ЗАДАЧИ ПО АНАЛИТИЧНА ГЕОМЕТРИЯ

I ЧАСТ: Линейна зависимост и независимост на вектори.

1 зад. Даден е триъгълник *ABC*, за който $\overrightarrow{CA} = \vec{a}$ и $\overrightarrow{CB} = \vec{b}$. Върху страните *AC* и *BC* са нанесени съответно точките *M* и *N* така, че *CM*:*MA* = 2:3 и *CN*:*NB* = 2:3.

a) Да се изразят векторите $\overrightarrow{AN}, \overrightarrow{BM}, \overrightarrow{MN}$ и $\overrightarrow{AB}$ чрез $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Да се покаже, че правите *MN* и *AB* са успоредни;
b) Да се докаже, че правите *AN* и *BM* имат точно една обща точка.

2 зад. Даден е успоредник *ABCD*, за който $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ и $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$, точката $O = AC \cap BD$, а точката *P* е от страната *BC* такава, че *BP*:*PC* = 3:1.

a) Да се изразят векторите $\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OP}$ чрез $\vec{a}$ и $\vec{b}$;
b) Ако точката *Q* е от страната *AD* такава, че *AQ*:*QD* = 1:3, да се докаже, че точките *P*, *Q* и *O* са колинеарни.

3 зад. Даден е успоредник *ABCD*, за който $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ и $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$, точката $O = AC \cap BD$. Точките M и N са медицентровете съответно на триъгълник ABD и триъгълник ABC.

a) Да се изразят векторите $\overrightarrow{AN}, \overrightarrow{BM}, \overrightarrow{MN}$ и $\overrightarrow{AB}$ чрез $\vec{a}$ и $\vec{b}$;
b) Да се покаже, че правите *MN* и *AB* са успоредни.

4 зад. Даден е тетраедър *OABC*, за който $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ и $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$. Точките A_1, C_1 и O_1 са медицентровете съответно на триъгълниците: *BOC*, *AOB* и *ABC*.

a) Да се изразят медианите на тетраедъра $\overrightarrow{AA_1}, \overrightarrow{CC_1}, \overrightarrow{OO_1}$ чрез $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$;
b) Да се докаже, че векторите $\overrightarrow{AA_1}$ и $\overrightarrow{CC_1}$ са линейно независими;
c) Да се докаже, че векторите $\overrightarrow{AA_1}, \overrightarrow{CC_1}$ и $\overrightarrow{AC}$ са линейно зависими, т.е. четирите точки *A*, *C*, A_1 и C_1 лежат в една равнина. От двете подусловия b) и c) следва, че двете прави AA_1 и CC_1 се пресичат в единствена точка *M*;
d) Да се докаже, че намерената по-горе точка *M* лежи и на третата медиана OO_1 и да се намерят отношенията, в които т. *M* дели всяка от медианите.

5 зад. Даден е тетраедър *OABC*, за който $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ и $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$. Точките *M*, *N*, *P* и *Q* са медицентровете съответно на триъгълниците: *AOB*, *BOC*, *ABC* и *AOC*.

a) Да се изразят векторите $\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}, \overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OQ}, \overrightarrow{MN}, \overrightarrow{NP}, \overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{QM}$ чрез $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$;
b) Да се докаже, че следните прави са две по две успоредни: *MN* и *AC*, *MQ* и *BC*, *QN* и *AB*, *MP* и *OC*, *NP* и *OA*, *PQ* и *OB*.

II ЧАСТ: Скаларно произведение на два вектора

1 зад. Даден е триъгълник *ABC*, за който $\overrightarrow{CA} = \vec{a}$ и $\overrightarrow{CB} = \vec{b}$. Нека $|\vec{a}| = 1, |\vec{b}| = 2, \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{3}$. Дадени са точките *F* и *D*, съответно от страните *AB* и *CB* на триъгълника, такива че: *AF*:*FB* = 1:3 и *CD*:*DB* = 1:3.

a) Да се изразят векторите $\overrightarrow{CF}$ и $\overrightarrow{AD}$ чрез $\vec{a}$ и $\vec{b}$;
b) Да се намерят дължините на векторите $\overrightarrow{CF}$ и $\overrightarrow{AD}$;
c) Да се намери косинусът на ъгъла между векторите $\overrightarrow{CF}$ и $\overrightarrow{AD}$.

