21. VIII. 2013г.

(1) ОКС $K = Oxy$ ~~нехомогенни~~ ~~Ортогонализация~~ Канонизация

~~$K: 8x^2 + 4xy + 5y^2 + 8x + 20y - 16 = 0$~~

~~$K: 8X + 4XY + 5Y^2 + 8Xt + 20yt - 16t^2 = 0$~~

$K: 8X^2 + 4XY + 5Y^2 + 8X + 20Y - 16 = 0$ (нехомогенни)

$K: 8x + 4xy + 5y^2 + 8xt + 20yt - 16t^2 = 0$ (хомогенни)

I тип на k по брой особени точки

$$\Delta = \begin{vmatrix} 8 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & 10 \\ 4 & 10 & -16 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & 10 \\ 2 & 10 & -16 \end{vmatrix} \neq 0$$

$\Rightarrow k$ е неизродена (не съдържа особени точки)

$\Rightarrow k$ е действителна елипса / хипербола / парабола

II тип на k по брой безкрайни точки (афинна класификация)

В хомогенни катети

ω – безкрайна права

$\omega: t = 0$?

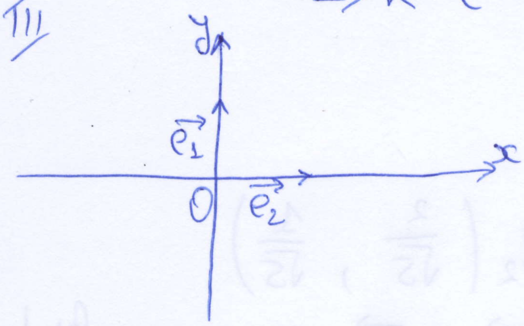
$\boxed{k \cap \omega ?}$

$8x^2 + 4xy + 5y^2 + 8xt + 20yt - 16t^2 = 0 \Rightarrow 8x^2 + 4xy + 5y^2 = 0$

$D < 0 \Rightarrow$ кривата k не съдържа безкрайни точки

$\Rightarrow k$ е елипса

III



Търсим координатите на $\vec{b_1}$ и $\vec{b_2}$, които задават главните направления на кривата k.

Разглеждане $A = \begin{pmatrix} 8 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ от коефициентите на квадратната част (не ни харесва, защото има $x.y$)

искаме да я приведем в диагонален вид.

$A' = \begin{pmatrix} & 0 \\ 0 & \end{pmatrix}$ спрямо базата от собствените си вектори.

Търсим собствените стойности на матрицата A.

$|A - S.E| = 0$

$$\begin{vmatrix} 8-S & 2 \\ 2 & 5-S \end{vmatrix} = 0$$

$40 - 13 + S^2 - 4 = 0$

$S^2 - 13S + 36 = 0$

$D = 169 - 144 = 25 = 5^2$

$S_1 = \frac{13-5}{2} = 4$

$S_2 = \frac{13+5}{2} = 9$

$S_1 . S_2 > 0 \Leftrightarrow$ елипса

$S_1 . S_2 < 0 \Leftrightarrow$ хипербола

$S_1 . S_2 = 0 \Leftrightarrow$ парабола

Търсим собствени вектори на $\vec{b_1}$ и $\vec{b_2}$ на A.

за $S_1 = 4 \Rightarrow \vec{b_1}(\alpha_1, \beta_1), |\vec{b_1}| = 1$

$$\begin{pmatrix} 8-S_1 & 2 \\ 2 & 5-S_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\left| \begin{array}{l} 4\alpha_1 + 2\beta_1 = 0 \\ \alpha_1^2 + \beta_1^2 = 1 \end{array} \right.$$

$\beta_1 = -2\alpha_1$

$\beta = -2\alpha$

$b_1\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}\right) \Longleftrightarrow S_1 = 4$

за $S_2 = 9 \Rightarrow \vec{b_2}(\alpha_2, \beta_2), |\vec{b_2}| =$

$$\begin{pmatrix} 8-9 & 2 \\ 2 & 5-9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$b_2\left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$

$\vec{b_2} \perp \vec{b_1}$, защото $\left. \begin{array}{l} b_1 \\ b_2 \end{array} \right|$

$\alpha_2 = 2\beta_2$

$$\left| \begin{array}{l} -\alpha_2 + 2\beta_2 = 0 \\ 2\alpha_2 + \cancel{5} - 4\beta_2 \end{array} \right.$$

