Упражнение 2

Линейно независими и пораждащи системи вектори. Бази и координатни системи

Задача 1. Установете за всяка от следните системи вектори дали е линейно зависима или линейно независима:

а) $a_1(1,2,1)$, $a_2(-1,3,1)$, $a_3(-1,13,5)$;

б) $b_1(1,1,-1)$, $b_2(0,2,1)$, $b_3(0,0,5)$;

в) $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$;

г) $f_1(x) = 1 + x + x^2$, $f_2(x) = 1 - x$, $f_3(x) = 2 + x^2$;

д) $g_1(x) = 3 + 2x + 2x^2$, $g_2(x) = 1 - x + x^2$, $g_3(x) = 3 + x + x^2$;

е) $\overrightarrow{BB_1}$, $\overrightarrow{CC_1}$, $\overrightarrow{DD_1}$, ако $ABCD$ и $AB_1C_1D_1$ са успоредници в пространството.

Задача 2. Докажете, че матриците

а) $e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $e_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;

б) $f_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $f_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $f_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $f_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

образуват база на векторното пространство $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$. Намерете координатите на матрицата $a = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$ спрямо двете бази.

Задача 3. Докажете, че полиномите $p_0(x) = 1 - x$, $p_1(x) = x + x^2$, $p_2(x) = 1 - x^2$ образуват база на векторното пространство $\mathbb{R}_2[x]$ и намерете координатите на полинома $f(x) = 3 + 3x - 2x^2$ спрямо тази база.

Задача 4. Намерете размерността на следните векторни пространства, като посочите една тяхна база (например естествената база):

а) $N = \{\lambda + (2\lambda - 3\mu) + \mu x^2 \in \mathbb{R}_2[x] \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$

б) $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - z = 0, 2x - y = 0\}$;

в) $H = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 2b & -a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$.

Задача 5. Нека $MNPQ$ е тетраедър, а точките A, B, C, D и E са определени от равенствата

$$\overrightarrow{MA} = 2\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{MP} + \overrightarrow{MQ}, \qquad \overrightarrow{MB} = 4\overrightarrow{MP} - 2\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{MQ},$$
$$\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MP}, \qquad \overrightarrow{MD} = 2\overrightarrow{MN} + 2\overrightarrow{MP}, \qquad \overrightarrow{ME} = \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{MQ}.$$

Докажете, че правата AB пресича равнината CDE и намерете координатите на пресечната точка H относно координатната система $M_{\overrightarrow{MN}\overrightarrow{MP}\overrightarrow{MQ}}$.

Решете следните задачи, като въведете подходяща координатна система:

Задача 6. В успоредника $ABCD$ точките M и N са среди съответно на BC и CD. Точката P е такава, че четириъгълникът $AMPN$ е успоредник. Докажете, че точките A, C и P са колинеарни.

Задача 7. Точките M и N лежат съответно върху страните AB и BC на $\triangle\, ABC$, като $AM : MB = BN : NC = 2 : 1$. Точките E и F са среди съответно на AB и BC. Докажете, че точките E, F и средата на MN са колинеарни.