2 зад. Даден е триъгълник *ABC*, за който $\overrightarrow{CA} = \vec{a}$ и $\overrightarrow{CB} = \vec{b}$. Нека $|\vec{a}| = 2, |\vec{b}| = 3, \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = \gamma$. Медианите AA_1 и BB_1 на триъгълника са взаимно перпендикулярни. Да се определи *cos* γ.

Упътване: Да се изразят векторите $\overrightarrow{AA_1}$ и $\overrightarrow{BB_1}$ чрез $\vec{a}$ и $\vec{b}$, и да се пресметне скаларното им произведение.

3 зад. Даден е триъгълник *ABC*, за който $\overrightarrow{CA} = \vec{a}$ и $\overrightarrow{CB} = \vec{b}$. Нека $|\vec{a}| = 3, |\vec{b}| = \sqrt{2}, \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{4}$. Отсечката *CH* е височина в триъгълника, т.*H* ∈ *AB*. Да се изрази вектора $\overrightarrow{CH}$ чрез $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

4 зад. Даден е тетраедър *OABC*, за който $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ и $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$. Нека $|\vec{a}| = 2, |\vec{b}| = 2, |\vec{c}| = 1$ и трите вектора са два по два перпендикулярни. Построена е височината *OH* на тетраедъра, т.*H* ∈ (*ABC)* и $OH \perp (ABC)$. Да се изрази вектора $\overrightarrow{CH}$ чрез $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$.

5 зад. Спрямо ОКС *К = Oxy* са дадени точките: $A(2, -1), B(-1, 0)$ и $C(2, 3)$. Да се докаже, че трите точки образуват триъгълник. Да се намерят:

a) Координатите на медицентъра *M* на триъгълник *ABC* и разстоянието от т.*M* до върха *C*;
b) Координатите на петите на трите височини на триъгълника, спуснати от върховете *A*, *B* и *C*.

6 зад. Спрямо ОКС *К = Oxyz* са дадени точките: $A(1, -1, 2), B(2, 1, 1), C(1,1,2)$ и $D(-3, 2, -1)$. Да се докаже, че четирите точки не лежат в една равнина. Да се намерят:

a) Да се намерят дължините на страните на триъгълник *ABC*;
b) Косинусите на ъглите на триъгълник *ABC*;
c) Координатите на медицентъра *G* на триъгълник ***ABD*** и дължината на вектора $\overrightarrow{CG}$;
d) Координатите на точката *H*: т.*H* ∈ (*ABC)* и $DH \perp (ABC)$.

III ЧАСТ: Векторно и смесено произведение на вектори

1 зад. Спрямо ОКС *K = Oxyz* са дадени векторите $\vec{a}(1,0,2), \vec{b}(2,-1,3)$ и $\vec{c}(1,-1,0)$. Да се намерят координатите на неизвестния вектор $\vec{x}$ от уравненията: $(\vec{a}\vec{b}\vec{x}) = 1, (\vec{b}\vec{c}\vec{x}) = 2, (\vec{c}\vec{a}\vec{x}) = 0$.

2 зад. Дадени са векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Нека $|\vec{a}| = 3, |\vec{b}| = 2, \sphericalangle(\vec{a},\vec{b}) = \frac{\pi}{2}$. Да се определи неизвестния вектор $\vec{p}$ от равенствата : $(\vec{a}\vec{p}) = -18, (\vec{b}\vec{p}) = 12, (\vec{a}\vec{b}\vec{p}) = -12$.

3 зад. Дадени са векторите $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$. Нека $|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = 1$ и

$\sphericalangle(\vec{a},\vec{b}) = \frac{\pi}{3}, \sphericalangle(\vec{a},\vec{c}) = \frac{\pi}{3}, \sphericalangle(\vec{c},\vec{b}) = \frac{\pi}{3}$.

a) Да се пресметне смесеното произведение $(\vec{a}\vec{b}\vec{c})$ и да се докаже, че трите вектора са линейно независими;

b) Нека *OABC* е тетраедър като: $\overrightarrow{OA} = (\vec{c} + \vec{b})$, $\overrightarrow{OB} = (\vec{c} + \vec{a})$ и $\overrightarrow{OC} = (\vec{a} + \vec{b})$. Да се намери обема на тетраедъра *OABC*.

