,\ t' = \rho t$

Обратно: Нека $\rho \neq 0$ и $x' = \rho x,\ y' = \rho y,\ z' = \rho z,$
$t' = \rho t \Rightarrow t' \neq 0$, защото $\rho \neq 0$ и $t \neq 0$

$\Rightarrow \frac{x'}{t'} = \frac{\rho x}{\rho t} = \frac{x}{t} = X,\ \frac{y'}{t'} = Y,\ \frac{z'}{t'} = Z \Rightarrow (x', y', z', t')$ са хомогенни координати на P

2) Нека P е безкрайна точка, $P = U_l \Rightarrow t = 0$ и векторът $v(x, y, z) \parallel l$ и $v \neq 0$.
Нека (x', y', z', t') също са коорд. на $U_l \Rightarrow$
$\Rightarrow t' = 0$ и векторът $v'(x', y', z') \parallel l$ и $v' \neq 0$
$\Rightarrow v \parallel v' \Rightarrow \exists \rho \neq 0 : v' = \rho v$ ($\rho \neq 0$, защото и $v' \neq 0$)
$\Rightarrow x' = \rho x,\ y' = \rho y,\ z' = \rho z,\ t' = 0 = \rho.0 = \rho.t$

Обратно: Нека $(x', y', z', t') : x' = \rho x,\ y' = \rho y,\ z' = \rho z,$
$t' = \rho t$ за $\rho \neq 0 \Rightarrow t' = 0$ (защото $t = 0$)
Нека v' е векторът с координати $v'(x', y', z')$
$\Rightarrow v' = \rho v \Rightarrow v' \parallel v \Rightarrow v' \parallel l$.
Освен това $v' \neq 0$, защото $\rho \neq 0$ и $v \neq 0$
$\Rightarrow (x', y', z', \underset{t'}{\underset{\parallel}{0}})$ са хомогенни координати на U_l.

$(\mathbb{R}^4 \setminus \{0\}) / \sim$
$(x, y, z, t) \sim (x', y', z', t') \Leftrightarrow \exists \rho \neq 0 : x' = \rho x,\ y' = \rho y,$
$z' = \rho z,\ t' = \rho t.$

Теорема 1: Всяка равнина в реалното проективно пространство има у-ние в хомогенни координати спрямо K от вида $Ax + By + Cz + Dt = 0$,

където ~~A, B, C, D е ≠ 0~~ поне един от коеф.
A, B, C, D е $\neq 0$.
Обратно, всяко уравнение от тоя вид е уравнение в хомогенни координати спрямо K на някоя равнина в реалното проективно пространство.

Доказателство: 2) Безкрайната равнина Ω
$P(x, y, z, t) \in \Omega \Leftrightarrow t = 0 \Rightarrow t = 0$ е уравн. на
$\Rightarrow$ безкрайната равнина Ω като тук
$D = 1 \neq 0$

18.XII.2012г. Хомогенни координати
1. Хомогенни координати в пространството
$K = Oxyz$ афинна коорд. с-ма
Досегашните коорд. на точка наричаме нехомогенни координати
Ако P е крайна ~~черн~~ точка с нехомогенни коорд. (X, Y, Z), то хомогенните коорд. на P са (x, y, z, t).
$t \neq 0$ и $\frac{x}{t} = X$, $\frac{y}{t} = Y$, $\frac{z}{t} = Z$.

Ако $P = U_\ell$ - безкрайна точка и $0 \neq v(x, y, z) \parallel \ell$, то хомогенните коорд. на $P = U_\ell$ са $(x, y, z, 0)$

$(0, 0, 0, 0)$ не са хомогенни коорд. на някоя точка, всички останали четворки са
P е крайна $\Leftrightarrow t \neq 0$
безкрайна $\Leftrightarrow t = 0$

Ако P е крайна с нехомогенни коорд. (X, Y, Z), то една четворка хомогенни коорд. е $(X, Y, Z, 1)$

Твърдение 1: Ако P има хомогенни коорд (x, y, z, t), то (x', y', z', t') са хомогенни коорд. на P

$\Leftrightarrow \exists \rho \neq 0 : x' = \rho x, \ y' = \rho y, \ z' = \rho z, \ t' = \rho t$

Теорема 1: Всяка проектна равнина има хомогенни коорд. уравн. от вида $Ax + By + Cz + Dt = 0$, където поне едно от A, B, C, D е $\neq 0$.

Обратно, всяко у-ние от тоя вид е уравн. в хомогенни коорд. ~~...~~ на някоя проектна равнина.

Доказателство: Нека π е проектна равнина

1) $\pi = \overline{\rho}$, където ρ има уравн. в нехомогенни коорд. спрямо K от вида $AX + BY + CZ + D = 0$, където $(A, B, C) \neq 0$

Нека т. P има хомогенни коорд. (x, y, z, t)

Нека P е крайна $\Rightarrow t \neq 0$ и P има нехомогенни коорд. $\left(\frac{x}{t}, \frac{y}{t}, \frac{z}{t}\right) \Rightarrow P \in \overline{\rho} = \pi \Leftrightarrow P \in \rho \Leftrightarrow$

$$A \frac{x}{t} + B \frac{y}{t} + C \frac{z}{t} + D = 0 \Leftrightarrow Ax + By + Cz + Dt = 0$$

Нека P е безкрайна точка $P = U_\ell$, ~~където~~
$\Rightarrow P$ има хомогенни коорд. $(x, y, z, 0)$, където векторът $v(x, y, z) \parallel \ell$ и $v \neq 0$

$$P \in \pi = \overline{\rho} \Leftrightarrow \underset{U_\ell}{P} \in U_\rho \Leftrightarrow \ell \parallel \rho \Leftrightarrow v(x, y, z) \parallel \rho$$

$$\Leftrightarrow Ax + By + Cz = 0 \Leftrightarrow Ax + By + Cz + D.0 = 0$$

$\Rightarrow$ и в двата случая получаваме, че $P(x, y, z, t) \in \pi$ $\Leftrightarrow$ $Ax + By + Cz + Dt = 0$ е уравн. на π в хомогенни коорд. При това имаме коеф. $\neq 0$, защото $(A, B, C) \neq 0$

2) $\pi = \Omega$ има у-ние $t = 0$

Обратно: Нека е дадено у-нието $Ax + By + Cz + Dt = 0$ и поне един коеф. е $\neq 0$. Ако $A = B = C = 0$, $\Rightarrow$ $\Rightarrow D \neq 0 \Rightarrow$ уравн. е $Dt = 0 \Leftrightarrow t = 0$ (у-ние на безкр. равнина)

Ако $(A, B, C) \neq 0$, то нека ρ е крайната равнина с уравнение в нехомогенни коорд. $AX + BY + CZ + D = 0$
От 1) $\Rightarrow$ $Ax + By + Cz + Dt = 0$ е уравн. на $\overline{\rho}$.

