Упражнение 1

Свободни вектори и линейни действия с тях. Векторно пространство

Задача 1. Нека точката M лежи на отсечката AB, като $AM : MB = m : n$. Докажете, че за произволна точка O е изпълнено
$$\overrightarrow{OM} = \frac{n\overrightarrow{OA} + m\overrightarrow{OB}}{m+n}.$$
Разгледайте случая, когато M е среда на AB.

Задача 2. Нека ABC е произволен триъгълник. Докажете, че G е медицентър на $\triangle\ ABC$, точно когато
$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right),$$
където O е произволна точка.

Задача 3. В успоредника $ABCD$ точките M и N са среди съответно на BC и CD. Точката P е такава, че четириъгълникът $AMPN$ е успоредник. Докажете, че точките A, C и P са колинеарни.

Задача 4. Точките M и N лежат съответно върху страните AB и BC на $\triangle\ ABC$, като $AM : MB = BN : NC = 2 : 1$. Точките E и F са среди съответно на AB и BC. Докажете, че точките E, F и средата на MN са колинеарни.

Задача 5. В $\triangle\ ABC$ точка O е център на описаната окръжност, а точката H - ортоцентър. Докажете, че
$$\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}.$$
Докажете, че O, H и медицентърът G на $\triangle\ ABC$ лежат на една права (*права на Ойлер*) и намерете отношението $OG : GH$.

Задача 6. Установете кое от следните множества е векторно пространство:
а) множеството M на полиномите на x с реални коефициенти от степен n относно събирането на полиноми и умножението на полином с число в $\mathbb{R}_n[x]$;
б) множеството $N = \{(\lambda - 2\mu)x + \mu x^2 + x^3 \in \mathbb{R}_3[x] \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$ относно събирането на полиноми и умножението на полином с число в $\mathbb{R}_n[x]$;
в) множеството $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - z = 0, x - y = 0\}$ относно обичайните линейни действия, дефинирани в $\mathbb{R}^n$;
г) множеството на матрици от вида $\begin{pmatrix} a & 2b \\ b & c \end{pmatrix}$, $a, b, c \in \mathbb{R}$, относно събирането на матрици и умножението на матрица с число в $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$;
д) множеството на матрици от вида $\begin{pmatrix} a & b \\ 1 & c \end{pmatrix}$, $a, b, c \in \mathbb{R}$, относно събирането на матрици и умножението на матрица с число в $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

Задача 7. Установете дали някое от следните подмножества на $\mathbb{R}_3[x]$ е и векторно подпространство на $\mathbb{R}_3[x]$:
а) $F = \{f(x) \in \mathbb{R}_3[x] \mid f(2) = 1\}$;
б) $G = \{f(x) \in \mathbb{R}_3[x] \mid f(2) = 0\}$;
в) $H = \{xg(x) \mid g(x) \in \mathbb{R}_2[x]\}$.