4 зад. Дадени са векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Нека $|\vec{a}| = 2, |\vec{b}| = 1, \sphericalangle(\vec{a},\vec{b}) = \frac{2\pi}{3}$. В триъгълника *OAB*

$\overrightarrow{OA} = (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{a}$, а $\overrightarrow{OB} = \vec{b} \times (\vec{a} \times \vec{b})$.

a) Да се намери лицето на триъгълника;

b) Ако т.*M* е медицентърът на триъгълник *OAB*, да се изрази вектора $\overrightarrow{OM}$ чрез $\vec{a}$ и $\vec{b}$, и да се пресметне дължината му.

5 зад. Дадени са векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$, като $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1, \sphericalangle(\vec{a},\vec{b}) = \frac{\pi}{3}$.

Нека $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = (\vec{a} \times \vec{b})$, $\overrightarrow{OC} = \vec{b} \times (\vec{a} \times \vec{b})$. Да се докаже, че векторите $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{OC}$ са линейно независими и да се намери обема на тетраедъра *OABC*.

6 зад. Спрямо ОКС *K = Oxyz* са дадени точките: $A(5,-2,1), B(1,1,-2), C(1,0,5)$и $D(1,1,1)$.

a) Да се намери лицето на триъгълник *ABC*;

b) Да се намери обема на тетраедъра *ABCD*.

7 зад. Спрямо ОКС *K = Oxy* в равнината са дадени точките: $A(1,-1), B(-3,2), C(5,1)$. Да се намери лицето на триъгълник *ABC*.

IV ЧАСТ: Уравнения на права в равнината.

Всички задачи от тази част са зададени спрямо ОКС *К = Oxy* в равнината.

1 зад. Дадени са точките : $A(5,1), B(3,3)$ и $C(-1,5)$. Да се намерят:

c) Уравнения на симетралите на страните *AB* и *AC* на триъгълник *ABC*;
d) Координатите на центъра на описаната около триъгълник *ABC* окръжност (пресечната точка на симетралите);
e) Дължината на радиуса на описаната около триъгълник *ABC* окръжност (разстоянието от центъра до произволен връх на триъгълника).

2 зад. Дадени са правите: $a: 3x - 2y + 1 = 0, b: x - y + 1 = 0$ и $m_B: 2x - y - 1 = 0$. Нека правите a и b съдържат съответно страните *BC* и *AC* на триъгълник *ABC*, а правата m_B съдържа медианата му през върха *B*. Да се намерят координатите на върховете и лицето на триъгълник *ABC*.

3 зад. Дадени са точките : $A(1,2), B(-2,1)$ и $C(-1,-2)$. Да се намерят:

a) Уравнения на правите, които съдържат средните отсечки на триъгълник *ABC*;
b) Уравнения на височините на триъгълник *ABC* окръжност;
c) Дължината на медианата AA_1 на триъгълник *ABC* .

4 зад. Дадени са правите: $g: 2x - 3y + 1 = 0, a: x + 5y + 7 = 0$ и точката $P(2,6)$. Светлинен лъч l минава през точката P, отразява се от правата g и отразеният лъч l' става успореден на правата a. Да се намерят уравнения на правите, съдържащи лъчите l и l'.

5 зад. Дадени са правите: $b_A: 4x - 3y + 2 = 0, h_A: x + 3y + 8 = 0$ и точката $B(-3,5)$. Да се намерят координатите на върховете *A* и *C* на триъгълник *ABC*, ако правите b_A и h_A съдържат съответно вътрешната ъглополовяща и височината през върха А на триъгълника.

6 зад. Дадени са правите: $g: 2x - y - 5 = 0$ и $b: 3x - y - 1 = 0$. Да се намери уравнение на правата b', ортогонално симетрична на правата b относно правата g.

V ЧАСТ: Уравнения на права и равнина в пространството

Всички задачи от тази част са зададени спрямо ОКС *K = Oxyz* в тримерно пространство.