Теорема 2: Нека проективните равнини π_1 и π_2 имат хомогенни коорд. спрямо K уравнения:

$\pi_1: A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 t = 0$

$\pi_2: A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 t = 0$

Означаваме с $A = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \end{pmatrix}$

~~Тогава~~

Тогава:

1) $\pi_1 = \pi_2 \Leftrightarrow r(A) = 1 \Leftrightarrow \exists \rho \neq 0 : A_2 = \rho A_1, B_2 = \rho B_1, C_2 = \rho C_1, D_2 = \rho D_1$

2) $\pi_1 \neq \pi_2 \Leftrightarrow r(A) = 2 \Leftrightarrow \nexists \rho : A_2 = \rho A_1, B_2 = \rho B_1, C_2 = \rho C_1, D_2 = \rho D_1$

Доказателство: $r(A) = 1$ или 2, защото коеф. в у-нията на π_1 и π_2 не са всички 0.

$\Rightarrow$ десните еквивалентности в 1) и 2) са очевидни.

За π_1 и π_2 имаме 2 изключващи се възможности $\pi_1 = \pi_2$ или $\pi_1 \neq \pi_2$

За $r(A)$ имаме 2 изключващи се възможности $r(A) = 1$ или $r(A) = 2$

$\Rightarrow$ достатъчно е да док. само 1)

Обратната посока също е очевидна, защото ако $\exists \rho \neq 0 : A_2 = \rho A_1, B_2 = \rho B_1, C_2 = \rho C_1, D_2 = \rho D_1$, то у-нието на π_2 е $\underbrace{\rho}_{\rho \neq 0}(A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 t) = 0$, което е еквивалентно на $A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 t = 0$ - у-ние на $\pi_1 \Rightarrow \pi_1 = \pi_2$.

Нека сега π_1 и π_2. $\Rightarrow P \in \pi_1 \Leftrightarrow P \in \pi_2$

Нека $A_1 \neq 0$

$\Rightarrow$ уравн. на π_1 е еквивалентно на $x = -\frac{B_1}{A_1} y - \frac{C_1}{A_1} z - \frac{D_1}{A_1} t$

$\Rightarrow P(x, y, z, t) \in \pi_1 \Leftrightarrow$ коорд. удовлетворява това у-ние.

Ако $P \in \pi_1 \Rightarrow P \in \pi_2 \Rightarrow$ коорд. на P удовлетворява уравн. на $\pi_2 \Rightarrow A_2\left(-\frac{B_1}{A_1} y - \frac{C_1}{A_1} z - \frac{D_1}{A_1} t\right) + B_2 y + C_2 z + D_2 t = 0$

$\Rightarrow \left(B_2 - \frac{A_2}{A_1} B_1\right) y + \left(C_2 - \frac{A_2}{A_1} C_1\right) z + \left(D_2 - \frac{A_2}{A_1} D_1\right) t = 0$

и това е вярно за ~~всички~~ $\forall (y, z, t) \neq 0$

($(y, z, t) \neq 0$, защото ако $(y, z, t) = 0$, то и $x = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow (x, y, z, t) = 0$ – не са коорд. на точка)

Очевидно равенството е изпълнено и при $(y, z, t) = 0$
$\Rightarrow$ равенството е вярно $\forall y, z, t \Rightarrow$ коеф. са 0.

$\Rightarrow B_2 = \frac{A_2}{A_1} B_1, \; C_2 = \frac{A_2}{A_1} C_1, \; D_2 = \frac{A_2}{A_1} D_1$

Означаване: $\rho := \frac{A_2}{A_1} \Rightarrow A_2 = \rho A_1, \; B_2 = \rho B_1, \; C_2 = \rho C_1,$
$D_2 = \rho D_1$ и $\rho \neq 0$, защото ако $\rho = 0$ ще получим, че ако $A_2 = B_2 = C_2 = D_2 = 0$ – противоречие

Теорема 3: Всяка права в колективното пр-во има хомогенни коорд. спрямо K ~~уравн.~~ двойка у-ния от вида: $\begin{cases} A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 t = 0 \\ A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 t = 0 \end{cases}$

където матр. $\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \end{pmatrix}$ има ранг 2.

Обратно: всяка двойка у-ния от тоя вид задава някоя права.

Доказателство: Всяка права в проективната ~~равнина~~ пространство е пресечена права на две равнини π_1 и π_2 и прилагаме Теореми 1 и 2.

Теорема 4: Нека т. P_1 и P_2 са разл. и имат спрямо K хомогенни коорд. $P_1(x_1, y_1, z_1, t_1)$, $P_2(x_2, y_2, z_2, t_2)$. Тогава правата P_1P_2 има в хомогенни коорд. спрямо K параметрични уравнения:

$$P_1P_2 \begin{cases} x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \\ y = \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 \\ z = \lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 \\ t = \lambda_1 t_1 + \lambda_2 t_2 \end{cases}, (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$$

Доказателство: По теорема 3 правата P_1P_2 може да се зададе с двойка у-ния.
Разглеждане тая двойка у-ния като хомогенна с-ма. Тъй като рангът на матрицата ѝ е 2, а броят на неизв. е 4, то простр. от реш. е $4-2=2$-мерно.
Коорд. на P_1 и P_2 са решение на тази с-ма и освен това са ЛНЗ (защото ако бяха ЛЗ щяха да пропорционални и $\Rightarrow$ $P_1 = P_2$ - противоречие)
$\Rightarrow$ коорд. (x_1, y_1, z_1, t_1) и (x_2, y_2, z_2, t_2) на P_1 и P_2 образуват базис на простр. от решения на с-мата
$\Rightarrow$ всяко решение (x, y, z, t) е тяхна линейна комбинация.
$\exists \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} : (x, y, z, t)$ се дава от у-нието в усл-на т.
При това $(x, y, z, t) \neq 0 \Leftrightarrow (\lambda_1, \lambda_2) \neq 0 \Rightarrow P(x, y, z, t) \in P_1P_2$
$\Leftrightarrow (x, y, z, t) \neq 0$ са решения на с-мата
$\Leftrightarrow (x, y, z, t)$ се дават с уравн. от условието на теоремата с $(\lambda_1, \lambda_2) \neq 0$.