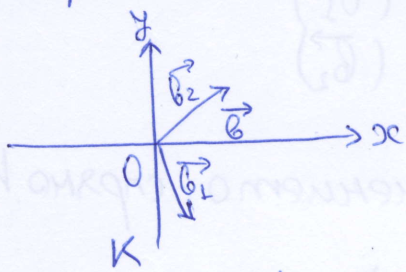
$\alpha_2^2 + \beta_2^2 = 1$

$4\beta_2^2 + \beta_2^2 = 1$

$5\beta_2^2 = 1$

$\beta_2^2 = \frac{1}{5}$

Извършване смяна на ортогонална координатна система



$$K = O_{xy} \xrightarrow{T_1} K' = O_{x'y'} : \quad O_{x'} \uparrow\uparrow \vec{b}_1$$
$$O_{y'} \uparrow\uparrow \vec{b}_2$$

x' е направлявана от b.

$$T_1: \begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{5}} x' + \frac{2}{\sqrt{5}} y' \\ y = -\frac{2}{\sqrt{5}} x' + \frac{1}{\sqrt{5}} y' \end{cases}$$

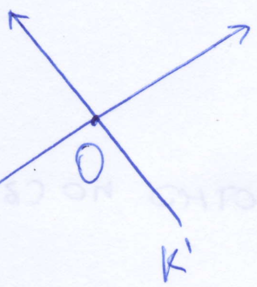
Какво е уравнението на кривата спрямо K ?, за да го получим заместваме от T_1 в уравнението на кривата в нехомогенни координати от T_1.

$$k: S_1 (x')^2 + 0\,x'y' + S_2 (y')^2 + \frac{8}{\sqrt{5}}(x' + 2y') - \frac{20}{\sqrt{5}}(-2x' + y') - 16 = 0$$

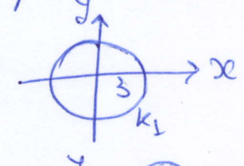
$$4(x')^2 + 9(y')^2 - \frac{32}{\sqrt{5}} x' + \frac{36}{\sqrt{5}} y' - 16 = 0$$

това е уравнението на кривата спрямо новата координатна система

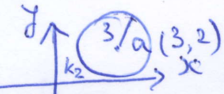
IV Търсим координатите на центъра т. C на кривата k, за да напишем централното уравнение.



Пример:



$k_1: x^2 + y^2 = 9$



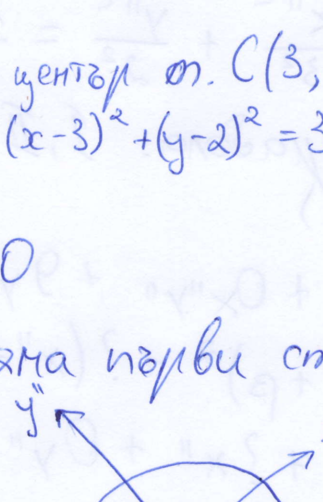
k_2: център т. $C(3,2)$ и $R = 3$

$k_2: (x-3)^2 + (y-2)^2 = 3^2$

$$k': 4(x')^2 + 9(y')^2 - \frac{32}{\sqrt{5}} x' + \frac{36}{\sqrt{5}} y' - 16 = 0$$

Искаме в уравнението на k да няма първи степени на x и y.

$\exists\, C(\alpha, \beta)$ спрямо K'



Известна смяна на ОКС

От $K' = O_{x'y'} \to K'' = C_{x''y''}$: $C_{x''} \uparrow\uparrow O_{x'}$ $(\vec{b_1})$
$C_{y''} \uparrow\uparrow O_{y'}$ $(\vec{b_2})$

$T_2 : \begin{cases} x' = x'' + \alpha \\ y' = y'' + \beta \end{cases} \Rightarrow$ заместваме в уравнението спрямо K''

$$4(x''+\alpha)^2 + 9(y''+\beta)^2 - \frac{32}{\sqrt5}(x''+\alpha) + \frac{36}{\sqrt5}(y''+\beta) - 16 = 0$$

$$4x''^2 + 8x''\alpha + 4\alpha^2 + 9y''^2 + 18y''\beta + 9\beta^2 - \frac{32}{\sqrt5}\alpha - \frac{32}{\sqrt5}x'' + \frac{36}{\sqrt5}y'' + \frac{36}{\sqrt5}\beta - 16 = 0$$

$$4x''^2 + 9y''^2 + x''\underbrace{\left(8\alpha - \frac{32}{\sqrt5}\right)}_{0} + y''\underbrace{\left(18\beta + \frac{36}{\sqrt5}\right)}_{0} + 4\alpha^2 + 9\beta^2 - \frac{32}{\sqrt5}\alpha + \frac{36}{\sqrt5}\beta - 16 = 0$$

$$\begin{cases} 8\alpha - \frac{32}{\sqrt5} = 0 & \alpha = \frac{4}{\sqrt5} \\ 18\beta + \frac{36}{\sqrt5} = 0 & \beta = -\frac{2}{\sqrt5} \end{cases}$$