1 зад. Да се намери общо уравнение на равнина, която минава през точките *M*, *N* и *P*, ако:

$M(-1,0,1), N(0,-1,1), P(2,3,3)$.

2 зад. Да се намери общо уравнение на равнина, която минава през точката *P* и правата g, ако:

$P(-2,-1,2)$, $\quad g\begin{cases} x = 4+s \\ y = 3+s \\ z = 2+s \end{cases}, s \in \mathbb{R}$.

3 зад. Да се намери общо уравнение на равнина, която минава през пресичащите се прави a и b, ако: $a\begin{cases} x = -2+s \\ y = 2+s \\ z = 1-s \end{cases}, s \in \mathbb{R}$, $\quad b\begin{cases} x = 0+2p \\ y = 4+2p \\ z = 4+3p \end{cases}, p \in \mathbb{R}$.

4 зад. Да се намери общо уравнение на равнина, която минава правата a и е успоредна на правата b, ако: $a\begin{cases} x = 1-s \\ y = 2-s \\ z = 1+s \end{cases}, s \in \mathbb{R}$, $\quad b\begin{cases} x = 5+2p \\ y = 4+3p \\ z = 3-3p \end{cases}, p \in \mathbb{R}$.

5 зад. Да се намери общо уравнение на равнина, която минава през правата g и е перпендикулярна на равнината β, ако:

$g\begin{cases} x = 4+s \\ y = 3+s \\ z = 2+s \end{cases}, s \in \mathbb{R}$, $\quad \beta: x+y-2z+2=0$.

6 зад. Да се намерят координатни параметрични уравнения на правата g, която е зададена като пресечница на две равнини: $g\begin{cases} 2x+y+z-7=0 \\ x-y+2z-5=0 \end{cases}$.

7 зад. Дадени са точката $M(-1,1,2)$ и правата $a\begin{cases} x-y+1=0 \\ x-z-2=0 \end{cases}$.

a) Да се намерят координатни параметрични уравнения на правата g, която е успоредна на правата a и минава през точката *M*;
b) Да се намери разстоянието от точката *M* до правата a;
c) Да се намерят координатите на точката *M'*, ортогонално симетрична на точката *M* относно правата a.

8 зад. Дадени са точките $A(0,2,3)$ и $B(1,4,1)$, и равнината $\beta: x+2y-z+1=0$. Светлинен лъч минава през точката *A*, отразява се от равнината β и отразеният лъч минава през точката *B*. Да се намерят уравнения на правите, съдържащи падащия и отразения лъчи.

9 зад. Дадени са равнината $\alpha: x - 2y + 5z - 2 = 0$ и правата $b\begin{cases} x = 2 - 3s \\ y = 0 + 1s \\ z = 6 - 5s \end{cases}, s \in \mathbb{R}$. Да се намерят уравнения на правата b', ортогонално симетрична на b относно равнината α.

10 зад. Дадени са правите: $a\begin{cases} x = 3 - 0s \\ y = 2 + 1s \\ z = 4 + 1s \end{cases}, s \in \mathbb{R}$, $b\begin{cases} x = 0 + 2p \\ y = 2 + 3p \\ z = -3 + 0p \end{cases}, p \in \mathbb{R}$.

a) Да се докаже, че правите a и b са кръстосани;
b) Да се намерят уравнения на оста на кръстосаните прави a и b;
c) Ако точките *A* и *B* са краищата на оста-отсечка на кръстосаните прави a и b, а т. $O(0,0,0)$ е началото на координатната система, да се намери лицето на триъгълник *OAB*.

11 зад. Дадени са кръстосаните прави: $a\begin{cases} x = 1 + 1s \\ y = 0 + 1s \\ z = 0 \end{cases}, s \in \mathbb{R}$, $b\begin{cases} x = 0 - 1p \\ y = 1 - 1p \\ z = 2 + 2p \end{cases}, p \in \mathbb{R}$ и равнината $\beta: x + y - 1 = 0$. Нека точките $A \in a$ и $B \in b$ са краищата на оста-отсечка на правите a и b, а точките *C* и *D* са прободните точки съответно на правите a и b с равнината β. Да се намери обемът на тетраедъра *ABCD*.