Теорема 5: Нека точките P_1, P_2, P_3 не лежат на една проектна права и имат спрямо К хомогенни коорд. $P_i(x_i, y_i, z_i, t_i)$, $i=1,2,3$.

Тогава равн. π ~~опред~~ определена от P_1, P_2, P_3 има у-ние
$$\begin{vmatrix} x & x_1 & x_2 & x_3 \\ y & y_1 & y_2 & y_3 \\ z & z_1 & z_2 & z_3 \\ t & t_1 & t_2 & t_3 \end{vmatrix} = 0$$
и параметрични у-ния
$$\pi: \begin{cases} x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 \\ y = \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 + \lambda_3 y_3 \\ z = \lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 + \lambda_3 z_3 \\ t = \lambda_1 t_1 + \lambda_2 t_2 + \lambda_3 t_3 \end{cases}, (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \neq 0$$

Доказателство: Нека π има у-ние $Ax+By+Cz+Dt=0$
~~Този~~ Тъй като поне един коеф. е $\neq 0$, то (A, B, C, D) има ранг 1.
$\Rightarrow$ простр. от решенията на уравн. е $4-1=3$-мерно
$P_1, P_2, P_3 \in \pi \Rightarrow$ техните коорд. са решения
При това са лин. независими, защото ако допуснем, че са лин. зависими, то една от коорд. четворки е лин. комбин. ~~образуват базис на пространството~~ на другите две и $\Rightarrow$ по теорема 4, получаваме, че една от точките лежи на правата през другите две – противоречие.
$\Rightarrow$ коорд. на P_1, P_2, P_3 образуват базис на простр. от решения на у-нията на π.
$\Rightarrow$ всяко решение (x, y, z, t) е лин. комбин.

на тях, т.е. $\exists \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$: (x, y, z, t) се дава с уравн. от условието.

При това $(x, y, z, t) \neq 0 \Leftrightarrow (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \neq 0$
$\Rightarrow P(x, y, z, t) \in \pi \Leftrightarrow (x, y, z, t) \neq 0$ е решение на уравн. на $\pi \Leftrightarrow (x, y, z, t)$ се задава с параметр. уравн. от условието с $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \neq 0$

С това е док. частта за парам. уравн. Общото уравнение следва от това, че (x, y, z, t) е лин. комбин. на коорд. на $P_1, P_2, P_3 \Leftrightarrow$ детерминанта от условието е 0.

2. Хомогенни коорд. в проективната равнина.

Дефиницията е като в пространството, но няма коорд. z. Същото важи и за твърдение 1.

Съответната на теорема 1 е

Теорема 1': Всяка проективна права в равнината има хомогенни коорд. спрямо K уравн. от вида $Ax + By + Ct = 0$, където поне един от коеф. A, B, C е $\neq 0$. Обратно, всяко у-ние от тоя вид е уравн. в хомогенни коорд., спрямо K на някоя проективна права.

Теорема 2': Нека l_1 и l_2 са две проективни прави с уравн. в хомогенни коорд. спрямо K.

$l_1: A_1x + B_1y + C_1t = 0$
$l_2: A_2x + B_2y + C_2t = 0$

Озн. $A = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix}$

Тогава: 1) $l_1 = l_2 \Leftrightarrow r(A) = 1 \Leftrightarrow \exists \rho \neq 0$: $A_2 = \rho A_1,\ B_2 = \rho B_1,\ C_2 = \rho C_1$.

2) $l_1 \neq l_2 \Leftrightarrow r(A) = 2 \Leftrightarrow \nexists \rho$: $A_2 = \rho A_1,\ B_2 = \rho B_1,\ C_2 = \rho C_1$

Съответната теорема 5 е

Теорема 5': Нека P_1 и P_2 са различни точки с хомогенни коорд. спрямо K $P_1(x_1, y_1, t_1)$, $P_2(x_2, y_2, t_2)$

Тогава правата P_1P_2 има в хомог. коорд. спрямо K уравн.

$$\begin{vmatrix} x & x_1 & x_2 \\ y & y_1 & y_2 \\ t & t_1 & t_2 \end{vmatrix} = 0$$ и параметрични уравнения

$$P_1P_2 \begin{cases} x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \\ y = \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 \\ t = \lambda_1 t_1 + \lambda_2 t_2 \end{cases},\ (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$$

Смяна на хомогенните координати при смяна на координатната система

Работим едновременно в проективната равн. P_2 $(n=2)$ и проект. простр. P_3 $(n=3)$

Нека $K = Oe_1 \dots e_n$ и $K' = O'e_1' \dots e_n'$ са афинни коорд. с-ми, T матр. на прехода от базиса $e = (e_1, \dots, e_n)$ към базиса $e' = (e_1', \dots, e_n')$ е T, коорд. вектор на O' спрямо K е S (стълб) -

Тогава за нехомогенни коорд.

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ и } x' = \begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix}$$

на крайна точка P имаме $x = Tx' + S$ а за вектор v, с коорд. $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ спрямо K и $x' = \begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix}$ спрямо K'

имаме $x = Tx'$

Оттук лесно се получава:

Теорема: Нека P е точка в P_n (крайна или безкрайна) и хомогенните коорд. на P спрямо K са $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n+1} \end{pmatrix}$, а спрямо K' са $x' = \begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_{n+1}' \end{pmatrix}$. Тогава

$$x = \left(\begin{array}{c|c} T & S \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right) \cdot x'$$

08.I.2013г. Фигури от втора степен

Ще работим едновременно в проективната равнина P_2 ($n=2$) и проективното пространство P_3 ($n=3$).

