

14.04.2014г

ТВМС - 1к

Математическо отчитване

1. Мат. отчитване на проста сл. вел.

$$Z = \sum_{k=1}^n x_k I_{A_k}$$

$$\Sigma Z = \sum_{k=1}^n x_k P(A_k)$$

$A_1, A_2, \dots, A_n$

ПГЧС

(пълна група от
несъвм. съб.)

св-ва на E_Z :

1) Ако c е число: $E(cZ) = cE_Z$.

2) Ако $Z = c = \text{const}$: $E_Z = c$.

$$Z = c \cdot 1_\Omega$$

3) Ако Z, Y са сл. вел., то $E(Z+Y) = E_Z + E_Y$.

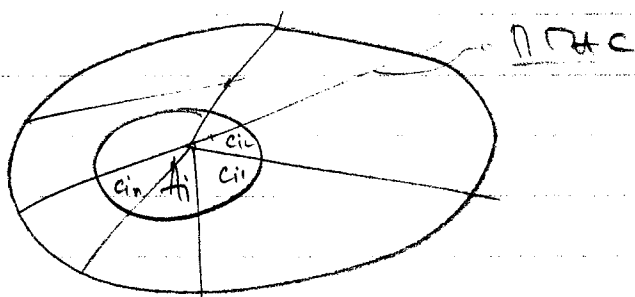
$$\text{Ако } Y = \sum_{k=1}^n y_k \cdot 1_{B_k}$$

ако $m=n$ и $B_i = A_i$ - оезвцтво $i=1, \dots, n$.

$$C_{ij} = A_i \cap B_j$$

↳ група от несъвместими събития.

$$Z = \sum_{i=1}^n x_i \sum_{j=1}^m 1_{C_{ij}}$$



$$Y = \sum_{j=1}^m y_j \sum_{i=1}^n c_{ij}$$

4) Ако $z \geq \eta$, то $Ez \geq E\eta$.

5) $E|z| \geq |Ez|$

следва от 4) и $-|z| \leq z \leq |z|$

2. Матем. отакване на неотрицателни
случайни вел. ($z \geq 0$)

$$z_n = \sum_{k=1}^{n \cdot 2^n} \frac{k-1}{2^n} \cdot \mathbb{1}_{\left\{\frac{k-1}{2^n} \leq z < \frac{k}{2^n}\right\}} + n \cdot \mathbb{1}_{\{z \geq n\}}$$

$$Ez_n = \sum_{k=1}^{n \cdot 2^n} \frac{k-1}{2^n} \cdot \mathbb{P}\left(\frac{k-1}{2^n} \leq z < \frac{k}{2^n}\right) + \mathbb{P}(z \geq n)$$

$$\begin{aligned} z_n &\leq z_{n+1} \\ z_n(\omega) &\uparrow z(\omega) \\ &\forall \omega \end{aligned}$$

$$\Rightarrow Ez_n \leq Ez_{n+1}$$

= има редица.

$$Ez := \lim_{n \rightarrow \infty} Ez_n$$

остава в сила 5-та
свойства;

3. Матм. отакване на произволна ч. вел.

$$z = z^+ - z^-, \quad z^+, z^- \geq 0$$

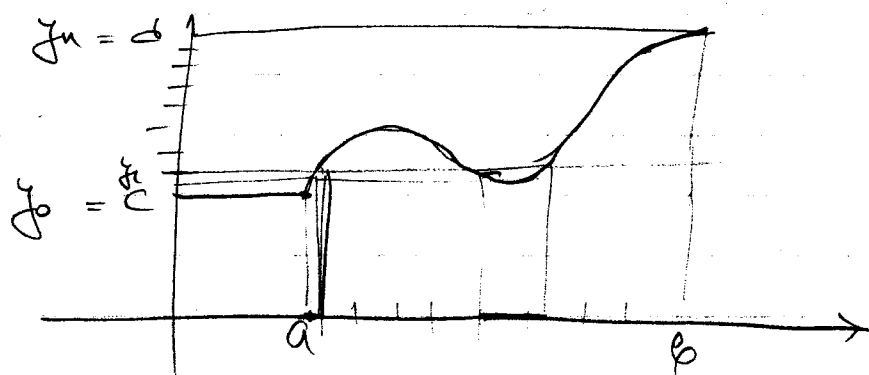
$$Ez = Ez^+ - Ez^-$$

$$\text{Ако } Ez^+ \text{ и } Ez^- = \infty$$

4 възможности: крайно, $+\infty$, $-\infty$, $\#$.

в сила са 5-та свойства;

4. Интеграл на Лебег



Риманова и
 ит. сума: $\sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i \quad \xi_i \in (x_i, x_{i+1})$

Лебегова
 ит. сума: $\sum \xi_i \cdot |\{x: f(x) \in \Delta_i\}|, \xi_i \in \Delta_i$

! Вероятността е аналог на дължината в анализ. !

5. Математ. очакване на абс. непр. с. вел.

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(x) dx$$

-∞ Вероятността на събитие

$$E_z = \int_0^{\infty} x f(x) dx, \quad z \geq 0$$

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(x) dx =$$

$$E_{z_n} = \sum_{k=1}^{n \cdot 2^n} \frac{k-1}{2^n} \left(F\left(\frac{k}{2^n}\right) - F\left(\frac{k-1}{2^n}\right) \right) + n \cdot (1 - F(n)) = f(z_{n,k}) (b-a)$$

$$= \sum_{k=1}^{n \cdot 2^n} \frac{k-1}{2^n} f(z_{n,k}) \cdot 2^{-n} + n (1 - F(n)) = \quad (*)$$

$\frac{1}{2^n} \{z_{n,k} \leq \frac{k}{2^n}\}$

$$= \sum_{k=1}^{n \cdot 2^n} z_{n,k} f(z_{n,k}) \cdot 2^{-n} + \sum \left(\frac{k-1}{2^n} z_{n,k} \right) f(z_{n,k}) 2^{-n}$$

Риманова ит. сума - 3 -

$$\int_0^1 dx = 1, \quad \int_0^1 (dx)^2 = 0$$

$$O\left(\frac{1}{n}\right)^2 \cdot n = \frac{1}{n} \rightarrow 0$$

$$A_{n,n} = \sum_{k=1}^{n \cdot 2^n} \xi_{n,k} f(\xi_{n,k}) \cdot 2^{-n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_0^1 x f(x) dx$$

Диагонална теорема на Г. Кантор:

Ако $A_{n,n}$ е редица, която:

1) за $\forall n, A_{n,n} \rightarrow a_n, n \rightarrow \infty$.

2) $a_n \rightarrow a, n \rightarrow \infty$.

Тогав дигоналната редица $A_{n,n} \rightarrow a$.

(От това следва, че $\int_0^{\infty} x f(x) dx$...)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n(1 - F(n)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - F(n)}{\frac{1}{n}} =$$

Лопитал

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 f(n)$$

Ако $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 f(n) = \varepsilon > 0$.

$$\Rightarrow f(x) \sim \frac{\varepsilon}{x^2}$$

$$\int_0^{\infty} x f(x) dx = \infty$$

Тогав този член може да се пренебрегне в (#)
и доказателствена формулата е вярна.