> т. C (спрямо K') $C\left(\frac{4}{\sqrt5}, -\frac{2}{\sqrt5}\right)$

$$4\cdot\frac{16}{5} + 9\cdot\frac{4}{5} - \frac{32}{\sqrt5}\cdot\frac{4}{\sqrt5} + \frac{36}{\sqrt5}\cdot\left(-\frac{2}{\sqrt5}\right) - 16 =$$

$$= \frac{2^6}{5} + \frac{3^2\cdot 2^2}{5} - \frac{2^7}{5} - \frac{3^2\cdot 2^3}{5} - 2^4 = \frac{64}{5} + \frac{9\cdot 4}{5} - \frac{128}{5} - \frac{9\cdot 8}{5} -$$

$$- 16 = \frac{64+36-128-72}{5} - 16 = -\frac{100}{5} - 16 = -20 - 16 = -36$$

$$k : 4x''^2 + 9y''^2 = 36$$

$$k : \frac{x''^2}{3^2} + \frac{y''^2}{2^2} = 1$$

За парабола: I, II и III се повтарят (абсолютно по същия начин)

$$0x''^2 + 0x''y'' + 9y''^2 + ?\,x'' + ?\,y'' + ? = 0$$

$$9(y''+\beta)^2 + ?(x''+\alpha) + ?(x''+\beta) + ? = 0 \qquad V(\alpha,\beta) - \text{връх}$$

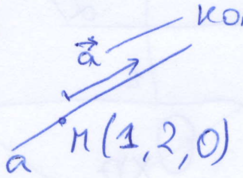
$$9y''^2 + ?\,x'' + 0y'' + 0 = 0$$

Права и равнина в пространство

② ОКС $K = Oxyz$ (нехомогенни коорд.) Евклидово пространство

$$a: \begin{cases} x = 1 - p \\ y = 2 - p \\ z = 2p \end{cases}, \ p \in R \qquad a: \begin{cases} x = 1 - 1.p \\ y = 2 - 1.p \\ z = 0 - 2.p \end{cases}, \ p \in R$$

т. M



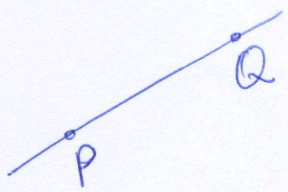
Права няма нормален вектор в 3-мерно Евклидово пространство

a и b - кръстосани

$\vec{a}(-1, -1, 2) \parallel a$

$$b: \begin{cases} x - y - 1 = 0 \rightarrow \text{равнина} \\ 2x - y - 3z + 8 = 0 \rightarrow \text{равнина} \end{cases}$$

Как се пишат коорд. параметрични уравнения на b?



Избираме $P \not\equiv Q$ от пр. b

За т. P избираме $x_P = 0 \Rightarrow \begin{cases} 0 - y - 1 = 0 \\ 0 - y - 3z + 8 = 0 \end{cases}$

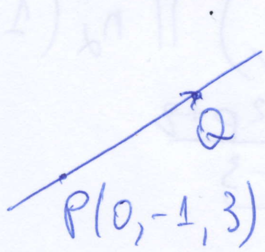
$P(0, -1, 3)$

$\Rightarrow y_P = -1$

$\Rightarrow z_P = 3$

~~Избираме~~

За т. Q избираме $z_Q = 0 \Rightarrow \begin{cases} x - y - 1 = 0 \\ 2x - y + 8 = 0 \end{cases}$