Нека K е ~~афинната~~ коорд. с-ма.
Хомогенни~~те~~ коорд. относно K ще означим с $x_1, \ldots, x_{n+1}$

Нека $A=(a_{ij})$; $i,j=1,\ldots,n+1$ е ~~нула~~ ненулева симетрична реална квадратна матрица от ред $n+1$. (симетрична: $A=A^t$, т.е. $a_{ij}=a_{ji}$)

Нека F е съотв. ѝ квадратична форма, т.е.

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) = \sum_{i,j=1}^{n+1} a_{ij} x_i x_j$$

Ако $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n+1} \end{pmatrix}$, то $F(x) = x^t A x$

Дефиниция: Множеството $\mathcal{J}$, което има в хомогенни координати спрямо K уравн. $\mathcal{J}: F(x)=0$ се нарича фигура от втора степен.
(при $n=2$ крива от втора степен,
при $n=3$ повърхнина от втора степен).

Забележка: 1) Ако P има хомогенни коорд. x спрямо K, то произв. хомогенни коорд. на P спрямо K са ρx, където $\rho \neq 0$. Тъй като $F(\rho x) = \rho^2 F(x)$
$\Rightarrow F(x)=0 \Leftrightarrow F(\rho x)=0 \Rightarrow F(x)=0$ наистина е уравн. на някакво множество в хомогенни коорд.

$\boxed{П}$ 1.1 108

2) Спрямо коорд. с-ма g се задава с друга матрица, защото ако $x = \underbrace{\begin{pmatrix} T & S \\ O & 1 \end{pmatrix}}_{=\mathbb{T}} \cdot x'$

$x^t . A . x = x'^t \underbrace{\mathbb{T}^t . A . \mathbb{T}}_{=A'} x' = x'^t A' x'$

3) В дефиницията се допускат и комплексни точки, т.е. точки с ~~конкретни~~ комплексни координати (т.е. разширили сме реалното проективно пространство до комплексно проективно пространство)

Твърдение 1: Матриците A и B създават една и съща фигура от втора степен $\Leftrightarrow \exists \rho \neq 0 : B = \rho A$

Доказателство: Обратната посока е очевидна, защото $x^t B x = 0 \Leftrightarrow x^t \underbrace{\rho}_{\neq 0} A x = 0 \Leftrightarrow x^t A x = 0$

Правата посока няма да доказвам.

$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0 \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$

$x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 = 0 \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & 2 \end{pmatrix}$

Дефиниция: Точката $P_0(x_0)$ се нарича особена точка за g, ако $Ax_0 = 0$. Ако g има особени точки, то казваме, че g е особена.

Забележка: Дефиницията на особена точка не зависи от избора нито на коорд. x_0 на P_0, нито на матр. A на q, нито на коорд. с-ма. ~~Тъй като~~

Тъй като у-нието: $Ax=0$ има ненулево решение $\Leftrightarrow \det(A)=0$, получаваме

Твърдение 2: q е особена $\Leftrightarrow A$ е необратима.

Дефиниция: $F_i(x) = \frac{1}{2} \underbrace{\frac{\partial F}{\partial x_i}}_{\text{частна производна}} = \sum_{j=1}^{n+1} a_{ij} x_j$, $i=1, \dots, n+1$

се нарича полупроизводни на квадратична форма F.

Твърдение 3 (Тъждество на Ойлер):

$$F(x) = \sum_{i=1}^{n+1} F_i(x) \cdot x_i$$

Твърдение 4: $P_0(x_0)$ е особена точка за $q \Leftrightarrow F_i(x_0)=0$, $i=1, \dots, n+1$ (защото с-мата $F_i(x)=0$ $i=1, \dots, n+1$ всъщност е $Ax=0$)

Твърдение 5: Всяка особена точка на q лежи в/у q (защото ако $Ax=0 \Rightarrow x^t A x = 0$)

Означаваме с $F(x;y)$ билинейната форма, съответ не на квадратичната форма F, т.е.

$$F(x;y) = \sum_{i,j=1}^{n+1} a_{ij} x_i y_j = x^t A y$$, тъй като A е симет

рична, то $F(x;y) = F(y;x)$

Твърдение 6: $F(x;y) = \sum_{i=1}^{n+1} F_i(x) y_i = \sum_{i=1}^{n+1} F_i(y) x_i$

(аналогично на тъждеството на Ойлер)

Дефиниция: Казваме, че точките $P(x)$ и $Q(y)$ са спрегнати относно q, ако $F(x;y) = 0$
$(\Leftrightarrow F(y;x) = 0)$

Твърдение 7: Точката $P \in q \Leftrightarrow P$ е спрегната със себе си (защото очевидно $F(x) = F(x;x)$)

Твърдение 8: Ако $P_0(x_0)$ е особена точка за q, то тя е спрегната за всяка точка (защото $F(x_0;x) = F(x;x_0) = \underbrace{x^T A x_0}_{=0} = 0$)

Твърдение 9: Ако $P_0(x_0)$ не е особена точка за q, то множ. от спрегнатите с P_0 точки е права (съотв. равнина)

Доказателство: $P(x)$ е спрегната с $P_0(x_0) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow F(x_0;x) \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n+1} F_i(x_0) x_i = 0$

Тъй като P_0 не е особена, поне едно $F_i(x_0) \neq 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n+1} F_i(x_0) x_i = 0$ е уравн. на права (равнина)

Деф: 1) Ако P_0 е неособена точка за g, то правата (равнината) състояща се от спрегнатите с P_0 точки, се нарича поляра на P_0.

Ако P_0 е особена за g, то считаме, че всяка права (съотв. равнина) е поляра на P_0 (защото P_0 е спрегната с точките на всяка права (равнина)).