12 зад. Дадени са точките $A(0,0,-1)$ и $B(-2,-8,-3)$, равнината $\beta: 3x + 4y - z + 1 = 0$ и правата $b\begin{cases} x = 3 + 3s \\ y = -8 + 1s \\ z = 1 - 1s \end{cases}, s \in \mathbb{R}$. Да се намерят:

a) Уравнение на равнината γ, която минава през точките A и B, и е перпендикулярна на равнината β;
b) Координатни параметрични уравнения на пресечницата g на равнините β и γ;
c) Разстоянието от точката B до правата g.

VI ЧАСТ: Криви от втора степен

1 зад. Спрямо ОКС *K = Oxy* в равнината са дадени следните криви от II степен с техни метрични канонични уравнения:

$$\varepsilon_1: \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1,\ \varepsilon_2: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1,\ \chi_1: \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1,\ \chi_2: \frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{16} = 1,$$

$$\pi_1: y^2 = 8x, \quad \pi_2: x^2 = 12y.$$

a) Да се намерят координатите на върховете и уравненията на върховите допирателни на всяка от кривите;
b) Да се намерят координатите на фокусите и уравненията на директрисите на всяка от кривите.

2 зад. Спрямо ОКС *K = Oxy* в равнината да се намери:

a) Уравнение на допирателната t_0 към кривата $\varepsilon\colon \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{4} = 1$ в нейната точка $M_0(1, \sqrt{2})$;

b) Уравнение на допирателната t_0 към кривата $\chi\colon \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{3} = 1$ в нейната точка $M_0(2\sqrt{3}, 1)$;

c) Уравнение на допирателната t_0 към кривата $\pi_1\colon y^2 = 8x$ в нейната точка $M_0(2, 4)$.

ВСИЧКИ ЗАДАЧИ ДО 10-та СА В РАЗШИРЕНА ЕВКЛИДОВА РАВНИНА,

В ХОМОГЕННИ КООРДИНАТИ.

3 зад. Дадени са точките $A(1, 2, 1)$и $B(2, -1, 2)$. Да се намери уравнение на правата *AB*. Да се намерят координатите на безкрайната точка на правата *AB*.

4 зад. Да се определи типът на кривите от втора степен според броя на особените и безкрайните им точки:

a) $x^2 - 2xy + 2y^2 - 4xt - 6yt + 3t^2 = 0$;
b) $x^2 - 2xy - 2y^2 - 4xt - 6yt + 3t^2 = 0$;
c) $x^2 - 2xy + y^2 - 4xt - 6yt + 3t^2 = 0$.

5 зад. При кои стойности на параметъра λ кривата *k*: $x^2 + 2\lambda xy - y^2 + 5xt - 9t^2 = 0$ минава през безкрайната точка на правата $a\colon 2x - y + 7t = 0$.

6 зад. правата $a\colon 2x - y - 2t = 0$. Да се намерят уравнения на допирателните към кривата *k* в пресечните и точки с дадената права.

7 зад. Дадени са кривата от втора степен $k\colon 4x^2 - 2xy - 3y^2 - 12xt + 10yt + 8t^2 = 0$ и точката $M(5, 2, 1)$ – външна за кривата. Да се намерят уравнения на двете допирателни към кривата, които минават през дадената точка *M*.

8 зад. Да се намерят координатите на центровете на следните криви от втора степен:

a) $2x^2 - 4xy - 3y^2 + 2xt + 6yt - 5t^2 = 0$;
b) $x^2 - 2xy + y^2 - 2xt + 4yt + 7t^2 = 0$.

9 зад. Да се намерят уравнения на асимптотите на кривата

$$k\colon 10x^2 + 21xy + 9y^2 - 41xt - 39yt + 4t^2 = 0.$$

10 зад. Спрямо ОКС *K = Oxy* в равнината са дадени кривите от втора степен с уравнения:

a) $6xy + 8y^2 - 12x - 26y + 11 = 0$;
b) $9x^2 + 18xy + 9y^2 - 42x - 30y + 9 = 0$.

Да се намери метрично канонично уравнение на всяка от кривите, както и последователните координатни трансформации, водещи до него.