$Q(-9, 10, 0)$

$\Rightarrow x = -9$

$\Rightarrow y = -10$

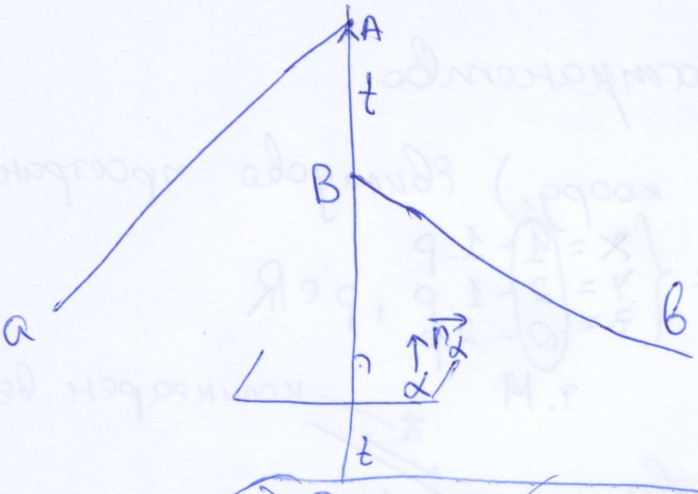
$b \ni P(0, -1, 3)$

$b \parallel \vec{PQ}(-9, -9, -3)$

$\Downarrow$

$b \parallel \vec{b}(3, 3, 1)$

$$b \begin{cases} x = 0 + 3q \\ y = -1 + 3q \\ z = 3 + 1q \end{cases}, \ q \in R$$



~~O_{xyz}~~
~~$2x-3y+5=0$~~
~~права~~
! Грешно

? Опиши трансверзала t на a и b, $t \perp \alpha : x+3y-3z+3=0$

$\alpha \perp \vec{n_\alpha}(1,3,-3) \parallel t$

Нека т. $A = t \cap a$, т. $B = t \cap b$ $\Big\} \Rightarrow \vec{AB} \parallel \vec{n_\alpha}(1,3,-3)$

$A \in a \Rightarrow A(1-p,\ 2-p,\ 2p)$

$B \in b \Rightarrow B(3q,\ -1+3q,\ 3+q)$

$\vec{AB}(-1+p+3q,\ -3+p+3q,\ 3-2p+q) \parallel \vec{n_\alpha}(1,3,-3)$

$\vec{AB} \parallel \vec{n_\alpha} \Leftrightarrow \underbrace{\frac{-1+p+3q}{1} = \frac{-3+p+3q}{3}}_{} = \frac{3-2p+q}{-3}$

$$\begin{cases} \cancel{-3}+3p+9q = \cancel{-3}+p+3q \\ \cancel{9}-3p-9q = \cancel{9}-6p+3q \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2p+6q=0 \\ 3p-6q=0 \end{cases} \quad \begin{cases} p+3q=0 \\ p-2q=0 \end{cases} \quad \begin{matrix} p=-3q=0 \\ -3q-2q=0 \\ -5q=0 \\ q=0 \end{matrix} \quad \begin{cases} p=0 \\ q=0 \end{cases} \Rightarrow$$

~~$\Rightarrow (-1, -3, 3)$~~

$\Rightarrow \begin{matrix} A(1,2,0) \\ B(0,-1,3) \end{matrix} \qquad t: \begin{cases} x = 1+1\lambda \\ y = 2+3\lambda,\ \lambda \in \mathbb{R} \\ z = 0-3\lambda \end{cases}$

③ $M(1, m, -3)$

$N(-2, -2, -2)$

За $m = ?$ правата MN е компланарна с равнината α?

$$\alpha : \begin{cases} x = 1 + \lambda + \mu \\ y = 2 - \lambda + \mu \\ z = -1 + \lambda \end{cases}$$

~~За~~ 1) Общо у-ние на α

Искаме да изключим λ и μ

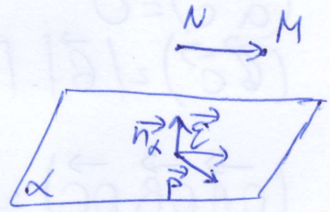
$$\left| \begin{array}{l} \lambda = z + 1 \\ \cancel{x} = 1 + (z+1) + \mu \\ y = 2 - (z+1) + \mu \end{array} \right. \qquad \left| \begin{array}{l} \lambda = z + 1 \\ x = 2 + z + \mu \\ y = 1 - z + \mu \end{array} \right. \Rightarrow \alpha : x - y = 1 + 2z$$

$\alpha : x - y - 2z - 1 = 0$

Проверка: т. $P(1, 2, -1) \in \alpha$

в-р $\vec{p}(1, -1, 1) \perp \vec{n_\alpha}(1, -1, -2)$

в-р $\vec{q}(1, 1, 0) \perp \vec{n_\alpha}(1, -1, -2)$



т. N спрямо решенията на α

$N(-2, -2, -2)$

$-2 - (-2) - 2(-2) - 1 \neq 0 \Rightarrow N \notin \alpha \Rightarrow MN$ не може да лежи в $\alpha \Rightarrow MN \parallel \alpha$