2) Казваме, че т. P_0 е полюс на правата (равнина) π_0, ако π_0 е поляра на P_0 ($\Rightarrow$ всяка особена точка е полюс на всяка права (равнина))

Твърдение 10: Ако P_0 не е особена за g, то P_0 лежи върху поляпата си $\Leftrightarrow$ $P_0 \in g$ (от Тв.7)

Твърдение 11: Поляpата на всяка неособена точка минава през всяка особена точка (от Тв. 8).

Твърдение 12: Ако P_1 и P_2 не са особени за g и поляpите им са π_1 и π_2, то $P_1 \in \pi_2 \Leftrightarrow P_2 \in \pi_1$

Доказателство: $P_1 \in \pi_2 \Leftrightarrow P_1$ е спрегната с P_2 $\Leftrightarrow P_2 \in \pi_1$.

Твърдение 13: Ако g е неособена, то всяка права (съотв. равнина) има единствен полюс.

Доказателство: Нека $\pi_0 : \sum_{i=1}^{n+1} b_i x_i = 0$ е права (равнина)

Нека $P_0(x_0)$. Тогава полярата на P_0 е

$\sum_{i=1}^{n+1} F_i(x_0) x_i = 0$. Това е уравн. на $\pi_0 \Leftrightarrow \exists \rho \neq 0$:

$F_i(x_0) = \rho b_i$, $i=1, \dots, n+1$, т.е. $Ax_0 = \rho b$, където $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{n+1} \end{pmatrix}$

q е неособена $\Rightarrow A$ е неособратима $\Rightarrow$ уравнението $Ax_0 = \rho b$ има единствено решение $x_0 = \rho A^{-1} b$. Тъй като $b \neq 0 \Rightarrow x_0 \neq 0$.
$\Rightarrow x_0$ са коорд. на някаква точка и като меним ρ се получават хомогенни коорд. на същата точка
$\Rightarrow \pi_0$ има единствен полюс P_0, а именно точкаР₀ с хомогенни коорд. $A^{-1}b$.

Следствие: Ако q е неособена, то съответствието, при което на точка се съпоставя полярата ѝ е биективно съответствие м/у точките и правите (съотв. равнините).

Твърдение 14: Ако P_1 и P_2 не са особени точки за q (q – крива от втора степен, т.е. $n=2$) и полярите им π_1 и π_2 са различни, то пресечната точка на π_1 и π_2 е полюс на правата P_1P_2.

Доказателство: Щом $\pi_1 \neq \pi_2$, то и $P_1 \neq P_2 \Rightarrow$ $\Rightarrow P_1$ и P_2 наистина дефинира права.

Нека $P_0 = \pi_1 \cap \pi_2$

Ако P_0 е особена за q, то тя е полюс на всяка права и в частност и на P_1P_2.

Нека P_0 е неособена и нека π_0 е полярата ѝ.
$\Rightarrow P_0 \in \pi_1 \Rightarrow P_1 \in \pi_0$ (аналогично $P_0 \in \pi_2 \Rightarrow P_2 \in \pi_0$)
$\Rightarrow P_1P_2 = \pi_0 \Rightarrow P_0$ е полюс на правата P_1P_2.

Дефиниция: Ако $P_0 \in q$ и P_0 не е особена за q, то полярата на P_0 спрямо q, се нарича допирателна на q в P_0 (при $n=3$ – допирателна равнина)

Дефиниция: 1) Полярата на безкрайна точка, която не е особена за q, се нарича диаметър на q. (при $n=3$ – диаметрална равнина)
2) Всеки полюс на безкрайната права (съотв. на безкрайната равнина) се нарича център на q.
3) Допирателната на безкрайна точка на q се нарича асимптота на q (съотв. асимптотична равнина)

Твърдение 15: Всеки диаметър на q, минава през всяка особена точка на q.

Твърдение 16: Всеки диаметър на q, минава през всеки център на q. (по Тв. 11 и Тв. 12).

Т. 1. 114

Твърдение 17: Всяка асимптота е диаметър и следователно минава през всеки център.

Твърдение 18: Всяка особена точка е център.

Твърдение 19: Точката $P_0(x_0)$ е център на $g \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow F_i(x_0) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n$

Доказателство: Ако P_0 е особена точка, то $F_i(x^0) = 0$ за $i = 1, \dots, n+1$ (дори за $i = n+1$)

Нека $P_0(x_0)$ е неособена точка, ~~тогава~~ ~~поля~~ $\Rightarrow$ полярата ѝ е $\pi_0: \sum_{i=1}^{n+1} F_i(x_0) x_i = 0$

$\Rightarrow P_0$ е център $\Leftrightarrow \pi_0$ е безкрайната права (равнина) $\Leftrightarrow F_i(x_0) = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n$
(уравнение на безкрайната права (равнина) е $x_{n+1} = 0 \Rightarrow$ всевъзможните уравнения са $g \; x_{n+1} = 0$)

Проективна класификация на фигурите от втора степен

Работим едновременно в проективната равнина P_2 $(n=2)$ и проект. простр. P_3 $(n=3)$
Нека $K = Oe_1 \dots e_n$ е афинна коорд. с-ма

Деф: Проективна трансформация е изображение $L: P_n \to P_n$, за което съществува обратима матрица $(n+1) \times (n+1)$, която е равна матрица,

за която е изпълнено. Ако т. P има хомогенни коорд. x спрямо K, а $L(P)$ има хомогенни коорд. y спрямо K, то $y = Tx$.
В тоя случай казваме, че L има спрямо K уравн. $y = Tx$ и пишем $L: y = Tx$

Коректност: Тъй като P е точка $\Rightarrow x \neq 0$
Тъй като P е обратима матрица $\Rightarrow y = Tx \neq 0$
$\Rightarrow y$ са хомогенни коорд. на някоя точка
ρx също са коорд. на P, $T(\rho x) = \rho Tx = \rho y$ - коорд. на същата точка, която има коорд. y

2) Спрямо друга коорд. с-ма K' L се задава с у-ние от същия вид, но с друга матрица:
Ако смяната на коорд. от $K \to K'$ се задава с $x = \underbrace{\left(\begin{array}{c|c} S & s \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right)}_{\tilde{S}} \cdot x'$, то спрямо K'

$L: y' = \tilde{S}^{-1} T \cdot \tilde{S} \cdot x'$ т.е. задава се с $T' = \tilde{S}^{-1} T \tilde{S}$

Примери: Тъждественото изображение $id: P^n \to P^n$ е проект. трансформация, която се задава с $T = E_{n+1}$

Твърдение 1:
1) Ако L_1 и L_2 са проективни трансформации, които спрямо K се задава с матриците T_1 и T_2, то $L_1 \circ L_2$ е проективна трансформация, която се задава спрямо K с

Т. 1. 116

$T_1 \; T_2$

2) Ако L е проективна трансформация, то спрямо K се задава с матрицата T, то L е обратимо изображение и L^{-1} също е проективна трансформация, която се задава спрямо K с матрицата T^{-1}

Твърдение 2: Ако L_1 и L_2 са проективни трансформации които се задават с матрица T_1 и T_2, то $L_1 = L_2 \iff \exists \rho \neq 0 : T_2 = \rho T_1$.

Твърдение 3: Ако l е права и L е проективна трансформация, то $L(l)$ е проективна трансформация

Док: Нека $P_1 \neq P_2$ са две точки от l и $P_1(x_1)$, $P_2(x_2)$ $\Rightarrow$ параметричните уравн. на l са $l: x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2$, $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$
$\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$

Тъй като L е обратимо изображение
$\Rightarrow L(P_1) \neq L(P_2)$

Имаме $L(P_1)(y_1)$, $L(P_2)(y_2)$, където $y_1 = Tx_1$, $y_2 = Tx_2$

Ще док, че $L(l)$ е правата определена от точките $L(P_1)$ и $L(P_2)$

Нека $P(x) \Rightarrow L(P)(y)$, където $y = Tx$

$P \in l \iff x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \iff Tx = \lambda_1 Tx_1 + \lambda_2 Tx_2$

защото T е обратима

$\Leftrightarrow \; y = \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2$

$\Rightarrow L(P)$ е правата $L(P_1)L(P_2) \Rightarrow L(l) = L(P_1)L(P_2)$

Твърдение 4: Ако π е равнина и L е проективна трансформация, то $L(\pi)$ е равнина.

Док: Нека $P_1(x_1), P_2(x_2), P_3(x_3)$ са три точки от π, които не ~~лежат~~ лежат на една права. $\Rightarrow$ параметрично уравнение на π са

$\pi : x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 \;, (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$
$\mathbb{C}^3 \setminus \{0\}$

$L(P_1), L(P_2), L(P_3)$ не лежат на една права (защото от предишното твърдение за L^{-1} бихме получили, че P_1, P_2, P_3 са на една права) и $\Rightarrow$ задават равнина.

Имаме $L(P_1)(Tx_1), L(P_2)(Tx_2), L(P_3)(Tx_3)$
Нека $P(x) \Rightarrow L(P)(Tx) \Rightarrow P \in \pi \Rightarrow x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 \Leftrightarrow Tx = \lambda_1 Tx_1 + \lambda_2 Tx_2 + \lambda_3 Tx_3 \Leftrightarrow L(P) \in$ равн. определена от $L(P_1), L(P_2), L(P_3)$

$\Rightarrow L(\pi)$ е равн. определена от $L(P_1), L(P_2), L(P_3)$.

Деф: Казваме, че две фигури от втора степен q и q' са проективно еквивалентни, ако съществува проективна трансформация L: $L(q') = q$.
От Тв 1 следва Тв 8:

Т1.1.118

От твърдение 1 следва твърдение 5: Проективната еквивалентност е релация на еквивалентност в множеството на фигурите от втора степен.

Деф: Класовете на еквивалентност спрямо проективната еквивалентност на фигурите от втора степен се наричат проективни класове.

Твърдение 6: Ако фигурата от втора степен q и q' се задават с матрицата A и A', то те са ~~задават~~ проективна еквивалентност $\Leftrightarrow$ $\exists$ обратима матрица T:

$$T^t A T = \pm A'$$

Док: Нека L е проективна трансформация зададена от T. Нека $P'(x')$ и $P = L(P')$,

$P(x) \Rightarrow x = Tx'$

Нека $L(q') = q$, $P' \in q' \Leftrightarrow L(P') \in q \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^t A x = 0 \Leftrightarrow (Tx')^t A (Tx') \Leftrightarrow x'^t T^t A T . x' =$

$= 0 \Rightarrow$ матрица $T^t A T$ също задава q'

$\Rightarrow \exists \rho \neq 0 \quad A' = \rho T^t A T$

Озн. $S = \sqrt{[q']} - T$

$S^t A S = |g| \cdot \cancel{\ }T^t A T = \pm g \quad T^t A T = \pm A'$

Обратната посока по обратен път.

22.I.2013г. Проективна класификация на фигурите от втора степен

$K = O e_1, \ldots, e_n$ – афинна коорд. с-ма

Проективна трансформация е изображение

$L: P_n \to P_n: \exists T$ – обратима

Ако $P'(x')$ и $P = L(P')$, $P(x)$, то $x = Tx'$

q и q' са проективно еквивалентни $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \exists$ проективна ~~...~~ трансформация $L: L(q') = q$

Проективен клас = клас на еквивалентност спрямо тая релация.

От линейната алгебра знаем, че квадратична форма $x^t A x$ може с помощта на трансформация от вида $x = Tx'$, където T е обратима матрица, да се доведе до каноничен вид, т.е. до вида $x_1'^2 + \ldots + x_\lambda'^2 - x_{\lambda+1}'^2 - \ldots - x_{\lambda+\mu}'^2$.

При това λ и μ не зависят от трансформацията, с която е получен каноничен вид.

При нас това означава че $q: x^t A x = 0$ е проективна еквивалентност на $q': x_1'^2 + \ldots + x_\lambda'^2 - x_{\lambda+1}'^2 - \ldots - x_{\lambda+\mu}'^2 = 0$

Т.1 120

Тъй като умножим на това равенство с -1 дава уравн. на същата фигура. и преномериране на коорд. също е проективна трансформация.