$M(1, m, -3)$

$N(-2, -2, -2)$

$\vec{MN}(-3, -2-m, 1) \perp \vec{n_\alpha}(1, -1, -2)$

$MN \cdot \vec{n_\alpha} = 0 \qquad -3 + 2 + m - 2 = 0$

$m = 3$

Вектори

(3) $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$

$|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = 2$

$\angle(\vec{a}, \vec{b})_e = \angle(\vec{b}, \vec{c}) = \frac{\pi}{3}$, $\angle(\vec{a}, \vec{c}) = \frac{\pi}{2}$

елементарно геометричен ъгъл

$\vec{OA} = (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = (\vec{a}\vec{c}) \times \vec{b} - (\vec{b}\vec{c}) \times \vec{a} = 0\vec{b} - 2\vec{a} = -2\vec{a}$

$\vec{OB} = \vec{a} \times \vec{b}$

$\vec{OC} = \vec{c}$

a) $V_{OABC} = \frac{1}{6} |(\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC})| = \frac{16}{6} = \frac{8}{3}$

$(\vec{a}\vec{c}) = 0$

$(\vec{b}\vec{c}) = |\vec{b}| . |\vec{c}| \cos\frac{\pi}{3} = 2 . 2 . \frac{1}{2} = 2$

$(\vec{OA}\vec{OB}\vec{OC}) = (\vec{OA} \times \vec{OB}) . \vec{OC}$

$\vec{OA} \times \vec{OB} = (-2\vec{a}) \times (\vec{a} \times \vec{b}) = -2[\vec{a} \times (\vec{a} \times \vec{b})] = \cancel{-2 \cdot 16}$

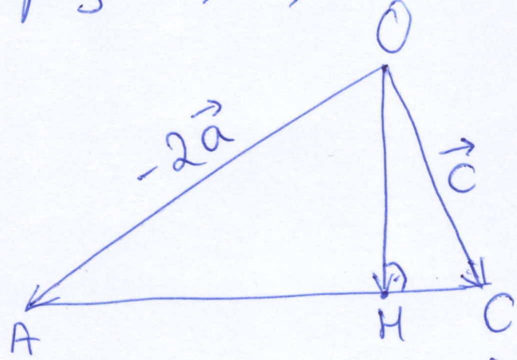
$= +2(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{a} = 2[\underbrace{(\vec{a} . \vec{a})}_{4} . \vec{b} - \underbrace{(\vec{b}\vec{a})}_{2} \vec{a}] =$

$= 2(4\vec{b} - 2\vec{a}) = 8\vec{b} - 4\vec{a} \quad / . \vec{OC}$

$(\vec{OA} \times \vec{OB}) . \vec{OC} = (8\vec{b} - 4\vec{a})\vec{c} = 8(\underset{\overset{\shortparallel}{2}}{\vec{b}\vec{c}}) - 4(\underset{\overset{\shortparallel}{0}}{\vec{a}\vec{c}}) = 16$

б) $\triangle AOC$, $OH \perp AC$
$H \in AC$

$\vec{OH} = ?$ чрез $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$



$\vec{OH} = \vec{OC} + \vec{CH}$

$\vec{CH} \parallel \vec{CA} \Rightarrow \exists!\ \lambda: \vec{CH} = \lambda \cdot \vec{CA} / \cdot \vec{CA}$

$\lambda = ?$

$\vec{OA} = \vec{OC} + \lambda \cdot \vec{CA} \ / \cdot \vec{CA}$

$\vec{OH} \cdot \vec{CA} = 0$

$0 = (\vec{OC} \cdot \vec{CA}) + \lambda (\vec{CA}^2)$

$$\lambda = -\frac{(\vec{OC} \cdot \vec{CA})}{\vec{CA}^2} = -\frac{-4}{20} = \frac{1}{5}$$

$\vec{CA} = \vec{OA} - \vec{OC} = -2\vec{a} - \vec{c}$

$(\vec{OC} \cdot \vec{CA}) = \vec{c} \cdot (-2\vec{a} - \vec{c}) = -2(\overset{0}{\vec{a}\vec{c}}) - \overset{4}{\vec{c}^2} = -4$

$\vec{CA}^2 = (-2\vec{a} - \vec{c})^2 = 4\vec{a}^2 + 4(\underset{0}{\vec{a}\vec{c}}) + \vec{c}^2 = 16 + 4 = 20$

$\vec{OH} = \vec{c} + \frac{1}{5}(-2\vec{a} - \vec{c})$