$\Rightarrow$ можем да считаме, че $\lambda \geq \mu$.

Нека $n=2$. В тоя случай хомогенните координати са $3 \Rightarrow$ имаме следните възможности:

1) $\lambda = 3$, $\mu = 0$
2) $\lambda = 2$, $\mu = 1$
3) $\lambda = 2$, $\mu = 0$
4) $\lambda = 1$, $\mu = 1$
5) $\lambda = 1$, $\mu = 0$

($\lambda = 0, \mu = 0$ е невъзм., защото $q': 0 = 0$ не е крива от втора степен)

Така док. Т. 1. При $n=3$ аналог. се док. Т. 2.

Афинна и метрична класификация на фигурите от втора степен

Работим едновременно в равнината ($n=2$) и пространството ($n=3$)

1. Фигури от втора степен в A_n.

Деф.: Фигури от втора степен в A_n се нарича множеството q от крайните точки на фигура от втора степен $\bar{q}$ в P_n, т.е. $q = \bar{q} \cap A_n$. При това $\bar{q}$ не трябва да съдържа безкрайната права (равнина). Нека $K = O e_1 \dots e_n$ е афинна координатна система и $\bar{q}: \sum_{i,j=1}^{n+1} a_{ij} \cancel{x_i x_j} = 0$ фигура от втора степен в P_n, т.е. $\bar{q}$ се задава с матрица

$\overline{A} = (a_{ij}) \quad i,j = 1, \ldots, n+1$

Крайните точки са тези с $x_{n+1} \neq 0$. Като разделим уравн. на $\overline{q}$ на x_{n+1}^2 и вземем предвид че $X_i = \frac{x_i}{x_{n+1}}$ са нехомогенни ~~коорд~~ коорд. за $i = 1, \ldots, n$.

Получаваме, че множ. от крайните точки на q има уравнение $q: \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} X_i X_j + 2 \sum_{i=1}^{n} a_{i\,n+1} X_i + a_{n+1\,n+1} = 0$

Безкрайната права (равнина) има уравнение $x_{n+1} = 0 \Rightarrow$ тя се съдържа в $\overline{q} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} X_i X_j = 0 \quad \forall X_1, \ldots, X_n$

$\Leftrightarrow 0 = A = (a_{ij}), \quad i,j = 1, \ldots, n$

Получаваме следната еквивалентна дефиниция на фигура от втора степен в A_n.

Деф: фигура от втора степен в A_n е множ. q с уравнение: $q: F(X) = 0$ спрямо K, където

$F(X) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} X_i X_j + 2 \sum_{i,j=1}^{n} a_{i\,n+1} X_i + a_{n+1\,n+1}$,

където $A = (a_{ij}), \; i,j = 1, \ldots, n$ е реална симетрична ненулева матрица и $a_{i\,n+1} \in \mathbb{R}, \; i = 1, \ldots, n+1$

III. 2. 122

Означаваме: $\overline{A} = (a_{ij})$, $i, j = 1, \dots, n+1$, където $a_{n+1\, i} := a_{i\, n+1}$ $\Rightarrow q$ е еднозначно определена, ако се знае $\overline{A}$.

Твърдение 1: Матриците $\overline{A}$ и $\overline{B}$ задават една и съща фигура от втора степен в $A_n \Leftrightarrow \exists\, \rho \neq 0 : \overline{B} = \rho \overline{A}$

Доказателство: Обратната посока е очевидна, а правата посока няма да я правим.

~~Сл~~ Следствие: Ако $q: \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j + 2 \sum_{i=1}^{n} a_{i\, n+1} x_i + a_{n+1\, n+1} = 0$, е фигура от втора степен в A_n (т.е. зададена с матрицата $\overline{A}$), то $\exists!$ фигура от втора степен $\overline{q}$ в P_n, за която $q = \overline{q} \cap A_n$, а именно $\overline{q}: \sum_{i,j=1}^{n+1} a_{ij} x_i x_j = 0$ (т.е. зададената с матрицата $\overline{A}$).

2. Афинни и метрични трансформации.

Ще означаваме нехомогенните коорд. спрямо $K = Oe_1 \dots e_n$ с малки букви.

Отделно когато говорим за метрични трансформации ще считаме, че K е ортонормирана.

Дефиниция: Едно изображ. $L: A_n \to A_n$ ще наричаме афинна (метрична) трансформация, ако ~~съществува~~ $\exists$ реална обратима (ортогонална) матрица $(n \times n)$ T и вектор $s \in \mathbb{R}^n$:

Ако P има коорд. вектор x спрямо K, то $L(P)$ има коорд. вектор $y = Tx + S$ спрямо K. Казваме, че L има уравн. $y = Tx + S$ спрямо K и пишем $L: y = Tx + S$

Забележка: Спрямо друга коорд. с-ма L се задава с други T и S.

Примери: 1) Тъждествени изображения:
$id: A_n \to A_n$ се задава с $T = E_n$, $S = 0$ и $\Rightarrow$ е афинна (метрична) трансформация.

2) Изобр. $L: y = x + S$ при $S \neq 0$ се ~~задава с $S \neq 0$~~ нарича транслация. Тук $T = E_n$, $S \neq 0 \Rightarrow L$ е афинна (метрична) трансформация.

Твърдение 2: 1) Композицията на афинни (метрични) трансформации също е афинна (метрична) трансформация.

2) Всяка афинна (метрична) трансформация е обратима и обратното изображение също е афинна (метрична) трансформация. Тъй като ортогоналните метрични са обратими.

Твърдение 3: Всяка метрична трансформация е афинна трансформация.

Твърдение 4: Ако $\mathcal{L}$ е афинна трансформация и l е права, то $\mathcal{L}(l)$ също е права.

Док: Нека $P_1(x_1)$ и $P_2(x_2)$ са две различни точки от l.

$\Rightarrow l: x = x_1 + \lambda(x_2 - x_1),\ \lambda \in \mathbb{R}$

Имаме $\mathcal{L}(P_1) \neq \mathcal{L}(P_2)$, защото $\mathcal{L}$ е биекция

$\Rightarrow \mathcal{L}(P_1)$ и $\mathcal{L}(P_2)$ дефинира права.

Нека $\mathcal{L}(P_1)$ и $\mathcal{L}(P_2)$ имат коорд. y_1 и y_2.

$\Rightarrow y_1 = Tx_1 + S,\ y_2 = Tx_2 + S$

Нека $P(x) \Rightarrow \mathcal{L}(P)(y)$, където $y = Tx + S$

$P \in l \Leftrightarrow \exists \lambda: x = x_1 + \lambda(x_2 - x_1)$

$\Leftrightarrow \exists \lambda: Tx + S = T(x_1 + \lambda(x_2 - x_1)) + S$

$\Leftrightarrow \exists \lambda: Tx + S = (Tx_1 + S) + \lambda T(x_2 - x_1)$

$\Leftrightarrow \exists \lambda: Tx + S = (Tx_1 + S) + \lambda((Tx_2 + S) - (Tx_1 + S))$

$\Leftrightarrow \exists \lambda: y = y_1 + \lambda(y_2 - y_1) \Leftrightarrow \mathcal{L}(P)$ лежи в/у правата определена от $\mathcal{L}(P_1)$ и $\mathcal{L}(P_2)$.

$\Rightarrow \mathcal{L}(l) =$ правата, определена от $\mathcal{L}(P_1)$ и $\mathcal{L}(P_2)$

Твърдение 5: При $n = 3$: Ако $\mathcal{L}$ е афинна трансформация и π е равнина, то $\mathcal{L}(\pi)$ също е равнина.

Док: Нека $P_1(x_1), P_2(x_2), P_3(x_3)$ са 3 неколинеарни точки от π.

$\Rightarrow \pi: x = x_1 + \lambda_1(x_2 - x_1) + \lambda_2(x_3 - x_1),\ \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$

$L(P_1)$, $L(P_2)$, $L(P_3)$ не лежат на една права (защото в противен случай от Тв. 4 за L^{-1} ще получим, че P_1, P_2, P_3 са на една ~~р~~ права – противоречие)

$\Rightarrow L(P_1), L(P_2), L(P_3)$ дефинира равнина

Аналогично на док. на Тв. 4, получаваме, че $L(\pi)$ е равномерно определена от $L(P_1), L(P_2), L(P_3)$

Твърдение 6: За всяка афинна трансформация L съществува единствена проективна трансформация $\bar{L}$, за която е в сила: Ако P е крайна точка, то $L(P) = \bar{L}(P)$, т.е. $L = \bar{L}|_{A_n}$
ограничение

Доказателство: Ако в нехомогенни координати L се задава с $L: Y = TX + s$, то в хомогенни координати $\bar{L}$ се задава с $\bar{L}: y = \left(\begin{array}{c|c} T & s \\ 0 & 1 \end{array}\right) x$

Твърдение 7: Нека K и K' са афинни (ортонормирани) коорд. с-ми. Нека $L: A_n \to A_n$ е изображение, при което на точка с координати вектори x спрямо K се съпоставя точката с координатен вектор x спрямо K'. Тогава L е афинна (метрична) ~~тр~~ трансформация.

III. 1. 126

Доказателство:
Нека ~~смятка~~ смяната на коорд. $K \to K'$ се задава с $x = Tx' + s$. Нека P има коорд. x спрямо K, $L(P)$ има коорд. y спрямо K.

Тъй като $L(P)$ има коорд. x спрямо K'
$\Rightarrow y = Tx + s$
$\Rightarrow$ това е формулата, която изразява коорд. y на $L(P)$ спрямо K чрез коорд. x на P спрямо K. $\Rightarrow L: y = Tx + s$, спрямо K.
$\Rightarrow L$ е афинна (метрична) трансформация

3. Афинна (метрична) класификация на фигурите от втора степен

Дефиниция: Казваме, че две фигури ~~е~~ q и q' от втора степен в A_n са афинно/метрично еквивалентни, ако $\exists$ афинна (метрична) трансформация L: $L(q') = q$. От Тв. 2 получаваме:

Твърдение 8: Афинната (метричната) еквивалентност е релация на еквивалентност в множ. от фиг. от втора степен в A_n.

Деф.: Класовете на еквивалентност относно афинната (метричната) еквивалентност на фигури от втора степен се нарича афинни (метрични) класове.

Твърдение 9: Ако 2 фигури от втора степен са метрично еквивалентни, то те са афинно еквивалентни (следва от Тв. 3).

Тв. 10: Ако $q = \bar{q} \cap A_n$, $q' = \bar{q}' \cap A_n$ и q и q' са афинно еквивалентни, то $\bar{q}$ и $\bar{q}'$ са проективно еквивалентни. (от следствие и от Тв. 7)

Нека $n=2$. По алгоритъма от упражнение се доказва Теорема 5. На упражнение, това се интерпретира като у-ние на ~~крива~~ същата крива спрямо друга коорд. с-ма, но тъй като видяхме, че смяна на ортонормирана коорд. с-ма е същото като метрична трансформация (от Тв. 7), то това може да се интерпретира и като метрична еквивалентност.

От Теорема 5 може да се получи Теорема 3 по следния начин: Това, което се прави за да се получи Теорема 5 може да се ~~нап~~ направи ~~к~~ като се тръгне от произволна афинна коорд. с-ма. Тогава трансформациите (смените) пак са с ортогонални ~~метрични, но~~ матрици, но това са само афинни трансформации (а не метрични) защото коорд. с-ми не са ортонормирани. След като стигнем до уравненията от ~~Тв.~~ Теорема 5 правим нова афинна трансформация, за да премахнем параметрите.

Например, за имагинерна елипса:
взимаме $y_1 = \frac{x_1}{a_1}$, $y_2 = \frac{x_2}{a_2}$ и получаваме
$y_1^2 + y_2^2 + 1 = 0$
За парабола: полагаме $y_1 = x_1$, $y_2 = p x_2$ и
получаваме $y_1^2 - 2y_2 = 0$

Аналогично се доказва теорема 4 и
теорема 6.

III. 1. 129